פתרון תרגיל 1 –

<u>שאלה 3</u>

נתון -

$$err(h^*, D) = 0$$

$$\forall x, x' \in X, |\eta(x) - \eta(x')| \le c \cdot ||x - x'||$$

א. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ כך ש- $y_1 \neq y_2$. בלי הגבלת הכלליות נגדיר כי $y_1 = 1, y_2 = 0$.
אנחנו יודעים כי $err(h^*, D) = 0$ ולכן לכל $x \in X$ קיים בדיוק y אחד – כלומר התיוג הוא דטרמיניסטי. מכאן נקבל כי $\eta(x_1) = 1, \eta(x_2) = 0$.
אנחנו יודעים כי $\forall x, x' \in X, |\eta(x) - \eta(x')| \le c \cdot ||x - x'||$
ולכן זה בפרט נכון גם עבור x_1, x_2
← $|\eta(x_1) - \eta(x_2)| \le c \cdot \left||x_1 - x_2|\right| \to |1 - 0| \le c \cdot \left||x_1 - x_2|\right| \to \frac{1}{c} \le ||x_1 - x_2||$

ב. נניח בשלילה כי $err(f_S^{nn}, D) \neq 0$.
כלומר קיים $x \in X$ ו-y הינו התיוג היחידי שלו מכך שהתיוג הוא דטרמיניסטי (מסעיף א) כך ש- $f_S^{nn}(x) \neq y$.
נסמן ב-$S \ni (x', y')$ את הדוגמא הכי קרובה ל-x אשר לפיה נקבע $f_S^{nn}(x)$. כלומר $y \neq y'$
לפי סעיף א נקבל כי $\frac{1}{c} \le ||x - x'||$.
לפי ההנחה כי כל $x \in X$ נמצא בלפחות כדור אחד מתוך $\mathcal{B}$ קיים $B \in \mathcal{B}$ כך ש$x \in B$
אבל לפי ההנחה כי עבור כל $B \in \mathcal{B}$ קיימת נקודה $(x, y) \in S$ כך ש- $x \in B$
מתקיים כי קיימת $(x'', y'') \in S$ כך ש- $x'' \in B$
הרדיוס של הכדורים הינו $\frac{1}{3c}$ ולכן $\left||x - x''|\right| \le \frac{2}{3c}$
מחיבור התוצאות נקבל $\left||x - x''|\right| \le \frac{2}{3c} < \frac{1}{c} \le \left||x - x'|\right|$
← הגענו לסתירה כי 'x אינה הנקודה הכי קרובה ל-x ולכן לא לפיה נקבע $f_S^{nn}(x)$

<u>שאלה 4</u>

א.

$$X = [0,42] \times [0,5]$$
$$Y = \{black, white\}$$

ב.

$$h_{bayes}((8,4)) = black$$
$$h_{bayes}((15,1)) = black$$
$$h_{bayes}((15,2)) = white$$

ג.

$$err\left(h_{bayes}, D\right) = \mathbb{P}_{(X,Y)\sim D}\left[h_{bayes}(X) \neq Y\right] =$$
$$\mathbb{P}(X = (8,4), Y = white) + \mathbb{P}(X = (15,1), Y = white) = 0.06 + 0.07 = 0.13 \to 13\%$$

ד. המחלקה $\mathcal{H}$ מכילה את הפונקציות שמחזירות אותו הערך עבור כל הדוגמאות. יש לנו רק שתי תוויות- שחור ולבן ולכן קיימות רק שתי פונקציות במחלקה הנ"ל.

$$err(h_{black}, D) = \mathbb{P}_{(X,Y)\sim D}[h_{black}(X) \neq Y]$$
$$= \mathbb{P}[X = (8,4), Y = white] + \mathbb{P}[X = (15,1), Y = white] + \mathbb{P}[X = (15,2), Y = white]$$
$$= 0.06 + 0.07 + 0.20 = 0.33 \to 33\%$$

$$err(h_{white}, D) = \mathbb{P}_{(X,Y)\sim D}[h_{white}(X) \neq Y]$$
$$= \mathbb{P}[X = (8,4), Y = black] + \mathbb{P}[X = (15,1), Y = black] = 0.42 + 0.21 = 0.63 \to 63\%$$

$$approximation\ error - \inf_{h\in\mathcal{H}} err(h,D) = 33\%$$

ה. מכיוון שהמדגם שלנו נדגם רנדומלית מהמדגם וכן התוויות הן דטרמיניסטיות בהתפלגות "D
ניתן להשתמש בנוסחה הבאה -

$$k = |Y| = 2 \rightarrow \mathbb{E}_{S\sim D^m}\left[err\left(\hat{h}_s, D\right)\right] = \frac{2-1}{2}\sum_{x\in X} p_x(1-p_x)^m =$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(X=(8,4)\right)\left(1-\mathbb{P}\left(X=(8,4)\right)\right)^m + \mathbb{P}\left(X=(8,5)\right)\left(1-\mathbb{P}\left(X=(8,5)\right)\right)^m\right.$$

$$\left.+\mathbb{P}\left(X=(9,2)\right)\left(1-\mathbb{P}\left(X=(9,2)\right)\right)^m\right) + \mathbb{P}\left(X=(11,6)\right)\left(1-\mathbb{P}\left(X=(11,6)\right)\right)^m)$$

$$= \frac{1}{2}(0.08\cdot 0.92^m + 0.15\cdot 0.85^m + 0.47\cdot 0.53^m + 0.24\cdot 0.76^m)$$

$$m = 3 \rightarrow \mathbb{E}_{S\sim D^3}\left[err\left(\hat{h}_s, D\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(0.08\cdot 0.92^3 + 0.15\cdot 0.85^3 + 0.47\cdot 0.53^3 + 0.24\cdot 0.76^3) = 0.0808$$

לא היה ניתן להשתמש בנוסחה בהתפלגות D שכן התוויות לא היו דטרמיניסטיות.

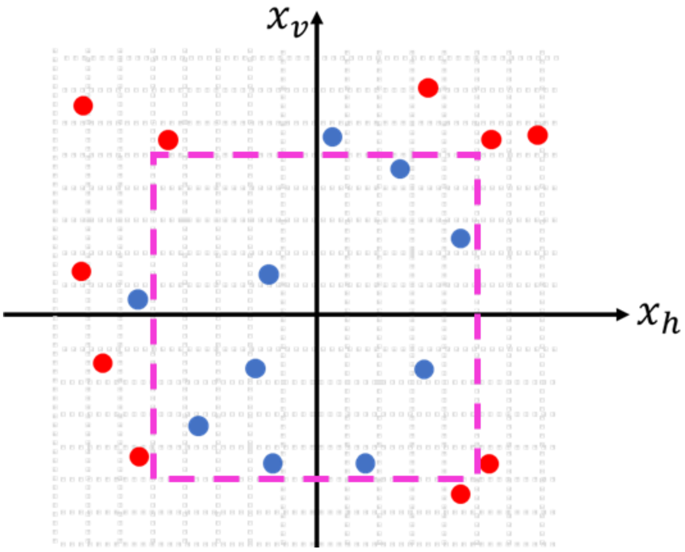
<u>שאלה 5 –</u>

א.

The hypothesis class of rectangular thresholding function can achieve a minimal empirical error of

$$\widehat{\mathrm{emp}}(h,S) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

due to having two wrong predicted labels; for example, consider the rectangular thresholding function $f^{\mathrm{rec}}_{\tau_h,\tau_v}$ with $\tau_h = \tau_v = 5$, which is illustrated by the purple dashed rectangle in the following figure:



ב.

Let us consider the function

$$g(x_h, x_v) = \sqrt{x_h^2 + x_v^2}$$

which computes the ℓ_2-norm of the vector $x = [x_h, x_v]^T$.

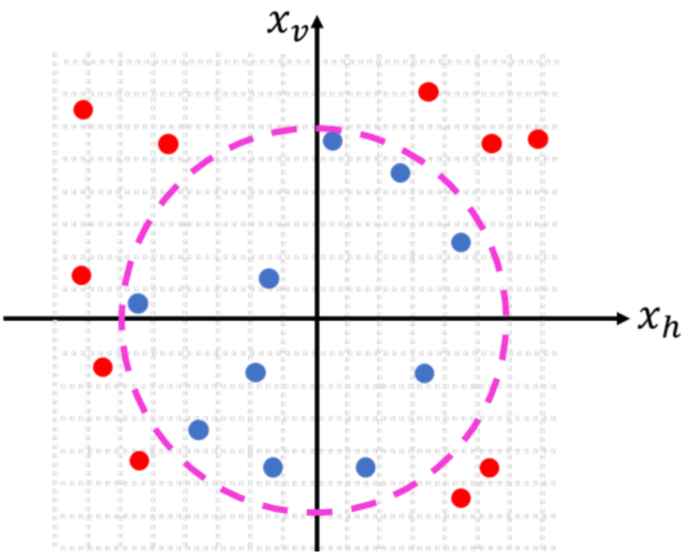
Then, the corresponding thresholding function is

$$f_{g,\tau}(x) = f_\tau^{\text{abs}}\big(g(x_h, x_v)\big) = \mathbb{I}\left[\left[\sqrt{x_h^2 + x_v^2} \le \tau\right]\right]$$

which is a circular thresholding function of radius τ in the two-dimensional input space of x. Accordingly, the hypothesis class is

$$\mathcal{H}_g = \left\{\mathbb{I}\left[\left[\sqrt{x_h^2 + x_v^2} \le \tau\right]\right] \quad \middle| \quad \tau \in \mathbb{R}\right\}$$

Then, zero empirical error on the sample from the figure in the question is achievable by the radius threshold $\tau = 6$, as illustrated by the purple dashed-line circle in the following figure:



The feature $g(x_h, x_v) = \sqrt{x_h^2 + x_v^2}$ measures the (Euclidean) distance of a given apple from the tree trunk at $[0,0]^T$. Therefore, it is reasonable to assume that such distance-based thresholding would generalize better to new apples than the rectangular thresholding that does not have the geometrical meaning of the usual distance.