CHAPITRE 3 GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Continuité

1) Définitions

$\boxed{\text{f est continue en } x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.

2) Propriétés

- **Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur IR.**
- **La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.**
- **Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.**
- **La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.**

Autrement dit :

- **Si u et v sont continues sur I, alors :**
  - **Les fonctions ku, $u + v$, $u \times v$ et u^n (k réel et n entier naturel non nul) sont continues sur I.**
  - **Les fonctions $\frac{1}{u}$, $\frac{u}{v}$, $\sqrt{u}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.**
- **Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en f(a) alors la fonction gof est continue en a.**

3) Prolongement par continuité

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ a \notin D_f \\ \bullet \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell; \quad \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{f admet un prolongement} \\ \text{par continuité g au point a}\end{array}}$$

Le prolongement :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

4) Fonctions continues sur un intervalle

Par une fonction continue :

L'image d'un intervalle est un intervalle.

L'image d'un segment est un segment.

5) Théorème des valeurs intermédiaires

$$\left.\begin{array}{|l} \bullet \text{ f est continue sur I} \\ \bullet \text{ f(I)=J} \\ \bullet \text{ } m \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x) = m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans I}\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{|l} \bullet \text{ f est continue sur } [a,b] \\ \bullet \text{ m est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x) = m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b]\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{|l} \bullet \text{ f est continue sur } [a,b] \\ \bullet \text{ } f(a)\times f(b) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x) = 0 \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b]\end{array}}$$

6) Théorème de la bijection réciproque

$$\left.\begin{array}{|l} \bullet \text{ f est continue sur I,} \\ \bullet \text{ f est strictement} \\ \text{monotone sur I,} \\ \bullet \text{ } f(I) = J. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ } f : I \to J \text{ est bijective.} \\ \bullet \text{ } f^{-1} \text{ est continue sur J.} \\ \bullet \text{ } f^{-1} \text{ est de même sens de variation de f.} \\ \bullet \text{ } f^{-1} \text{ est bijective de J sur I.} \\ \bullet \text{ les courbes de f et } f^{-1} \text{ sont symétriques par} \\ \text{rapport à la droite } y = x. \end{array}}$$

Remarques

Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à l'équation $f(x)=0$. Le théorème de la bijection réciproque en assure l'unicité.

Dérivation

1) Nombre dérivé – dérivabilité

$\boxed{\text{f est dérivable au point } x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ est un nombre réel}}$

Nombre dérivé : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point x_0 de I.

- **Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I (La réciproque est fausse).**

2) Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
k réel (Constante)	0	$]-\infty,+\infty[$
ax+b	a	$]-\infty,+\infty[$
x^n, $n>0$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

3) Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
au	au'
$u+v$	$u'+v'$
$u \bullet v$	$u' \bullet v + u \bullet v'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u)^n$	$nu'(u)^{n-1}$
$u \circ v$	$v'.(u' \circ v)$

4) Dérivée de la réciproque

$$\left| \begin{array}{l} \bullet\ f : I \to J \text{ est bijective,} \\ \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I. \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{array}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \bullet\ f(a) = b \\ \bullet\ f'(a) = c \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1}(b)=a \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{c} \end{array}}$$

5) Inégalités des accroissements finis

$$\left| \begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ a, b \in I,\ a < b, \\ \bullet \text{ il existe } m,\ M \in \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ m \leq f'(x) \leq M \text{ sur } I. \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

$$\left| \begin{array}{c} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet \text{ il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ |f'(x)| \leq M \text{ sur } I. \end{array} \right\rangle \Rightarrow \boxed{|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|}$$

Courbes : symétries – asymptotes – tangentes

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Eléments de symétrie

Si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et …	alors, C admet …
$f(2a-x) = f(x)$	la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
$f(2a-x) = 2b - f(x)$	le point $M(a,b)$ comme centre de symétrie.
$f(-x) = f(x)$	l'axe (Oy) comme axe de symétrie et f est paire.
$f(-x) = -f(x)$	l'origine O comme centre de symétrie et f est impaire.

2) Asymptotes parallèles aux axes

Si…	alors la courbe C_f possède une asymptote …
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$	<u>verticale</u> d'équation $x = x_0$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$	<u>horizontale</u> d'équation $y = y_0$

<u>3) Asymptote oblique et branches paraboliques</u>

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Trois cas se présentent :

Si…	alors…
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Oy) en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Ox) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ ;a\in\mathbb{R}^*$	**on calcule** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ **:**

- **Soit** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\infty$ **, alors C admet une <u>branche parabolique</u> de direction la droite d'équation** $y=ax$
- **Soit** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ **,avec** $b\in\mathbb{R}$**, alors C admet une <u>asymptote oblique</u>, c'est la droite d'équation** $y=ax+b$ **.**

Cela est équivalent à chacune des situations suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	$\begin{cases} f(x)=ax+b+\varphi(x), \quad a\neq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0 \end{cases}$

Le signe de $d(x)=f(x)-(ax+b)$ **détermine les positions relatives de C et son asymptote oblique.**

N.B : les définitions ci-dessus sont analogues lorsque x tend vers $-\infty$**.**

<u>4) Tangentes</u>

Si..	**alors…**
f est dérivable en x_0	**C admet une tangente en** $M_0(x_0,y_0)$
D est la tangente à C en $M_0(x_0,y_0)$ **D n'est pas verticale.**	**L'équation de D :** $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
la tangente D// la droite d'équation $y=\mu x+\delta$	$f'(x_0)=\mu$
la tangente D $\perp$ **la droite d'équation** $y=\mu x+\delta$	$\mu f'(x_0)=-1$
la tangente D est horizontale	$f'(x_0)=0$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$	**C admet une tangente (ou demi tangente) verticale d'équation** $x=x_0$**.**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

On considère une fonction numérique f dérivable sur son domaine de définition D_f, de dérivée f'. Son tableau de variation est donné ci-dessous. On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule réponse est exacte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}$
2	L'équation $f(x)=0$ admet dans D_f exactement :	3 solutions	2 solutions	1 solution	aucune solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation :	$x=3$	$x=2$	$y=2$	$y=3$
4	La fonction f est une fonction :	paire	impaire	ni paire ni impaire	monotone
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=3$ est :	$x=1$	$y=2$	$y=3x+2$	$y=2x+3$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à :	0	-3	$-\infty$	$+\infty$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	Si pour tout $x \in D_f$, $f(8-x)+f(x)=4$ alors C_f est symétrique par rapport à :	$A(4;2)$	$A(2;4)$	la droite d'équation $x=4$	$A(8,4)$
2	Si $\frac{2x^2-3x+4}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$, alors	$a=1$ $b=-5$ $c=4$	$a=2$; $b=-5$ et $c=9$	$a=2$; $b=-3$ et $c=4$	$a=3$ $b=-2$ $c=4$
3	$f(x)=x+\frac{1}{x}$ alors :	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(1)=0$	$f'(-1)=2$	$f'(1)=2$
4	Si pour tout $x \in D_f$, $f(4-x)=6-f(x)$ alors C_f est symétrique par rapport à :	$A(2;6)$	$A(8,4)$	La droite d'équation $x=4$	$A(2,3)$
5	Si $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+1}$ et $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$, alors	$a=1$ $b=-4$ $c=3$	$a=1$; $b=4$ et $c=2$	$a=1$; $b=4$ et $c=-2$	$a=1$ $b=5$ $c=6$
6	Si $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$, alors la tangente à C_f en $x_0=0$ a pour équation:	$y=x$	$y=x+1$	$y=x-1$	$y=-x$

QCM 3

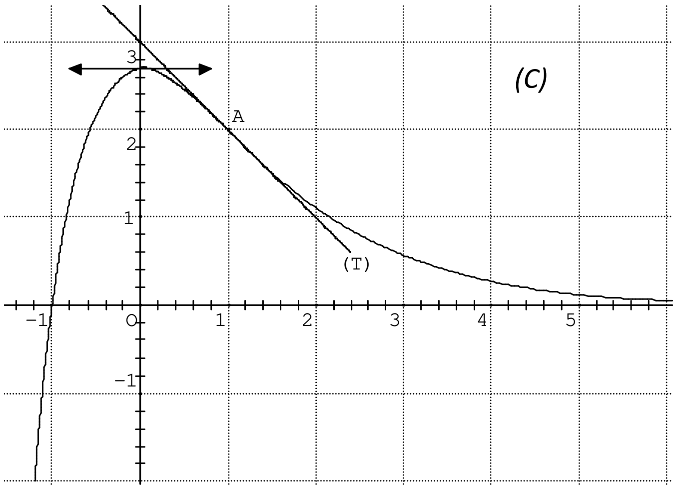
Soit f la fon ction définie par $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	L'ensemble de définition de f est	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2};2\right\}$	$\mathbb{R}$
2	Le nombre d'asymptotes de (C) est	0	1	2	3
3	(C) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées	$(2;0)$	$(0;2)$	(-3 ;0)	(-1,5 ;0)
4	La dérivée f' de f est définie par :	$f'(x)=\frac{-7}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{7}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{4x-1}{(x-2)^2}$	$f'(x)=\frac{8}{(x-2)^2}$
5	La fonction f est	paire	impaire	ni paire, ni impaire	croissante
6	La courbe (C) est symétrique par rapport :	à la droite d'équation $x=2$	au point de coordonnées $(2;0)$	au point de coordonnées $(2;2)$	à la droite d'équation x = 1

QCM 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.



La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	On a	$f(0)=0$	$f'(0)=e$	$f'(0)=0$	$f(0)=-1$
2	Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à :	0	1	-1	3
3	On a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to4} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$
4	L'équation $f(x)=2$	n'a pas de solution	a une unique solution	a deux solutions	a trois solutions
5	On a	$f(1)=0$	$f(1)=1$	$f(1)=2$	$f(1)=3$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=...$	0	$+\infty$	$-\infty$	1

QCM 5

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	-2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Réponses	A	B	C	D
1	**Le domaine de définition de f est:**	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$	$]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2	**La fonction f est**	**bornée**	**croissante**	**décroissante**	**non monotone**
3	**La courbe C admet une asymptote d'équation**	$x=3$	$x=1$	$y=3x-2$	$x=-2$
4	**L'équation $f(x)=-3$ admet exactement**	**3 solutions**	**2 solutions**	**1 solution**	**aucune solution**
5	$\lim\limits_{-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$	$-\infty$	$+\infty$	1	0
6	**L'équation $f(x)=0$ admet exactement**	**3 solutions**	**2 solutions**	**1 solution**	**aucune solution**

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Calculer les limites suivantes (Expliquer la méthode de levée d'indétermination):

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})$$

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **par trois méthodes**

Exercice 3

Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **dans chacun des cas suivants :**

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x^4+2x^2+x$ **et soit** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A(–1, 0).

2) Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

3) Montrer que la courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses α,β **et** γ **vérifiant :** $-0,9<\alpha<-0,8$, $-0,3<\beta<-0,2$ **et** $1,1<\gamma<1,2$.

Exercice 5

Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que la courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$:

- **passe par le point A(2 ; 4),**
- **admette au point A(2 ; 4), une tangente horizontale, et**
- **aie au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$**

2) Vérifier que le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 6

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) Dresser le tableau de variations de *g* .

2) Montrer que la courbe (*C*) de *g* admet deux asymptotes dont l'une (*D*) est oblique et préciser la position de (*D*) par rapport à (*C*).

3) Déterminer la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminer la position de (T) par rapport à (C).

4) Tracer soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$. Retrouver les résultats algébriquement.

Exercice 7

1) Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

Déterminer une racine évidente de *P* , factoriser *P* et déterminer son signe.

2) Soit $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur D_f. Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^2+3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Trouver *a*, *b*, *c* tels que pour tout x de D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+3}$.

b) Montrer que C a une asymptote D et étudier la position de C par rapport à D.

c) Tracez D et C.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Représenter (C) et (C') la courbe de f^{-1}, dans un nouveau repère.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 8

1) On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x^2+2$.

a) Calculer P(1) et factoriser P(x).

b) Etudier le signe de $P(x)$.

2) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

a) Déterminer les limites de *f* en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.

3) Pour quelle abscisse *a* la tangente au point d'abscisse *a* est-elle horizontale ? Justifier.

4)Trouver *a*, *b*, *c* et *d* tels que $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-2}$.

5) On appelle *g* la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et *P* sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f(x) – g(x). Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

b) Etudier la position relative de C et P.

c) Tracer C, T et P dans le même repère.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1.a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

2.a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+2}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera l'équation.

c) Etudier la position relative entre (C) et Δ

3. a) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{7}{4}\right)$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction g^{-1} .

5) On considère l'intervalle $K=[2;3]$

a) Montrer que, $x\in K$ implique que $\forall x\in K$, $f(x)\in K$

b) Montrer que $\forall x\in K$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 2

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$.

3) Donner le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ à préciser puis étudier la position relative de (C) et Δ .

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur D_f (On pourra utiliser A.3).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle la droite d'équation $y = x + 2$.

6) Donner une équation de la tangente de (C) en $x_0 = -2$

7) Construire la courbe (C)

8) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Exercice 3

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}, \quad \forall x \in D_f$

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est oblique.

Etudier les positions relatives de D et (C)

4.a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

5) Vérifier que pour tout x de D_f on a $f(4-x) + f(x) = 2$ et interpréter graphiquement.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle I =]0;2[.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite T' tangente à (C') courbe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = -4$.

7.a) Tracer les courbes (C) et (C') .

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2-(3+m)x+6+2m=0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

Exercice 4

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

1) Trouver *a*, *b* et *c* tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la parité et les variations de f.

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Préciser les asymptotes à (C).

4) Etudier la position de (C) par rapport à la droite D d'équation ($y = x$).

5) Tracer D et C.

6) Résoudre l'équation f(x) = 0.

Exercice 5

Soit la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.</u>

Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction *g*.

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $2\le\alpha\le3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 5.10^{-1} près.

3) Etudier le signe de *g(x)* sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie B : Etude de la fonction *f*.</u>

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3) Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f(x) = x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que *C* admet une asymptote oblique *D* à l'infini. Etudier la position de *C* par rapport à *D*.

4) Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x+2$

5) Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C* .

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [3, +\infty[$.

a) Montrer que $h : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

c) Calculer $(h^{-1})'(\frac{45}{8})$.

Exercice 6

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x \in D_f$.

2) Dresser le tableau de variations de f . Justifier que la courbe C n'admet pas de tangentes horizontales.

3) Montrer que C admet deux asymptotes et que leur point d'intersection est un centre de symétrie de C.

4) Etudier les positions relatives de C et son asymptote oblique.

5) Préciser les points d'intersections de C avec les axes.

6) On considère la droite D d'équation $2x - y - 1 = 0$.

Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

7) Tracer la courbe C.

8) Soit k la restriction de f sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

a) Montrer que k réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire dans un nouveau repère orthonormé, les courbes représentatives de k et de sa réciproque .

c) Calculer $k^{-1}(0)$, $(k^{-1})'(0)$.

d) Donner l'équation de la tangente T' à la courbe C' de k^{-1} au point d'abscisse 0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé

1) Montrer que pour tout x : $f(-x)=2-f(x)$; Interpréter graphiquement.

2) Montrer que le point de coordonnées $(0;1)$ est un point d'inflexion.

3) Etudier les variations de f.

4)Tracer la courbe de f.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

b) Donner l'expression de f^{-1}

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} Tracer sa courbe.

Exercice 8

On considère la fonction numérique $f(x)=\sqrt{|x^2+3x-10|}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Ecrire f sans valeur absolue

2) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe (C)

3) Dresser le tableau de variation

4) Montrer que la partie de (C) sur $[-5,2]$ est un demi cercle à préciser.

5) Tracer (C).

Dépôt légal N°2176/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

COLLECTION ESSEBIL AU BAC

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez chaque trimestre:

ESSEBIL AU BAC - Mathématiques

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**