Exercice II.7

Anki Lucas
El Houssaini Youness

Contrôle Optimal

20/11/2020

Énoncé

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Considérons le système de contrôle

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + u(t) & t \geq 0 \\ y'(t) = -y(t) + u(t) & t \geq 0 \\ |u(.)| \leq 1 \end{cases}$$

Le but est de joindre en temps minimal la droite $x = 0$, puis de rester sur cette droite. On considère la cible $M_1 = \{(0, y) | |y| \leq 1\}$ et on s'intéresse à l'existence et la caractérisation de trajectoires temps optimales pour ce problème.

Question 1

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Montrons que si un tel contrôle existe, alors on a nécessairement $|y(t)| \leq 1$ lorsque $x(t) = 0$:

On suppose qu'un tel contrôle existe. On suppose que $x(t) = 0$. Soit $t \geq 0$.

Alors $x'(t) = 0$, donc d'après le système de contrôle, $y(t) = -u(t)$. Or $|u(t)| \leq 1$ donc $|y(t)| \leq 1$.

Question (i)

Montrons que réciproquement, de tout point $(0, y) \in M_1$ part une trajectoire restant dans M_1.

En effet, soit $(0, y) \in M_1$, on remarque que si $x(t) = 0$, alors $x'(t) = 0$.
On déduit donc de la première équation que $y(t) = -u(t)$.
En injectant dans la deuxième, on trouve que $y'(t) = -2y(t)$.

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$:

$$y(t) = y(0)e^{-2t} \tag{1}$$

C'est une trajectoire solution du problème en postulant que x(t)=0. Qui est donc l'unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz.
(Théorème I.2.1. Cauchy-Lipschitz du polycopié).

Question (i)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

En effet:

Comme $y \in M_1$, alors $|y(0)| \leq 1$.
De plus $0 \leq e^{-2t} \leq 1$.

Donc pour tout $t \geq 0$:

$$|y(t)| \leq 1$$

En d'autres termes, pour tout $(0, y)$ dans M_1, part une trajectoire restant dans M_1.

Question (ii)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Étudions l'existence d'une trajectoire en temps optimale.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors le système de contrôle peut se mettre sous la forme :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{2}$$

Nous avons donc la matrice de Kalman associée au problème

$$Kal[B|AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

qui est de rang 2, donc il existe une trajectoire en temps optimale.

Question (iii)(a)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

On cherche à caractériser les trajectoires temps optimales. On choisit de raisonner "en temps inverse", en calculant les trajectoires joignant M_1 à tout point final.

Pour cela, on pose $\tilde{X} = X(T-t)$, par facilité de notation, on continuera d'écrire X au lieu de $\tilde{X}$.

Montrons, en écrivant le Hamiltonien et les équations adjointes, que le contrôle optimale est bang-bang avec au plus une commutation.

Question (iii)(a)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

On écrit notre système sous la forme :

$$X'(t) = f(t, X(t), u(t)) \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, X, u) &\longmapsto \begin{pmatrix} -y(t) - u(t) \\ y(t) - u(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On veut minimiser

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(s, X(s), u(s))ds + g(T, X(T)) \tag{5}$$

Ici $f^0 = 0$ et $g(T, X(T)) = T$.

Question (iii)(a)

On rappelle l'expression du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H :& \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (t, X, P, p^0, u) \longmapsto < P, f(t, X(t), u(t) > + p^0 f^0(t, X(t), u(t)) \end{aligned}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$H = -p_1(y + u) + p_2(y - u) \tag{6}$$

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Question (iii)(a)

On applique le PMP. Soit u optimal, il existe P absolument continu, p^0 négatif tel que :

$$X'(t) = \frac{\partial H}{\partial P} = \begin{pmatrix} -y(t) - u(t) \\ y(t) - u(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$P'(t) = -\frac{\partial H}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1(t) - p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Question (iii)(a)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

On a donc

$$\begin{aligned} H(t, X, P, p^0, u) &= \max_{v\in[-1,1]} H(t, X, P, p^0, v) \\ &= \max_{v\in[-1,1]} -p_1(y+v) + p_2(y-v) \\ &= (p_2 - p_1)y - \min_{v\in[-1,1]} v(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

Donc $u(t) = -signe(p_1(t) + p_2(t))$.

Question (iii)(a)

Anki Lucas
El Houssaini Youness

On sait que $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ résout le système :

$$\begin{cases} p_1' = 0 \\ p_2' = p_1 - p_2 \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = c_1 + c_2 e^{-t} \end{cases}$$

Avec c_1, c_2 deux constantes.
En évaluant p_2 en 0, on trouve que

$$p_2(t) = c_1 + (p_2(0) - c_1)e^{-t} \tag{9}$$

Question (iii)(a)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Donc

$$H = (p_1 - p_2)y - \min_{v \in [-1,1]} v(2c_1 + (p_2(0) - c_1)e^{-t}) \qquad (10)$$

On constate que la fonction $t \longmapsto 2c_1 + (p_2(0) - c_1)e^{-t}$ est strictement monotone, on en déduit donc que u est bang-bang. De plus il n'y a qu'un seul changement de signe au plus, donc il y a au plus un point de commutation .

Question (iii)(b)

Montrons, en utilisant les conditions de transversalité, que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas .

On suppose que les conditions initiales sont choisies dans M_1. On rappelle que $M_1 = \{(0, y) | |y| \leq 1\}$ On a donc les espaces tangents $T_{X(0)}M_1 = 0 \times \mathbb{R}$.

La condition de transversalité sur M_1 nous donne

$$P(0) \perp T_{X(0)}M_1$$

Question (iii)(b)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

On obtient donc les conditions suivantes:

$$\begin{cases} p_1(0) = \pm 1 \\ p_2(0) = 0 \end{cases}$$

En nous rappelant que

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = c_1 + (p_2(0) - c_1)e^{-t} \end{cases}$$

on en déduit que $c_1 = \pm 1$, donc que:

$$p_1(t) + p_2(t) = \pm(2 - e^{-t}) \neq 0 \quad \forall t \geq 0$$

Or, $u(t) = -signe(p_1(t) + p_2(t))$, donc u ne commute pas.

Question (iii)(b)

Anki Lucas
El Houssaini
Youness

Par exemple, si $c_1 = 1$, on a $u(t) = -1$.
En injectant dans le système de contrôle on a (x, y) solution de:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + 1 \\ y'(t) = y(t) + 1 \end{cases}$$

On déduit directement que:

$$\begin{cases} x(t) = -y_1 e^t + 2t + x_1 \\ y(t) = y_1 e^t - 1 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} x_1 = x(0) + y(0) + 1 \\ y_1 = y(0) + 1 \end{cases}$$

En partant du point $x = x(0) = 0, y = y(0) = 1$, on en déduit que

$$\begin{cases} x(t) & = -2e^t + 2t + 2 \\ y(t) & = 2e^t - 1 \end{cases}$$