Exercice II.7

El Houssaini Youness

November 16, 2020

On considère le système de contrôle:

$$(\Sigma) : \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) + u(t) & , t \geq 0 \\ y'(t) = -y(t) + u(t) & , t \geq 0 \\ |u(.)| \leq 1 \end{cases}$$

où x , y et u sont trois applications: $[0, T] \subset R^{+} \rightarrow R$.
Le but est de joindre en temps minimal la droite x = 0, puis de rester sur cette droite.

Question (i) - Énoncé

On considère la cible $M_1 = \{(0, y), |y| \leq 1\}$ et on s'intéresse à l'existence et la caractérisation de trajectoires temps optimales pour le problème (Σ) décrit au dessus.

Montrer que si un tel contrôle existe, alors on a nécessairement $|y(t)| \leq 1$ lorsque $x(t) = 0$. Réciproquement, montrer que de tout point $(0,y) \in M_1$, part une trajectoire restant dans M_1.

Question (i) - Montrer que si un tel contrôle existe, alors on a nécessairement |y(t)| ≤ 1 lorsque x(t) = 0.

En effet, en supposant qu'il y a bien un contôle de ce système:
Lorsque $x(t) = 0$, on a $x'(t) = 0$. On remplace dans:

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} \boxed{x'(t) = y(t)+u(t)} & , t \geq 0 \\ y'(t) = -y(t) + u(t) & , t \geq 0 \\ |u(.)| \leq 1 \end{cases}$$

.

$$(\Sigma) \implies \quad y(t) = -u(t)$$

Or, $|u(.)| \leq 1$.
Alors on a nécessairement:

$$|y(t)| \leq 1 \; lorsque \; x(t) = 0$$

.

Question (i) - Réciproquement, montrer que de tout point (0,y) $\in M_1$, part une trajectoire restant dans M_1.

En effet, soit $(0, y) \in M_1$ on remarque que si $x(t) = 0$, alors $x'(t) = 0$.
On remplace dans:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \boxed{x'(t) = y(t)+u(t)} & , t \geq 0 \\ y'(t) = -y(t) + u(t) & , t \geq 0 \\ |u(.)| \leq 1 \end{cases}$$

. Et on obtient: $y(t) = -u(t)$
Puis on remplace dans:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x'(t) = y(t) + u(t) & , t \geq 0 \\ \boxed{y'(t) = -y(t)+u(t)} & , t \geq 0 \\ |u(.)| \leq 1 \end{cases}$$

.

Et on en déduit que $\forall t \geq 0$:

$$y(t) = y(0)e^{-2t}$$

On a: $y \in M_1$ alors:$|y(0)| \leq 1$
On remarque aussi: $0 \leq e^{-2t} \leq 1$
Donc:

$$\forall t \geq 0 \quad |y(t)| \leq 1$$

En d'autre termes:
$\forall (0, y) \in M_1$, part une trajectoire restant dans M_1.

Question (ii) - Etudier l'existence d'une trajectoire temps optimale.

Le système de contôle (Σ) peut être représenté sous la forme canonique linéaire comme suite:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t) & , t \in [0, T] \\ X(0) = X_0 & , X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

En posant $X = (x, y)^T \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B = (1, 1)^T \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notons que la commande $u \in L^\infty(0, T, U)$, où U = [-1,1] est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.

Théorème II.1.1. Existence de commandes temps optimales: On suppose que U est compact. Si le point x_1 est accessible depuis x_0 avec un contrôle u à valeurs dans U, alors il existe une trajectoire temps-minimale reliant x_0 à x_1. De plus, x_1 est nécessairement extrémal, autrement dit $x_1 \in \partial A(x_0, t^*)$.

Dans notre cas:
La commande $u \in L^\infty(0, T, U)$, où U est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$. en effet, $U = [-1, 1]$ est bien compact.
On a aussi montré que si $X_0 \in M_1$ alors $\exists X_1$ accessible depuis X_0.
en plus on a aussi que $X_1 \in M_1$.
Donc: il existe une trajectoire temps-minimale reliant X_0 à X_1.

Question (iii) - Ènoncé

On cherche à caractériser les trajectoires temps optimales. On choisit de raisonner "en temps inverse", en calculant les trajectoires joignant M_1 à tout point final.
(a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations adjointes. En déduire que le contrôle optimal est bang-bang avec au plus une commutation.
(b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas. Représenter quelques unes des trajectoires associées.

Théorème II.3.2. Principe du maximum de Pontryagin, version générale

Soit M_1 un sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur [0,T], alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

et on a la condition de maximisation presque partout sur [0,T]

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v).$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T:

$$max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \qquad (*)$$

Question (iii) - (a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations adjointes

Dans notre cas:
La cible $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ et on définit le Hamiltonien du système de contrôle optimal sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_- \times R$ par:

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u) =< p(t), f(t, x(t), u(t)) > +p^0 f^0$$

Avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1,

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$$

et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, T(u)[$ de $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $U = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

Par ailleurs on définit la fonctionnelle de coût:

$$\boxed{C(T,u) = \int_0^T f^0(s,x(s),u(s))ds + g(T,x(T))}$$

avec $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to 0$ et $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to t$
Afin d'avoir la reformulation de notre problème de contrôle optimal suivante:

$$inf_{T \in \mathbb{R}^+ \, u \in U} C(T,u) = inf_{T \in \mathbb{R}^+ \, u \in U} T_u$$

Question (iii) - (a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations adjointes

On applique le Théorème II.3.2:

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$p'(t) = -\frac{\partial < p(t), f(t, x(t), u(t)) >}{\partial x} = -\frac{\partial < p(t), Ax(t) + Bu(t) >}{\partial x}$$

$$p'(t) = -\frac{\partial < p(t), Ax(t) >}{\partial x} = -A^T p(t)$$

Remarque: Ce qui peut être obtenue par le Théorème II.1.2.

Théorème II.1.2. Condition d'optimalité et principe du maximum de Pontryagin:

Soit $u \in L^\infty(0, T, U)$ une commande qui transfère le système (Σ) de $x(0) = x0$ à $x(T) = xT \in \mathbb{R}^2$. Si le temps T est minimum, alors il existe une fonction p non identiquement nulle solution de l'équation adjointe $p'(t) = -A^T p(t), t \in [0, T]$ telle que pour presque tous $s \in [0, T], u(s)$ réalise instantanément le maximum de l'Hamiltonien $H : U \ni v \to < p(s), Bv >_{\mathbb{R}^2}$.

Alors le maximum du hamiltonien : $max_{v \in U} < B^T p(s), v >_{\mathbb{R}^2}$ est atteind en v = 1 ou -1 (bornes de U=[-1,1])

Question (iii) - (a) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations adjointes

$$p'(t) = -A^T p(t)$$

$$\implies p(t) = p(0)e^{-tA^T}$$

En particulier pour t = T: $p(T) = p(0)e^{-TA^T}$

$$\implies p(0) = p(T)e^{TA^T}$$

Le vecteur adjoint est donc:

$$p(t) = p(T)e^{(T-t)A^T}$$

Question (iii) - (a) En déduire que le contrôle optimal est bang-bang avec au plus une commutation.

On a la condition de maximisation presque partout sur [0,T]

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v(t))$$

$$\iff u(t) = argmax_{v \in U} < p(t), Ax(t) + Bv(t) >$$

$$\iff u(t) = argmax_{v \in U} < p(t), Bv(t) >$$

On remarque que le max est atteint dans les bords de U.
$u = 1$ si $< p(t), B >_{\mathbb{R}^2}$ positif et $u = -1$ sinon.
Donc le contrôle optimal est dit bang-bang avec au plus une commutation.

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

On a la condition au temps final a T:

$$max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))$$

$$\iff max_{v \in U} < p(T), Ax(T) + Bv(T) >= -p^0 \frac{\partial t}{\partial t}(T, x(T))$$

En posant $p^0 = -1$:

$$max_{v \in U} < p(T), Ax(T) + Bv(T) >= 1$$

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

Il faut d'abord déterminer p(T), en utilisant les conditions de transversalité.
Pour ce faire:

1. Déterminer l'espace tangent $\mathbb{T}_x M_1$;
2. Montrer que M_1 est variété de $\mathbb{R}^2$ ayant des espaces tangents en $X(T) \in M_1$;
3. Trouver un vecteur adjoint $p(T)$ tel que:

$$p(T) \perp \mathbb{T}_{x(T)} M_1$$

.

Question (iii) - Déterminer l'espace tangent $\mathbb{T}_x M_1$

Selon la question (i), M_1 peut être aussi représenté comme suite:

$$M_1 = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(X) = x = 0\}$$

Où F est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Selon la *Remarque II*.3.3 du cours:

$$\mathbb{T}_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 | \nabla F(X).v = 0\} = \{v = (0, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Question (iii) - M_1 est variété de $\mathbb{R}^2$ ayant des espaces tangents en $X(T) \in M_1$

Définition:

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k si pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k -difféomorphisme $f : U \to V$, envoyant x sur 0 et telle que:

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

On remarque que $f(\mathbb{R}^2 \cap M_1) = \mathbb{R}^2 \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ avec $f(x, y) = (0, y)$.
Alors M_1 est bien une variété de $\mathbb{R}^2$.

Question (iii) - Trouver un vecteur $p(T)$ tel que:

$$p(T) \perp \mathbb{T}_{x(T)} M_1.$$

On a:

$$\mathbb{T}_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 | \nabla F(X).v = 0\} = \{v = (0, y)\}$$

$$\implies p(T) = \lambda \nabla F(X) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, Or, M_1 est convexe donc $p(T)$ est unitaire (Voir Remarque 3 du cours commande temps minimum de systèmes linéaires), On prend $\lambda = 1$ pour le reste de l'exercice.

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

On a la condition au temps final a T:

$$max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))$$

$$\iff max_{v \in U} < p(T), Ax(T) + Bv(T) >= -p^0 \frac{\partial t}{\partial t}(T, x(T))$$

En posant $p^0 = -1$ (choix du cours):

$$max_{v \in U} < p(T), Ax(T) + Bv(T) >= 1 \quad (*)$$

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

$$(*) \iff max_{v \in U} < p(T), Ax(T) + Bv(T) >= 1$$

Selon Duhamel:

$$AX(T) = Ae^{TA}X_0 + \int_0^T Ae^{(T-s)A}Bu(T)ds$$

$\iff$

$$AX(T) = Ae^{TA}X_0 - \left[e^{(T-s)A}\right]_0^T Bu(T)$$

$\iff$

$$AX(T) = Ae^{TA}X_0 + e^{TA}Bu(T)$$

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

On remplace dans (*):

$$(*) \iff < p(T), Ae^{TA}X_0 + e^{TA}Bu(T) + Bu(T) >= 1$$

Avec:
$p(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u(T) = \{-1, 1\}$ et, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et
$e^{TA} = \begin{pmatrix} 1 & e^T \\ 1 & -e^T \end{pmatrix}$ et $Ae^{TA} = \begin{pmatrix} 1 & -e^T \\ -1 & e^T \end{pmatrix}$

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

On remplace dans (*):

$(*) \implies$

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -e^T \\ -1 & e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 & e^T \\ 1 & -e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] u(T) >_{\mathbb{R}^2} = 1$$

$\implies$

$$\left[x_0 - y_0 e^T + (2 + e^T) u(T)\right] = 1 \quad (**)$$

Question (iii) - (b) En utilisant les conditions de transversalité, montrer que si les conditions initiales sont choisies dans M_1, alors le contrôle optimal ne commute pas.

On suppose maintenant que $X_0 \in M_1$: $\implies x_0 = 0 et |y_0| \leq 0$
Aussi on remplace u(T) par l'une des possibilité du contrôle, soit $u(T) = 1$ ou $u(T) = -1$ et on remplace dans (**) repectivement:

$$\left[-y_0 e^T + 2 + e^T \right] = 1 \, ou \, \left[-y_0 e^T - 2 - e^T \right] = 1$$

$\implies$

$$e^T = \frac{-1}{1 - y_0} \leq 0 \quad ou \quad e^T = \frac{-3}{1 + y_0} \leq 0$$

Absurde! Donc le contôle ne commute pas dans ce cas de figure.
Alors le tram s'arrêtes!

Question (iii) - Représenter quelques unes des trajectoires associées.

Pour rerésenter quelques trajectoires on prend des valeurs de $X_0 \notin M_1$. On se fixe un temps minimal de $T = ln(2)$ et son contrôle optimale correspondant de u_t donné par la condition de maximisation:

$$max_{v \in U} < p(t), Bv(t) >$$

$$\iff max_{v \in U} < p(T)e^{(T-t)A^T}, Bv(t) >$$

Et Duhamel nous donnes ensuite les trajectoires en fonctions de X_0:

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(T-s)A}Bu(s)ds$$

Question (iii) - Représenter quelques unes des trajectoires associées.

En plus, selon la condition de temps optimal on a les équations suivantes qui nous permettent de tirer les points de départ X_0:

$$\begin{cases} x_0 = 2y_0 - 3 & , u_T = 1 \\ x_0 = 2y_0 + 5 & , u_T = -1 \end{cases}$$

Question (iii) - Représenter quelques unes des trajectoires associées.

$\forall t \in [0, T]$, ici T =ln(2) pour simplifier les calcules, la procédure se résume comme suite:

1. Déterminer le contrôle u $\quad \forall t \in [0, T]$

   $$u = argmax_{v \in U} < p(T), e^{(T-t)A} Bv(t) > \quad p(T) = (1,0)^T \in \mathbb{R}^2$$

2. Donner $X_0 = (x0, y0) \quad X_0 \notin M_1$ tel que:

   $$\begin{cases} x_0 = 2y_0 - 3 & , u_{ln(2)} = 1 \\ x_0 = 2y_0 + 5 & , u_{ln(2)} = -1 \end{cases}$$

3. En déduire: $X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(T-s)A} Bu(s) ds.$