# 1

## ESPACES VECTORIELS

# 2 Espace vectoriel

**Definition 1** *Soit $E$ un ensemble non vide muni de deux lois $(+)$ et $(\times)$ .On dit que la structure $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si:*

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif

• La loi $(+)$ est commutative:

$$\forall a, b \in E \ \text{ on a} : a + b = b + a$$

• La loi $(+)$ est associative:

$$\forall a, b, c \in E \ \text{ on a} : (a + b) + c = a + (b + c)$$

• La loi $(+)$ admet un élément neutre $e = 0$

$$\forall a \in E \ \text{ on a} : a + e = e + a = a$$

• Tout élément de $E$ possède un élément symétrique dans $E$ :

$$\forall a \in E, \exists\ a^{'} \in E \ \text{ tel que } \ a + a^{'} = a^{'} + a = e$$

2) $\forall\ u, v \in E$ ,$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} * \ \alpha (u + v) &= \alpha u + \alpha v, \\ * \ (\alpha + \beta) u &= \alpha u + \beta u, \\ * \ \alpha (\beta u) &= (\alpha \beta) u, \quad 1 \times u = u. \end{aligned}$$

La structure $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

# 3 Sous espace vectoriel

Soit $F$ une partie de $E$ .On dit que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ si et seulement si:

$$\begin{aligned} * \quad F &\neq \phi \\ * \ \forall u, v &\in F, \text{ on a } : u + v \in F \\ * \quad \forall u &\in F, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ on a} : \alpha u \in F \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} * \quad F &\neq \phi \\ * \ \forall u, v &\in F, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ on a } ; \alpha u + \beta v \in F \end{aligned}$$

**Remark 2** *Pour montrer que $F \neq \phi$ il suffit de montrer que $0 \in F$.*

**Exercise 3** *: Vérifiez si les sous ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}$*

$F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\right\}$ ; $F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2\right\}$ ; $F_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\right\}$
$F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y + z = 0\right\}$ ; $F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 7y - z = 0\right\}$.

Solutions:

a) $F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ :

1)

$$\begin{aligned} F_1 &\neq \phi \text{ car } 0 = 0 \\ \text{donc } 0 &\in F_1 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \forall u &\in F_1 \text{ on a } x_1 = 0 \\ \forall v &\in F_1 \text{ on a } x_2 = 0 \end{aligned}$$

donc

$$x_1 + x_2 = 0$$

ceci entraine que

$$u + v \in F_1.$$

3)

$$\forall u \in F_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ on a } x = 0$$

On multiplie l'équation par $\alpha$ on obtient $\alpha x = 0$ ceci implique que

$$\alpha u \in F_1.$$

b) $F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 7y - z = 0\right\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ :

1)

$$\begin{aligned} F_5 &\neq \phi \text{ car } 3.0 - 7.0 - 0 = 0 \\ \text{donc } 0 &\in F_5 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \forall u &\in F_5 \text{ on a } 3x_1 - 7y_1 - z_1 = 0 \\ \forall v &\in F_5 \text{ on a } 3x_2 - 7y_2 - z_2 = 0 \end{aligned}$$

Par addition des deux équations on obtient

$$3(x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$$

donc

$$u + v \in F_5.$$

3)

$$\forall u \in F_5, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ on a } 3x - 7y - z = 0$$

On multiplie l'équation par $\alpha$ on obtient

$$\begin{aligned} 3\alpha x - 7\alpha y - \alpha z &= 0 \\ \text{d'ou } \alpha u &\in F_5. \end{aligned}$$

# 4 Opérations sur les sous espaces vectoriels

## 4.1 Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

**Lemma 4** *Si $F$ et $G$ sont deux sous espaces vectoriels de $E$ alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de $E$, mais $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel de $E$*

**Proposition 5** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ . $F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels de $E$ . On note*

$$F + G = \{x_1 + x_2 \ /x_1 \in F, x_2 \in G\}$$

*appelé somme directe de $F$ et $G$ et $F + G$ est un sous espace vectoriel de $E$.*

**Definition 6** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ .$F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels de $E$ . On dit que $F$ et $G$ sont en somme directe si et seulement si*

$$F \cap G = \{0\}$$

*et on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.*

**Definition 7** *$F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels de $E$ sur $\mathbb{R}$ sont dits supplémentaires dans $E$ si et seulement si*

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E.$$

**Exercise 8** *On donne $F$ et $G$ par*

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x + 3y - 5z = 0\right\} \\ G &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /x - y + z = 0\right\} \end{aligned}$$

*Montrez que $F$ et $G$ sont des sous espaces vectoriels de $F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels de $E$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*

**Exercise 9** *$F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /x + 2y + z = 0\right\} \\ G &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x + y + 3z = 0; \ x - 2y - z = 0\right\} \end{aligned}$$

*$F$ et $G$ sont-ils en somme directe?*

solution : Soit $(x, y, z) \in F \cap G$ , le but est de savoir si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ pour cela on remarque que

$(x, y, z)$ est solution du système suivant

$$\left\{\begin{matrix} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{matrix}\right\}$$

On remarque que $(0, 0, 0)$ est solution de ce systéme. Donc $F$ et $G$ sont en somme directe.