Part I
FONCTIONS RATIONNELLES

Definition 1 *Soient deux P et Q deux polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{R}$*

Une fonction rationnelle F à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$

Example 2 $F(x) = \frac{4x^3-3x-2}{5x^2+x-1}$; $G(x) = \frac{4}{x^2+x-2}$

Remark 3 *Une fonction rationnelle n'est pas un polynôme.*

Une fonction rationnelle de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est définie si $Q(x) \neq 0$

Example 4 $F(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$ *; Domaine de définition* $D_F = \mathbb{R} - \{2; 5\}$

la forme réduite de F est $F(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

0.1 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$

0.1.1 Forme réduite, pôles , zéros d'une fraction rationnelle

Soient P et Q deux polynômes et soit $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle avec $Q(x) \neq 0$

Lemma 5 *Toute fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet au moins un représentant $\frac{P_0}{Q_0}$ c'est-à-dire que P_0 et Q_0 sont premiers entre eux .*

Soit F une fraction rationnelle sous forme réduite si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Remark 6 *Les éléments qui annulent Q s'appellent les pôles de F.*

Les éléments qui annulent P s'appellent les zéros de F.

Definition 7 *On dit que a est un pôle d'ordre n de F si a est une racine de multiplicité n de Q.*

si $n = 1$ on dit que a est un pôle simple de F.
si $n = 2$ on dit que a est un pôle double de F.

Example 8

$$F(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)^{2}}$$

F est définie sur $\mathbb{R}-\{1;3\}$, F est irréductible (on ne peut pas simplifier F).

F possède deux zéros qui sont $x=2$ et $x=-2$.

F possède deux pôles : un pôle simple $x=1$ et un pôle double $x=3$.

0.1.2 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}$

1) Partie entiére d'une fraction rationnelle Soit F une fraction rationnelle tels que $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, il existe un polynôme E et un unique polynôme P_1 tels que $F(x)=E(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P_1(x))\prec\deg(Q(x))$

$E(x)$ s'appelle partie entière de F et on note $\varepsilon(F)$

Example 9

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{2x^4+3x^3-x+1}{x^2-3x+1}\\ F(x) &= 2x^2+9x+25+\frac{65x-24}{x^2-3x+1}\\ \varepsilon(F) &= 2x^2+9x+25\ ;\ P_1(x)=65x-24\ ;\ Q(x)=x^2-3x+1\end{aligned}$$

Theorem 10 *(Décomposition en éléments simples sur R).*

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec P et Q deux polynômes en x, $\text{pgcd}(P,Q)=1$. Alors $\frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique comme somme:

- d'une partie polynomiale $E(x)$,
- d'éléments simples du type $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$
- d'éléments simples du type $\frac{ax+b}{(x^2-\alpha x+\beta)^k}$

Example 11

$$\frac{1}{x^2-4}\ ;\frac{x^2+1}{(x-1)^{2}};\frac{x}{x^3-1};\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)^{2}};\frac{2x^2-x}{(x^2+2)^{2}};\frac{x^6}{(x^2+1)^{2}}.$$