Elementy kombinatoryki

Zadanie 3. Grupa studentów idzie na górską wycieczkę gęsiego. W grupie jest dwanaście pań i jedenastu panów. Iloma sposobami mogą się ustawić, jeżeli panie nie mogą sąsiadować z paniami, a panowie z panami?

Rozwiązanie. Jedyne ustawienie według płci jest następujące:

$$KMKMKM\ldots K$$

Ustawień pań jest

$$P_{12} = 12!$$

a panów

$$P_{11} = 11!,$$

ponieważ są to różne osoby. Zatem mamy

$$P_{12}P_{11} = 12!11!$$

możliwych sposobów.

Zadanie 4. Ile różnych wyrazów można utworzyć ze słowa MATEMATYKA (muszą zawierać wszystkie litery)?

Rozwiązanie. Zauważmy, że kolejność jest istotna oraz elementy mogą się powtarzać ale określoną liczbę razy. Wybieramy litery ze zbioru

$$\{M, A, T, E, Y, K\}$$

a liczba powtórzeń każdej litery jest następująca:

$$n_M = 2, n_A = 3, n_T = 2, n_E = n_Y = n_K = 1.$$

Łączna liczba liter, z których mają być złożone wyrazy wynosi $n = 10$. Zatem mamy do czynienia z permutacjami z powtórzeniami i jest ich

$$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}.$$

Zadanie 6. Kości do gry w domino są oznaczone dwiema liczbami. Ile różnych kości można utworzyć z liczb $0, 1, 2, \ldots, n$?

Rozwiązanie. Przykładowe kości do gry w domino to:

$$(1, 2), (0, 0).$$

Zauważmy, że „$(1, 2) = (2, 1)$". Zatem elementy na kościach mogą się powtarzać oraz ich kolejność nie jest istotna. Stąd kości mogą być reprezentowane przez kombinacje z powtórzeniami. U nas

„$n = n+1$”, ponieważ wybieramy ze zbioru

$$\{0, 1, \ldots, n\},$$

oraz $k = 2$, więc mamy

$$\bar{C}^2_{n+1} = \binom{(n+1)+2-1}{2} = \binom{n+2}{2}$$

kości.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zadanie 4. Urna zawiera dwie kule białe i trzy kule czarne. Wybieramy losowo dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że są to kule tego samego koloru. Rozwiąż zadanie dwoma sposobami: nie uwzględniając kolejności i uwzględniając kolejność.

Rozwiązanie. Nie uwzględniamy kolejności:

$$|\Omega| = \binom{5}{2}, |A| = \binom{2}{2} + \binom{3}{2}, P(A) = 0.4.$$

Uwzględniamy kolejność:

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20, |A| = 2 + 3 \cdot 2 = 8, P(A) = 8/20 = 0.4.$$

Zadanie 6. Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych wybieramy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wylosowanej liczbie na pierwszym miejscu i na ostatnim występuje ta sama cyfra.

Rozwiązanie.

$$\frac{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}$$

Zadanie 7. Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach wybieramy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest parzysta.

Rozwiązanie.

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$$

Zadanie 8. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 10 wybranych osób żadne dwie nie obchodzą urodzin w tym samym dniu. Przyjmijmy, że rok ma 365 dni.

Rozwiązanie.

$$|\Omega| = 365^{10},\ |A| = \frac{365!}{355!},\ P(A) = \frac{365!}{355! \cdot 365^{10}}$$

Zadanie 9. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 5-osobowej delegacji z klasy, w której jest 15 dziewcząt i 16 chłopców, znajdzie się 3 chłopców.

Rozwiązanie.

$$|\Omega| = \binom{31}{5}, \ |A| = \binom{16}{3}\binom{15}{2}, \ \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{16}{3}\binom{15}{2}}{\binom{31}{5}}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

Zadanie 1. Wśród rodzin z dwojgiem dzieci losujemy jedną rodzinę. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwiema dziewczynkami, jeżeli wiadomo, że w tej rodzinie:

1. starsze dziecko jest dziewczynką,
2. jest przynajmniej jedna dziewczynka.

Rozwiązanie. Mamy

$$\Omega = \{(d,d),(d,c),(c,d),(c,c)\}$$

i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Zatem

1. $$\mathbb{P}(\{(d,d)\}|\{(d,d),(c,d)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(d,d)\} \cap \{(d,d),(c,d)\})}{\mathbb{P}(\{(d,d),(c,d)\})} = \frac{\mathbb{P}(\{(d,d)\})}{\mathbb{P}(\{(d,d),(c,d)\})} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

2. $$\mathbb{P}(\{(d,d)\}|\{(d,d),(d,c),(c,d)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(d,d)\} \cap \{(d,d),(d,c),(c,d)\})}{\mathbb{P}(\{(d,d),(d,c),(c,d)\})} = \frac{\mathbb{P}(\{(d,d\})}{\mathbb{P}(\{(d,d),(d,c),(c,d)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 2. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma oczek otrzymanych na obu kostkach będzie nie większa od czterech, jeśli wiadomo, że co najmniej na jednej kostce otrzymano dwa oczka.

Rozwiązanie.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}, \ bo \ (2,2),(2,1),(1,2) \tag{1}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}, \ bo \ (2,2),(2,5razy),(5razy,2) \tag{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11} \tag{3}$$

Zadanie 4. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem p. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$. Jeżeli odpowiedział prawidłowo, to jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź?

Rozwiązanie. Niech

- A - student znał odpowiedź,
- B - student odpowiedział prawidłowo.

Zatem

$$\mathbb{P}(B|A) = 1,\ \mathbb{P}(B|A') = \frac{1}{k},\ \mathbb{P}(A) = p$$

oraz

$$\mathbb{P}(A') = 1 - p.$$

Stąd i ze wzoru Bayesa mamy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A')\mathbb{P}(A')} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{k}(1-p)} = \frac{kp}{kp + 1 - p}.$$

Zadanie 7. Rzucamy dwiema kostkami. Niech A będzie zdarzeniem: „na pierwszej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek”, B-„na drugiej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek”, C-„suma liczb wyrzuconych na obu kostkach jest nieparzysta”.

1. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne parami?
2. Czy zdarzenia te są niezależne zespołowo?

Rozwiązanie. Mamy

$$|\Omega| = 6^2 = 36 \tag{4}$$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}, \tag{5}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}, \tag{6}$$
$$\mathbb{P}(C) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}, \tag{7}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}, \tag{8}$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}, \tag{9}$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}, \tag{10}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0. \tag{11}$$

Zatem

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \tag{12}$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C), \tag{13}$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C), \tag{14}$$

więc zdarzenia A, B, C są niezależne parami. Jednak

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

czyli zdarzenia te nie są niezależne zespołowo.

Schemat Bernoulliego

Zadanie 1. Szansa, że w danym dniu września na pewnym skrzyżowaniu zdarzy się co najmniej jeden wypadek jest równa 1/3, niezależnie od tego, co wydarzyło się w pozostałe dni. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że we wrześniu będzie dokładnie 10 dni z wypadkami?

Rozwiązanie. Każdy dzień września możemy potraktować jako doświadczenie Bernoulliego, w którym sukcesem jest wystąpienie wypadku w dany dzień, a porażką brak wypadku. Zatem mamy schemat Bernoulliego z

$$n = 30 \ i \ p = \frac{1}{3}.$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że we wrześniu będzie dokładnie 10 dni z wypadkami, wynosi

$$P(k = 10) = \binom{30}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{20}.$$

Zadanie 2. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p w każdym doświadczeniu. Oblicz prawdopodobieństwo, że

1. r-ty sukces uzyskano dokładnie w $(k + r)$-tym doświadczeniu.
2. dokładnie k prób $(2 < k < n)$ zakończyło się sukcesem i pierwsze dwie próby zakończyły się sukcesem.
3. dokładnie k prób $(2 < k < n)$ zakończyło się sukcesem, jeżeli wiadomo, że pierwsze dwie próby zakończyły się sukcesem.

Rozwiązanie.

1. $$p\binom{k + r - 1}{r - 1}p^{r-1}(1 - p)^k$$
2. $$\binom{n - 2}{k - 2}p^k(1 - p)^{n-k}$$
3. $$\binom{n - 2}{k - 2}p^{k-2}(1 - p)^{n-k}$$