

太阳影子定位技术研究

摘 要

太阳影子定位技术可通过对视频中物体的本影变化进行分析,因此,本文就这一技术进行多方面探究,力求提高日期与地点的判断精度。

本文将日影定位问题转化为基于日影函数模型,确定等高度角地区的几何问题,得到了定时、定位的最优解。

首先,建立日影函数模型,通过正向求解,得到天安门广场在给定条件下的影长变化规律:以地方时 12:00(北京时间 12:16)为轴,先变短后增长,关于时间对称分布。

其次,建立非线性优化模型,分析日照情况及几何关系,并定义“等高度角圆”,以“影长——日影函数及几何关系——等高度角圆——空间平面”的思路,建立了非线性超静定方程组进行求解。

在求解算法方面,本文选择了 L-M 最小二乘算法,并优化其流程,采用先“试算”后“求解”的方法,得到结果如下:

1) 日期已知的附件 1 分析结果有 2 解:

杆长 2m, 位于海南(19.28°N , 109.04°E);

杆长 2.8m, 位于滇缅边境(24.70°N , 98.05°E)。

2) 日期未知的附件 2 分析结果有 3 解:

杆长 2m, 位于新疆(39.36°N , 79.58°E), 日期为 05-20 或 07-24, 另有两解位于印度洋上。

3) 日期未知的附件 3 分析结果有 4 解:

杆长 3m, 位于湖北十堰(32.86°N , 110.24°E), 时间为 02-07 或 11-05;

杆长 3.6m, 位于北部湾中部(20.84°N , 108.67°E)。时间为 01-10 或 12-03。另有两解在印度洋。

此后,本文针对实际视频进行数据采集,应用问题 2 所建模型求解,得到附件 4 分析结果:位于内蒙古呼和浩特北部(41.09°N , 111.78°E)。

若未知日期,则应用问题 3 修正得到模型求解,分析结果:位于内蒙古边境(41.98°N , 109.17°E), 日期为 06-21, 另有一解位于印尼。

总的来说,定位结果均比较合理,且本文揭示了其存在双解的规律。最后,本文基于问题 1 的结果进行互检,初步验证了模型的合理性。并提出了视频分析的修正方法。

关键词: 太阳影子定位, 等高度角圆, 非线性超定方程, L-M 优化算法。

一. 问题简述

1.1. 问题背景

视频数据分析的关键部分是如何确定视频的拍摄日期、地点。太阳影子定位技术可通过对视频中物体的本影变化进行分析，解决前述问题。因此，本文就这一技术进行多方面探究，力求提高日期与地点的判断精度。

1.2. 目标任务

- 1) 建立影长变化的数学模型，分析影长关于各参数的变化规律，并应用该模型画出题目给定时间、地点、杆高的日影长度变化曲线。
- 2) 根据给定日期的固定直杆日影顶点坐标数据，建立模型确定直杆所处地点。并应用模型求解附件1的日影顶点坐标数据，给出可能地点。
- 3) 根据固定直杆日影顶点坐标数据，建立模型确定其所处地点、日期。应用模型分别求解附件2、3的日影顶点坐标数据，给出可能的地点、日期。
- 4) 已知附件4拍摄日期，杆高为2米，建立数学模型确定视频拍摄地点；并试在未获取拍摄时间的前提下确定可能的拍摄地点、日期。

二. 模型假设

- 1) 太阳体积远大于地球，且距离足够远，因此可假设日光平行入射；
- 2) 太阳直射点纬度日变化为0.3度，故假设在一天内直射点不发生改变；
- 3) 为便于计算，假设地球为正球体；
- 4) 假设视频中投影面水平，日影为平直线段，忽略其微小坡度变化。

三. 符号说明

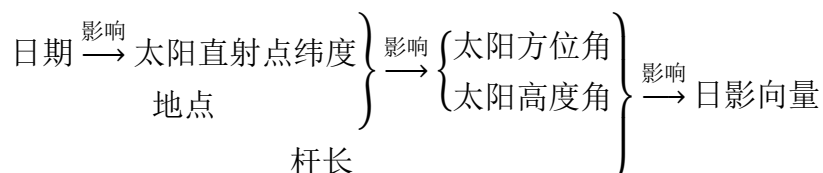
D	日期
n	日期序数
T, ST	时区时、真太阳时
C_{ij}	等高度角圆
φ, β	纬度、经度
x, y, z	空间坐标
L	日影向量
H	杆长
α	太阳高度角
γ	太阳方位角
δ	太阳赤纬角
ω	时角
ε	黄赤交角

四. 问题分析

4.1. 综合分析

日影向量与太阳高度角、太阳方位角、杆长直接相关。在杆长度一定的情况下，太阳高度角决定日影长，太阳方位角直接决定日影方向。究其本质，二特征角由太阳直射点、日期、地理位置决定。

综上，可作映射关系模型示意：

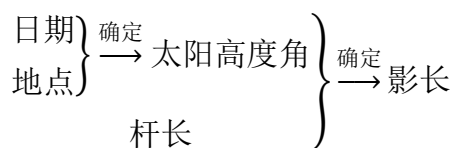


本题即通过理清其中的函数关系，根据已知量进行求解。其中，第一问为确定函数关系并正向求解，其余各问为逆向求解。

4.2. 目标问题分析

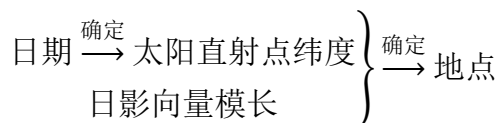
1) 问题一：

本问要求确定日影与各变量的函数关系，此后根据已知地点与日期，结合杆长求得影长，即日影向量的模长。由几何关系可知，中间变量只需考虑太阳高度角。



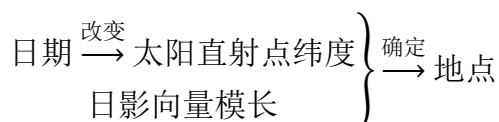
2) 问题二：

已知日期，太阳直射点纬度不变，根据已知日影数据，可通过建立几何模型，解方程组反求符合条件（太阳高度角 α 随时间变化规律相同）的地点。



3) 问题三：

日期未知，太阳直射点发生移动，首先需描述时间对直射点的影响，再根据已知日影数据，通过修正几何模型反求符合条件的所有可能地点。



4) 问题四：

本问为问题二、问题三情景的实例应用，需分析视频得到日影向量数据，在已知日期的情况下依据第二问求得拍摄地点，再依据第三问试求拍摄日期、地点。

五. 模型建立与求解

5.1. 影长求解问题

5.1.1. 日影向量与各变量关系分析

1) 日影函数的提出

日影向量与各变量之间存在函数关系：

$$\begin{cases} L=f(\alpha, \gamma, H) \\ \alpha=g(\varphi, T) \\ \gamma=h(\varphi, \alpha, T) \end{cases} \quad (5-1)$$

其中：

α ——太阳高度角；

γ ——太阳方位角；

φ ——当地纬度；

T ——时间（日期与时刻）；

2) 中间变量关系的确定

太阳照射情形如下图^[1]所示：

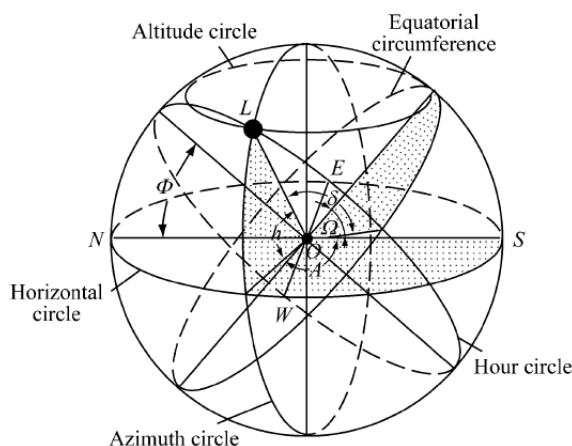


图5-1 太阳照射情况示意图

由图中几何关系可列：

$$\sin \alpha = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega \quad (5-2)$$

式中：

δ ——赤纬角，即太阳直射点、地心所连直线与赤道面的夹角；

ω ——时角，即从观测点天球子午圈沿天赤道量至太阳所在时圈的角距离。

其中， φ 可直接确定， δ 与 ω 可进一步由时间量求得。

3) 几何中间量与自变量关系的确定

赤纬角 δ 、时角 ω 与两个自变量 D 、 ST 存在映射关系： $\delta=f(D)$ ， $\omega=g(ST)$ 。

已知赤纬角变化范围为 $|\delta| \leq \varepsilon$ ，又知地球表面为球面，因此赤纬角在一年内变化速率不均匀，当直射点远离赤道时，变化速率减缓，反之速率增加，依据相关研究^[1]，可使用正弦经验公式：

$$\delta = \varepsilon \sin \left[\frac{360}{365} \times (284+n) \right] \quad (5-3)$$

取黄赤交角 $\varepsilon=23.45^\circ$ ， n 为所求日期 D 在一年内的序数。

又由太阳时角与时刻的关系：

$$\omega = 15^\circ \times (ST-12) \quad (5-4)$$

ST 为真太阳时，取太阳位于当地正南方向的时刻为正午12时，则有换算关系：

$$ST = T + \frac{\beta - \beta_T}{15^\circ} \quad (5-4)$$

式中 β 为当地经度， β_T 为当地所处时区的时刻完全对应的经度。

4) 影长函数的确定

由投影关系可得影长：

$$|L| = \frac{H}{\tan \alpha} \quad (5-5)$$

综上所述，将各式代入式(5-5)，可得影长函数的最终形式：

$$|L| = \frac{H}{\tan \left\{ \sin^{-1} \left[\sin \varphi \cdot \sin \left(\varepsilon \cdot \sin \frac{360 \times (284+n)}{365} \right) + \cos \varphi \cdot \cos 15(ST-12) \cdot \cos \left(\varepsilon \cdot \sin \frac{360 \times (284+n)}{365} \right) \right] \right\}} \quad (5-6)$$

由此，输入时间量 n 、 ST ，纬度 φ ，杆长 H ，即可求得相应影长 $L = |L|$ 。

5.1.2. 基于实例的日影函数求解

1) 输入变量的确定

由题意：北京天安门的经纬度为 $(39^\circ 54' 26'' \text{N}, 116^\circ 23' 29'' \text{E})$ 。10月22日为2015年的第295天，将北京时间换算为北京地方时，得到时角计算公式为：

$$\omega = 15^\circ \times (T-12) + 4^\circ \quad (5-7)$$

式中 T 为北京时间，单位： h 。

2) 影长求解

将上述变量输入式(5-5)，使用MATLAB求解（代码见solve1.m），各变量及部分计算结果如下表所示（中间时段数据详见附录或附件）

表5-1 北京天安门日影长度解表

φ	H/m	n/day	T/h	ST/h	L/m
$39^{\circ}54'26''$	3.0	295	9:00	8:44	7.84
			9:10	8:54	7.26
			9:20	9:04	6.77
		
			14:40	14:24	5.60
			14:50	14:34	5.91
			15:00	14:44	6.27

由此可得影长与时间变化关系图：

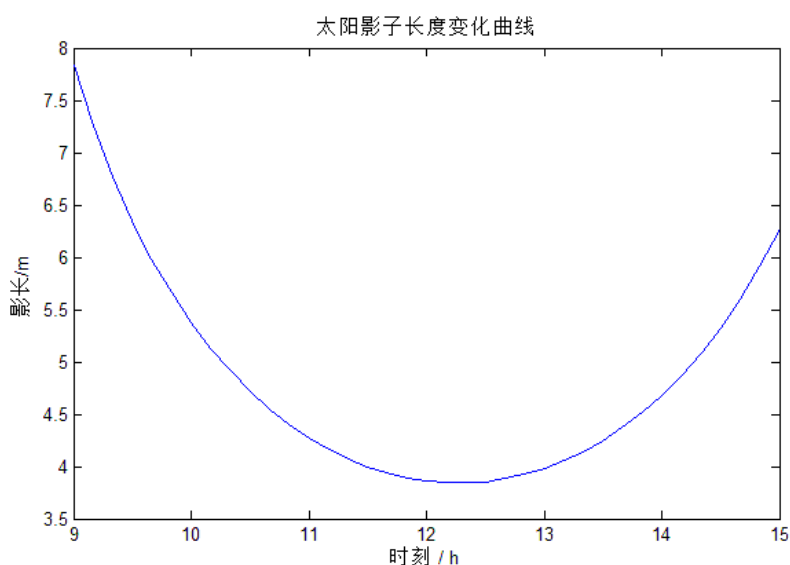


图5-2 日影长度(m)随时间(h)变化关系

如图所示，该地日影长度在9：00至12：15期间缩短，12：16至15：00期间增长，可知天安门的真太阳时12：00为北京时间12：16。

5.2. 给定日期的日影定位问题

5.2.1 定位原理分析

依据日影坐标定位，即寻找日影坐标随时间变化规律相同的若干地区，由于附件中所给坐标轴方向未知，故将日影向量取模，研究其影长随时间变化规律。在不同时刻，影长与日影顶点坐标有如下关系：

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5-8)$$

由于太阳高度角与影长存在函数关系，因此各个目标地区的太阳高度角 α 随时间变化规律也相同，因此，目标任务等价于：确定太阳高度角 α 随时间变化规律相同的地区。据此作入射模拟图寻找这些地点，进行分析：

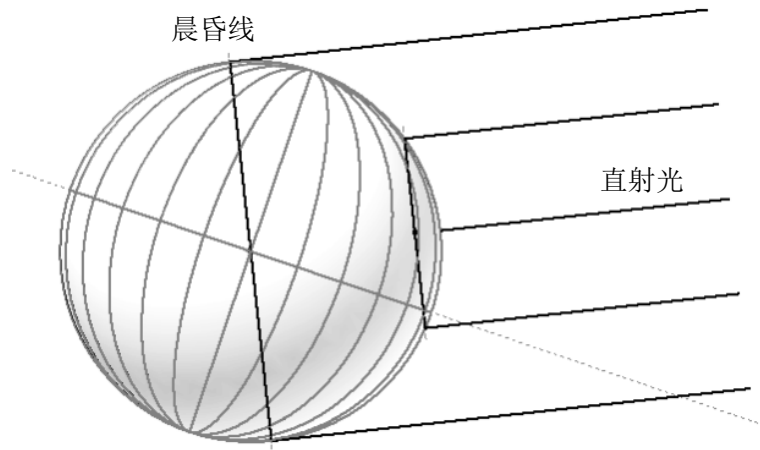


图5-3 太阳入射情况模拟图

上图显示，以太阳直射点为圆心，在同一时刻，不同 α 值的地点构成了一组同心圆，而同圆上 α 值均相等，其边界圆为晨昏线，定义每个圆为等高度角圆 C 。在日期 D 确定的条件下，根据模型假设，忽略直射点纬度日变化，仅考虑直射点经度日变化对 α 的影响，可作下图：

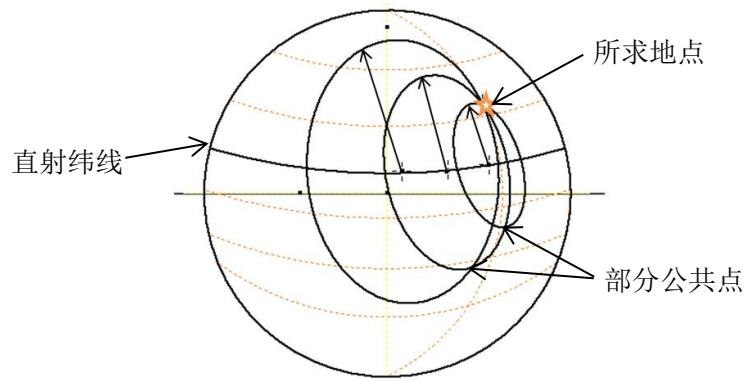


图5-4 等高度角圆公共点示意图

在一天内，随着时刻 t 的改变，直射点沿纬线移动，地球表面具有不同 α 值的地点构成了 i 组同心等高度角圆。在不同时刻的 i 组同心等高度角圆中，以所求地点与直射点距离为半径的 i 个圆 C_{1j} 、 C_{2j} ... C_{ij} 相交于地球上一点，也就是说，这 i 个圆所在的空间平面也必然相交于地球上一点，该公共点即为所要确定的地点。

5.2.2 基于几何关系的非线性优化模型建立

1) 由等高度角圆建立空间平面方程组

以地球球心为坐标原点，以原点指向点 $(0^\circ, 0^\circ)$ 方向为 x 轴正方向，指向点 $(180^\circ, 0^\circ)$ 方向为 y 轴正方向，指向北极点方向为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系。

如上所述，根据给定日影顶点坐标数据可求得影长 L 。在任意时刻，由几何关系知：

$$\sin \alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}} \quad (5-9)$$

α 为该时刻太阳高度角，此时可确定等高度角圆C，太阳照射情况如下所示：

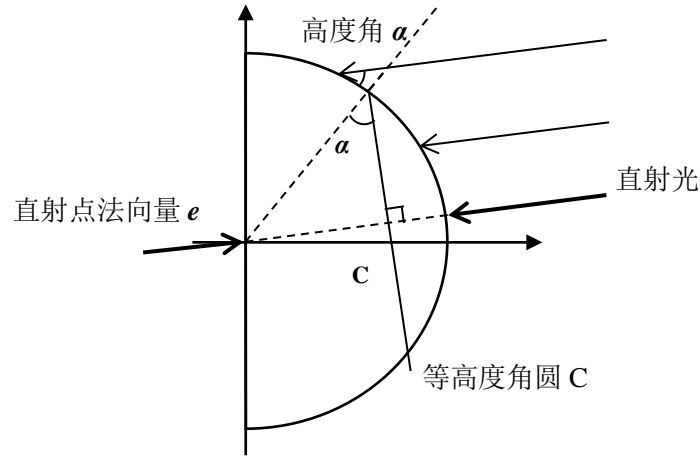


图5-5 等高度角圆几何关系侧视图

图中 $C(x_0, y_0, z_0)$ 为通过目标地点的等高度角圆圆心，由此可列任一时刻等高度角圆C所在的平面方程：

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \vec{e} = 0 \quad (5-10)$$

设直射点经度 β ，纬度 φ ，则有：

$$\begin{cases} x_0 = R \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta \\ y_0 = R \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \beta \\ z_0 = R \sin \alpha \cdot \sin \varphi \\ \vec{e} = (\cos \varphi \cos \beta, \cos \varphi \sin \beta, \sin \varphi) \end{cases} \quad (5-11)$$

式中取地球半径 $R=6400\text{km}$ ，进一步整理得：

$$\left(x - \frac{HR \cos \varphi \cdot \cos \beta}{\sqrt{H^2 + L^2}}, y - \frac{HR \cos \varphi \cdot \sin \beta}{\sqrt{H^2 + L^2}}, z - \frac{HR \sin \varphi}{\sqrt{H^2 + L^2}} \right) (\cos \delta \cos \beta, \cos \delta \sin \beta, \sin \delta) = 0 \quad (5-12)$$

这是一个以 x, y, z, H 为未知量的四元方程，它描述了等高度角圆所在的平面。随着时间的变化， φ 为常数，而 β, L 均发生改变，其中：

$$\beta(t) = \beta(0) - 15^\circ(t-12) \quad (5-13)$$

$\beta(0)$ 为初始时刻直射点经度， t 为时刻，其单位以小时计。 L 的变化为已知量，将各参数输入，即得不同时刻等高度角圆所在空间平面的方程组：

$$\begin{cases} (x_1 - x_{01}, y_1 - y_{01}, z_1 - z_{01}) \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ (x_2 - x_{02}, y_2 - y_{02}, z_2 - z_{02}) \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vdots \\ (x_n - x_{0n}, y_n - y_{0n}, z_n - z_{0n}) \cdot \vec{e}_n = 0 \end{cases} \quad (5-14)$$

该空间平面方程组的解可确定杆长 H ，以及具有相应高度角变化规律的空间位置坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ，再经换算即可得到地理经纬坐标。

2) 基于L-M最小二乘的优化算法

i. 算法选择

观察方程组(5-12)可知,这是一个四元非线性方程组,由于日影长数据较多,因此在一般情况下方程组是超定的。针对非线性方程组,本文采用L-M (Levenberg—Marquardt)算法进行求解。

由相关资料^[2]可知,L-M算法是在Hessian阵之上加一个正定矩阵,进行分析评估,追踪梯度变化以求得极(最)值的算法。它同时具有梯度法和牛顿法的优点。当 λ 很小时,步长等于牛顿法步长,当 λ 很大时,步长约等于梯度下降法的步长,因此其收敛速度比较快。

ii. 计算流程优化

由图5-3可知,方程组的解实质上是 n 个空间平面上的圆的公共交点,然而,易知各圆还存在其他非公共交点(只满足一部分平面方程的局部最优解)。由于L-M算法的原理是追踪梯度变化,因此其对初值条件的选择依赖性较强,直接求解 n 个方程很容易陷入非公共交点或由此引发迭代次数过多,因此,应用这一算法需要优化计算流程:

首先,应对初值范围进行估测,从而选择合理的初值条件;同时,还应选取方程组中的部分方程求解,得到几个局部最优解,再有的放矢,将全部方程代入,最终得到全局最优解。

在实际求解过程中,还应根据数学软件给出的反馈“最优”、“迭代次数过多”、“梯度过小”等信息对初值进行调整,以保证结果相对准确。

iii. 初值范围的确定

a) 地理参数估测

首先对初值的地理范围进行估测,设给定日期的太阳直射点为 (φ_0, β_0) ,其纬度不随时间改变,其经度在所给时段的变化范围为: $\beta_0 \in [\beta_1, \beta_2]$ 。

根据所给数据,求得影长 L 随时间变化规律,进行如下讨论:

若影长逐次变短,可知该点位于初始时刻晨昏线与结束时刻直射点经度之间,即 $[\beta_1-90^\circ, \beta_2]$ 区间内;若影长逐次变长,可知该点位于初始时刻直射点与结束时刻晨昏线之间,即 $[\beta_1, \beta_2+90^\circ]$ 区间内;若影长存在极小值,则可直接确定其所在经度 β ,不须进行估算。

再依惯例^[3]将纬度划分为中纬度、低纬度、高纬度共五个区域,在五个区域中分别取不同经度的初值,选取方程组中的少量(本文取4个)方程,构成试验方程组并试算求解,以确定该纬度范围内的局部最优解点,这些局部最优解点即成为后续方程组求解的备选初值。

b) 杆长估测

取试验方程组,求得影长 L 后,取区间 $[0.3L_{min}, 3L_{max}]$,以0.05m为步长进行迭代试解,观察其地理参数 (φ, β) 的变化情况,以选择合理初值。

5.2.3 模型求解

1) 四元非线性方程组的建立

根据前述原理，对附件一所给数据进行处理如下：

表 5-2 附件一数据处理

T	ST	L	T	ST	L
14:42	14:26	1.15	15:15	14:59	1.54
14:45	14:29	1.18	15:18	15:02	1.58
14:48	14:32	1.22	15:21	15:05	1.62
14:51	14:35	1.25	15:24	15:08	1.66
14:54	14:38	1.28	15:27	15:11	1.70
14:57	14:41	1.32	15:30	15:14	1.75
15:00	14:44	1.35	15:33	15:17	1.79
15:03	14:47	1.39	15:36	15:20	1.84
15:06	14:50	1.43	15:39	15:23	1.88
15:09	14:53	1.46	15:42	15:26	1.93
15:12	14:56	1.50			

将附件所得 ST 、 L 数据代入式(5-12)并联立，可得四元非线性方程组。

2) 初值范围的确定

基于前述分析，根据太阳直射点限定经度范围为：[75.9°E,165.9°E]，再对纬度进行划分，每次选取 4 个方程，使用 MATLAB 输入初值，进行联立试解（代码见 solve2.m）。

通过改变输入杆长进行试算，发现杆长的初值设定对结果几乎没有影响，原因可能是其变化范围较小，因此在这一问中，计算时取杆长为 2m。

根据试解结果的反馈，得到 4 个备选初值点： $A_{0i}(x_i, y_i, z_i, H_i), (i=1,2,3,4)$ ，使得 f （目标函数）趋近 0： $A_{01}(-3000,4000,5000,3)$ 、 $A_{02}(-3000,4000,3000,2)$ 、 $A_{03}(-1000,4000,3000,2)$ 、 $A_{04}(-2000,4000,3000,2)$ 。

3) 迭代计算与结果分析

基于试算的结果，联立 21 个方程，取上述 4 个初值代入，使用 MATLAB 进行计算（见”solve2.m”）。对解得的空间坐标再进行转换（见”change.m”），解得地理位置及杆长如下：

表 5-2 不同初值条件结果

初值点	纬度	经度	杆长/m	结束条件
A01	19.3	109	2	梯度趋近 0
A02	19.3	109	2	梯度趋近 0
A03	24.7	98	2.8	梯度趋近 0
A04	19.3	109	2	梯度趋近 0

表中所列结果可分为两组，最终定位得到下述两个可能的地点：

表 5-3 日影定位结果

地点	纬度/度	经度/度	杆长/m	地理位置
A ₁	19.2757	109.0420	2.00	海南
A ₂	24.6996	98.0506	2.80	滇缅边境



A₁: 海南(19.2757N,109.0420E)

A₂: 滇缅边境(24.6996N,98.0506E)

图5-6 已知日期的日影定位结果示意图

由图表可知，两个可能的地点较为接近，经纬度差距均在 10°左右，可能为两个最优解，也可能存在一定的计算误差。

5.3. 未知日期的日影定位问题

5.3.1. 非线性优化定位模型修正

1) 未知元增加

当日期不确定时，太阳直射点的经度、纬度、及观测点高度角都将发生改变，其中纬度随日期序数 n 改变，则有映射关系：

$$\varphi = \varphi(n) \quad (5-15)$$

根据式(5-12)可得：

$$\left(x - \frac{HR \cos \varphi(n) \cdot \cos \beta}{\sqrt{H^2 + L^2}}, y - \frac{HR \cos \varphi(n) \cdot \sin \beta}{\sqrt{H^2 + L^2}}, z - \frac{HR \sin \varphi(n)}{\sqrt{H^2 + L^2}} \right) (\cos \delta \cos \beta, \cos \delta \sin \beta, \sin \varphi(n)) = 0 \quad (5-16)$$

这是以 x, y, z, H, D 为未知量的五元方程，它依然描述等高度角圆所在平面。因此，只需增加日期序数变量 n ，依(5-14)式联立方程组，输入参数 L, T 进行试算及求解即可。

2) 最优解出现对称性

该空间平面方程组的解可确定杆长 H ，日期序数 n ，以及具有相应高度角变化规律的空间位置坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ，再经换算即可得到地理经纬坐标。由于太阳直射点周期性移动，且地球南北对称，因此，所得日期应是相互对称的两个解。

5.3.2. 模型求解

1) 五元非线性方程组的建立

根据前述原理，对附件二、三所给数据进行处理如下：

表 5-4 附件二数据处理

T	ST	L	T	ST	L
12:41	12:25	1.25	13:11	12:55	1.02
12:44	12:28	1.22	13:14	12:58	1.00
12:47	12:31	1.20	13:17	13:01	0.99
12:50	12:34	1.18	13:20	13:04	0.97
12:53	12:37	1.15	13:23	13:07	0.95
12:56	12:40	1.13	13:26	13:10	0.93
12:59	12:43	1.11	13:29	13:13	0.91
13:02	12:46	1.09	13:32	13:16	0.90
13:05	12:49	1.07	13:35	13:19	0.88
13:08	12:52	1.04	13:38	13:22	0.87
			13:41	13:25	0.85

表 5-5 附件三数据处理

T	ST	L	T	ST	L
13:09	12:53	3.53	13:39	13:23	3.73
13:12	12:56	3.55	13:42	13:26	3.76
13:15	12:59	3.56	13:45	13:29	3.79
13:18	13:02	3.58	13:48	13:32	3.82
13:21	13:05	3.60	13:51	13:35	3.85
13:24	13:08	3.61	13:54	13:38	3.88
13:27	13:11	3.64	13:57	13:41	3.92
13:30	13:14	3.66	14:00	13:44	3.96
13:33	13:17	3.68	14:03	13:47	4.00
13:36	13:20	3.71	14:06	13:50	4.04
			14:09	13:53	4.08

将附件所得 ST 、 L 数据代入式(5-16)并联立，可得五元非线性方程组。

2) 初值范围确定

基于前述分析，联立5个方程建立试解静定方程组。根据太阳直射点经度，限定地区 B_1 经度范围为：[4.75°E,94.75°E]， B_2 经度范围为：[102.75°E,167.25°W]，此后，再对纬度进行划分，输入初值。

通过试算，发现方程组的解主要受到初始输入经纬度影响，仍与杆长基本无关，因此，仍取杆长 $H=2m$ 。

此外，取太阳直射点位于赤道及南北回归线附近的4个节分日，发现初始日期对结果几乎没有影响，因此取试算得到的初值 $n=89$ ，以求得合理的定位结果。

综上,根据反馈,对 B_1 选取3个备选初值点,对 B_2 选取5个备选初值点: $B_{0i}(x_i, y_i, z_i, H, n_i), (i=1,2 \dots 8)$, 使得 f (目标函数) 趋近 0, 初值条件如下所示:

表 5-6 B_1 定位初值条件

初值点	X/km	Y/km	Z/km	H/m	n/day
B_{01}	500	5000	4000	2	89
B_{02}			0		
B_{03}			-4000		

表 5-7 B_2 定位初值条件

初值点	X/km	Y/km	Z/km	H/m	n/day
B ₀₄	-2000	5000	4000	2.5	89
B ₀₅			2000	2	
B ₀₆			-1000		
B ₀₇			-2000		
B ₀₈			-4000		

3) 迭代计算与结果分析

联立方程, 将附件二所得初值代入 MATLAB 进行计算 (见” solve3_1.m”)。对解得坐标进行转换 (见”change.m”), 得可能的地点、日期及杆长 H 列表如下:

表5-8 B_1 定位结果

地点	纬度	经度	H/m	日期	描述
B_{11}	39.3566	79.5834	2.00	05.20/ 07.24	新疆
B_{12}	-0.0022	79.0990	1.60	2015.12.20	印度洋
B_{13}	-39.3487	79.5807	2.00	01.22/ 11.23	印度洋

本文认为所给数据实际位于新疆的可能性更大。日期: 2015 年 5 月 20 日或 7 月 24 日, 地点: $(39.3566N, 79.5834E)$, $H=2m$ 。



图5-7 未知日期的日影定位结果示意图1

联立方程，将附件三所得初值代入 MATLAB 进行计算（见” solve3_2.m”）。同理，对解得的空间坐标进行转换，解得可能的地点、日期及杆长 H 列表如下，本文认为所给数据实际位于湖北十堰、北部湾中部的可能性更大。

表5-9 B₂定位结果

地点	纬度	经度	H/m	日期	描述
B ₂₁	32.8552	110.2442	3.00	02.07/ 11.05	湖北十堰市
B ₂₂	20.8438	108.6746	3.60	01.10/ 12.03	北部湾中部
B ₂₃	-19.7866	108.3467	3.70	06.22/ 06.20	澳大利亚西北临海
B ₂₄	-33.6737	110.9889	2.40	02.05/ 11.07	澳大利亚西南临海

a) 湖北十堰：

日期：2015 年 2 月 7 日或 11 月 5 日，地点： $(32.8552^{\circ}\text{N}, 110.2422^{\circ}\text{E})$, $H=3\text{m}$ 。其地理位置如下图所示：



图5-8 未知日期的日影定位结果示意图2

b) 北部湾中部：

日期：2015 年 1 月 10 日或 12 月 3 日，地点： $(20.8438\text{N}, 108.6746\text{E})$, $H=3.6\text{m}$ 。其地理位置如下图所示：



图5-9 未知日期的日影定位结果示意图3

5.4. 已知日期的视频定位问题

5.4.1. 视频定位问题简析

基于对问题二、问题三的研究,可知视频定位即是通过获取视频中的日影参数,以求得影长 L ,进而根据实际,利用前述建立并修正的模型进行求解的过程。

在杆长 H 和日期序数 n 已知的条件下,根据式(5-12),只有地理参数为未知量,即对空间坐标 x, y, z 列三元方程组,解法与问题二一致。

在日期序数 n 未知的条件下,方程变为三元,解法与问题二一致。

5.4.2. 日影参数获取与处理

由于杆长已知,本文采用 Potoshop (PS) 软件对视频进行测量分析^[4],获取日影像素参数,以比例法求得其实际参数,进行代入计算。数据采集步骤如下:

- 在视频中,每隔 2 分钟截图一次,置于文件夹中,并标号。
- 打开 Photoshop 软件,用标尺工具测出杆长 H ,记录。单位为像素。
- 同理,测量日影长度并记录。
- 重复步骤 c。直至完成 21 张图片操作。
- 以 $H=2m$ 为参照,将 L 等比缩放为以 m 为单位的值。

通过上述处理,得到日影数据:

5.4.3. 应用已知日期的优化模型求解

1) 初值条件的确定

在已知日期的条件下,方程为三元。首先联立三个方程,进行试解。根据太阳直射点限定经度范围,再对纬度分区输入初值,根据反馈,得到 f (f 为目标函数)接近于 0 的 2 个初值点:

$$E_{01}(-1500, 4500, 4000), E_{02}(-1500, 4500, -4000)。$$

2) 模型应用求解

增加方程数目以求得最优解,联立 21 个方程,将上述 2 个初值代入方程组,以 MATLAB 进行求解(见"solve4"),解得两组不同数据,本文认为实际位于 E1 (呼和浩特北部)可能性更大些:

表 5-10 已知日期的视频分析结果

地点	纬度	经度	描述
E1	41.0861	111.7822	内蒙古呼和浩特市北部
E2	-10.8484	125.6454	印度尼西亚海域

依据上表,得到 E1 地理位置如图所示:



图5-10 已知日期的视频定位结果示意图

5.4.4. 应用未知日期的优化模型求解

1) 初值条件的确定

在未知日期的条件下，方程为四元。首先进行试解，联立 4 个方程，限定经纬度范围，得到结果差异较大的 4 个初值点如下：

表5-11 未知日期视频定位初值条件

初值点	x/km	y/km	z/km	n/day
E_{03}	-1500	4500	4000	100
E_{04}	1500	4500	4000	180
E_{05}	1500	4500	-4000	180
E_{06}	1500	4500	-2000	180

联立 21 个方程，以上述四个初值代入求解，解得两组不同数据列表如下。

表5-12 未知日期的视频分析结果

地点	纬度	经度	日期	描述
E3	41.9797	109.1668	2015.06.21	内蒙古边境
E4	-41.9417	109.1614	2015.12.20	澳大利亚西南临海

本文认为位于 E3 可能性更大些，由上表数据可得 E3 地理位置如图所示：



图5-11 已知日期的视频定位结果示意图

与图 5-10 及表 5-11 比较，显然，未知日期的视频预判在日期和地点上都存在偏差，日期偏差为 22 天，偏离较大。纬度偏差 1° ，经度偏差 2° ，相对较小。

六. 模型检验评估

6.1 模型检验

1) 基本思路

由于解决影长问题是正向求解，且方法基于一一对应的映射关系，而解决定位问题采用的是基于几何关系的优化模型，因此模型检验的基本思路为互检。

可以将问题一所得结果代入问题二、问题三建立的模型中，观察其运算结果。若结果与问题一中所给条件相符，则模型具有一定的可靠性。

2) 已知日期的定位模型检验

根据问题二所建模型，代入数据，采取同样的方法求得结果如下：

表5-13 已知日期的模型检验

地点	纬度	经度	杆长
F1	39.9072	116.0000	3.00
F2	-46.7860	115.6019	5.50
天安门	39.9072	116.3913	3.00

其中 F1 点数据与天安门数据几乎相同，因此该模型相对合理，而 F2 点经度也比较准确，可能是日影变化规律相同的点。

3) 未知日期的定位模型检验

根据问题三所建模型，代入数据，（见 check.m）求得结果如下：

表5-14 未知日期的模型检验

地点	纬度	经度	杆长	日期
G1	39.9072	116.0000	3.00	2015.10.22 或 2015.02.21
G2	-39.8915	116.0001	3.00	2015.06.20 或 2015.06.23
天安门	39.9072	116.3913	3.00	2015.10.22

其中 A 点数据与天安门数据几乎相同。通过上述检验，验证了一二问模型具有高度互洽性，对准确性有较大的把握，因此，应用于视频分析是合理的。

6.2 成果简述

本文以几何方法对日影数据进行分析，在模型中将向量转化为数量，避免了讨论观测点参考系建立方式的麻烦，直观可靠。

采用坐标转换的手段，降低了模型求解的运算难度。

采用了先“试算”后“求解”的计算流程，充分发挥了 L-M 最小二乘优化方法的优势，减少了误算。

6.3 问题思考

1) 基于计算结果的规律总结

若已知日期，一般地，具有特定日影变化规律的地点集中在两个区域内——不对称的两个解，只有在春分、秋分两天，根据对称性，可知存在南北对称的两个解。

若未知日期，进行地点预测有多解的可能，且必然存在对称性。

2) 视频数据采集问题与修正

视频中所给直杆并非一体，而是由两根杆连接而成，因此其投影也是弯曲的直线，直接测量日影起止点的距离必然存在一定误差。可以通过延长底部杆所对应的影长至日影顶点，得到与上半段日影平行的直线，此时底部日影与其延长线的长度即为修正后的日影实际长度。

直杆底座有一定的尺寸，可能影响测量的精确性，因此可将日影与直杆延长并相交于一点，此点即为计算直杆与日影长度的起始点。

由于实际日影与直杆夹角为 90° ，因此，根据镜头成像原理^[5]，可测量在视频中的夹角 θ ，以修正的日影长度。设日影像素长度为 l' ，直杆像素长度为 h' ，则修正后的像素转换比例公式为：

$$L = \frac{2l'}{h' \sin \theta} \quad (6-1)$$

七. 参考文献

- [1] 窦伟，许红华，李晶. 跟踪式光伏发电系统研究[J]. 太阳能学报，2007, 28(2):169-173.
- [2] 百度百科, L-M 方法, http://baike.baidu.com/link?url=YPE_4ttiUf9FTOtvZklVXdW4PB8-c0Sn2yWah76FmJoTkQzfKjNAFro50Xn5GWHadbNtLWv7hRc-_RbUJdory, 2015.9.13.21:16.
- [3] 李峰, 夏季亚洲中高纬度地区阻塞高压与中国强降雨的关系及其活动机理研究, 2005.04.
- [4] 李金明, 李金蓉编著, ps cc 软件从入门到精通. 北京. 人民邮电出版社. 2017.7.
- [5] 韩黄璞, 基于成像规律的 CCD 镜头畸变的快速校正, 西安工业大学 2012.05.03.

附录：

一. 问题一解表

T	L	T	L	T	L
9:00	7.835253	11:10	4.162899	13:20	4.143131
9:10	7.26241	11:20	4.07078	13:30	4.248927
9:20	6.772039	11:30	3.994979	13:40	4.372794
9:30	6.348566	11:40	3.934809	13:50	4.516069
9:40	5.980306	11:50	3.889755	14:00	4.680426
9:50	5.658347	12:00	3.859443	14:10	4.867947
10:00	5.375794	12:10	3.843632	14:20	5.081229
10:10	5.127249	12:20	3.842197	14:30	5.323515
10:20	4.908449	12:30	3.855127	14:40	5.598875
10:30	4.716002	12:40	3.882522	14:50	5.912456
10:40	4.547194	12:50	3.924603	15:00	6.270816
10:50	4.399848	13:00	3.981713		
11:00	4.272216	13:10	4.054339		

二. 第二问数据处理

	方程数	x	y	z	l	纬	经	L	评价	
试解	4	-3000	4000	3000	3	8.7	114.9	1.7	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	-3000	3	8.47	114.9	1.7	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	5000	3	19.3	108.9	2	优	
	4	-3000	4000	5000	2	19.3	108.9	2	优	
	4	-3000	4000	-5000	2	0	124.5	1.1	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	-3000	2	8.07	114.9	1.7	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	1000	-2	8.07	114.9	1.7	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	-1000	-2	8.07	114.9	1.7	迭代次数达到上限	
	4	-3000	4000	3000	2	19.31	108.9	2	优	
	4	-1000	4000	3000	2	23.6015	101.6551	2.5	优 迭代次数达到上限	
	4	1000	4000	3000	2	23.6015	101.6551	2.5	优 迭代次数达到上限	
求解	21	-3000	4000	5000	2	19.3	109	2	梯度达到下限	①
	21	-3000	4000	3000	2	19.3	109	2	梯度达到下限	
	21	-1000	4000	3000	2	24.7	98	2.8	梯度达到下限	②
	21	-1000	4000	3000	3	24.7	98	2.8	梯度达到下限	②
	21	-2000	4000	3000	2	19.3	109	2	梯度达到下限	
	21	-1000	4000	-3000	2	-3.8	102.5	2.3	迭代次数达到上限	
	太阳直射点：10.5，76									

三. 第三问数据处理

	方程数	x	y	z	l	n	纬	经	l	n	日期
试解	5	500	5000	4000	2	89	39.65	79.72	2	142	2015.05.22
	5	-500	5000	4000	2	89	39.39	91.39	3.1	172	2015.06.21
	5	-1500	5000	4000	2	89	39.39	91.39	3.1	172	2015.06.21
	5	0	5000	4000	2	89	40.54	80.34	2.1	149	2015.05.29
	5	1500	5000	4000	2	89	36.2598	78.95	1.9	1336	2018.08.28
	5	500	5000	2000	2	89	38.25	78.95	1.9	1336	2018.08.28
	5	500	5000	1000	2	89	1.27	76.5	1.5	-10	2014.12.21
	5	500	5000	0	2	89	0	80	1.6	354	2015.12.19
	5	500	5000	-1000	2	89	-1.27	76.5	1.5	172	2015.6.21
	5	500	5000	-2000	2	89	-38	78.9	1.9	28	2015.01.28
	5	500	5000	-4000	2	89	-39.6	79.7	2	19	2015.01.19
	杆长初值无影响										
	日期也无影响										
求解	21	500	5000	-4000	2	89	-39.3487	79.5807	2	21	2015.01.21
	21	500	5000	0	2	89	0	79.099	1.6	354.7	2015.12.20
	21	500	5000	4000	2	89	39.3565	79.5834	2	140.4	2015.05.20

四. 第三问数据处理2

	方程数	x	y	z	l	n	纬	经	L	n	日期	评价	
试解	5	-2000	5000	400 0	2 2	8 9	36.63	111.17	2.1	8	2015.01.08	迭代次数达到上限	①
	5	-4000	5000	400 0	2 2	8 9	40.16	122.02 9		-6	2014.12.25	无解	
	5	-2000	5000	200 0	2 2	8 9	21	109	3.6	-1 0	2014.12.31	迭代次数达到上限	②
	5	-4000	5000	200 0	2 2	8 9	21.7	109	3.5	-3 29 5	2005.12.23	迭代次数达到上限	
	5	-2000	5000	100 0	2 2	8 9	0	101		17 2	2015.06.21	梯度达到下限	
	5	-2000	5000	0	2	8 9	-6.1	104	6.2	53 7	2016.06.20	迭代次数达到上限	
	5	-2000	5000	-100 0	2 2	8 9	-11.8	106	5	17 2	2015.06.21	迭代次数达到上限	③
	5	-2000	5000	-200 0	2 2	8 9	-20.88	108	3.6	17 2	2015.06.21	迭代次数达到上限	④
	5	-2000	5000	-400 0	2 2	8 9	-36.6	111.09	2	16 8	2015.06.17	迭代次数达到上限	⑤
求解	2 1	-2000	5000	400 0	2 2	8 9	33.704 6	110.99 22	2.4	12	2015.01.12	迭代次数达到上限	√
	2 1	-2000	5000	200 0	2 2	8 9	20.843 8	108.67 46	3.6	10	2015.01.10	迭代次数达到上限	√
	2 1	-2000	5000	-100 0	2 2	8 9	-19.78 66	108.34 67	3.7	-1 92	2014.06.22	迭代次数达到上限	×
	2 1	-2000	5000	-200 0	2 2	8 9	-20.88 48	108.68 67	3.6	17 2	2015.06.21	迭代次数达到上限	×
	2 1	-2000	5000	-400 0	2 2	8 9	-33.67 37	110.98 89	2.4	14 98	2019.02.05	迭代次数达到上限	×
	2 1	-2000	5000	400 0	2 5	8 9	32.855 2	110.24 41	3	37. 6	2015.02.07	迭代次数达到上限	
	方程的解与日期初值无关												

五. 第四问数据处理

	方程数	x	y	z	纬	经	L	评价	
试解	4	-1500	4500	4000	42.8	112.1	2	梯度达到下限	
	4	1500	4500	4000	42.6	112	2	迭代次数达到上限	
	3	-1500	4500	4000	39.9	111.5	2	迭代次数达到上限 优	
	3	-3500	4500	4000	37.1	111.2	2	迭代次数达到上限 优	
	3	3500	4500	4000	44.1	112.3	2	迭代次数达到上限 优	
	3	-1500	4500	-4000	-14.3	133.8	2	迭代次数达到上限 优	
	3	-1500	4500	-2000	-11	125	2	迭代次数达到上限 优	
	3	3500	4500	-2000	4	117	2	迭代次数达到上限 优	
求解	21	3500	4500	-2000	-10.8	125.6	2		②
	21	-1500	4500	4000	41	111.7	2	梯度达到下限	①
	21	-3000	4500	4000	41	111	2	梯度达到下限	
	21	3500	4500	4000	41.1	111.7	2	迭代次数达到上限	
	21	-1500	4500	-4000	-10.8	125.6	2	迭代次数达到上限	
	21	-1500	4500	-2000	-10.8	125.6	2	梯度达到下限	
	太阳直射点 201.0, 162 72~162								

六. 第四问数据处理2

	方程数	x	y	z	n	纬	经	n	日期	评价	
试解	4	-1500	450 0	4000	180	17.8	127	304	2015.10.3 1	无解	①
	4	-1500	450 0	4000	100	17.8	127	35	2015.02.0 4	无解	①
	4	1500	450 0	4000	180	43.4	109	-922	2012.06.2 2	迭代次数达到上限	②
	4	-5000	450 0	4000	180	16.5	127	149.5	2015.05.2 0	无解	
	4	3500	450 0	4000	180	43.4	10. 3	-922	2012.06.2 2	迭代次数达到上限	
	4	-1500	450 0	-4000	180	-16. 5	127	856	2017.05.0 5	无解	③
	4	-1500	450 0	-2000	180	-16. 5	127	593	2016.08.1 5	无解	
	4	1500	450 0	-2000	180	-43. 4	109	4734	2027.12.1 7	迭代次数达到上限	④
	4	-1500	450 0	-2000	180	-16. 5	127	218	2015.08.0 6	迭代次数达到上限	
	4	3500	450 0	-2000	180	-35	108	1084	2017.12.1 9	无解	
求解	21	-1500	450 0	4000	180	41.9	109	172	2015.06.2 1	迭代次数达到上限	①
	21	-1500	450 0	4000	0	41.9	109	537	2016.06.2 0	迭代次数达到上限	①
	21	-1500	450 0	4000	200	41.9	109	537	2016.06.2 0	迭代次数达到上限	①
	21	1500	450 0	4000	180	41.9	109	-557	2013.06.2 2	迭代次数达到上限	
	21	-1500	450 0	-2000	180	-41. 9	109	354	2015.12.2 0	无解	②
	21	1500	450 0	-2000	180	-41. 9	109	1449 7	2055.04.2 3	迭代次数达到上限	
	太阳 200, 162										

七. 视频数据采集结果

取样点	像素长	计算长度	取样点	像素长	计算长度
原长	417.00	2.00	11	449.07	2.15
1	509.64	2.44	12	443.11	2.13
2	496.90	2.38	13	439.75	2.11
3	492.67	2.36	14	430.16	2.06
4	486.60	2.33	15	427.23	2.05
5	483.87	2.32	16	416.50	2.00
6	475.50	2.28	17	411.32	1.97
7	472.09	2.26	18	407.35	1.95
8	463.52	2.22	19	401.08	1.92
9	455.82	2.19	20	395.18	1.90
10	452.49	2.17	21	389.58	1.87