

אלגוריתמים ויישומים ברשתות חברתיות / תרגיל 2

שאלה 1

סעיפים א'-ב'

מצורף צילום פלט של התוכנית Question_1.py שהרצנו עבור קובץ הקלט הנתון, עבור קבוצת הקשירות הגדולה ביותר שלו (יצא שהיא מגודל 324 צמתים), עבור $k=3$. הפלט מציין מהו גודל כל קבוצת קשירות, ואת כל הצמתים שהיא מכילה:

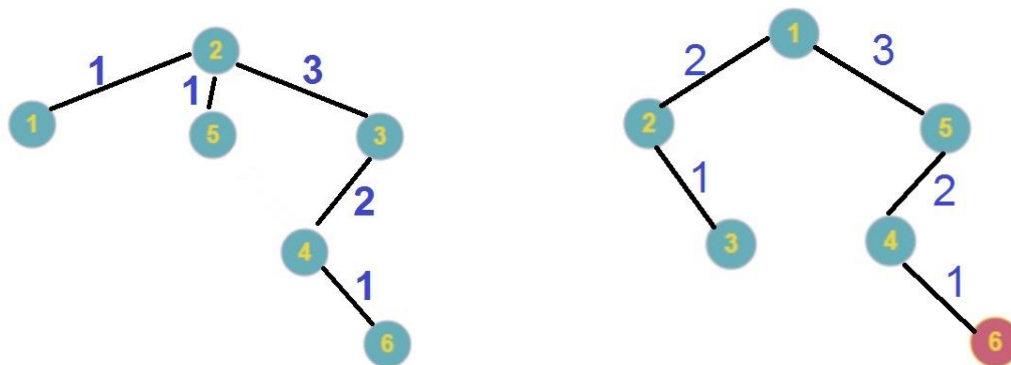
```
c:\>python la.py
Size of graph extracted from input file is 333
Biggest component's size is 324
Community number 1 contains the following 223 nodes:
[1, 3, 5, 7, 9, 10, 13, 16, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 34, 36, 38, 39,
40, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67,
69, 72, 73, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 92, 94, 96, 98, 100,
101, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 113, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123,
125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 139, 141, 142, 146, 148,
150, 153, 156, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 172,
173, 176, 178, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 194, 196, 197,
198, 199, 200, 202, 203, 204, 206, 207, 208, 211, 212, 213, 217, 221, 222, 223,
224, 228, 229, 231, 232, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 242, 246, 247, 248, 249,
250, 251, 252, 254, 257, 258, 260, 261, 265, 266, 268, 269, 270, 271, 272, 274,
276, 277, 280, 281, 283, 284, 285, 286, 288, 290, 291, 294, 295, 297, 298, 299,
300, 301, 302, 303, 304, 308, 309, 311, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 320, 322,
323, 324, 325, 329, 330, 331, 332, 334, 336, 338, 339, 340, 341, 342, 344, 345,
346, 347]
Community number 2 contains the following 91 nodes:
[2, 6, 8, 14, 17, 19, 20, 23, 28, 32, 35, 41, 44, 46, 49, 52, 61, 68, 70, 71, 86,
89, 91, 93, 95, 97, 99, 102, 110, 111, 112, 115, 116, 124, 131, 137, 138, 140,
143, 144, 147, 149, 151, 154, 155, 157, 162, 167, 174, 175, 177, 182, 192, 193,
201, 205, 214, 216, 219, 220, 225, 226, 227, 230, 240, 241, 243, 245, 253, 255,
259, 262, 263, 264, 267, 278, 279, 289, 293, 296, 305, 307, 310, 312, 319, 321,
326, 327, 333, 337, 343]
Community number 3 contains the following 10 nodes:
[195, 4, 328, 78, 273, 306, 275, 181, 152, 218]
c:\>
```

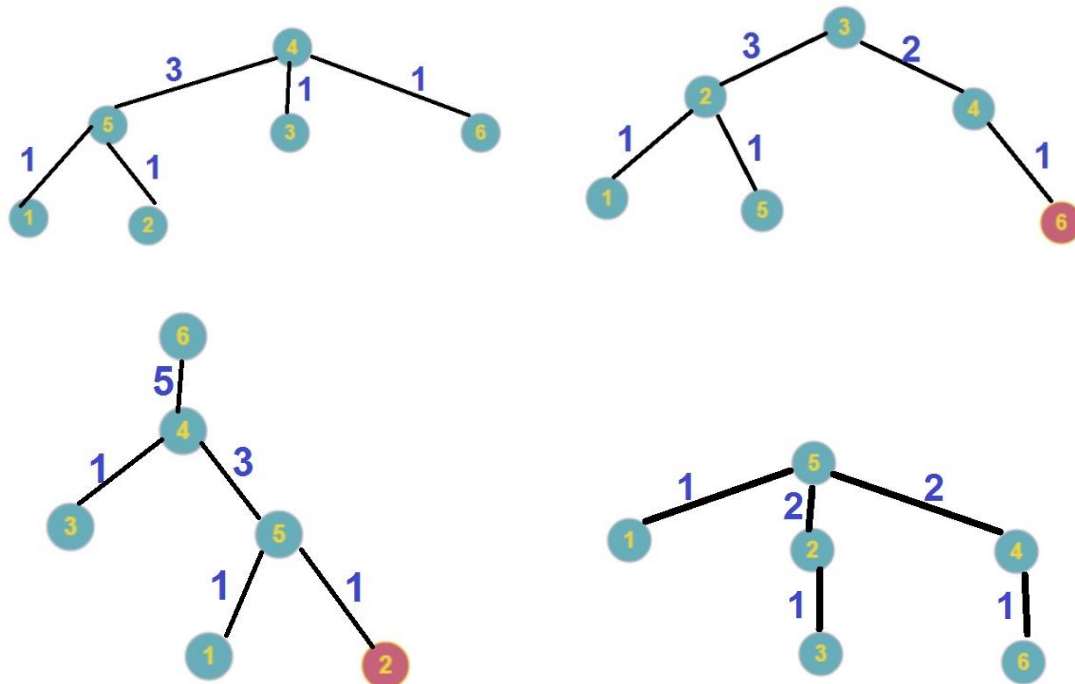
סעיף ג'

* מציאת קשתות כבדות ביותר, איטרציה ראשונה:

להלן עץ BFS מכל אחד מהצמתים, כולל משקלי קשתות ע"פ האלגוריתם שנלמד בהרצאה 5 שקף

: 14





$$EB(1,2) = (2+1+1)/2 = 2$$

$$EB(1,5) = (3+1+1+1)/2 = 3$$

$$EB(2,5) = (1+1+1+2+1)/2 = 3$$

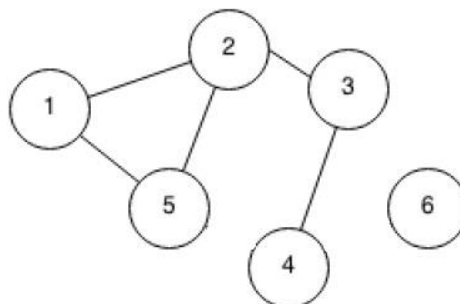
$$EB(2,3) = (1+3+3+1)/2 = 4$$

$$EB(4,5) = (2+3+2+3)/2 = 5$$

$$EB(3,4) = (2+2+1+1)/2 = 2$$

$$EB(4,6) = (1+1+1+1+1+5)/2 = 5$$

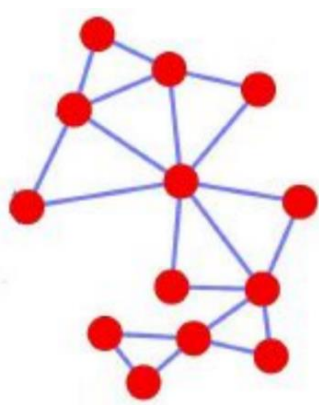
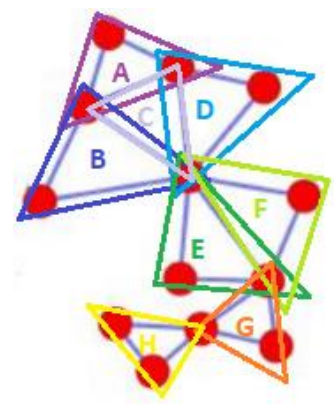
לכן נסיר את הקשתות שקיבלו EB מקסימלי, כלומר את שתי הקשתות (4,5) ו-(4,6). לאחר הסרתן הגרף יראה כך:



וכפי שניתן לראות, הסרתן פרקה את הגרף לשני רכיבי קשירות לא חופפים. הצומת 6 מנותקת מכל השאר ולכן היא רכיב קשירות, וכל שאר הצמתים (1-5) הם רכיב הקשירות השני.

שאלה 2

- a. מומש בקובץ `question_02.ipynb`.
- b. הורץ ונבדק את מול המימוש הפנימי של האלגוריתם מתוך `network`. הקהילות, (תוצאות) מוצגות בקובץ המימוש.
- c. על פי האלגוריתם מתקיים כי:

1.		2.																																																																																																																																																																			
3.	<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr><tr><th>A</th><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>B</th><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>C</th><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>D</th><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>E</th><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><th>F</th><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><th>G</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><th>H</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A	3	1	2	1	0	0	0	0	B	1	3	2	1	1	1	0	0	C	2	2	3	2	1	1	0	0	D	1	1	2	3	1	1	0	0	E	0	1	1	1	3	2	1	0	F	0	1	1	1	2	3	1	0	G	0	0	0	0	1	1	3	1	H	0	0	0	0	0	0	1	3	4.	<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr><tr><th>A</th><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>B</th><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>C</th><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>D</th><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>E</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>F</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>G</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><th>H</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A	3	0	2	0	0	0	0	0	B	0	3	2	0	0	0	0	0	C	2	2	3	2	0	0	0	0	D	0	0	2	3	0	0	0	0	E	0	0	0	0	3	2	0	0	F	0	0	0	0	2	3	0	0	G	0	0	0	0	0	0	3	0	H	0	0	0	0	0	0	0	3
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																																																																																																													
A	3	1	2	1	0	0	0	0																																																																																																																																																													
B	1	3	2	1	1	1	0	0																																																																																																																																																													
C	2	2	3	2	1	1	0	0																																																																																																																																																													
D	1	1	2	3	1	1	0	0																																																																																																																																																													
E	0	1	1	1	3	2	1	0																																																																																																																																																													
F	0	1	1	1	2	3	1	0																																																																																																																																																													
G	0	0	0	0	1	1	3	1																																																																																																																																																													
H	0	0	0	0	0	0	1	3																																																																																																																																																													
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																																																																																																													
A	3	0	2	0	0	0	0	0																																																																																																																																																													
B	0	3	2	0	0	0	0	0																																																																																																																																																													
C	2	2	3	2	0	0	0	0																																																																																																																																																													
D	0	0	2	3	0	0	0	0																																																																																																																																																													
E	0	0	0	0	3	2	0	0																																																																																																																																																													
F	0	0	0	0	2	3	0	0																																																																																																																																																													
G	0	0	0	0	0	0	3	0																																																																																																																																																													
H	0	0	0	0	0	0	0	3																																																																																																																																																													
5.	<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr><tr><th>A</th><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>B</th><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>C</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>D</th><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>E</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>F</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>G</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><th>H</th><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	H	A	1	0	1	0	0	0	0	0	B	0	1	1	0	0	0	0	0	C	1	1	1	1	0	0	0	0	D	0	0	1	1	0	0	0	0	E	0	0	0	0	1	1	0	0	F	0	0	0	0	1	1	0	0	G	0	0	0	0	0	0	1	0	H	0	0	0	0	0	0	0	1	6.	<p>הקהילות הן :</p> <p>A,B,C,D .1</p> <p>E,F .2</p> <p>G .3</p> <p>H .4</p>																																																																																	
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																																																																																																																													
A	1	0	1	0	0	0	0	0																																																																																																																																																													
B	0	1	1	0	0	0	0	0																																																																																																																																																													
C	1	1	1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																													
D	0	0	1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																													
E	0	0	0	0	1	1	0	0																																																																																																																																																													
F	0	0	0	0	1	1	0	0																																																																																																																																																													
G	0	0	0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																													
H	0	0	0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																													

שאלה 3

- בהרצת האלגוריתם מתקיים כי אין קודקוד יחיד אשר הוא המשפיע ביותר. אלא ישנם 3 קודקודים המשפיעים באותו האופן. הן **קודקודים A, D ו-F** שלושתם גורמים להפעלת קודקוד נוסף.

Origin Node	Graph
A	
D	
F	

ירוק – מופעל (דלוק), **כתום** – לא עובר threshold, **אדום** – אין שכנים מופעלים (דלוקים)

שאלה 4

סעיף א'

מטריצת DeGroot המתאימה לסעיף היא

$$T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(שורה ראשונה מתאימה ל-a, שורה שניה ל-b, שלישית ל-c, רביעית ל-d)

ווקטור דעות התחלתיות ע"פ הנתונים:

$$p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בגרף הנתון יש קשת עצמית (של a) לכן $\gcd=1$ של אורכי מעגלים, אז הגרף בוודאות לא-מחזורי, וקיימת התכנסות של T (אז **בוודאות יהיה קונצנזוס**). נשתמש במשפט Perron-Frobenius כדי למצוא את T בחזקת אינסוף. יהי v וקטור עצמי **שמאלי** של T , המתאים לערך עצמי $\lambda_1 = 1$ (מהמשפט ידוע שערך עצמי זה קיים). נחלץ את v :

$$v \cdot T = 1 \cdot v$$

$$(A \quad B \quad C \quad D) \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A \quad B \quad C \quad D)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 0.8A + 0.6B = A \\ C + D = B \\ 0.2A = C \\ 0.4B = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B = A \\ C + D = B \\ 6B = 10C \\ 6B = 15D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B = A \\ 2C + 2D = 2B \\ 2C = 3D \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3B = A \\ 3D + 2D = 5D = 2B \\ 2C = 3D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3B \\ D = \frac{2}{5}B \\ C = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}B = \frac{3}{5}B \end{cases}$$

כעת נשתמש בעובדה שסכום ערכי הווקטור שווה ל-1 (גם נתון במשפט), אז:

$$A + B + C + D = 1$$

$$3B + B + B + B = 5B = 1$$

$$B = 0.2$$

\Rightarrow

$$v = (0.6 \quad 0.2 \quad 0.12 \quad 0.08)$$

כעת נחשב את p^∞ :

$$p^\infty = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.12 & 0.08 \\ 0.6 & 0.2 & 0.12 & 0.08 \\ 0.6 & 0.2 & 0.12 & 0.08 \\ 0.6 & 0.2 & 0.12 & 0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 0.68 \\ 0.68 \\ 0.68 \end{pmatrix}$$

התקבל קונצנזוס כצפוי. הנטייה של כולם היא 68% לטובת צפייה במשחק (opinion=1). לכן ה-"severity" שהם יצפו במשחק היא 68%.

סעיף ב'

הרצנו את הסקריפט Question_4b.py הכלול בהגשה, ומבוסס על הדוגמא מהתרגול (השמטנו את כל החלק עם eps שלא רלוונטי פה כי ממילא הגרף אי-מחזורי), ואכן החישוב האיטרטיבי הניב תוצאה זהה לחישוב הידני. להלן תמונת מסך של סוף הריצה, ההתכנסות קרתה באיטרציה 32 (כי איטרציה 33 זהה):

```
Administrator: C:\Windows\System32\cmd.exe
[0.67999996 0.67999984 0.68000029 0.68000029]

Step #26
[0.68000002 0.68000009 0.67999984 0.67999984]

Step #27
[0.67999999 0.67999995 0.68000009 0.68000009]

Step #28
[0.68000001 0.68000003 0.67999995 0.67999995]

Step #29
[0.68      0.67999998 0.68000003 0.68000003]

Step #30
[0.68      0.68000001 0.67999998 0.67999998]

Step #31
[0.68      0.68      0.68000001 0.68000001]

Step #32
[0.68 0.68 0.68 0.68]

Step #33
[0.68 0.68 0.68 0.68]
```

כעת נחשב $p(t)$ לכל t טבעי עד שנקבל מחזוריות או התכנסות (התכנסות אם ורק אם קיים t' עבורו $p(t')=p(t'+1)$):

$$p(1) = T \cdot p(0) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(2) = T \cdot p(1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.48 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

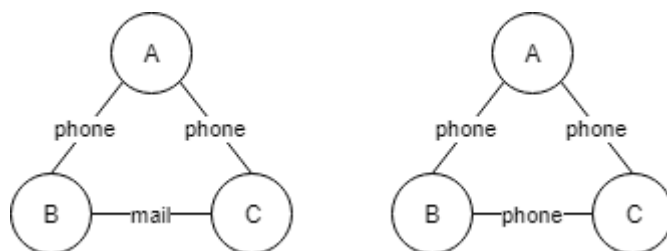
$$p(3) = T \cdot p(2) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.48 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.712 \\ 0.784 \\ 0.48 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$$p(3) = T \cdot p(2) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.48 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.712 \\ 0.784 \\ 0.48 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

אוכיח באינדוקציה.

בסיס: המקרה בו $n=2$ הוא טריוויאלי (נבחר להוריד את הקשת מה-label שלא קיימת בגרף).
 נביט במקרה כאשר $n=3$. כמו כן נשים לב שהמקרה ההפכי לנוכחי הוא סימטרי.



בגרף הימני נבחר להוריד את הקשת מה-label שאינו מופיעה. בשמאלי נבחר להוריד את הקשת ממנה יש רק אחת ולכן מתקבל $n-1$ קשתות בגרף לא מכוון (בלי קשתות כפולות), משמע הוא קשיר. במקרה זה נבחר עבור הגרפים להוריד קשתות מסוג mail.

הנחה: נניח כי גרף מלא בעל קשתות משני סוגים: mail ו-phone ובו $n-1$ קודקודים הוא קשיר גם בעת הסרה של כל הקשתות מאחד הסוגים. נוכיח עבור n קודקודים.

הוכחה: נביט בגרף מלא בהתאם להנחיות עם n קודקודים. את אחד הקודקודים נסיר מהגרף יחד עם כל הקשתות שלו. לפי ההנחה בתת הגרף של $n-1$ קודקודים שהתקבל ניתן להסיר את כל הקשתות מסוג מסויים ועדיין יהיה קשיר. נרצה להוסיף חזרה את הקודקוד שהסרנו, נביט בכל הקשתות שלו ונחלק למקרים:

1. אם כולן מאותו הסוג נבחר להסיר את הסוג השני מהגרף המכיל את כל n הקודקודים. בזכות היותו של הגרף מלא ניתן להגיע מכל קודקוד לכל קודקוד דרך מעבר בקודקוד ה- n .
 2. אם קיימת קשת אחת לפחות מכל סוג, נבחר להסיר את אותו סוג קשת שניתן להסיר מהגרף ללא הקודקוד ה- n . כך הקודקוד יהיה נגיש דרך הקשת או הקשתות שנשארו (קיימת לפחות אחת כזו מהנחה).
- בשני המקרים שתארו הגרף קשיר כנדרש. ■