1 Explanation of the data

1.1 Source

This dataset was taken from the StatLib library which is maintained at Carnegie Mellon University. The dataset was used in the 1983 American Statistical Association Exposition.

1.2 Data set informationi

This dataset is a slightly modified version of the dataset provided in the StatLib library. In line with the use by Ross Quinlan (1993) in predicting the attribute "mpg", 8 of the original instances were removed because they had unknown values for the "mpg" attribute. The original dataset is available in the file "auto-mpg.data-original".

"The data concerns city-cycle fuel consumption in miles per gallon, to be predicted in terms of 3 multivalued discrete and 5 continuous attributes." (Quinlan, 1993)

1.3 Attribute Information

1. mpg: continuous
2. cylinders: multi-valued discrete
3. displacement: continuous
4. horsepower: continuous
5. weight: continuous
6. acceleration: continuous
7. model year: multi-valued discrete
8. origin: multi-valued discrete
9. car name: string (unique for each instance)

この調査の目的は (2) から (9) のデータを用いることで mpg を推測することです。The purpose of this survey is to estimate mpg using data from (2) to (9). Note that data (9) is not used for simplicity.

先ほどのゲーム理論と同様に，進化ゲーム理論について述べる。ほとんど同様に議論を進めることができるが，異なる点もある。まず一つ目にはゲーム理論とは異なり，戦略を意識的に選ぶということをしない。つまりある生物の戦略は遺伝子によって特徴づけられており，一個体が選択することはできない。また二つ目として，一回の試行ではなく，より長い期間での振る舞いを考えるということがある。十分長い時間を考えたとき，ある種が絶滅するか，あるいは安定的に反映するかに注目する。
またゲーム理論における strategy，payoff という量にそれぞれ対応する characteristic，fitness を導入する。

1.4　相互作用の結果としての適応

例としてカブトムシを考えることにする。通常の小さいサイズのカブトムシの集団の中に，大きいサイズの突然変異が現れたとする。同じ餌を奪い合ったとき，小さいカブトムシは同じ量の適応 5 を分け合うことになるが，大きいカブトムシはそのサイズゆえより小さい量の適応 3 を分け合うことになるとする。このままだと大きいカブトムシはすぐに絶滅すると思われるが，二種の相互作用を考えることにより話は変わってくる。小さいカブトムシと大きいカブトムシが争ったとき，大きいカブトムシは容易に餌を奪うことができるから，それぞれ 1 と 8 の適応を得ることになるとしよう。
以上の考察を表にまとめたものが表 1.4 である。カブトムシが選択的に体を大きくしたりはできないということに再度注意する。

	small	large
small	$(5,5)$	$(1,8)$
large	$(8,1)$	$(3,3)$

表 1: カブトムシのサイズ

1.5　進化論的安定戦略

1.5.1　定義

進化ゲーム論において，ゲーム理論におけるナッシュ均衡と同様の概念を考えることができる。これを進化論的安定 (Evolutionarily Stable) と呼ぶことにする。大まかな考え方としては，evolutionarily stable にある状態に少数の突然変異が発生したとしても，突然変異した種は絶滅し，もとの種のまま安定的に存在するという状況である。以下に定義を正確な定義を述べる。

定義 1.1 (適応) 集団中のある生物が得る適応とは，集団の構成要員との相互作用によってその種が得る *payoff* の期待値である。

定義 1.2 (侵略者) 戦略 T が戦略 S を x の *level* で侵略しているとは，$0 < x < 1$ なる x について，戦略 S と T を使っている個体数の比が $1 - x : x$ になっているということである。

定義 1.3 (進化論的安定) 戦略 S が進化論的安定とは，ある小さな y が存在して，任意の他の戦略 T が戦略 S を任意の x の *level* で侵略したとき，戦略 S を使っている生物の適応が戦略 T を使っている生物の抵抗よりも多きいということである。

定義ができたため，前述のカブトムシの例の進化論的安定性について考察することにする。

1.5.2　カブトムシの例

小さいカブトムシと大きいカブトムシの個体数の比が $1 - x : x$ で与えられているものとする。このとき小さいカブトムシが得る適応は $5(1 - x) + 1 \cdot x = 5 - 4x$ である。また大きいカブトムシが得る適応は $8(1 - x) + 3 \cdot x = 8 - 5x$ となる。これらを比較すると，$0 < x < 1$ においては常に大きいカブトムシが得

る適応の方が大きいとわかる。つまり小さいカブトムシは進化論的安定ではない。
次に小さいカブトムシと大きいカブトムシの個体数の比が $x : 1-x$ で与えられているものとする。このとき大きいカブトムシが得る適応は $3(1-x) + 8 \cdot x = 3 + 5x$ である。また小さいカブトムシが得る適応は $(1-x) + 5 \cdot x = 1 + 4x$ となる。これらを比較すると，$0 < x < 1$ においては常に大きいカブトムシが得る適応の方が大きい。よって大きいカブトムシは進化論的安定である。

1.5.3 進化論的安定性の直観的理解

小さいカブトムシの集団に小数の大きい個体が紛れ込むと，大きいカブトムシ同士で争うことはほとんどないため，大きいカブトムシの方がより高い適応を得やすいということは直観的に明らかである。また大きいカブトムシの集団に小数の小さい個体が紛れ込むと，小さい個体はほとんどの確率で大きい個体と争う必要があり，適応は小さくなるということが想像できる。
表 1.4 を見ると，囚人のジレンマゲームと同じ構造を持っているということがわかる。small が黙秘に対応し，large が自白に対応している。

1.5.4 進化的武力競争の実証的証明

木の高さや大豆の根，ウイルスにおいても同様の考察がなされている。

	Φ6	ΦH2
Φ6	$(1.00, 1.00)$	$(0.65, 1.99)$
ΦH2	$(1.99, 0.65)$	$(0.83, 0.83)$

表 2: ウイルスにおけるゲーム

1.6 進化的安定戦略の一般論

対称ゲームであるという制限の下に，進化的安定性を一般的に考察する。今回の進化ゲームのルールは以下の表 1.8.1 の形で表される。ここから戦略 S が進化的安定戦略になるための必要十分条件を考えよう。ま

	S	T
S	(a, a)	(b, c)
T	(c, b)	(d, d)

表 3: 対称ゲーム

ず戦略 S と T を持つ個体数がそれぞれ $1 - x : x$ の比率で存在しているものとする。このとき戦略 S をとることで得られる適応は $a(1-x) + bx$ であり，戦略 T をとることで得られる適応は $c(1-x) + dx$ である。任意の $0 < x \ll 1$ において前者が後者よりも大きければよいため，得られる条件は以下のようになる：

$$a(1-x) + bx > c(1-x) + d$$

よって次のような主張が成立する。

定理 1.1 (対称ゲームにおける進化的安定性) 表 *1.8.1* で定められる対称ゲームにおいて戦略 S が進化的安定になるための必要十分条件は，*(i)*$a > c$ または *(ii)*$a = c$ かつ $b > d$ となることである。

直観的理解は後で。

1.7　進化論的安定性とナッシュ均衡の関係

確認のためナッシュ均衡の定義を再掲する。

定義 1.4 (ナッシュ均衡) 戦略の組 *(S,T)* がナッシュ均衡であるとは，T に対する最適応答が S であり，かつ S に対する最適応答が T であるということである。

ここから明らかに以下の主張が成立する：

定理 1.2 (対称ゲームにおけるナッシュ均衡) 表 *1.8.1* で定められる対称ゲームにおいて戦略の組 *(S,S)* がナッシュ均衡になるための必要十分条件は，$a \geq c$ となることである。

さらに以下の主張も従う：

定理 1.3 (進化論的安定性とナッシュ均衡) 表 *1.8.1* で定められる対称ゲームにおいて，戦略 S が進化的安定ならば戦略の組 *(S,S)* はナッシュ均衡である。しかしその逆は成立しない。

以下に示す牡鹿と野ウサギゲームはナッシュ均衡であり，かつ進化的安定である。しかし次にように修正す

	S	T
S	$(4,4)$	$(0,3)$
T	$(3,0)$	$(3,3)$

表 4: 牡鹿と野ウサギゲーム 1

るとナッシュ均衡であるが進化的安定ではなくなる。定理 7.2 より，ナッシュ均衡であることは明らか。し

	S	T
S	$(4,4)$	$(0,4)$
T	$(4,0)$	$(3,3)$

表 5: 牡鹿と野ウサギゲーム 2

かし定理 7.1 と比較すると $0 = b < d = 3$ であるため進化的安定ではない。
さらに厳密ナッシュ均衡との関係を述べる。まず厳密ナッシュ均衡の定義を再掲する。

定義 1.5 (厳密ナッシュ均衡) 戦略の組 *(S,T)* が厳密ナッシュ均衡であるとは，T に対する厳密最適応答が S であり，かつ S に対する厳密最適応答が T であるということである。

ここから直ちに以下の定理が成立する：

定理 1.4 (対称ゲームにおける厳密ナッシュ均衡) 表 *1.8.1* で定められる対称ゲームにおいて戦略の組 *(S,S)* が進化的安定になるための必要十分条件は，$a > c$ となることである。

よって次の主張が成り立つ：

定理 1.5 (進化論的安定性と厳密ナッシュ均衡) 表 *1.8.1* で定められる対称ゲームにおいて，戦略の組 *(S,S)* が厳密ナッシュ均衡ならば戦略 S は進化的安定である。しかしその逆は成立しない。

以上の包含関係を図にしたものを以下に示す。NE はナッシュ均衡，ES は進化論的安定，SNE は厳密ナッシュ均衡をそれぞれ表している。
　ここでもやはりナッシュ均衡が意識的な行動選択によって生じているということに注意。welfare の話はよくわからない。

1.8 進化論的安定混合戦略

　以下のハトタカゲームを考える。ハトは平和的思考，タカは攻撃的思考を持っていることを表す。定義 7.4 と比較すると，戦略の組 (D,H) と (H,D) はそれぞれナッシュ均衡である。しかし進化的安定性を考えるうえではこれは全く役に立たない。なぜならば進化的安定性は集団がほとんど 1 種類のメンバーで構成されている状況を考えていたためである。よってゲーム理論と同様に，混合戦略に拡張する必要がある。

	S	T
S	$(3,3)$	$(1,5)$
T	$(5,1)$	$(0,0)$

表 6: タカハトゲーム

1.8.1 進化ゲーム理論における混合戦略の定義

　進化ゲーム理論において，混合戦略を持つということは 2 通りの解釈がある。1 つめは遺伝子的に縛られた単一の振る舞いをする種が 2 つ存在するという解釈。2 つめは単一の遺伝子からなる集団が確率的に振る舞いを変えるという解釈である。いずれにおいても結果は変わらない。
引き続き表 3 で表される対称ゲームを考えることにする。念のために表を再掲する。生物 1 は確率 p で戦

	S	T
S	(a,a)	(b,c)
T	(c,b)	(d,d)

表 7: 対称ゲーム

略 S を取り，確率 $1-p$ で戦略 T を取ると仮定する。また生物 2 についても同様に確率 q で戦略 S を取り，確率 $1-q$ で戦略 T を取るものとする。このとき混合戦略 p を用いる生物 1 が一回のゲームで得る payoff の期待値 $V(p,q)$ は以下のようになる：

$$V(p,q) = pqa + p(1-q)b + (1-p)qc + (1-p)(1-q)d$$

ただしこれはあくまでも混合戦略 p を用いる生物が混合戦略 q を用いる生物と遭遇したときの payoff の期待値であって，適応そのものではないことに注意。適応を計算するためには，各戦略を用いる種の存在比率を考慮に入れる必要がある。

ここで進化論的安定混合戦略の定義を以下で与えることにする。

定義 1.6 (進化論的安定混合戦略) 対称ゲームにおいて，p が進化論的安定混合戦略であるとは，ある小さな y が存在して，任意の他の戦略 q が戦略 p を任意の $x(< y)$ の *level* で侵略したとき，戦略 p を使っている生物の適応が戦略 q を使っている生物の適応よりも大きいということである。

この定義は進化論的安定戦略の定義とよく似ているが，自身と相手側にも混合戦略を許容するという点で異なっている。よって以下の定理が成立することに注意。

定理 1.6 (進化的安定戦略と進化的安定混合戦略) $p = 0$ または $p = 1$ とした進化的安定混合戦略は進化的安定戦略である。しかし逆は成立しない。

逆が成立しないのは相手側に混合戦略を許容しているためである。つまり相手側の混合戦略として $0 < q < 1$ でありしかも十分に侵略的なものがあれば，進化的安定戦略を取っていたとしても進化的安定混合戦略にはなりえない。

以上の定義から，進化的安定混合戦略 p の満たすべき条件を書き下すことができる。つまり任意の $q \neq p$ に対して

$$(1 - x)V(p, p) + xV(p, q) > (1 - x)V(q, p) + xV(q, q)$$

が成立することが条件となる。ここで $q = p$ であれば同じ種になってしまうことに注意。なお，ナッシュ均衡とまったく同様の議論によって混合ナッシュ均衡と進化的安定混合戦略の関係は以下のようになる。一応，混合ナッシュ均衡の定義とそこから導かれる対称ゲームにおける主張を再掲する。

定義 1.7 (混合ナッシュ均衡) 戦略の組 (p, q) が混合ナッシュ均衡であるとは，戦略 p に対する最適応答が q であり，かつ q に対する最適応答が p であるということである。

ここから明らかに以下の主張が成立する：

定理 1.7 (対称ゲームにおける混合ナッシュ均衡) 戦略の組 *(p,p)* が混合ナッシュ均衡になるための必要十分条件は，戦略 p に対する *payoff* について，任意の確率 q に対し $V(p, p) \geq V(q, p)$ となることである。

よって以下の関係が成り立つ。

定理 1.8 (進化論的安定混合戦略と混合ナッシュ均衡) 対称ゲームにおいて，戦略 p が進化的安定混合戦略ならば戦略の組 *(p,p)* は混合ナッシュ均衡である。しかしその逆は成立しない。

1.8.2 ハトタカゲームにおける進化的安定混合戦略

先ほどの定理 7.8 より，ハトタカゲームにおいて進化的安定混合戦略が存在するならばそれは混合ナッシュ均衡にもなっているはずである。よってまず混合ナッシュ均衡を求め，その後それが進化的安定混合戦略になっているかを確認する。

まず表 1.8 に基づいて payoff の期待値を計算する。戦略 p に対して戦略 q を用いたときに得られる payoff の期待値は

$$V(q, p) = 3pq + q(1 - p) + 5(1 - q)p$$

となる。またここから $V(p,p) = -3p^2 + 6p$ である。よって対称ゲームにおける混合ナッシュ均衡の必要十分条件 (定理 7.7) より，

$$-3p^2 + 6p \geq q + 5p - 3pq$$

という不等式が任意の q に対して成立するような p を求めればよい。少し変形すると

$$(1 - 3p)(p - q) \geq 0$$

となる。$p \neq 1/3$ であれば，p を一度決めてしまうと q を変化させせることで不等式が成立しないようにできる。よって任意の q に対してこの不等式が成立するには $p = 1/3$ しかありえない。つまり混合ナッシュ均衡 (p,p) は $p = 1/3$ で与えられる。

以上の変形を用いると，$p = 1/3$ を代入したとき任意の q に対して $V(p,p) = V(q,p)$ となることがわかる。よって進化的安定混合戦略の必要十分条件と比較すると，戦略 $p = 1/3$ が進化的安定混合戦略であるには $V(p,q) > V(q,q)$ が任意の q に対して成立することが必要。先ほどと同様に計算すると，

$$V(p,q) = 4q + 1/3$$

$$V(q,q) = 6q - 3q^2$$

であるから

$$V(p,q) - V(q,q) = \frac{1}{3}(3q - 1)^2$$

と変形できる。$q \neq p = 1/3$ だから右辺は常に正であり，ゆえに $p = 1/3$ は進化的安定混合戦略であると示された。

1.8.3 進化的安定混合戦略の解釈

前述のように，進化的安定混合戦略について二通りの解釈をすることができる。一つ目は全個体が同じ遺伝的特性を有しており，確率 1/3 で和平的，確率 2/3 で攻撃的になるというもの。もう一つは全個体のうち 1/3 が遺伝的に和平的な行動しかせず，残り 2/3 が遺伝的に攻撃的な行動しかしないというものである。しかしどちらで解釈しようとも，計算の結果は同じになる。

同様の構造は生物学の他の分野でも見られる。以下の表 1.8.3 のようなウイルスのゲームを考えると，囚人のジレンマというよりはタカハトゲームのような構造を持っていることがわかる。つまりナッシュ均衡は $(\Phi 6, \Phi H2)$ と $(\Phi H2, \Phi 6)$ であり，ここから進化的安定混合戦略が観測されると期待できる。

囚人のジレンマとタカハトゲームの違いについて考える。囚人のジレンマでは協力して黙秘するよりも，利己的になって自白する方が有利である。ゆえにどちらのプレイヤーも利己的な戦略を選ぶことになる。一方，タカハトゲームにおいてはともに利己的になって攻撃した場合のペナルティーが大きい。よって両者とも協力的な戦略を選ぶことになると考えられる。

	Φ6	ΦH2
Φ6	$(1.00, 1.00)$	$(0.65, 1.99)$
ΦH2	$(1.99, 0.65)$	$(0.50, 0.50)$

表 8: ウイルスにおけるゲーム