Méthodes d'adjoint pour le contrôle optimal sous contrainte EDP

Yannick Privat

IRMA, univ. Strasbourg

M2 CSMI - contrôle optimal

Plan

1. Rappels sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert

2. Contrôle optimal des problèmes elliptiques
   - Contrôle distribué
   - Contrôle frontière

3. Contrôle optimal de l'équation de la chaleur

Sommaire

1. Rappels sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert
2. Contrôle optimal des problèmes elliptiques
3. Contrôle optimal de l'équation de la chaleur

Fonctions convexes/fortement convexes

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

Fonction convexe

Une fonction $J : H \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall u, v \in H,\ \forall \theta \in [0,1], \quad J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v),$$

et strictement convexe si

$$\forall u \neq v \in H,\ \forall \theta \in]0,1[, \quad J(\theta u + (1-\theta)v) < \theta J(u) + (1-\theta)J(v).$$

Proposition : fonctions convexes différentiables

Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors

1. J est convexe si et seulement si

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u), v-u), \quad \forall u, v \in H.$$

2. J est strictement convexe si et seulement si

$$J(v) > J(u) + (\nabla J(u), v-u), \quad \forall u \neq v \in H.$$

Fonctions convexes/fortement convexes

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

Fonctions fortement convexes

Une fonction $J : H \to \mathbb{R}$ est dite *fortement convexe* ou α*-convexe* s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$J\Big(\theta u + (1-\theta)v\Big) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v) - \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)\|v-u\|^2, \qquad \forall u, v \in H.$$

Remarque : J fortement convexe $\Rightarrow$ J strictement convexe (pourquoi ?)

Proposition : fonctions fortement convexes différentiables

Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes

1. J est fortement convexe
2. la fonction $J - \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe
3. J est α-elliptique, autrement dit

$$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u) \geq \alpha\|v-u\|^2, \qquad \forall u, v \in H.$$

Fonctions convexes/fortement convexes

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

Proposition : fonctions fortement convexes différentiables

Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes

1. J est fortement convexe
2. la fonction $J - \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe
3. J est α-elliptique, autrement dit

$$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u) \geq \alpha\|v-u\|^2, \qquad \forall u,v \in H.$$

Preuve : posons $g(x) = J(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$. En développant $\|tx+(1-t)y\|^2$ et en regroupant les termes correctement, on trouve

$$tg(x)+(1-t)g(y)-g(tx+(1-t)y) = tJ(x)+(1-t)J(y)-f(tx+(1-t)y)-\frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2,$$

ce qui prouve la première équivalence annoncée.
La deuxième équivalence résulte du la proposition : si $g : H \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors g est convexe si, et seulement si

$$g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y-x\rangle, \quad \forall (x,y) \in H^2$$

ou encore si, et seulement si $\langle \nabla g(y) - \nabla g(x), y-x\rangle \geq 0$, $\forall (x,y) \in H^2$.

Théorème d'existence, inéquation d'Euler

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de H.

Théorème : existence d'un minimum de fonction α-convexe

Soient $J: \ H \to \mathbb{R}$ une fonction continue, α-convexe et $\mathcal{U}_{ad}$ une partie non-vide convexe fermée. Alors le problème $\inf\{J(v), \ v \in \mathcal{U}_{ad}\}$ admet une unique solution.

Preuve : soit (u_k) une suite minimisante, i.e. $\lim\limits_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf\limits_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)$.

La α-convexité de J implique que

$$\frac{\alpha}{4}\|u_k - u_l\|^2 \leq J(u_k) + J(u_l) - 2J\left(\frac{u_k+u_l}{2}\right) \leq J(u_k) + J(u_l) - 2\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v),$$

puisque $\frac{u_k+u_l}{2} \in \mathcal{U}_{ad}$ qui est convexe.
On en déduit que la suite (u_k) est de Cauchy dans H, i.e. $\|u_k - u_l\|^2 \to 0$ si $k,l \to +\infty$. L'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ étant fermé, la suite de Cauchy (u_k) converge vers une élément $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Il s'ensuit que

$$J(u) = \lim_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

L'unicité découle de la stricte convexité de la fonctionnelle J.

Remarque : ce résultat reste valable en remplaçant "J continue" par l'hypothèse plus générale "J est s.c.i.".

Théorème d'existence, inéquation d'Euler

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de H.

C.N.S. d'optimalité

Supposons que $J : H \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et convexe. Alors $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est solution du problème $\inf\{J(v),\ v \in \mathcal{U}_{ad}\}$ si et seulement s'il satisfait l'inéquation d'Euler

$$(\nabla J(u), v-u) \geq 0, \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Preuve : supposons que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfait l'inéquation d'Euler. Alors la convexité de J implique

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u), v-u) \geq J(u), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Réciproquement, supposons que u est solution de $\inf\{J(v),\ v \in \mathcal{U}_{ad}\}$. Alors pour tout $0 \leq \theta \leq 1$, la convexité de $\mathcal{U}_{ad}$ implique $u + \theta(v-u) = (1-\theta)u + \theta v \in \mathcal{U}_{ad}$. Par minimalité de $J(u)$, on a $J(u) \leq J(u+\theta(v-u))$. Puisque J est dérivable, la formule de Taylor fournit

$$J(u) \leq J(u) + \theta(\nabla J(u), v-u) + o(\theta).$$

La conclusion s'obtient en simplifiant par $\theta > 0$, puis en faisant $\theta \to 0^+$ dans la relation ci-dessus.

Théorème d'existence, inéquation d'Euler

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de H.

Cas $\mathcal{U}_{ad} = H$

Si $\mathcal{U}_{ad} = H$, l'inéquation d'Euler

$$(\nabla J(u), v - u) \geq 0, \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

se réécrit $\nabla J(u) = 0$.

Preuve : en effet, choisissons $v = u - \nabla J(u) \in H$. Alors l'inéquation d'Euler se réécrit

$$-\|\nabla J(u)\|^2 \geq 0$$

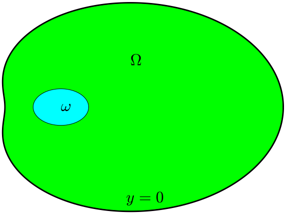
d'où le résultat.

Sommaire

1. Rappels sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert
2. Contrôle optimal des problèmes elliptiques
   - Contrôle distribué
   - Contrôle frontière
3. Contrôle optimal de l'équation de la chaleur

Un problème modèle : contrôle de la température

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui représente un corps thermiquement conducteur.



- État du système : champ y des températures dans Ω.
- Température maintenue constante [a] sur le bord : condition de Dirichlet homogène
- On impose une source de chaleur sur laquelle aucune action n'est possible : f
- Contrôle $v\mathbb{1}_\omega$: représente une source de chaleur sur un sous-domaine ω afin d'agir sur la température dans tout le domaine Ω.

a. constante utilisée comme origine pour l'échelle de températures

La fonction $y : \Omega \to \mathbb{R}$ solution de l'équation de la chaleur stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta y(x) = f(x) + v(x)\mathbb{1}_\omega(x) & x \in \Omega \\ y(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- $\rightsquigarrow$ Comment calculer la différentielle de J ?
- $\rightsquigarrow$ Comment écrire des conditions d'optimalité pour ce problème ?
- $\rightsquigarrow$ Quelle méthode numérique en déduire ?

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Outils fondamentaux : intégrations par parties

Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit n, la normale sortante au domaine Ω

1. Si u et v sont deux fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u\, dx + \int_{\partial\Omega} uv \underbrace{n_i}_{i\text{-ème coord. de } n} d\sigma.$$

2. Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega \Delta u v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma.$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Remarque préliminaire

On note $y(v)$ la solution du problème précédent. L'application $L^2(\Omega) \ni v \mapsto y(v) \in H^1_0(\Omega)$ est bien définie [a] (théorème de Lax-Milgram).

Soient $u \in \mathcal{U}_{ad}$ et h telle que $u + \varepsilon h \in \mathcal{U}_{ad}$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. On peut montrer que cette application est différentiable en u. Si c'est le cas, sa différentielle dans la direction h est définie par

$$y'(h) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{y(u+\varepsilon h) - y(u)}{\varepsilon}$$

a. Si $\omega = \Omega$, l'application $L^2(\Omega) \ni v \mapsto y(v) \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est même un isomorphisme.

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x\in\Omega \\ y = 0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

Notons que $\delta := \frac{1}{\varepsilon}(y(u+\varepsilon h) - y(u))$ satisfait $\begin{cases} -\Delta\delta(x) = h(x)\mathbb{1}_\omega(x) & x\in\Omega \\ \delta(x) = 0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$.

δ ne dépend pas de ε donc $\delta = y'(h)$ si $v\mapsto y(v)$ est différentiable.
De plus, il existe $C_\Omega > 0$ telle que

$$\|\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|h\|_{L^2(\Omega)}$$

donc $\mathcal{U}_{ad} \ni h \mapsto \delta \in H^1(\Omega)$ est continue. Finalement,

$$\boxed{L^2(\Omega) \ni v \mapsto y(v) \in H^1_0(\Omega) \text{ est différentiable de différentielle } y'(h) = \delta.}$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Théorème

Soient $u \in L^2(\Omega)$ et h telle que $u + \varepsilon h \in \mathcal{U}_{ad}$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. On a

$$DJ(u) \cdot h = \int_\Omega \left(\mathbb{1}_\omega p(u)(x) + \alpha u(x) \right) h(x)\, dx \qquad \text{(i.e. } \nabla J(u) = p(u) + \alpha u)$$

où $p(u) \in H_0^1(\Omega)$ désigne la variable adjointe, solution de

$$\begin{cases} -\Delta p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution u^* caractérisée par

$$\int_\Omega \left(\mathbb{1}_\omega(x) p(u^*)(x) + \alpha u^*(x) \right) \left(v(x) - u^*(x) \right) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Inéquation d'Euler

Soient $u \in \mathcal{U}_{ad}$ solution du problème et $v \in \mathcal{U}_{ad}$. Par convexité, $(1-\varepsilon)u^* + \varepsilon v \in \mathcal{U}_{ad}$. On a

$$J(\varepsilon v + (1-\varepsilon)u^*) \geq J(u^*)$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Par conséquent,

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{J(\varepsilon v + (1-\varepsilon)u^*) - J(u^*)}{\varepsilon}}_{= DJ(u^*)\cdot(v-u^*)} \geq 0$$

Inéquation d'Euler

Si u^* solution du problème $(\mathcal{P})$, alors

$$DJ(u^*) \cdot (v - u^*) \geq 0, \qquad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Posons $h = v - u^*$ et notons $DJ(u^*) \cdot h = \nabla J(u^*) \cdot h$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Soit $u \in \mathcal{U}_{ad}$. On calcule

$$DJ(u) \cdot h = (y(u) - z_d, y'(h))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, h)_{L^2(\Omega)}.$$

Remarquons que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.
Alors, on a

$$\nabla J(u) \cdot (v-u) = (y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, v-u)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned}
(\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u) &= (y(v) - y(u), y'(v-u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(v-u, v-u)_{L^2(\Omega)} \\
&= (y(u^*) - z_d, y(v) - y(u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(v-u, v-u)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \alpha\|v-u\|^2.
\end{aligned}$$

Donc J est α-convexe. D'après le théorème d'existence d'un minimum de fonctions α-convexes, il existe un unique contrôle $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ qui minimise la fonction J sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Rappelons que la variable adjointe $p(u)$ est donnée par

$$\begin{cases} -\Delta p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant l'équation sur $p(u^*)$, on obtient

$$\begin{aligned} (\nabla J(u^*), v - u^*) &= (-\Delta p(u^*), y(v) - y(u^*))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Omega)} \\ &= \big(-\Delta p(u^*), y(v) - y(u^*)\big)_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions aux bords, il vient

$$\int_\Omega \Delta p(u^*)\big(y(v) - y(u^*)\big)\,dx = \int_\Omega p(u^*)\Delta\big(y(v) - y(u^*)\big)\,dx.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} (\nabla J(u^*), v - u^*) &= \big(p(u^*), -\Delta(y(v) - y(u^*))\big)_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\mathbb{1}_\omega p(u^*), v - u^*)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

L'inéquation d'Euler se réécrit donc

$$(\mathbb{1}_\omega p(u^*) + \alpha u^*, v - u^*)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Cas sans contrainte : $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)$

La condition d'optimalité devient $u = -\frac{1}{\alpha} p \mathbb{1}_\omega$, si bien que y et p satisfont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta y + \frac{1}{\alpha} p \mathbb{1}_\omega = f, & \text{dans } \Omega, \\ \Delta p - y = -z_d, & \text{dans } \Omega, \\ y = 0, \qquad p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Par régularité elliptique, le contrôle u appartient à $H^2(\Omega)$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x\in\Omega \\ y = 0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

On a montré que

$$DJ(u)\cdot h = \int_\Omega \left(\mathbb{1}_\omega(x)p(u)(x) + \alpha u(x)\right) h(x)\,dx$$

et $p(u)$ résout $\begin{cases} -\Delta p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$

Un problème modèle : contrôle de la température
Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x\in\Omega \\ y = 0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

Algorithme de type gradient

- $\rightsquigarrow$ $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ donné.
- $\rightsquigarrow$ $u^k \in \mathcal{U}_{ad}$ étant connu, on le met à jour par la formule

$$u^{k+1} = \Pi_{\mathcal{U}_{ad}}\left(u^k - \rho^k(\mathbb{1}_\omega p(u^k) + \alpha u^k)\right)$$

où $\Pi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est l'opérateur de projection sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

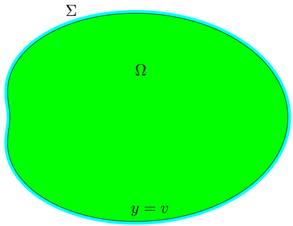
$$\begin{cases} -\Delta y = f + v\mathbb{1}_\omega & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

À chaque itération de l'algorithme, on doit

- $\rightsquigarrow$ résoudre l'état,
- $\rightsquigarrow$ PUIS résoudre l'adjoint,
- $\rightsquigarrow$ effectuer l'étape de projection,
- $\rightsquigarrow$ chercher le pas ρ^k de l'algorithme.

Un problème modèle : contrôle de la température

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui représente un corps thermiquement conducteur.



- État du système : champ y des températures dans Ω.
- On impose une source de chaleur sur laquelle aucune action n'est possible : f
- Contrôle v : représente une source de chaleur sur le bord $\Sigma = \partial\Omega$ afin d'agir sur la température dans tout le domaine Ω.

La fonction $y : \Omega \to \mathbb{R}$ solution de l'équation elliptique

$$\begin{cases} -\Delta y(x) + y(x) = f(x) & x \in \Omega \\ y(x) = v(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal ($\Sigma := \partial\Omega$)

$$\boxed{\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Sigma)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f & x \in \Omega \\ y = v & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Donnons un sens clair aux solutions du système non homogène. Grâce à la théorie des équations elliptiques (opérateur de trace et relèvement), on montre que pour toutes données $v \in L^2(\Sigma)$ et $f \in L^2(\Omega)$, le système ci-dessus admet une seule solution $y \in L^2(\Omega)$. En particulier, l'application affine

$$L^2(\partial\Omega) \ni v \to y(v) \in L^2(\Omega)$$

est continue pour les topologies correspondantes. Ainsi la fonction J est bien définie.

Un problème modèle : contrôle de la température

Le problème de contrôle optimal ($\Sigma := \partial\Omega$)

$$\boxed{\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Sigma)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout l'EDP :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y + y = f & x \in \Omega \\ y = v & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_{ad}^2$. On définit $y'(v-u) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{y(u+\varepsilon(v-u)) - y(u)}{\varepsilon}$.

Lemme

On a $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.
De plus, $L^2(\Sigma) \ni u \mapsto y(u)$ est différentiable en u de différentielle y'.

Preuve : $L^2(\Sigma) \ni u \mapsto y(u)$ est différentiable en u car elle est affine continue. La première égalité provient du fait que $y'(v-u)$ résout le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y'(v-u) + y'(v-u) = 0 & x \in \Omega \\ y'(v-u) = v - u & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Théorème

Soient $u \in L^2(\Sigma)$ et h tel que $u + \varepsilon h \in \mathcal{U}_{ad}$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. On a

$$DJ(u) \cdot h = \int_\Sigma (-\partial_n p(u)(x) + \alpha u(x))\, h(x)\, dx \qquad (\text{i.e. } \nabla J(u) = p(u) + \alpha u)$$

où $p(u) \in H^1(\Omega)$ désigne la variable adjointe, solution de

$$\begin{cases} -\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution u^* caractérisée par

$$\int_\Sigma (-\partial_n p(u^*)(x) + \alpha u^*(x))\, (v(x) - u^*(x)) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Soit $u \in \mathcal{U}_{ad}$ et $h = v - u$. On calcule

$$DJ(u) \cdot h = (y(u) - z_d, y'(h))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, h)_{L^2(\Sigma)}.$$

Remarquons que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.
Alors, on a

$$\nabla J(u) \cdot (v - u) = (y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, v-u)_{L^2(\Sigma)}$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) &= (y(v) - y(u), y'(v-u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(v-u, v-u)_{L^2(\Sigma)} \\ &= (y(u^*) - z_d, y(v) - y(u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(v-u, v-u)_{L^2(\Sigma)} \\ &\geq \alpha\|v-u\|^2_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Donc J est α-convexe et continue sur $L^2(\Sigma)$. D'après le théorème d'existence d'un minimum de fonctions α-convexes, il existe un unique contrôle $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ qui minimise la fonction J sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

Rappelons que la variable adjointe $p(u)$ est donnée par

$$\begin{cases} -\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant l'équation sur $p(u^*)$, on obtient

$$\begin{aligned} (\nabla J(u^*), v - u^*) &= (-\Delta p(u^*), y(v) - y(u^*))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Sigma)} \\ &\quad + (p(u^*), y(v) - y(u^*))_{L^2(\Omega)} \\ &= \big((-\Delta + \mathrm{Id})p(u^*), y(v) - y(u^*)\big)_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

A l'aide de la formule de Green et les conditions aux bords, on a

$$\int_\Omega \Delta p(u^*)\big(y(v) - y(u^*)\big)\,dx = \int_\Omega p(u^*)\Delta\big(y(v) - y(u^*)\big) - \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu} p(u^*)(v - u^*)\,d\Gamma.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} (\nabla J(u^*), v - u^*) &= \big(-\partial_n p(u^*), y(v) - y(u^*)\big)_{L^2(\Sigma)} + \alpha(u^*, v - u^*)_{L^2(\Sigma)} \\ &= (\alpha u^* - \partial_n p(u^*), v - u^*)_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Un problème modèle : contrôle de la température

Preuve du théorème

L'inéquation d'Euler se réécrit donc

$$(\alpha u^* - \partial_n p(u^*), v - u^*)_{L^2(\Sigma)} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Cas sans contrainte : $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Sigma)$

La condition d'optimalité devient $u^* = -\frac{1}{\alpha}\partial_n p$, si bien que y et p satisfont

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f, & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta p + p - y = -z_d, & \text{dans } \Omega, \\ y = -\frac{1}{\alpha}\partial_n p, \qquad p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par régularité elliptique, le contrôle u appartient à $H^2(\Omega)$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Sigma)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v via l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f & x \in \Omega \\ y = v & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

On a montré que

$$DJ(u)\cdot h = \int_\Sigma (-\partial_n p(u)(x) + \alpha u(x))\, h(x)\, dx$$

et $p(u)$ résout $\begin{cases} -\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z_d, & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$

Un problème modèle : contrôle de la température

Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Sigma)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v via l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f & x \in \Omega \\ y = v & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Algorithme de type gradient

- $\leadsto$ $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ donné.
- $\leadsto$ $u^k \in \mathcal{U}_{ad}$ étant connu, on le met à jour par la formule

$$u^{k+1} = \Pi_{\mathcal{U}_{ad}}\left(u^k - \rho^k(-\partial_n p(u^k) + \alpha u^k)\right)$$

où $\Pi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est l'opérateur de projection sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Un problème modèle : contrôle de la température

Approche numérique

Récapitulons :

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Sigma)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}}_{\text{coût du contrôle/régularisation}}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v via l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f & x \in \Omega \\ y = v & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

À chaque itération de l'algorithme, on doit

- $\leadsto$ résoudre l'état,
- $\leadsto$ PUIS résoudre l'adjoint,
- $\leadsto$ effectuer l'étape de projection,
- $\leadsto$ chercher le pas ρ^k de l'algorithme.

Sommaire

1. Rappels sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert
2. Contrôle optimal des problèmes elliptiques
3. Contrôle optimal de l'équation de la chaleur

Un mot sur le caractère "bien posé" de l'équation de la chaleur

Le modèle

- Ω : ouvert connexe borné de bord C^2,
- $T > 0$, horizon de temps. On utilisera les notations $Q =]0, T[\times\Omega$ et $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$.

Considérons l'équation de la chaleur avec les conditions au bord de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Posons $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$. On intégre par parties l'équation principale et on trouve :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega y\phi dx + \underbrace{\int_\Omega \nabla y \nabla \phi dx}_{=a(y(t),\phi))} = \int_\Omega f\phi dx, \qquad \forall \phi \in V.$$

On cherche une fonction $y \in C^0(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ satisfaisant l'équation variationnelle

$$\frac{d}{dt}(y(t),\phi) + a(y(t),\phi) = (f(t),\phi), \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

au sens des distributions sur $]0, T[$ pour toute fonction test $\phi \in V$.
Une telle fonction y est appelée solution (faible) du problème variationnel.

Un mot sur le caractère "bien posé" de l'équation de la chaleur

Le modèle

- Ω : ouvert connexe borné de bord C^2,
- $T > 0$, horizon de temps. On utilisera les notations $Q =]0, T[\times\Omega$ et $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$.

Considérons l'équation de la chaleur avec les conditions au bord de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

Existence, unicité, régularité

Soient $y_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; H)$. On suppose que

- V et H sont deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection dense et compacte
- $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique continue sur H et coercive [a]

Alors, ce problème variationnel admet une unique solution faible. De plus, l'application

$$H \times L^2(0, T; H) \ni (y_0, f) \mapsto y \in C^0(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$$

est continue pour les normes correspondantes.

a. au sens où : $\exists \lambda \geq 0,\ \alpha > 0$ t.q. $a(y, y) + \lambda|y|^2 \geq \alpha\|y\|^2, \quad \forall y \in V$.

Un mot sur le caractère "bien posé" de l'équation de la chaleur

Le modèle

- Ω : ouvert connexe borné de bord C^2,
- $T > 0$, horizon de temps. On utilisera les notations $Q =]0, T[\times\Omega$ et $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$.

Considérons l'équation de la chaleur avec les conditions au bord de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

Conséquence : l'équation de la chaleur ci-dessus possède une unique solution faible. De plus, $L^2(Q) \ni f \mapsto y \in L^2(Q)$ est continue.

Cas de conditions au bord de Neumann : considérons l'équation de la chaleur ci-dessus avec des conditions aux bords de Neumann homogènes, i.e. $\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0$ sur Σ. Le théorème abstrait s'applique à nouveau avec $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et fournit l'existence d'une unique solution faible si $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Cas de conditions au bord non-homogènes

Théorème (conditions de Dirichlet non-homogènes)

Soient $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Sigma)$ et $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Alors l'équation de la chaleur avec conditions aux bords de Dirichlet non-homogènes

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = v & \text{sur } \Sigma \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{2}$$

admet une unique solution faible $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, i.e.

$$\begin{gathered} \|y\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}), \\ \int_0^T\int_\Omega yh\, dxdt = \int_\Omega y_0\phi(0)\, dx + \int_0^T\int_\Omega f\phi\, dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\, d\Gamma dt \end{gathered} \tag{3}$$

pour toute fonction $h \in L^2(\Omega)$.

Ce qui importe ici :

La fonction $L^2(\Sigma) \ni v \mapsto y(v) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

Cas de conditions au bord non-homogènes

Théorème (conditions de Neumann non-homogènes)

Soient $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(0,T;L^2(\Sigma))$ et $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
De façon analogue, l'équation de la chaleur avec les conditions aux bords de Neumann non-homogènes.

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{sur } \Sigma, \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

admet une unique solution faible telle que $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

On admet ces deux résultats (la preuve repose sur un argument de dualité).

Ce qui importe ici :

La fonction $L^2(\Sigma) \ni v \mapsto y(v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

Le problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal

$$\boxed{\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)} \qquad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(Q)$ et

$$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)}}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}}_{\text{coût du contrôle}}$$

$y_0 \in L^2()$, $z_d \in L^2(Q)$ et $y = y(v)$ résout l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + v & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Analyse du problème :

- différentiabilité du critère (donc différentiabilité de $v \mapsto y(v)$)
- calcul du gradient $DJ(v) \cdot h$ et conditions d'optimalité
- algorithme de résolution

Différentiabilité du critère

Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_{ad}^2$. Puisque $\mathcal{U}_{ad}$ est convexe, $(1-\varepsilon)u + \varepsilon v \in \mathcal{U}_{ad}$ si $\varepsilon \in [0,1]$ et si $\varepsilon > 0$ est assez petit, il vient que $u + \varepsilon(v-u)$ est admissible (appartient à $\mathcal{U}_{ad}$).
On définit $y'(v-u) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{y(u+\varepsilon(v-u)) - y(u)}{\varepsilon}$. Il est clair que $y'(v-u)$ résout

$$\begin{cases} \frac{\partial y'(v-u)}{\partial t} - \Delta y'(v-u) = v-u & \text{dans } Q, \\ y'(v-u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y'(v-u)(0,x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En en déduit que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$. Il reste à montrer que $y'(v-u)$ est la différentielle de y en u dans la direction $v-u$.

On a vu que l'application affine $L^2(Q) \ni v \mapsto y(v) \in L^2(Q)$ est continue (donc différentiable, puisque elle est affine). Par conséquent,

$$L^2(Q) \ni v \mapsto y(v) \in L^2(Q) \text{ est différentiable de différentielle } y'(v-u)$$

Différentiabilité du critère

Par composition, la fonction J est différentiable sur $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On note $(\nabla J(u), v-u)$ la différentielle de J en u dans la direction $v-u$.
On a

$$(\nabla J(u), v-u) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{J(u+\varepsilon(v-u)) - J(u)}{\varepsilon}.$$

il vient :

$$(\nabla J(u), v-u) = \underbrace{(y(u)-z_d, y(v)-y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}_{\text{terme implicite en } v-u} + \underbrace{\alpha(u, v-u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}_{\text{terme explicite en } v-u}.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u)) &= \|y(v)-y(u)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \alpha\|v-u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\geq \|v-u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Ceci montre que J est $\alpha-$convexe sur $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Différentiabilité du critère

De plus, J est continue sur $L^2(Q)$ par composition $v \mapsto \|v\|_{L^2(Q)}$ est bien sûr continue et $L^2(Q) \ni v \mapsto y(v) \in L^2(Q)$ l'est aussi comme on l'a vu.

Existence et caractérisation du minimiseur

Le problème de contrôle optimal admet une seule solution qui est caractérisée par l'inéquation d'Euler :

$$\forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \qquad (\nabla J(u), v - u) \geq 0.$$

Souvenons-nous que dans le cas où $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)$, l'inéquation d'Euler devient

$$\nabla J(u) = 0$$

(adapter les résultats vus au début de ce chapitre pour s'en convaincre)

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v-u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.

Voici les étapes à suivre :

- On cherche l'EDP résolue par la différentielle $y'(v-u)$. Elle s'écrit sous la forme $Ly'(v-u) =$ second membre, où L est un opérateur différentiel.
- On introduit un état adjoint p solution de $L^*p = F$ où L^* est l'opérateur adjoint de L, au sens des distributions.
  Exemple : si $L = \partial_x$, alors $L^* = -\partial_x$. Si $L = \Delta$, alors $L^* = \Delta$, etc.
- On multiplie l'équation sur $y'(v-u)$ par p et on intègre par parties. On choisit alors F et les conditions au bord de façon à obtenir une relation de la forme

$$(\nabla J(u), v-u) = (\text{quantité indépendante de } v, v-u)_{L^2(Q)}$$

Dans l'exemple traité, $\frac{\partial y'(v-u)}{\partial t} - \Delta y'(v-u) = v - u$ dans Q, donc

$$L = \partial_t - \Delta, \qquad L^* = -\partial_t - \Delta$$

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v - u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.

On choisit donc l'état adjoint p solution d'une équation de la forme

$$(-\partial_t - \Delta)p = F$$

où F est un second membre à préciser.

On multiplie l'équation sur $y'(v-u)$ par p et on intègre.

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) y'(v-u)p \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega (v-u)p \, dxdt$$

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u)-z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v-u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u)=y(v)-y(u)$.

On intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (v-u)p\,dxdt &= \int_\Omega [py'(v-u)]_{\cancel{t=0}}^{t=T} - \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} y'(v-u)\,dxdt \\ &\quad - \int_0^T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y'(v-u)}{\partial n} p + \int_0^T\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla y'(v-u)\,dxdt\end{aligned}$$

Intégrons par parties une deuxième fois en espace. il vient

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (v-u)p\,dxdt &= \int_\Omega p(T,\cdot)y'(v-u)(T,\cdot) + \int_0^T\int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right) py'(v-u)\,dxdt \\ &\quad - \int_0^T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y'(v-u)}{\partial n} p\end{aligned}$$

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u)-z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v-u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u)=y(v)-y(u)$.

Puisque $\left(-\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)p=F$ et $y'(v-u)=y(v)-y(u)$, on trouve :

$$\int_\Omega p(T,\cdot)y'(v-u)(T,\cdot)+\int_0^T\int_\Omega F(y(v)-y(u))\,dxdt-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y'(v-u)}{\partial n}p=\int_0^T\int_\Omega(v-u)p\,dxdt$$

Dans cette expression, on cherche à reconnaître $(\nabla J(u), v-u)$ en choisissant judicieusement F et $p(T,\cdot)$.

Rappelons que

$$(\nabla J(u), v-u)=(y(u)-z_d, y(v)-y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\alpha(u,v-u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

On choisit. . . ?

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v-u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.

Puisque $\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) p = F$ et $y'(v-u) = y(v) - y(u)$, on trouve :

$$\cancel{\int_\Omega p(T,\cdot)y'(v-u)(T,\cdot)} + \underbrace{\int_0^T\int_\Omega F(y(v)-y(u))}_{=(y(u)-z_d,y(v)-y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} - \cancel{\int_0^T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y'(v-u)}{\partial n}p} = \int_0^T\int_\Omega (v-u)p$$

Dans cette expression, on cherche à reconnaître $(\nabla J(u), v-u)$ en choisissant judicieusement F et $p(T,\cdot)$.
Rappelons que

$$(\nabla J(u), v-u) = (y(u) - z_d, y(v) - y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \alpha(u, v-u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

On choisit :

$$F = y(u) - z_d, \qquad p(T,\cdot) = 0, \qquad p(t,\cdot) = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

de sorte que

$$(y(u) - z_d, y(v) - y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T\int_\Omega (v-u)p\,dxdt$$

Calcul du gradient, méthode d'adjoint

Problématique : réécrire $(y(u) - z_d, y'(v-u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ explicitement en fonction de $v-u$ (cf. théorème de Riesz). On rappelle que $y'(v-u) = y(v) - y(u)$.

Bilan

On a montré que

$$\begin{aligned}(\nabla J(u), v-u) &= (y(u) - z_d, y(v) - y(u))_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \alpha(u, v-u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \int_0^T \int_\Omega (v-u)\,(p+\alpha u)\; dxdt\end{aligned}$$

où $p = p(u)$ résout l'équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{cases} -\frac{\partial p(u)}{\partial t} - \Delta p(u) = y(u) - z_d & \text{dans } Q, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ p(u)(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

ce qui signifie en particulier que

$$\nabla J(u) = p(u) + \alpha u.$$

Résumons-nous

Théorème (conditions d'optimalité)

Le problème de contrôle optimal admet une unique solution u qui est caractérisée par

- l'équation de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial y(u)}{\partial t} - \Delta y(u) = f + u & \text{dans } Q, \\ y(u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4}$$

- l'équation adjointe rétrograde

$$\left\{\begin{array}{ll} -\frac{\partial p(u)}{\partial t} - \Delta p(u) = y(u) - z_d & \text{dans } Q, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ p(u)(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{5}$$

- la condition d'optimalité

$$(p(u) + \alpha u, v - u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \geq 0, \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{6}$$

Résumons-nous

Cas sans contrainte

Lorsque $\mathcal{U}_{ad} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$, l'inéquation d'Euler s'écrit

$$u = -\frac{1}{\alpha} p(u) \qquad \text{dans } Q.$$

Le système d'optimalité devient

$$\begin{cases} \frac{\partial y(u)}{\partial t} - \Delta y(u) + \frac{1}{\alpha} p(u) = f & \text{dans } Q, \\ -\frac{\partial p(u)}{\partial t} - \Delta p(u) - y(u) = -z_d & \text{dans } Q, \\ y(u) = p(u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad p(u)(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Algorithme numérique de résolution

Algorithme de type gradient

- $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ donné.
- $u^k \in \mathcal{U}_{ad}$ étant connu, on le met à jour par la formule

$$u^{k+1} = \Pi_{\mathcal{U}_{ad}} \left(u^k - \rho^k (p(u^k) + \alpha u^k) \right)$$

où $\Pi_{\mathcal{U}_{ad}}$ est l'opérateur de projection sur $\mathcal{U}_{ad}$.
Ce calcul nécessite de résoudre à chaque itération le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y(u^k)}{\partial t} - \Delta y(u^k) = f + u^k & \text{dans } Q, \\ -\frac{\partial p(u^k)}{\partial t} - \Delta p(u^k) = y(u^k) - z_d & \text{dans } Q, \\ y(u^k) = p(u^k) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad p(u^k)(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

NB : pour résoudre le problème adjoint (rétrograde), on peut poser $\tilde{p}(u)(t,x) = p(u)(T-t,x)$, $\tilde{y}(u)(t,x) = y(u)(T-t,x)$, $\tilde{z}_d(t,x) = z_d(T-t,x)$ et on se ramène à la résolution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y(u^k)}{\partial t} - \Delta y(u^k) = f + u^k & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \tilde{p}(u^k)}{\partial t} - \Delta \tilde{p}(u^k) = \tilde{y}(u^k) - \tilde{z}_d & \text{dans } Q, \\ y(u^k) = \tilde{p}(u^k) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tilde{p}(u^k)(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$