

תראייל 2 - יותם גרדוש - 208541334

שאלות הקדמה

1. נניח פרספטורו לינארי N -ממדי, שמנסה למדוד פונקציה לא לינארית. מה ניתן לומר על שנייהת האימון ϵ_{tr} ועל שנייהת ההכללה ϵ_g של הפרספטורו, לאחר שלמד בעזרת $N < P$ דוגמאות אימון?

- (א) $\varepsilon_{tr} = 0$ ו- $\varepsilon_g = 0$, ללא תלות בקטור המשקولات המסוים שנבחר
 (ב) $0 < \varepsilon_{tr} < 0$, כאשר ערך המדוייק תלוי בקטור המשקولات המסוים שנבחר
 (ג) $0 < \varepsilon_g < 0$, כשהערך המדוייק של שגיאת ההכללה תלוי בקטור המשקولات המסוים שנבחר
 (ד) $0 > \varepsilon_{tr} > 0$, כשהערך המדוייק של שגיאת האימון לא תלוי בקטור המשקولات המסוים שנבחר

- ១៨២ -

ה-0. פליטה מ-ה-טלה ו-ה-טלה מפליטה. נספחים.

2. מה נכון לומר על המשוואה $\bar{u} = C\bar{w}$? תיתכו יותר מתשובה אחת נכון

- (א) הפיתוח המתמטי שהוביל אליה הוא גזירה של שגיאת ההכללה והשווהה ל- \bar{u}

(ב) מדובר ב- P משוואות, שמתאימות ל- P הכניסות של הוקטור \bar{u}

(ג) ניתן ממנה לעבור למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$ רק אם $N < P$

(ד) ניתן ממנה לעבור למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$ רק אם הדטרמיננטה של המטריצה C היא לא 0

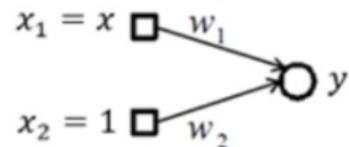
(ה) יש לה משמעות עבור הפרמטרון הליניארי רק אם ניתן לעבור ממנה למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$

• ۱۸۰۷

לעתה נוכיח ש $\bar{w} = C^{-1}\bar{u}$ מתקיים:

שאלה 1

לפרספטורו שני קלטים: נוירון שנותן את הקלט x ונוירון שנותן קלט קבוע y_0 , כמו בציור:



כך שמתקיים:

1. חשבו את התוחלת $E[x^n]$ עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי. (שאלה זו עדין לא מתייחסת לפרספטון, זהה שאלת על ההתפלגות של הקלט x).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

X is now?

: x^n \sqrt{x} $\ln x$ $\sin x$. 1

118

$$\Rightarrow E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \int_{-1}^1 x^n \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$n = \mathfrak{f}m \quad | \text{not} \quad - \underline{\text{125}} \quad n$$

$$E(X^{2m}) = \int_{-1}^1 x^{2m} dx = \left[\frac{x^{2m+1}}{2(2m+1)} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2(2m+1)} \right) - \left(\frac{-1}{2(2m+1)} \right) = \frac{2}{2(2m+1)} = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{m+1}$$

$$E(X^{j_m+1}) = \int_{-1}^1 \frac{x^{j_m+1}}{2} dx = \left[\frac{x^{j_m+2}}{2(j_m+2)} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2(j_m+2)} \right) - \left(\frac{1}{2(-j_m+2)} \right) = 0$$

. $\varepsilon_g = E \left[\frac{1}{2} (y - y_0)^2 \right]$ מצאו את וקטור המשקولات הממוצע את שגיאת ההכללה .2

$$E_g = E\left[\frac{1}{2}(y - y_0)^2\right] = \frac{1}{2} E\left[(w_1x + w_2 - x^2 + x^1)^2\right]$$

۱۰۷

የኢትዮ የኢትዮጵያ ነው እኩል ስራውን በንግድ

$$-\frac{1}{2} \mathbb{E}[(w_1x + w_3 - x^3 + x^2)^2] = \frac{1}{2} E\left[\frac{\partial}{w_1}(w_1x + w_3 - x^3 + x^2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[2(w_1 x + w_2 - x^3 + x^4) \cdot x \right] = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[w_1 x^2 + w_2 x - x^4 + x^3 \right]$$

$$w_1 E(x^2) - E(x^4) = \frac{w_1}{3} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{3}{5}$$

$\frac{1}{n+1} = \text{log}_n x$ కాన్సిన్టెన్ట్ (1) లోను

: w₂ 3P

$$\frac{\partial \mathcal{E}_g}{\partial w_2} = \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{1}{2} E[(w_1 x + w_2 - x^3 + x^1)^2] = \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial}{\partial w_2} (w_1 x + w_2 - x^3 + x^1)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} E \left[\hat{x} (w_1 x + w_2 - x^3 + x^5) \cdot 1 \right] = \frac{1}{2} E \left(\overset{\circ}{w_1 x} + E(w_r) - E(x^3) + E(x^5) \right) = w_2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow w_2 + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow v_2 = -\frac{1}{z}$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

3. חשבו את שגיאת ההכללה עבור הוקטור שמצאתם בסעיף הקודם.

$$q = \frac{1}{2} E \left[(w_1 x + w_2 - x^3 + x^4)^2 \right] = \frac{1}{2} E \left[\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{5} - x^3 + x^4 \right)^2 \right]$$

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3} - x^3 + x^5\right)^2 = \left(\left(\frac{3x}{5}\right)^2 - \frac{3x}{5} - \frac{3x^4}{5} + \frac{3x^3}{5} - \frac{3x}{15} + \frac{1}{9} + \frac{x^3}{225} - \frac{x^2}{225} - \frac{3x^4}{225} + \frac{x^3}{225} + x^6 - x^5 + \frac{3x^3}{5} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^5}{5} + x^4\right)$$

רְבָבָה רַבָּבָה (רְבָבָה)

$$= \frac{q}{25} E(x^2) - \frac{3}{5} E(x^4) + \frac{1}{q} - \frac{1}{3} E(x^2) - \frac{3}{5} E(x^4) + E(x^6) - \frac{1}{3} E(x^2) + E(x^4)$$

$$= E(x^2) \left(\frac{q}{25} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + E(x^4) \left(-\frac{3}{5} - \frac{3}{5} + 1 \right) + E(x^6) + \frac{1}{q} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{25} \right) + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) + \frac{1}{7} + \frac{1}{q} = \frac{176}{1575} = 0.1117$$

שאלה 2

בשאלה זו עליכם למשוך נומרויות פרספטורון ליניארי שילמד את הפונקציה משאלה 1.

2. חשבו את מטריצת הקורלציה בין הקלטים - C , את וקטור הקורלציה בין הקלט לפולט - \hat{y} לפי ההגדרות שנלמדו בכתיבה ובתרגול (מהו המינדים של כל אחד מהם במקרה זה?), וחשבו את \hat{y} (השתמשו בפונקציות קיימות להיפוך מטריצה). מהן המשקלות שקיבלתם? האם הן דומות למשקלות שקיבלתם בשאלה 1 סעיף 2?

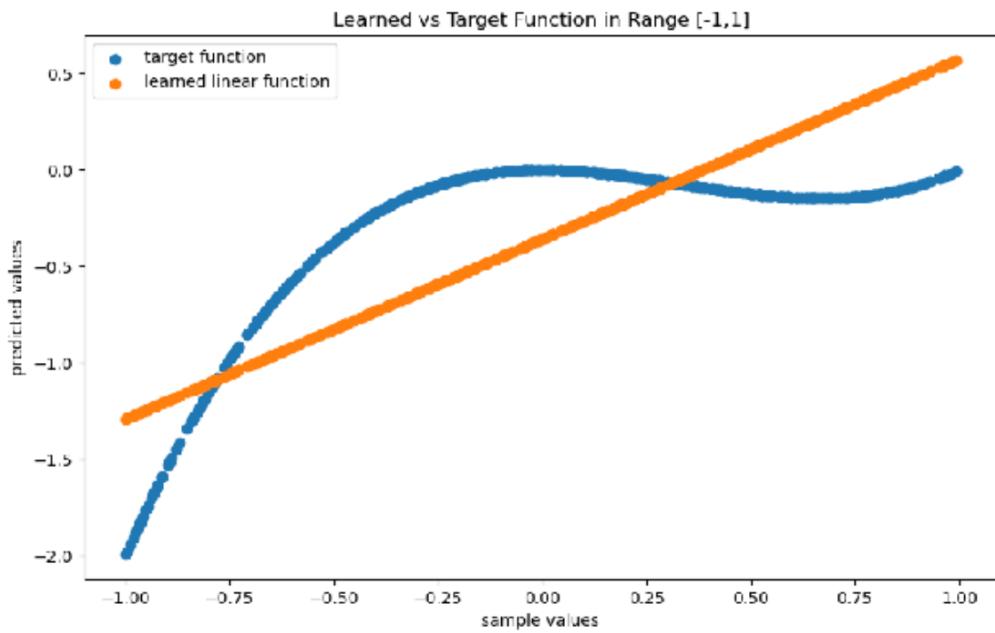
$$\begin{bmatrix} 0.349408, & 0.030887 \\ 0.030887, & 1 \end{bmatrix} \quad \text{המטריצה והווקטור אוחזין:}$$

$$\begin{bmatrix} 0.204469 \\ -0.334483 \end{bmatrix} \quad \text{הווקטור אוחזין:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.61516 \\ -0.33307 \end{bmatrix} \quad \text{הווקטור אוחזין:}$$

בנוסף לאלו יש לנו גם מטריצת קורלציה בין הקלטים.

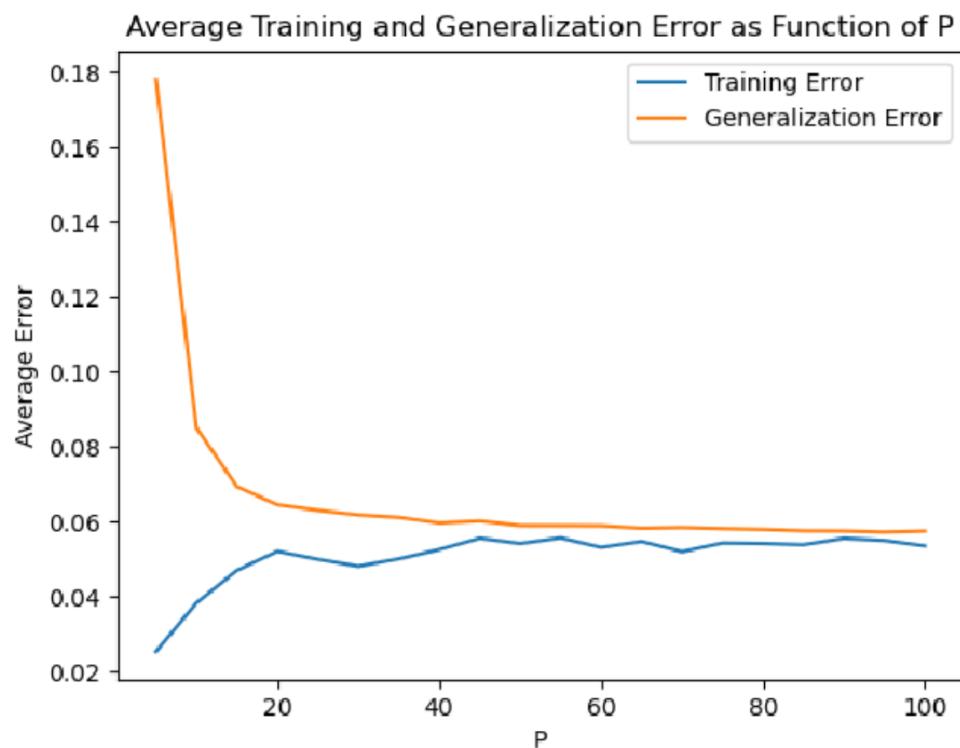
3. הציגו גרף שבו מופיעה הפונקציה הרצiosa $y_0 = x^3 - x^2$ לעומת הפלט של הפרספטרון $\bar{w}^T \bar{x}$, בתוך התוחום $[-1, 1]$.



4. חשבו את שגיאת האימון ואת שגיאת ההכללה (בчисוב שגיאת ההכללה בדקו את כל התוחום הנתון במרוחים של 0.001). האם הערכים של השינויות דומים אחד לשני? הסבירו.

0.1907 : נגזרת פולינומית
 0.0562 : גודל השינוי

5. הרכינו את הסימולציה עבור מספר דוגמאות P המשתנה בין 5 ל-100 בקפיצות של 5. עבור כל ערך של P , 100 חזנות של הסימולציה, בכל חזנה חשבו את שגיאת האימון ואת שגיאת ההכללה (באוטו האופן שהוגדר בסעיף 4, בכל פעם עם וקטור $\hat{\gamma}$ שהתקבל), ולבסוף חשבו את המומוצעים של השגיאות על פני 100 החזנות. הציגו גרף של ממוצע ערכי שגיאת האימון וממוצע ערכי שגיאת ההכללה כפונקציה של מספר הדוגמאות. הסבירו את התוצאות.



חישוביות וקוגניציה - תרגיל 2 - פרספטורן לינארי

להגשה עד: 25/01/2024 בשעה 21:00

שים לב: בתחילת התרגיל מופיינות כמה שאלות הקדמה אמריקאיות. יש להגיש את התשובות אליהם, עם משפט נימוק קצר לכל שאלה. לאחר מכן, שאלה 1 היא שאלה אנגלית ושאלות 2 היא שאלת תכנות.

שאלות הקדמה

1. נניח פרספטורן לינארי N -מיידי, שמנסה ללמידה פונקציית לא לינארית. מה ניתן לומר על שגיאת האימון ε_{tr} ועל שגיאת ההכללה ε_g של הפרספטורן, לאחר שלמד בעזרת $N < P$ דוגמאות אימון?

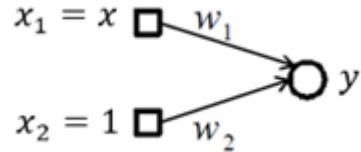
- (א) $0 \leq \varepsilon_g = \varepsilon_{tr} = 0$, ללא תלות בקטור המשקלות מסוימים שנבחר
- (ב) $0 < \varepsilon_g \leq \varepsilon_{tr} > 0$, כמשמעותה המדוקיק תלוי בקטור המשקלות מסוימים שנבחר
- (ג) $\varepsilon_g > 0 \geq \varepsilon_{tr} = 0$, כמשמעותה המדוקיק של שגיאת ההכללה תלוי בקטור המשקלות מסוימים שנבחר
- (ד) $0 < \varepsilon_g \leq \varepsilon_{tr} > 0$, כמשמעותה המדוקיק של שגיאת האימון לא תלוי בקטור המשקלות מסוימים שנבחר

2. מה נכון לומר על המשווהה $\bar{u} = C\bar{w}$? תיתכן יותר מפתרונה אחת נכונה

- (א) הפיתוח המתמטי שהוביל אליה הוא גזירה של שגיאת ההכללה והשוואה ל-0
- (ב) מדובר ב- P משוואות, שמתאימות ל- P הנקודות של הוקטור \bar{u}
- (ג) ניתן ממנה לעבור למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$ רק אם $P < N$
- (ד) ניתן ממנה לעבור למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$ רק אם הדטרמיננטה של המטריצה C היא לא 0
- (ה) יש לה משמעות עבור הפרספטורן הלינארי רק אם ניתן לעבור ממנה למשווהה $\bar{u} = C^{-1}\bar{w}$

שאלה 1

נתון פרספטורון לינארי עם סף, אשר מנסה ללמד את הפונקציה $y_0 = x^3 - x^2$, כאשר $[x, y_0] \in [-1, 1]$ (כלומר, x הוא משתנה מקרי חד-מימדי רציף, המתפלג בהסתפוגות אחידה בין -1 ל 1).
לפרספטורון שני קלטים: נוירון שנותן את הקלט x ונוירון שנותן קלט קבוע 1 , כמו בציור:



$$\text{כך שמתקובל: } y = w_1x + w_2$$

1. חשבו את התוחלת $\mathbb{E}[x^n]$ עבור n זוגי ועבור n אי-זוגני. (שאלה זו עדין לא מתייחסת לפרספטורון, זהה לשאלה על ההסתפוגות של הקלט x).

2. מצאו את וקטור המשקלות המוצע את שגיאת ההכללה $\varepsilon_g = E\left[\frac{1}{2}(y - y_0)^2\right]$

3. חשבו את שגיאת ההכללה עבור הווקטור שמצאים בסעיף הקודם.

שאלה 2

בשאלה זו עליכם למשגנום נומריות פרספטורון לינארי שילמד את הפונקציה משאלת 1.

1. צרו $P = 500$ דוגמאות x מההתפלגות הננתונה בשאלה 1 (אחדה בין -1 ל 1), וצרו מכל אחת מהן את הוקטור

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

(לפי הפונקציה $y_0 = x^3 - x^2$).

2. חשבו את מטריצת הקורלציה בין הקלטים C , את וקטור הקורלציה בין הקלט לפולט \bar{u} לפי ההגדרות שנלמדו בכתיבה ובתרגול (מהו המימדים של כל אחד מהם במקרה זה?), וחשבו את \bar{w} (השתמשו בפונקציות קיימות להיפוך מטריצה). מהן המשקלות שקיבלתם? האם הן דומות למשקלות שקיבלתם בשאלה 1 סעיף 2?

3. הציגו גרפ' שבו מופיעה הפונקציה הרצואה $y_0 = x^3 - x^2$ לעומת לפולט של הפרספטורון $y = \bar{w}^T \bar{x}$, בתוך התוחום $[-1, 1]$.

4. חשבו את שגיאת האימון ואת שגיאת ההכללה (בחישוב שגיאת ההכללה בדקו את כל התחומים הננתון במרוחקים של 0.001). האם הערכים של השגיאות דומים אחד לשני? הסבירו.

5. הריצו את הסימולציה עבור מספר דוגמאות P המשתנה בין 5 ל-100 בקפיצות של 5. עבור כל ערך של P , ערכו 100 חזירות של הסימולציה, בכל חזירה חשבו את שגיאת האימון ואת שגיאת ההכללה (באוטו האוף שהוגדר בסעיף 4, בכל פעם וקטור ה- \bar{w} שהתקבל), ולבסוף חשבו את הממוצעים של השגיאות על פני 100 החזרות. הציגו גרפ' של ממוצע ערכי שגיאת האימון וממוצע ערכי שגיאת ההכללה כפונקציה של מספר הדוגמאות. הסבירו את התוצאות.