Aide pour résoudre la question 4 du TP2

Cette question n'est pas simple. Voici les étapes à suivre (et à détailler) pour la résoudre. La différentiabilité du critère L_τ sera admise (elle repose sur un argument du type "fonctions implicites").

Etape 1 : différentielle de L_τ.

Soit h, une perturbation admissible de $u \in \mathcal{U}_\alpha$, autrement dit une fonction de $L^\infty(]0,T[)$ telle que $u+\varepsilon h \in \mathcal{U}_\alpha$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. On a :

$$DL_\tau(u)\cdot h = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L_\tau(u+\varepsilon h) - L_\tau(u)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} L_\tau(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \quad \left(= \begin{array}{l}\text{valeur de la dérivée} \\ \text{de } \varepsilon \longmapsto L_\tau(u+\varepsilon h) \\ \text{en } \varepsilon = 0\end{array} \right)$$

Soit $(\dot{S}, \dot{I}, \dot{R})$ la différentielle de (S_u, I_u, R_u) en u dans la direction h (où j'appelle (S_u, I_u, R_u) la solution du système (1) associée au choix de contrôle u), autrement dit

$$\dot{S}(\cdot) = \frac{d}{d\varepsilon} S_{u+\varepsilon h}(\cdot)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \dot{I}(\cdot) = \frac{d}{d\varepsilon} I_{u+\varepsilon h}(\cdot)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \text{etc.}$$

On a :

$$DL_\tau(u)\cdot h = \frac{d}{d\varepsilon} L_\tau(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{\text{à détailler}}{=} \tau \int_0^T g'(u(t))\, h(t)\, dt + (1-\tau)\int_0^T \dot{I}(t)\, f'(I(t))\, dt.$$

Etape 2 : détermination de $(\dot{S}, \dot{I}, \dot{R})$

Les calculs qui suivent sont formels. Néanmoins, on peut les rendre parfaitement rigoureux en utilisant les résultats de différentiabilité que nous avons admis.

On a pour tout $t \geq 0$:

$$S'_{u+\varepsilon h}(t) = -(u(t)+\varepsilon h(t)) \frac{S_{u+\varepsilon h}(t)\, I_{u+\varepsilon h}(t)}{N}.$$

Dérivons cette relation par rapport à ε (on rappelle que N est constant) et évaluons l'égalité obtenue en $\varepsilon = 0$. On trouve (à détailler) :

$$\dot{S}'(t) = -h(t) \frac{S_u(t)\, I_u(t)}{N} - u(t) \frac{\dot{S}(t)\, I_u(t)}{N} - u(t) \frac{S_u(t)\, \dot{I}(t)}{N}$$

De la même façon,

$$\dot{I}'(t) = h(t) \frac{S_u(t)\, I_u(t)}{N} + u(t) \frac{\dot{S}(t)\, I_u(t)}{N} + u(t) \frac{S_u(t)\, \dot{I}(t)}{N} - \beta \dot{I}(t)$$

et $\dot{R}'(t) = \beta \dot{I}(t)$. et de plus $(\dot{S}(0), \dot{I}(0), \dot{R}(0)) = (0,0,0)$

Etape 3 : Calcul du gradient de L_T en u.

La démarche à suivre dans cette étape peut vous sembler étonnante. Vous verrez qu'il s'agit d'une démarche systématique pour les calculs de gradients à l'aide d'adjoints (cf chapitre 3). La méthode consiste à :

- Multiplier au sens du produit scalaire les équations sur $(\dot{S}, \dot{I}, \dot{R})$ par (P_1, P_2, P_3)
- Intégrer la relation obtenue par parties.

En suivant ces étapes, on trouve :

$$\int_0^T \dot S'(t)\, P_1(t)\,dt + \int_0^T \dot I'(t)\, P_2(t) + \int_0^T \dot R'(t)\, P_3(t)\,dt$$

$$= \int_0^T \Big[-h\frac{SI}{N}P_1 - u\frac{\dot S I}{N}P_1 - u\frac{S\dot I}{N}P_1 + h\frac{SI}{N}P_2$$

$$+ u\frac{\dot S I}{N}P_2 + u\frac{S\dot I}{N}P_2 - \beta \dot I P_2 + \beta \dot I P_3\Big]dt$$

je n'écris plus la variable t dans les intégrales pour ne pas alourdir les notations

et après intégration par parties, il vient : (en regroupant les termes)

$$\int_0^T \left(-P_1'\dot S - P_2'\dot I - P_3'\dot R\right)dt + \underbrace{\cancel{\Big[\dot S P_1 + \dot I P_2 + \dot R P_3\Big]_{t=0}^{t=T}}}_{=0 \text{ car } \begin{cases}(P_1,P_2,P_3)(T)=(0,0,0)\\ (\dot S,\dot I,\dot R)(0)=(0,0,0)\end{cases}}$$

$$= \int_0^T h\left[\frac{SI}{N}P_2 - \frac{SI}{N}P_1\right] + \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{uI}{N} & -\frac{uS}{N} & 0 \\ \frac{uI}{N} & \frac{uS}{N} & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}\dot S\\ \dot I\\ \dot R\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}}_{= A\begin{pmatrix}\dot S\\ \dot I\\ \dot R\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot S\\ \dot I\\ \dot R\end{pmatrix}\cdot {}^tA\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}} dt$$

et finalement

$$\int_0^T \begin{pmatrix}\dot S\\ \dot I\\ \dot R\end{pmatrix}\cdot\left(-\begin{pmatrix}P_1'\\ P_2'\\ P_3'\end{pmatrix} - {}^tA\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}\right)dt = \int_0^T h\frac{SI}{N}\left[P_2 - P_1\right]dt$$

Utilisons l'équation sur l'adjoint $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$, on obtient finalement :

$$\int_0^T \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f'(I) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^T \frac{h S I}{N} [P_2 - P_1] dt$$

Cette identité est appelée identité de dualité. Ainsi

$$\int_0^T \dot{I} f'(I) dt = \int_0^T h \frac{S I}{N} [P_2 - P_1] dt$$ et par

Conséquent,

$$DL_\tau(u) \cdot h = \tau \int_0^T g'(u(t)) h(t) dt + (1-\tau) \int_0^T \dot{I}(t) f'(I(t)) dt$$

$$= \rule{4cm}{0.4pt} + (1-\tau) \int_0^T \frac{h(t) S(t) I(t)}{N} (P_2(t) - P_1(t)) dt$$

$$= \int_0^T h(t) \psi(t) dt = \langle h, \psi \rangle_{L^2(]0,T[)}$$

avec $\psi(t) = \tau g'(u(t)) + (1-\tau) \dfrac{S(t) I(t)}{N} (P_2(t) - P_1(t))$

ψ est le gradient de la fonctionnelle L_τ.

$$\underline{\nabla L_\tau(t) = \psi(t)} \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

<u>Remarque</u> : pour le T.P., je vous demande d'essayer de vous approprier ces calculs, n'hésitez pas à ajouter des détails si cela vous aide.