SUITE DU COURS

1 Familles génératrices

Definition 1 *Soient* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *n vecteurs d'un espace vectoriel* E*.On appelle combinaison linéaire des vecteurs* $v_1, v_2, ..., v_n$*, tout vecteur* v *s'écrivant sous la forme:*

$$v = \lambda_1 v_1, +\lambda_2 v_2+, ..., +\lambda_n v_n$$

ou les $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *sont des nombres réels*

Theorem 2 *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* F *un sous ensemble non vide de* E

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.
1) F est un sous espace vectoriel de E.
2) F contient toutes les combinaisons linéaires de deux de ses vecteurs

$$\forall u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ on a } \alpha u + \beta v \in F$$

3) $\forall n \geq 1, F$ contient toutes les combinaisons linéaires de n vecteurs

$$\begin{array}{rcl} \forall\ v_1, v_2, ..., v_n & \in & F, \\ \forall\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n & \in & \mathbb{R} \\ & \Longrightarrow & \lambda_1 v_1, +\lambda_2 v_2+, ..., +\lambda_n v_n \in F \end{array}$$

Definition 3 *Une famille* $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite famille génératrice lorsque tout vecteur* $v \in A$ *est combinaison linéaire de ses vecteurs.*

Example 4 $A = \{v_1(1,1,1), v_2(1,2,3), v_3(1,2,4)\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *car le vecteur* $v(0,1,2)$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* v_1, v_2, v_3 *c'est à dire* $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ *en faisant le calcul on trouve* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$

Example 5 $B = \{v_1(1,1,1), v_2(1,2,3)\}$ *n'est pas une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *car* v *un vecteur choisi ne peut'pas etre une combinaison linéaire de* v_1, v_2*.*

2 Famille libre

Une famille $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dite famille libre et ses vecteurs sont dits linéairement indépendants lorsque
$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 =, ..., = \lambda_n = 0$$

3 Famille liée

Une famille qui n' est pas libre est dite liée ou on dit que ses vecteurs sont linéairement dépendants.

Example 6 *Les vecteurs* $v_1(1,1,1), v_2(0,1/2,3/2)$ *sont linéairement indépendants*

Les vecteurs $v_1(1,1,1), v_2(0,1/2,3/2)$ $,v_3(1,2,4)$*sont linéairement dépendants*

4 Base

Une famille $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dite base de E si elle est en meme temps famille libre et génératrice.

Example 7 $A = \{v_1(1,1,1), v_2(1,2,3), v_3(1,2,4)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$

Example 8 $B = \{v_1(1,0,0), v_2(0,1,0), v_3(0,0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *appelé base canonique*

5 Dimension

Definition 9 *La dimension d'un espace vectoriel* E *de dimension finie notée* $\dim E$ *est par définition le nombre d'éléments d'une base de* E*. Pour déterminer la dimnension de* E *il suffit de trouver une base de* E*, le nombre d'éléments de cette base s'appelle dimension de* E

Cas particuliers
Si $E = \{0_E\}$ alors $\dim E = 0$
Si $E \neq \{0_E\}$ alors $\dim E = n$

Example 10 $\dim \mathbb{R} = 1$ *c'est la droite vectorielle*
$\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *c'est le plan vectoriel*

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Example 11 *Dans* $\mathbb{R}^3$ *on a*

$$F = \{(x, y, z) / x - z = 0\}$$

calculez $\dim F$

On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, x) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ F &= \{x(1,0,1) + y(0,1,0)) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ F &= \mathit{vect}\,[1,0,1),(0,1,0)] \end{aligned}$$

cette famille est une famille génératrice de F, les vecteurs $(1,0,1),(0,1,0)$ ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. donc c'est une base alors $\dim F = 2$

Example 12 *Dans* $\mathbb{R}^3$ *on a*

$$G = \{(x, 2x, 3x)\,/x \in \mathbb{R}\}$$

calculez $\dim G$

On a

$$\begin{aligned} G &= \{(x, 2x, 3x)\,/x \in \mathbb{R}\} \\ G &= \{x\,(1,2,3)\,/x \in \mathbb{R}\} \\ G &= Vect\,[(1,2,3)] \text{ est une famille génératrice de } G \end{aligned}$$

Donc $\dim G = 1$ c 'est la droite vectorielle.

APPLICATIONS LINEAIRES

Definition 13 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F*

1) f est dite injective si $\forall\,(x,y) \in E^2$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
2) f est dite surjective si $\forall y \in F, \exists\; x \in E$ tel que $y = f(x)$
3) f est dite bijective ssi $f(x)$ est dite injective et surjective: $\forall y \in F, \exists$ $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Definition 14 *Une application f de E dans F est dite linéaire si*

•$\forall\,(x,y) \in E^2;\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
•$\forall x \in E\ ; \forall \alpha \in \mathbb{R}\ ;\ f(\alpha y) = \alpha f(x)$

Proposition 15 *L'application f de E dans F est linéaire si et seulement si:*

$\forall\,(x,y) \in E^2; \forall\,(\alpha,\beta) \in \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
Vocabulaire: Soit f une application linéaire de E dans F
• si $F = E$: f est appelé un endomorphisme dans E.
• si f est bijective alors f est appelé un isomorphisme.
• si f est bijective et $F = E$ alors f est appelé un automorphisme
Exemple:
f une application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x - 3y$
g une application de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x,y,z) = (3x - y, y + z, 3z)$
f et g sont elles des applications linéaires?
Solution:
a) f est une application linéaire si:
1) On pose $u = (x,y)$ et $v = (x', y')$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2; f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \\
&= 2(x+x') - 3(y+y') \\
&= (2x-3y) + (2x'-3y') \\
&= f(x,y) + f(x',y') \\
&= f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

2) On pose $u = (x,y)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\forall u &\in \mathbb{R}^2; \forall \alpha \in \mathbb{R}; f(\alpha u) = \alpha f(u) \\
f(\alpha u) &= f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) \\
&= 2(\alpha x) - 3(\alpha y) = \alpha(2x-3y) \\
&= \alpha f(x,y) = \alpha f(u)
\end{aligned}$$

b) g est une application linéaire si:

1) On pose $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$

$$\begin{aligned}
g(u+v) &= g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(x+x') - (y+y') \\ (y+y') + (z+z') \\ 3(z+z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ y+z \\ 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x'-y' \\ y'+z' \\ 3z' \end{pmatrix} \\
&= g(x,y,z) + g(x',y',z') = g(u) + g(v)
\end{aligned}$$

2) On pose $u = (x,y,z)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\forall u &\in \mathbb{R}^2; \forall \alpha \in \mathbb{R}; g(\alpha u) = \alpha g(u) \\
g(\alpha u) &= g(\alpha((x,y,z))) = g(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= \begin{pmatrix} 3\alpha x - \alpha y \\ \alpha y + \alpha z \\ 3\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3x-y \\ y+z \\ 3z \end{pmatrix} \\
&= \alpha g(x,y,z) = \alpha g(u)
\end{aligned}$$