תרגיל 7 - יותם גרדוש - 208541334

שאלות הקדמה

1. נניח שבניסוי אמפירי נמצא כי חיה מסוימת מעדיפה לקבל 20 גרגרים באופן בטוח על פני לקבל 40 גרגרים בהסתברות $\frac{2}{3}$ (ובהסתברות $\frac{1}{3}$ לא לקבל דבר). בהינתן שזה כל המידע שברשותנו, וללא ניסוי נוסף, מה ניתן להסיק על ההעדפות של החיה?
תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה

I () $\langle(20),(1)\rangle \succ \langle(50,0),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\rangle$

II () $\langle(10),(1)\rangle \succ \langle(40,0),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\rangle$

III () $\langle(20),(1)\rangle \succ \langle(40,0),(\frac{4}{5},\frac{1}{5})\rangle$

IV () $\langle(30),(1)\rangle \succ \langle(40,0),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\rangle$

נתון כי $\langle(20),(1)\rangle \succ \langle(40,0),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\rangle$ נסתכל על הסעיפים הבאים.

(I) אי אפשר להסיק - יתכן שעבור 50 גרגירים בסיכוי $\frac{2}{3}$ החיה תהיה מוכנה להסתכן.

(II) אי אפשר להסיק - יתכן שבגלל של רק 10 גרגירים תגרום לחיה להסתכן ולנסות לקבל 40 גרגירים בסיכוי $\frac{2}{3}$.

(III) אי אפשר להסיק - יתכן שעבור 40 גרגירים בסיכוי $\frac{4}{5}$ החיה תהיה מוכנה להסתכן.

(IV) ניתן להסיק - אם ידוע לנו שהחיה מעדיפה 20 גרגירים על $\frac{2}{3}$ סיכוי ל-40 גרגירים אז בוודאות שהיא תעדיף 30 גרגירים מכיוון שהרווח הוודאי עולה בעוד שרווח הסיכון נשאר זהה.

שאלה 1

בשאלה זו תבצעו ניסוי שבו תגלו את פונקציית ה־utility של אוגר וירטואלי.
בניסוי אתם מעמידים בפני האוגר 2 אפשרויות:

- safe - לקבל X_s גרם בוטנים בוודאות
- gamble - לקבל X_g גרם בוטנים בהסתברות 0.5, ולקבל 0 בוטנים ובהסתברות 0.5

בהתאם לנלמד בכיתה, רשמו משוואה כללית אשר מבטאת את העובדה שהאוגר אדיש בין האפשרות לקבל X_s בוודאות לבין האפשרות לקבל X_g בהסתברות חצי, כלומר שתוחלת ה־ utility בשתי האופציות העומדות בפני האוגר היא זהה.

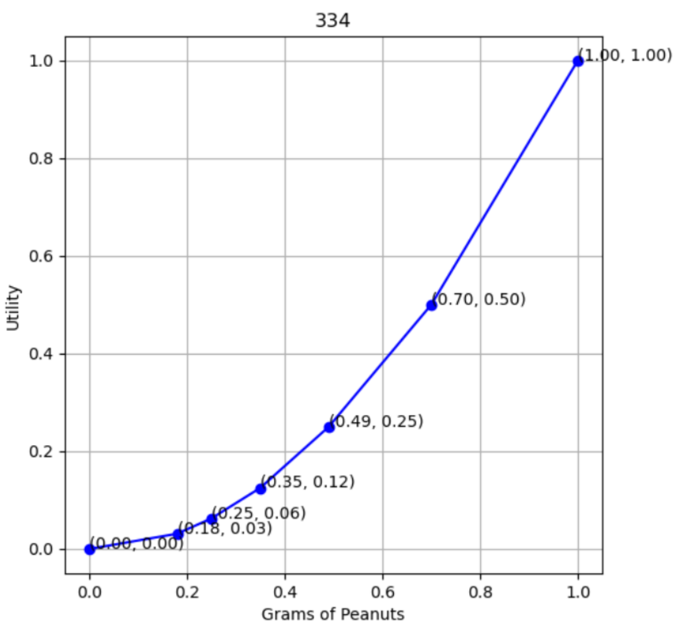
נסמן: $L_s = \langle (x_s),(1)\rangle$, $L_g = \langle (X_g,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle$

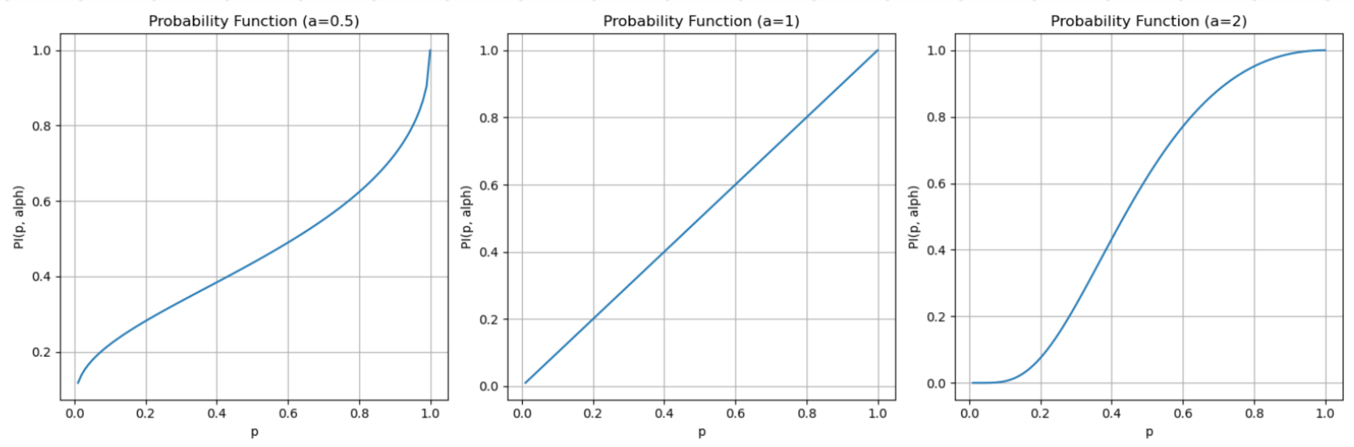
משוואה המבטאת את עדישות האוגר -

$u(0)=0$

$$u(x_s)=\frac{1}{2}u(X_g) \Leftarrow u(X_s) \approx \frac{1}{2}\cdot u(X_g)+\frac{1}{2}u(0) \Longleftrightarrow L_g \sim L_s$$

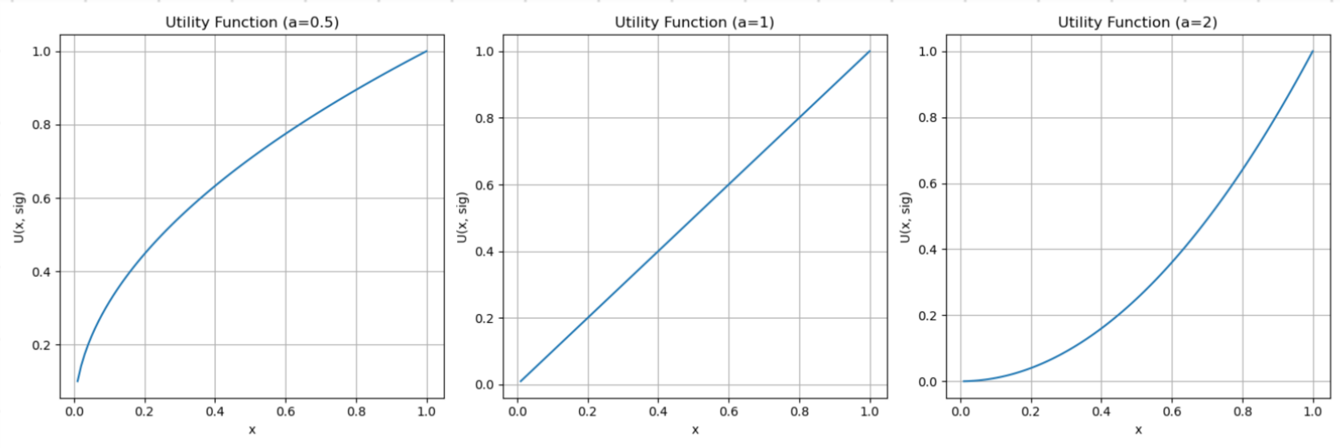
שאלה 2





-

- מי שהערך אלפה שלו שווה ל1 מעריך באופן שווה את הסתברויות גבוהות או נמוכות
עבור אלפה גדולה מ1 מקבל ההחלטה מבצע הערכת חסר להתסברות נמוכות והערכת יתר להתסברויות גוהות ועבור אלפה קטנה מ1 הערכת יתר להסתברויות נמוכות והערכת חסר להסתברויות גבוהות.



- עבור סיגמה שווה ל1 מקבל ההחלטה מעריך באופן שווה את ערך פונקציה התועלת שלו ביחד לערכה האמיתי עברור סיגמה גדול מ1 הוא מעריך בחוסר תועלת קטנה לכן נסיק כי אוהב סיכון ועבור סיגמה קטנה מ1 הוא מעריך ביתר ערך קטן לכן מעדיף שלא לקחת סיכון.

3. נניח כי ניתנת לנבדק אפשרות לבחור בין לקבל X_s שקלים בוודאות, או להמר ולקבל X_g שקלים בסיכוי p (ובסיכוי $1-p$ לא לקבל כלום).
הראו (אנליטית) כי בנקודת **אי ההעדפה** מתקיים:

$$\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)=\alpha\ln\left(-\ln\left(p\right)\right)-\ln\left(\sigma\right)$$

הגדרנו נק' א' העדפה $L_s \sim L_g$ עבור $L_g=\langle (X_g,0),(p,1-p)\rangle$, $L_s=\langle (X_s),(1)\rangle$

נראה כי מתקיים בנק' כזאת: $\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)=\alpha\ln(-\ln(p))-\ln(\sigma)$ תחילה לפי

הגדרה מתקיים: $\pi(1)\cdot u(X_s)=\pi(p)u(X_g)+\pi(1-p)u(0) \iff L_s\sim L_g$

בנוסף הגדרנו $u(X)=X^\sigma$, $\pi(p)=e^{-(-\ln(p))^\alpha}$ לכן:

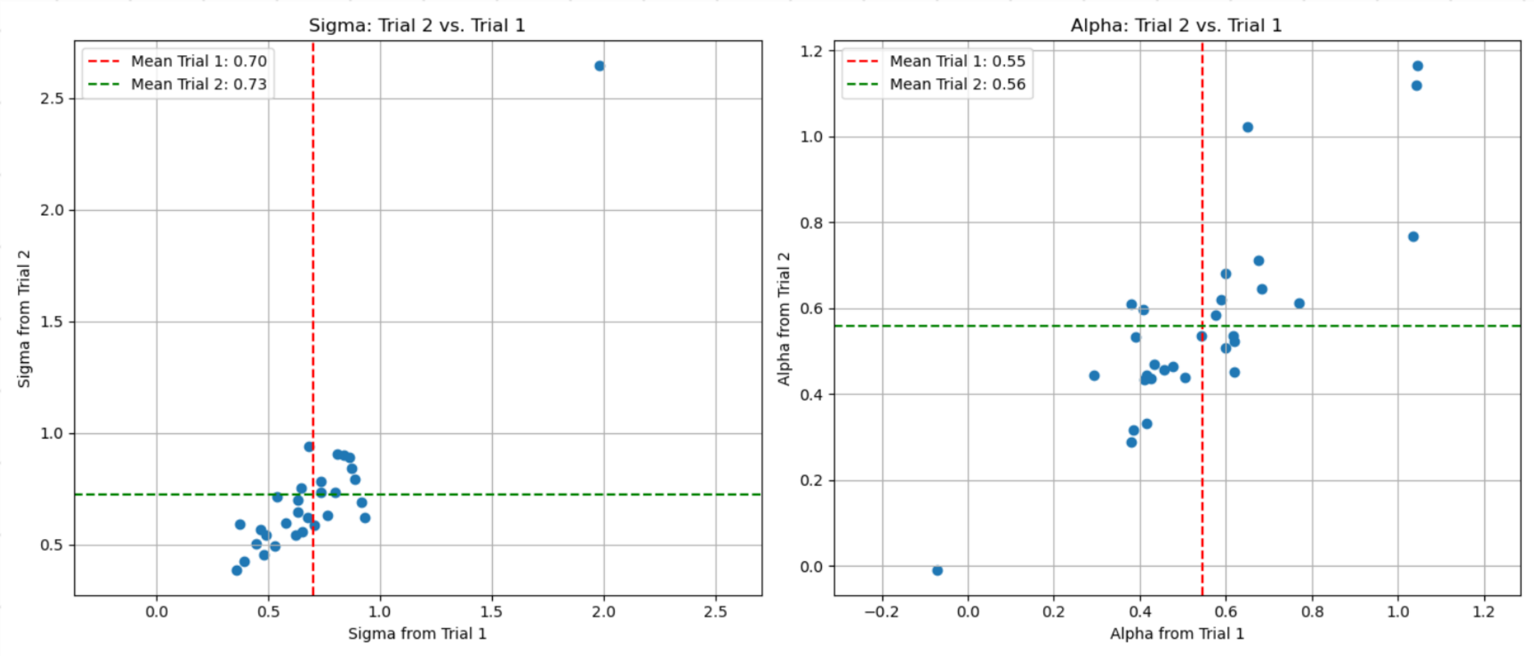
$$\Rightarrow \underbrace{e^{-(-\overbrace{\ln(1)}^{0})^\alpha}}_{1}\cdot X_s^\sigma = e^{-(-\ln(p))^\alpha}\cdot X_g^\sigma+\underbrace{e^{-(-\ln(1-p))^\alpha}\cdot 0^\alpha}_{0} \Rightarrow X_s^\sigma=e^{-(-\ln(p))^\alpha}\cdot X_g^\sigma \quad /\cdot\frac{1}{X_g^\sigma} \; (*)$$

$$\Rightarrow \frac{X_s^\sigma}{X_g^\sigma}=e^{-(-\ln(p))^\alpha} \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln\left(\left(\frac{X_s}{X_g}\right)^\sigma\right)=-\left(-\ln(p)^\alpha\right) \Rightarrow \sigma\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)=-\alpha(-\ln(p))$$

$$\overset{\cdot -1}{\Rightarrow} -\sigma\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)=\alpha(-\ln(p)) \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln\left(-\sigma\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)=\ln(\alpha(-\ln(p))$$

$$\Rightarrow \ln(\sigma)+\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)=\ln(\alpha(-\ln(p)) \overset{-\ln(\sigma)}{\Rightarrow} \ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)=\alpha\ln(-\ln(p))-\ln(\sigma) \quad \blacksquare$$

(*) ניתן להסיק כי X_g שונה מ-0 אחרת הינו מקבלים $\langle (X_s),(1)\rangle=\langle (0,0)(p,1-p)\rangle$
שבה שקול לכך ש $X_s^\sigma=0 \Rightarrow X_s=0$ במקרה זה הבחירה מתקיימת באופן ריק מכיוון שכל
האפשרויות הם עבור גמול שווה 0 ואין משמעות לנק' העדפה במקרה זה.



ניראה בשני הגרפים כי הנבדקים מעריכים באופן עקבי בין ניסוי לניסוי מכיוון שערכים בציר הX דומים לערכים בציר הY
נסיק מכך שממוצע הסיגמה בגרף השני קטן מ1, בסביבות ה0.75 וכי רוב הערכים פרט לממוצע כי הנבדקים נתו להעריך בחסר את הערך
הסוביקטיבי שלהם ביחס לערך האוביקטיבי בנוסף רוב ערכי האלפה וגם הממוצע קטנים מ1 לכן נסיק כי מעריכים ביותר ערכים נמוכים
סה"כ נסיק כי בממוצע הנבדקים אינם נוטים לקחת סיכון.

חישוביות וקוגניציה - תרגיל 7

להגשה עד: 14/02/2024

<u>שימו לב</u>: בתחילת התרגיל מופיעות כמה שאלות הקדמה אמריקאיות. יש להגיש את התשובות אליהן, עם משפט נימוק קצר לכל שאלה. לאחר מכן, שאלות 1 ו־2 הן שאלות תכנות, פרט לסעיף 3 בשאלה 2, שהוא אנליטי.

שאלות הקדמה

1. נניח שבניסוי אמפירי נמצא כי חיה מסוימת מעדיפה לקבל 20 גרגרים באופן בטוח על פני לקבל 40 גרגרים בהסתברות $\frac{2}{3}$ (ובהסתברות $\frac{1}{3}$ לא לקבל דבר). בהינתן שזה כל המידע שברשותנו, וללא ניסוי נוסף, מה ניתן להסיק על ההעדפות של החיה?
תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה

   () $\langle(20),(1)\rangle \succ \left\langle(50,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle$

   () $\langle(10),(1)\rangle \succ \left\langle(40,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle$

   () $\langle(20),(1)\rangle \succ \left\langle(40,0),\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)\right\rangle$

   () $\langle(30),(1)\rangle \succ \left\langle(40,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle$

שאלה 1

בשאלה זו תבצעו ניסוי שבו תגלו את פונקציית ה־utility של אוגר וירטואלי.

בניסוי אתם מעמידים בפני האוגר 2 אפשרויות:

- safe ־ לקבל X_s גרם בוטנים בוודאות
- gamble ־ לקבל X_g גרם בוטנים בהסתברות 0.5, ולקבל 0 בוטנים ובהסתברות 0.5

בהתאם לנלמד בכיתה, רשמו משוואה כללית אשר מבטאת את העובדה שהאוגר אדיש בין האפשרות לקבל X_s בוודאות לבין האפשרות לקבל X_g בהסתברות חצי, כלומר שתוחלת ה־ utility בשתי האופציות העומדות בפני האוגר היא זהה.

לתרגיל מצורפת פונקצייה (נעולה) שנקראת myHamster, שתקבע את התנהגות האוגר שלכם. הפונקציה קיימת בגרסת מטלאב ובגרסת פייתון.

למשתמשי פייתון, יש להוריד את הקובץ HamsterStudent. בתוך קובץ הקוד הראשי שלכם, רשמו import HamsterStudent, ואז תוכלו להשתמש בפונקצייה myHamster שנמצאת בתוכו.

הפונקציה מקבלת 3 משתנים:

- X_s - גרם בוטנים שהאוגר מקבל באופציה הבטוחה (לא בהכרח מספר שלם)
- X_g - גרם בוטנים שהאוגר יכול לקבל באופציית ההימור (לא בהכרח מספר שלם)
- id - 3 הספרות האחרונות בתעודת הזהות שלכם. משתנה זה ישפיע על צורת פונקציית ה־ utility של האוגר שלכם

בהתאם לערכים שתכניסו לפונקציה, האוגר יבחר את אחת מהאופציות, והפלט של הפונקציה (choice) יהיה 0 (האוגר מעדיף את האופציה הבטוחה) או 1 (האוגר מעדיף להמר). **ראו הערה על דטרמיניסטיות הבחירה בהמשך.**

ראינו בכיתה שעל מנת לחשב על פונקציית ה־ utility יש לקבוע (באופן שרירותי) את ערכה בשני ערכי קלט שונים. הניחו כי $u\left(1\,\text{grams of peanuts}\right)=1$ ו־ $u\left(0\,\text{grams of peanuts}\right)=0$.

את הניסוי על האוגר הוירטואלי תערכו ב־5 סבבים, באופן הבא:

1. בסבב הראשון קבעו את X_g להיות 1 ומצאו את X_s המתאים לנקודת אי ההעדפה בסבב זה (התחילו מ־X_s שווה ל־0, והוסיפו ל־X_s בכל פעם 0.01 גרם עד שהאוגר אדיש בין שתי האפשרויות). (נסמן את X_s המתאים לנקודת אי ההעדפה בסבב הראשון X_s^1). מהו $u\left(X_s^1\right)$?
2. כעת, בסבב השני, קבעו את X_g להיות X_s^1 (שאותו מצאתם בסבב הקודם). מצאו את X_s המתאים לנקודת אי־ההעדפה בסבב השני (נסמנו X_s^2). מהו $u\left(X_s^2\right)$?
3. המשיכו בצורה זו (לקבוע את X_g להיות X_s שנמצא בסבב הקודם) סה"כ חמישה סבבים, ומצאו את פונקציית ה־ utility של האוגר בחמש נקודות (בנוסף לשתי הנקודות שהגדרתם בהתחלה).
4. ציירו את פונקציית ה־ utility של האוגר שלכם. בכותרת הגרף רשמו את 3 הספרות של תעודת הזהות שהכנסתם לפונקציה. האם האוגר שלכם אוהב סיכונים?

<u>הערה לגבי דטרמיניסטיות בקבלת החלטות:</u>

בניסויים אמתיים (כמו בניסוי הציפורים של Caraco משנת 1980) ההחלטה של החיה אינה בהכרח דטרמיניסטית. כלומר, לא עבור כל זוג ערכים X_g ו־ X_s (עם ערך p מסויים) החיה תבחר את אותה הבחירה תמיד. לכן, כאשר אפשר, מבצעים חזרות רבות על אותה ההגרלה, ומסתכלים על אי ההעדפה בממוצע על פני החזרות השונות תחת אותם תנאים של הניסוי. בשאלה זו, לשם הפשטות, האוגר יהיה אוגר דטרמיניסטי, ולכן נגדיר את נקודת אי ההעדפה שלו (נקודת האדישות) כנקודה שבה הוא שינה את העדפתו מאופציה אחת לאחרת.

שאלה 2

ע`פ ה־ prospect theory של כהנמן וטברסקי, הערך הסובייקטיבי להימור בו ניתן להרוויח $X_g$ שקלים בסיכוי $p$ (ולא להרוויח דבר בסיכוי $1-p$) נתון ע`י $\pi(p)\,u(X_g)$.

נניח כי:

$$u(x) = x^{\sigma}$$
$$\pi(p) = e^{-(-\ln p)^{\alpha}}$$

כאשר σ, α פרמטרים חיוביים ($\sigma > 0$, $\alpha > 0$).

1. ציירו את הפונקציה $\pi(p)$ עבור 3 ערכי α שונים: $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ ו־ $\alpha > 1$. כיצד משפיע הפרמטר על צורת הפונקציה? מה נשאר קבוע גם עבור ערכי α שונים? כיצד הפרמטר ישפיע על הנטייה להמר?
2. ציירו את הפונקציה $u(x)$ עבור 3 ערכי σ שונים: $\sigma < 1$, $\sigma = 1$ ו $\sigma > 1$. כיצד משפיע הפרמטר על צורת הפונקציה? מה נשאר קבוע גם עבור ערכי σ שונים? כיצד הפרמטר ישפיע על הנטייה להמר?
3. נניח כי ניתנת לנבדק אפשרות לבחור בין לקבל X_s שקלים בוודאות, או להמר ולקבל X_g שקלים בסיכוי p (ובסיכוי $1-p$ לא לקבל כלום).
הראו (אנליטית) כי בנקודת **אי ההעדפה** מתקיים:

$$\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right) = \alpha\ln(-\ln(p)) - \ln(\sigma)$$

שיטת הצגה זו מסייעת לנו למצוא את ערכי α ו־σ לכל נבדק. ניתן לחשוב על המשוואה הזו בתור משוואה לינארית כאשר

$$\underbrace{\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)}_{y} = \alpha\underbrace{\ln(-\ln(p))}_{x} - \ln(\sigma)$$

(*) כלומר, כאשר מציגים את התוצאות של כל נבדק על פני גרף דו־מימדי שבו ציר ה־ x הוא $\ln(-\ln(p))$ וציר ה־ y הוא $\ln\left(-\ln\left(\frac{X_s}{X_g}\right)\right)$, שיפוע הגרף הוא הערך α של הנבדקת ונקודת החיתוך עם ציר ה־ y הוא $-\ln(\sigma)$ של הנבדק.

בניסוי אמיתי שנערך, נתבקשו נבדקים לבחור בין האפשרויות המתוארות בסעיף הקודם. העדפותיהם של 30 נבדקים נבחנו עבור 7 ערכי p שונים כאשר ערכו של X_g המתאים ל־ p מסוים נשאר קבוע וערכו של X_s בלבד השתנה. עבור כל אוסף נתונים, העדפותיו של כל נבדק נבחנו פעמיים (על מנת לוודא עקביות).

מצורף קובץ נתונים מהניסוי **ex7_q2_data** ובו הוקטורים הבאים:

- subject - מספר הנבדק
- X_s - ערכו של הסכום הבטוח
- X_g - ערכו של הסכום בהימור
- p - הסיכוי לזכייה באופציית ההימור (המספר נתון באחוזים, זכרו להמיר אותו להסתברות בין 0 ל־ 1)
- h - מספר החזרה על הניסוי עבור אותו נבדק, אותו סכום הימור ואותו סיכוי ($h=1$ בחזרה ראשונה, $h=2$ בחזרה שניה)
- choice - בחירתו של הנבדק (1 - בחירה להמר, 2 - בחירה באפשרות הבטוחה)

<u>הערה</u>: ישנם 30 נבדקים שונים, 7 ערכים שונים של p ו־7 ערכים שונים של X_g (שימו לב שלא כל הקומבינציות האפשריות מופיעות).

4. בסעיף זה נמצא את ערכי α ו־ σ של כל נבדק בכל אחת מהחזרות:

- עבור כל נבדק, עבור כל צמד (X_g, p), ועבור כל חזרה של הניסוי, מצאו את ה־X_s המקסימלי עבורו הנבדק בחר להמר ואת ה־X_s המינימלי עבורו הנבדק בחר ללכת על בטוח.
- קחו את הממוצע של שני הערכים שמצאתם כנקודת אי ההעדפה של הנבדק (ראו הסבר בסוף התרגיל על הסיבה ללקיחת הממוצע הזה ועל מקרים מיוחדים).
- בשלב הזה יהיו לכם אוסף של נקודות אי העדפה לכל נבדק עבור החזרה הראשונה $h = 1$ ועבור החזרה השנייה $h = 2$ (כל נקודה היא עבור צמד כלשהו (X_g, p)).
- בעזרת התאמה לקו לינארי של אוסף הנקודות, מצאו את ערכי σ ו־ α לכל נבדק בכל חזרה, בהסתמך על המשוואה שהוכחתם בסעיף הקודם. ניתן להעזר בפקודה polyfit.

5. הציגו גרף של σ בחזרה השניה כפונקציה של σ בחזרה הראשונה (כאשר כל נבדק הוא נקודה על הגרף), וגרף נוסף של α בחזרה השנייה כפונקציה של α בחזרה הראשונה.
ע`פ גרפים אלו, האם הנבדקים שומרים על פרמטרים קבועים? מהו ה־ σ הממוצע על פני החזרות והנבדקים השונים? מהו ה־ α הממוצע? מה זה מעיד על נטייתם הממוצעת של הנבדקים?

<u>הערה לגבי נקודת אי ההעדפה:</u>

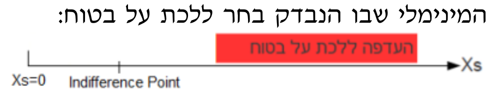
- עבור אותם ערכים של X_g ו־ p במקרה התיאורטי נקבל התנהגות כזו:

במקרה זה, הערך שנבחר בתור נקודת אי ההעדפה יהיה הממוצע בין הערך הנמוך ביותר שמצאנו בו הנבדק מעדיף ללכת על בטוח לבין הערך הגבוה ביותר בו הנבדק מעדיף להמר (כי אנחנו לא יודעים מתוך הדאטא של הניסוי מה הנבדק היה בוחר עבור כל הערכים שלא נבדקו בפועל, ולכן ניקח ממוצע של הערכים שנבדקו).

- עם זאת, במציאות יתכן שתהיה חפיפה בין התחומים (כי נבדקים אמיתיים, כאמור, הם לא בהכרח דטרמיניסטיים):

גם במקרה זה עדיין ניתן לקחת ממוצע בין שני הערכים הנ`ל (במילים אחרות, ממצעים על פני כל הערכים שבתחום החפיפה).

- בנוסף, יכול להיות מצב שבו אחת הקבוצות ריקה (הנבדק לא רצה להמר או הנבדק לא רצה ללכת על בטוח באף אחת מההגרלות בעלות אותו X_g ו־ p).
  - במקרה שבו הנבדק לא רצה להמר, ניתן לבחור את נקודת אי ההעדפה בתור הממוצע בין 0 לבין הערך המינימלי שבו הנבדק בחר ללכת על בטוח:



  - במקרה שבו הנבדק בחר תמיד להמר, ניתן לבחור את נקודת אי ההעדפה בתור הממוצע בין הערך המקסימלי שעבורו בחר להמר לבין הערך של הסכום באופציית ההימור (מתוך הנחה כי כאשר $X_s = X_g$ הנבדק יעדיף ללכת על בטוח):