תרגיל 4 - יותם גרדוש - 208541334

שאלות הקדמה

1. נתון וקטור $\bar{u}$ (שאינו וקטור האפס), המיוצג בעזרת הבסיס הסטנדרטי. נרצה לתאר את הוקטור $\bar{u}$ בעזרת בסיס חדש של וקטורים מנורמלים ואורתוגונלים, $\{\bar{v}^l\}_{l=1}^N$, כלומר: $\bar{u} = \sum_l a_l \bar{v}^l$. מה נכון לומר על המקדמים a_l? תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה

(א) כולם בהכרח אי־שליליים ✗

(ב) כולם בהכרח שונים מאפס ✗

(ג) סיבוב של הוקטור $\bar{u}$ מבלי שינוי של הנורמה שלו יכול לשנות את ערכם ✓

(ד) הגדלת/הקטנת הוקטור $\bar{u}$ מבלי שינוי של הזווית שלו יכול לשנות את ערכם ✓

(ה) ערכם (בערך מוחלט) גדול יותר ככל שהזווית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$ גדלה מ 0 ל 90. ✓ ✗

(ו) ערכם (בערך מוחלט) גדול יותר ככל שהזווית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$ קטנה מ 90 ל 0. ✓

(ז) הם בהכרח שונים עבור ערכים שונים של l ✗

(ח) אם הנורמה של $\bar{u}$ שווה 1, אז $\sum_l a_l = 1$ ✓

(ט) ערכם מתקבל על ידי מכפלה סקלרית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$ ✗

הסבר:

א) לא נכון: לדוגמא $\{v^l\}_{l=1}^{2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ⇐ $u = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = -1v^1 + -1v^2$ ⇐ $a_1 = a_2 = -1$

ב) לא נכון: עבור $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ נקבל $u = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$ ⇐ $a_2 = 0$

ג) נכון: זווית הוקטור מתקבלת ע"י החיבור הלינארי של איברי הבסיס. שינוי הזווית של u לוקטור שאותו 'u נגדיר דורשת צירוף לינארי אחר של איברי הבסיס.

ד) נכון: לדוגמא $u = 2\cdot v_1$ ⇐ $3u = 3(2\cdot v_1) = 6v_1$ לכן הגדלה של u פי 3 מגדילה באופן פרופורציונאלי את המקדם של איבר הבסיס במקרה זה. לכן נכון להגיד ששינוי גודל ללא שינוי זווית יכולה לשנות את ערכי המקדמים.

ה) לא נכון. כאשר הזווית היא 0 בין v^1 ל- u אזי ש- u ו- v^1 תלויים לינארית $u = a_1 v^1$ ככל שהזווית גדלה הוקטור v^1 "מסביר" פחות את u. לכן המקדם של v^1 קטן. כלומר יש פחות מ- v^1 ב- u.

ו) נכון באופן כללי התשובה (א.ו.) כיוון ש-u מורכב מ-v^i, v^i יותר מתאר את u לכן המקדם שלו יגדל.

ב) לא נכון הראתי דוגמא נגדית בסעיף (א)

ח) נכון: נסמן $u=\sum_{i=1}^{N} a_i v^i$ נגדיר $\|u\|=1$: נסתכל על $\|u\|^2$:

$$1=\|u\|^2=\|\sum a_i v^i\|^2 \underset{\text{בסיס אורתונורמלי}}{=} \sum^{N} |a^i|^2\|v^i\|^2=\sum a^{i2} \underset{\text{נפעיל שורש}}{\Rightarrow} \sqrt{1}=\sqrt{\sum a^{i2}} \Leftrightarrow 1=\sum a^i$$

ט) לא נכון: לא רק שניתן למצוא את ערכם של a_i ע"י המכפלה $\langle u,v^i\rangle$ כי לא הדוק שבא מתקבל ערכם של a_i השונים. ערך זה מתקבל לפי כמה מכל וקטור בסיס מסביר את u.

2. נניח מטריצת קורלציה C (לפי ההגדרה מהכיתה), שלה שלושה ערכים עצמיים, המקיימים: $\lambda_1=2\lambda_2=3\lambda_3$. מהו שיעור השונות המוסברת שיתקבל מהטלה של הדוגמאות על הוקטור העצמי של C המתאים לערך העצמי הגדול ביותר?

(א) $\frac{1}{6}$
(ב) $\frac{1}{5}$
(ג) $\frac{6}{11}$
(ד) $\frac{11}{12}$

נסמן $\lambda_3=1 \Leftarrow \lambda_1=3 \quad \lambda_2=1.5 \Leftarrow$ שונות מוסברת $=\frac{\lambda_1}{\sum\lambda_j}=\frac{3}{5.5}=\frac{6}{11}$ $\boxed{}$

שאלה 1

נתון נוירון לינארי המקבל קלט N-מימדי $\bar{x}$. המשקולות המחברות בין הקלט לנוירון מיוצגות על ידי הוקטור $\bar{w}$, כלומר $y = \bar{w}^\top \bar{x}$. תוחלת הקלט היא אפס, כלומר $\mathbb{E}[\bar{x}] = \bar{\mathbf{0}}$, ומטריצת הקורלציה של הקלט מסומנת על ידי $\mathbb{E}\left[\bar{x}\bar{x}^T\right] = \mathbf{C}$.
מטרת הרשת היא למקסם את השונות של הפלט, תחת אילוץ על $\bar{\mathbf{w}}$.

1. כתבו ביטוי לשונות הפלט (כלומר $\mathrm{Var}[y]$). הניחו כי $\bar{w}$ הוא וקטור עצמי **מנורמל** של מטריצת הקורלציה C, והראו כי במצב הזה מתקבל שהשונות של הפלט שווה לערך עצמי של C המתאים לוקטור העצמי שהנחתם. מה ניתן ללמוד מכך על הבחירה של $\bar{w}$ שתביא למקסום השונות? הסבירו את הקשר בין התוצאה שהתקבלה לבין התוצאה שראיתם בכיתה עבוד הפתרון האופטימלי להורדת מימד בעזרת נוירון לינארי (PCA).

נתון $y=w^Tx$, $\mathbb{E}(x)=0$, $\mathbb{E}(xx^T)=C$

1. נניח כי $\|w\|=1$ $\quad Cw=\lambda_w w$ עבור $\lambda_w \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\mathrm{Var}(y) = \mathbb{E}(y^2 - \mathbb{E}(y)^2) = \mathbb{E}(y^2) - \mathbb{E}(y)^2 = \mathbb{E}\left[(w^Tx)^2\right] - \mathbb{E}(w^Tx)^2$$

בשלב זה w הוא קבוע לכן ניתן להוציא אותו מהתוחלת:

$$= \mathbb{E}\left[(w^Tx)(w^Tx)^T\right] - (w^T\overset{0}{\mathbb{E}(x)})^2 = w^T\mathbb{E}(xx^T)w = w^TCw \overset{\text{מהגדרה}}{=} w^T\lambda_w w$$

$$\underset{\lambda\ \text{סקלר}}{=} \lambda_w w^Tw = \lambda_w\|w\| \underset{\text{הנחה}}{=} \lambda_w$$

ראינו כי שונות y שווה לע״ע λ_w של הו״ע w כפי שהנחנו

- ניתן ללמוד מכך שבחירת w עם הע״ע הגדול ביותר שקול למיקסום השונות של y.
כמו שלמדנו מיקסום שונות y שקול למינימום השגיאה בהורדת המימד ע״י PCA.

2. נניח שהקלט הוא דו־מימדי ומתפלג באופן הבא: $x_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $x_2 \sim \mathcal{N}(0,4)$, ו־ x_1, x_2 הם בלתי תלויים.

(א) מהי מטריצת הקורלציה של הקלט?

(ב) מצאו את w האופטימלי במקרה זה תחת האילוץ $||\bar{w}||^2 = 1$.

(ג) ציירו במישור באופן סכמטי איך ייראה מדגם אופייני של נקודות קלט, וכן ציירו את הכיוון של $\bar{w}$. הסבירו את ההיגיון מאחורי הוקטור $\bar{w}$ שהתקבל.

(ד) מהו אחוז השונות המוסברת שמתקבל על ידי שימוש בוקטור $\bar{w}$ שמצאתם?

(ה) **ללא חישוב נוסף**, קבעו מה יהיה הוקטור $\bar{w}$ שיתקבל עבור (הניחו כי המשתנים עדיין בלתי תלויים):

i. $x_1 \sim \mathcal{N}(0,4)$ ו־ $x_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

ii. $x_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ו־ $x_2 \sim \mathcal{N}(0,2)$

(ו) נניח כעת כי $x_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $x_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$, ו־ x_1, x_2 הם בלתי תלויים. חשבו את מטרצת הקורלציה ואת הערכים העצמיים שלה. מה מיוחד במקרה זה? מהו הוקטור $\bar{w}$ האופטימלי תחת האילוץ $||\bar{w}||^2 = 1$?

א) נחשב את C:

$$C_{ij} = E(x_i \cdot x_j) \quad i \neq j = C_{1,2} \overset{\text{C מטריצה סימטרית}}{=} C_{2,1} = \mathbb{E}(x_1 \cdot x_2) \overset{x_1,x_2 \text{ ב״ת}}{=} \mathbb{E}(x_1) \cdot \mathbb{E}(x_2) \overset{\text{נתון}}{=} 0 \cdot 0 = 0$$

$$C_{ii} = \mathbb{E}(x_i^2) \Rightarrow C_{11} = \mathbb{E}(x_1^2) = \mathbb{E}(x^2 - \overset{0}{\widehat{\mathbb{E}(x_1)^2}}) \overset{\text{לפי הגדרה}}{=} Var(x_1) = 1$$

באופן דומה נחשב C_{22} $\Rightarrow C_{22} = Var(x_2) = 4$

לכן קיבלנו כי $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

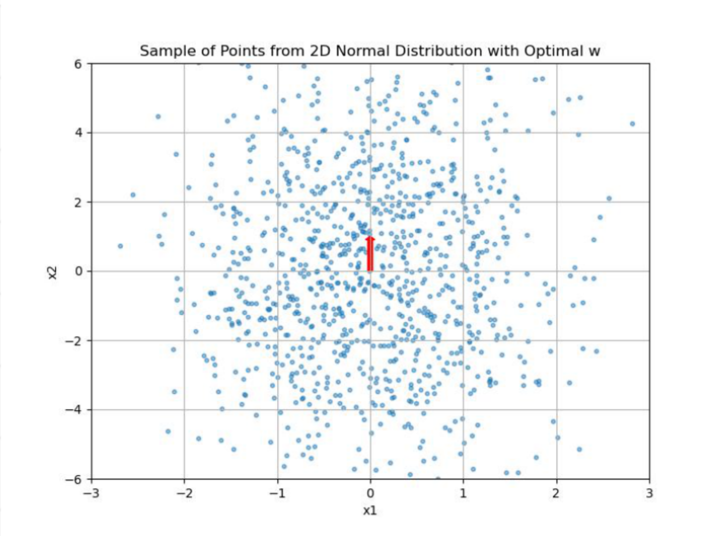
ב) נמצא את w עם ההנחה ש: $||w||^2 = 1$. ראינו בשיעור 1 שניתן למצוא w אופטימלי ע״י מיקסום שונות y. שזה שקול למציאת w שהוא הו״ע לע״ע הגדול ביותר. עבור C שמצאנו הע״ע הגדול ביותר הוא 4 לכן נחשב:

$$Cw = 4w \iff (C - I \cdot 4)w = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-4 & 0 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -3w_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff w_1 = 0$$

הנחנו כי $||w^2|| = 1$ כלומר:

$$\sum_{i=1}^{2} w_i^2 = 1 \Rightarrow w_2^2 = 1 \Rightarrow w_2 = 1$$

לכן קיבלנו $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אופטימלי ∎



ג)

ניתן לראות כי רוב השונות שלנו היא בציר ה-y, זה גם מה שנצפה לראות תאור
כך שהשונות של x_2 גבוהה משל x_1. לכן בחירת w כך שהורדת מימד של הנקודות
מטילה אותם על ציר ה-y תשמר כמה שיותר שונות בנקודות כמו שרצינו.

ד) לפי הנוסחא שונות מוסברת $= \frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i} = \frac{4}{4+1} = 0.8$ כלומר 80% ∎

ה)

(i) עבור $x_1 \sim N(0,4),\ x_2 \sim N(0,1)$ נקבל $w = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. מהניתוח החדש נסיק
כי גרף המדגם של התפלגות כזאת יהיה כמו (ג) רק מוטה ב-90° לכן גם w יהיה
מוטה ב-90°.

(ii) עבור $x_1 \sim N(0,1),\ x_2 \sim N(0,2)$ נקבל $w = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ באופן זהה לסעיף (ג) כאשר
מכיון שגם אם השונות נמוכה יותר עדיין רובה מתקבלת על ציר ה-y לכן הטלה לציר y עדיין
תיתן מקסימום שונות.

ו) עבור $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ כאשר x_1, x_2 ב"ת נקבל $C_{1,2} = C_{2,1} = 0$, $C_{1,1} = C_{2,2} = Var(x_1) = 1$
לכן $C = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I_2$.

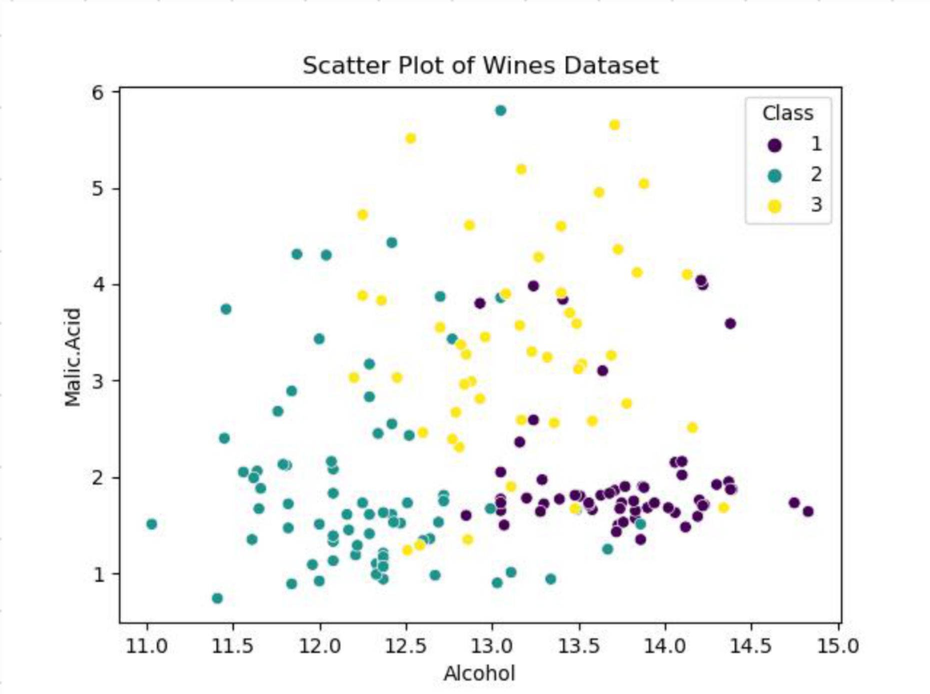
במקרה זה קיבלנו מטריצת קורולציות עם ע"ע יחיד שהוא 1 לכן

$$(C - I_2\lambda)w = 0 \iff (I_2 - I_2)w = 0 \iff \bar{0} = \bar{0}$$

כלומר כל $\bar{w}$ מנורמל מקיים את המשוואה וממקסם את השונות. ∎

שאלה 2

ג)



3) ג. נרצה לנרמל את הנתונים שלנו כך שיתפלגו עם תוחלת 0 ושונות 1. נעשה זאת ע"י כך שנחסיר את הממוצע ונחלק בסט"ת התקן. הסיבה שאנחנו מחלקים בסט"ת התקן ולא בשונות היא משיקולים מתמטיים. נסתכל על המ"מ הבא: $x\sim N(0,\sigma^2)$

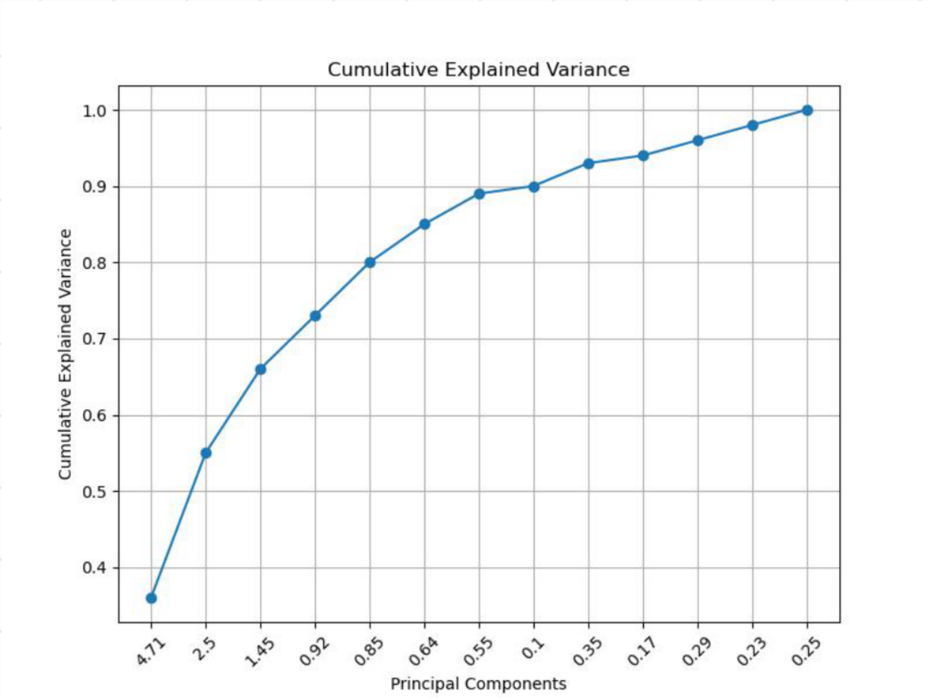
כלומר $Var(x)=\sigma^2$, $E(x)=0$ $\Leftarrow$ $STD(x)=\sqrt{Var(x)}=\sigma$ $=>$ (סט"ת תקן)

נזכר בתכונה: $Var(a\cdot x)=a^2 Var(x)$, $a\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow Var\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}Var(x)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

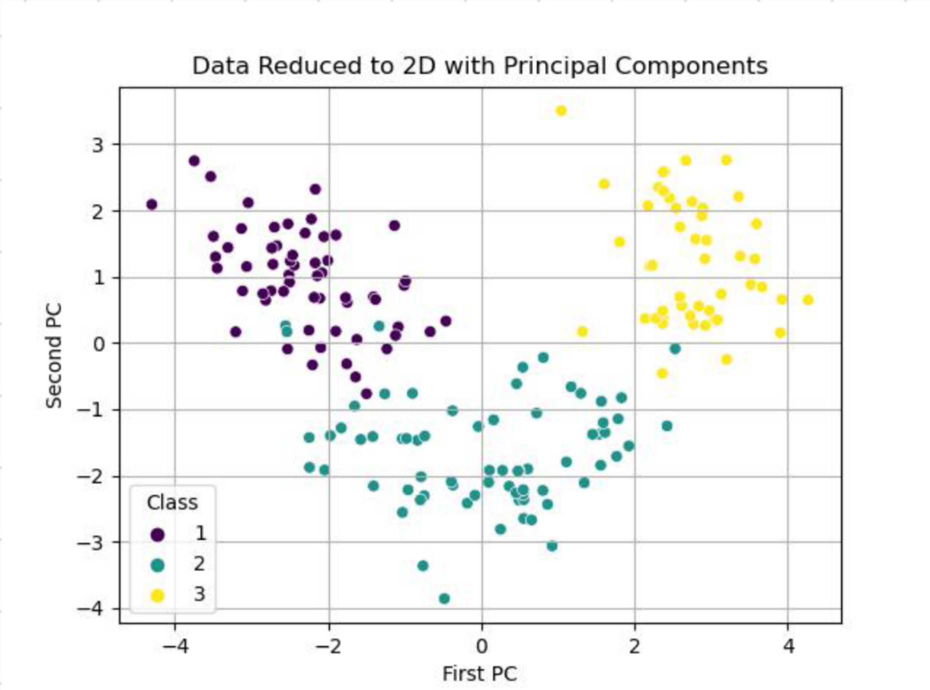
לכן כדי לקבל שונות 1 אנחנו מחלקים בסט"ת התקן. ▨

5)



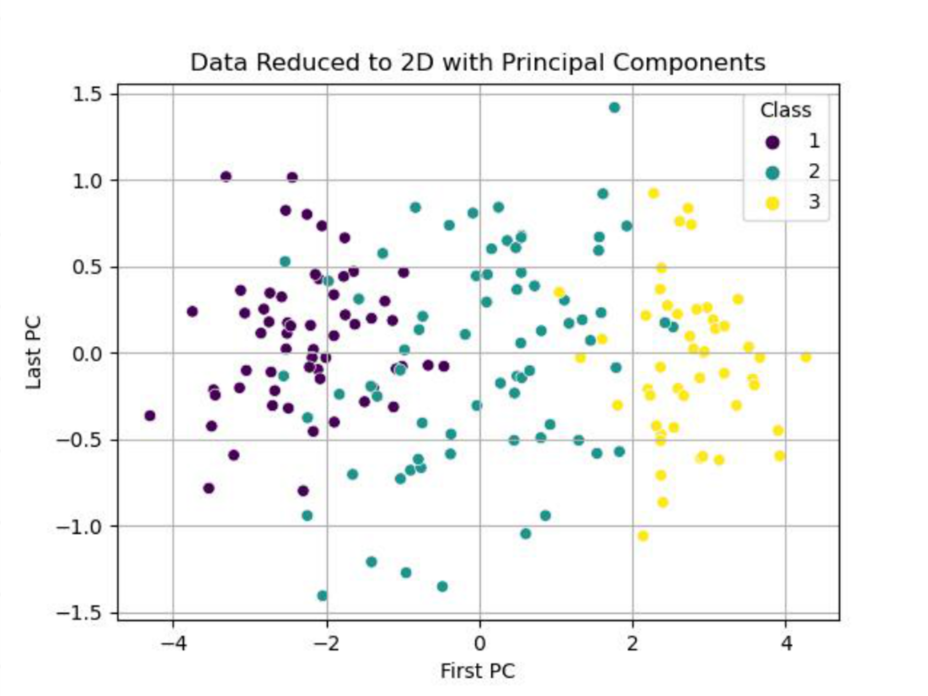
נראה שהשונות המוסברת של הרכיב הראשון היא 36% ושל השני 19% (חושב בקוד בנפרד)
לכן אחוז השונות המוסברת של שני הרכיבים הראשונים הוא 55%

6)



בגרף שקיבלנו ע"י הטלה למרחב של 2 הרכיבים הראשונים קיבלנו כמעט הפרדה
מוחלטת לסוגי המשקה אלו של יין ש"ך. זאת מכיוון ש-2 הרכיבים הראשונים מקודדים
את החלקים החשובים ביותר בשונות הנקודות מה שבא לידי ביטוי בכך שאנחנו רואים כי 2
הרכיבים מסבירים 55% מהשונות. זאת בניגוד לגרף הראשון שייצג מידע ב-14 מימדים על
סמך 2 הפיצ'רים הראשונים.

7)



ניתן לראות בגרף את ההבדלים בין הרכיבים ע"י כך שעיקר ההפרדה בין הקבוצות השונות מתרחשת בציר ה-x לעומת ציר ה-y שבו לא ניתן לראות הפרדה כאשר ציר ה-x הוא הרכיב בעל השונות המוסברת הגבוהה ביותר וציר y הרכיב עם הנמוכה ביותר.

חישוביות וקוגניציה - תרגיל 4

להגשה עד: $22/02/24$

שימו לב: בתחילת התרגיל מופיעות כמה שאלות הקדמה אמריקאיות. יש להגיש את התשובות אליהן, עם משפט נימוק קצר לכל שאלה. לאחר מכן, שאלה 1 היא שאלה אנליטית ושאלה 2 היא שאלת תכנות.

שאלות הקדמה

1. נתון וקטור $\bar{u}$ (שאינו וקטור האפס), המיוצג בעזרת הבסיס הסטנדרטי. נרצה לתאר את הוקטור $\bar{u}$ בעזרת בסיס חדש של וקטורים מנורמלים ואורתוגונלים, $\left\{\bar{v}^l\right\}_{l=1}^N$, כלומר: $\bar{u} = \sum_l a_l \bar{v}^l$. מה נכון לומר על המקדמים a_l? תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה

   (א) כולם בהכרח אי־שליליים

   (ב) כולם בהכרח שונים מאפס

   (ג) סיבוב של הוקטור $\bar{u}$ מבלי שינוי של הנורמה שלו יכול לשנות את ערכם

   (ד) הגדלת/הקטנת הוקטור $\bar{u}$ מבלי שינוי של הזווית שלו יכול לשנות את ערכם

   (ה) ערכם (בערך מוחלט) גדול יותר ככל שהזווית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$ גדֵלה מ 0 ל 90.

   (ו) ערכם (בערך מוחלט) גדול יותר ככל שהזווית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$ קטֵנה מ 90 ל 0.

   (ז) הם בהכרח שונים עבור ערכים שונים של l

   (ח) אם הנורמה של $\bar{u}$ שווה 1, אז $\sum_l a_l = 1$

   (ט) ערכם מתקבל על ידי מכפלה סקלרית בין $\bar{u}$ ל- $\bar{v}^l$

2. נניח מטריצת קורלציה C (לפי ההגדרה מהכיתה), שלה שלושה ערכים עצמיים, המקיימים: $\lambda_1 = 2\lambda_2 = 3\lambda_3$. מהו שיעור השונות המוסברת שיתקבל מהטלה של הדוגמאות על הוקטור העצמי של C המתאים לערך העצמי הגדול ביותר?

   (א) $\frac{1}{6}$

   (ב) $\frac{1}{5}$

   (ג) $\frac{6}{11}$

   (ד) $\frac{11}{12}$

שאלה 1

נתון נוירון לינארי המקבל קלט N־מימדי $\bar{x}$. המשקולות המחברות בין הקלט לנוירון מיוצגות על ידי הוקטור $\bar{w}$, כלומר $y = \bar{w}^\top \bar{x}$. תוחלת הקלט היא אפס, כלומר $\mathbb{E}\left[\bar{x}\right] = \bar{\mathbf{0}}$, ומטריצת הקורלציה של הקלט מסומנת על ידי $\mathbf{C}$ $\mathbb{E}\left[\bar{x}\bar{x}^T\right] =$.
מטרת הרשת היא למקסם את השונות של הפלט, תחת אילוץ על $\bar{\mathbf{w}}$.

1. כתבו ביטוי לשונות הפלט (כלומר $\mathrm{Var}\left[y\right]$). הניחו כי $\bar{w}$ הוא וקטור עצמי **מנורמל** של מטריצת הקורלציה C, והראו כי במצב הזה מתקבל שהשונות של הפלט שווה לערך עצמי של C המתאים לוקטור העצמי שהנחתם. מה ניתן ללמוד מכך על הבחירה של $\bar{w}$ שתביא למקסום השונות? הסבירו את הקשר בין התוצאה שהתקבלה לבין התוצאה שראיתם בכיתה עבוד הפתרון האופטימלי להורדת מימד בעזרת נוירון לינארי (PCA).

2. נניח שהקלט הוא דו־מימדי ומתפלג באופן הבא: $x_1 \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$, $x_2 \sim \mathcal{N}\left(0,4\right)$, ו־ x_1, x_2 הם בלתי תלויים.

   (א) מהי מטריצת הקורלציה של הקלט?

   (ב) מצאו את w האופטימלי במקרה זה תחת האילוץ $||\bar{w}||^2 = 1$.

   (ג) ציירו במישור באופן סכמטי איך ייראה מדגם אופייני של נקודות קלט, וכן ציירו את הכיוון של $\bar{w}$. הסבירו את ההיגיון מאחורי הוקטור $\bar{w}$ שהתקבל.

   (ד) מהו אחוז השונות המוסברת שמתקבל על ידי שימוש בוקטור $\bar{w}$ שמצאתם?

   (ה) **ללא חישוב נוסף**, קבעו מה יהיה הוקטור $\bar{w}$ שיתקבל עבור (הניחו כי המשתנים עדיין בלתי תלויים):

      i. $x_1 \sim \mathcal{N}\left(0,4\right)$ ו־ $x_2 \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$

      ii. $x_1 \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$ ו־ $x_2 \sim \mathcal{N}\left(0,2\right)$

   (ו) נניח כעת כי $x_1 \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$, $x_2 \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$, ו־ x_1, x_2 הם בלתי תלויים. חשבו את מטרצת הקורלציה ואת הערכים העצמיים שלה. מה מיוחד במקרה זה? מהו הוקטור $\bar{w}$ האופטימלי תחת האילוץ $||\bar{w}||^2 = 1$?

שאלה 2

בשאלה זאת תעבדו עם dataset של יינות, המיוצרים על ידי שלושה מגדלי ענבים שונים באזור מסוים באיטליה. לכל יין נרשמו 13 תכונות/מדידות, כך שכל יין ניתן לתיאור על ידי וקטור ממימד 13. במהלך הניתוח לא תהיה התייחסות שונה ליינות של מגדלים שונים (זכרו כי אנו עוסקים בלמידה לא מפוקחת, ללא מורה וללא התשובה הנכונה), ועליכם לבדוק האם בעזרת PCA ניתן לחשוף מבנה "סמוי" של הנתונים ולקבל הפרדה בין המגדלים השונים.

1. טענו את קובץ הנתונים המצורף - wines.csv.
העמודה הראשונה (class) מתארת את המגדל אליה משתייך היין (מספר בין 1 ל־3). 13 העמודות הבאות מתארות את 13 התכונות השונות (אין צורך להבין את המשמעות של כל תכונה).

2. הציגו את הנקודות על מישור דו־מימדי, כאשר ציר ה־x הוא תכונה מספר 1 (הכניסה הראשונה של הוקטור) וציר ה־y הוא תכונה מספר 2 (הכניסה השנייה של הוקטור). צבעו את הנקודות לפי המגדל אליו הן משתייכות.

3. כזכור, בשיטת PCA יש לעבד את הנתונים לפני תחילת הניתוח:

(א) הפכו את כל הוקטורים להיות בעלי ממוצע אפס בכל אחת מן התכונות. שימו לב כי הממוצע מתבצע לכל כניסה של הוקטור (לכל תכונה) בנפרד, כלומר עבור כל i צריך להתקיים $\mathbb{E}[x_i] = 0$.

(ב) בגלל שהכניסות בוקטור מתארות גדלים שונים בעלי יחידות שונות, יש לנרמל גם את השונות של כל גודל (למשל, לגודל המתואר בסנטימטרים תהיה שונות גדולה בהרבה מאשר לגודל המתואר במטרים, גם אם הנתונים הם זהים). נרמלו את השונות של כל תכונה להיות שווה ל־1, על ידי חלוקה בסטיית התקן: לכל i יתקיים $x_i \rightarrow \frac{x_i}{\sigma_{x_i}}$. הסבירו מדוע אנחנו מחלקים בסטיית התקן ולא בשונות.

4. חשבו את מטריצת הקורלציה C של הנתונים המעובדים, ומצאו את הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים שלה (השתמשו בפונקציות ייעודיות).

5. צרו גרף של שונות מצטברת: בציר ה־ x הציגו את הרכיבים השונים לפי הסדר, ובציר ה־y הציגו את השונות המוסברת המושגת על ידי שימוש בכל הרכיבים עד אותו הרכיב. מהו אחוז השונות המוסברת על ידי שני הרכיבים הראשונים?

6. הטילו את הנתונים על שני הרכיבים הראשיים הראשונים (PC1 ו־PC2), והציגו את הנקודות במישור דו־מימדי, כאשר ציר ה־x הוא ההיטל על הרכיב הראשון וציר ה־y הוא ההיטל על הרכיב השני. צבעו את הנקודות לפי המגדל אליו הן משתייכות. מה שונה בין הגרף הזה לבין הגרף שקיבלתם בסעיף 2? הסבירו את התוצאות.

7. הטילו את הנתונים על הרכיב הראשון (PC1) ועל הרכיב האחרון (PC13), והציגו את הנקודות במישור דו־מימדי, כאשר ציר ה־x הוא ההיטל על הרכיב הראשון וציר ה־y הוא ההיטל על הרכיב האחרון. הסבירו כיצד ניתן לראות בגרף את ההבדל בין הרכיבים.