**2.6. Orthogonalité**

**2.6.1. Vecteurs orthogonaux** :

**Définition 1** :

Soient  un  et . On dit que deux vecteurs  et  de  sont orthogonaux relativement à  si , on écrit alors  ou tout simplement , s’il n’y a pas d’ambiguïté.

On dit aussi  orthogonal à  ou  orthogonal à , puisque  est symétrique.

**Remarque** : Le vecteur nul  est orthogonal à chaque vecteur de , en effet soit un vecteur de , alors  donc 

**Exemple**: Soit  définie comme suit : 

1/ Montrer que  et 

2/  et  sont –ils orthogonaux ?

**Solution** :

1/ On a  donc et  sont orthogonaux De même on a  donc 

2/ On a  donc les deux vecteurs et de  ne sont pas orthogonaux relativement à .

**Exemple**: Soit  définie comme suit : 

Montrer que pour tout vecteur on a 

**Théorème 1** :

Soient  un , ,  et  un vecteur de . On a l’équivalence suivante :  , ….. , 

**Démonstration :**

Supposons . Comme , … , donc , ….. , .

 Supposons , ….. ,  et , montrons 

On a , donc il existe et dans  tels que 

On a donc   

D’où .

**2.6.2. Noyau d’une forme bilinéaire symétrique :**

**Définition 1** :

Soient  un  ,  et  un sous-ensemble de  . On appelle l’orthogonal à  relativement à  le sous-ensemble de , qu’on note , défini comme suit :



**Exercice 1** : Soient  un  ,  et  un sous-ensemble de .

Montrer que  est un sous-espace vectoriel de 

**Définition 2 :**

Soient  un  et . Le sous-espace  de  s’appelle noyau de . On a donc .

**Définition 3** :

Soient  un  et .

On dit que  est non dégénérée si 

On dit que  est dégénérée si , c’est-à-dire contient au moins un vecteur non nul.

**Définition 5** :

Soient  un  et . On considère l’application  définie de  vers l’espace dual de  comme suit : 

où  est une forme linéaire définie sur  par : 

 est une application linéaire de  vers  appelée morphisme associé à 

**Proposition 1** :

Soient  un  et . On a 

**Démonstration**:

Soit  alors D’où 

**Proposition 2** :

Soient  un  de dimension finie ,  une base de ,  base duale de  et  dont la matrice relativement à  est . Alors la matrice de  relativement aux bases  et  est 

**Démonstration** : Soit  alors  , donc pour tout  on a . Or . D’où , c’est-à-dire 

**Théorème** 2: Soient  un  de dimension finie muni d’une base  et  dont la matrice relativement à  est . On a



**Démonstration** :

, or  et  donc .

**Exercice 1** : Soit  définie comme suit : 

1/ Déterminer 

2/ est-elle non dégénérée ?

**Solution**:

Soit 

D’après le **théorème 1** on a

  et  

D’où 

2/ On a donc  est non dégénérée.

**Remarque** :

On peut utiliser le théorème 2  :

Ecrivons la matrice de  relativement à la base canonique 

,  ,  et 

On a donc  et donc  est non dégénérée

**Exercice 1** : Soit  définie comme suit : 

1/ Déterminer  2/ est-elle non dégénérée ? **Solution**:

Soit . D’après le **théorème 1** on a

  et   

D’où  

2/ On a donc  est dégénérée.

**Remarque** :

On peut utiliser le théorème 2  :

Ecrivons la matrice de  relativement à la base canonique 

,  ,  et 

On a donc  et . donc  est dégénérée

**2.6.3 . Vecteurs isotropes**

**Définition 1** :

Soient  un  et . Un vecteur  de  est dit isotrope si . Un vecteur  de  est dit non isotrope si 

L’ensemble des vecteurs isotropes se note 

**Remarque** : On a toujours 

En effet soit , alors  , donc en particulier . D’où  et l’inclusion .

**Exemple** :Soit  définie comme suit : 

1/ Montrer que  est isotrope et que  est non isotrope.

2/ Déterminer l’ensemble  des vecteurs isotropes

**Solution** :

1/ On a  donc  est isotropes

On a donc  est non isotrope

2/ Soit  alors





D’où 