- TD N°3 : Mécanique du point -

Théorèmes généraux de la mécanique

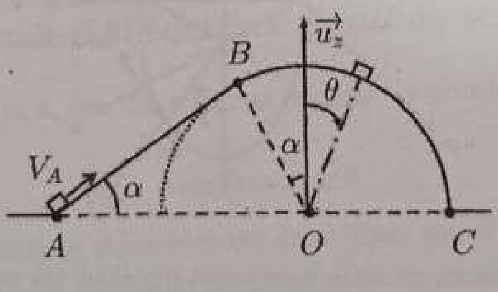
Exercice 1 : Oscillation d'une bille dans une cuvette.

Une bille M de masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon R. On note $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{u_z}$ (la direction verticale orientée vers le bas) et $\overrightarrow{OM}$. La bille est initialement lâchée sans vitesse et d'un angle θ_0 puis effectue des oscillations.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille, puis calculer le moment de chacune en O.
2. Exprimer le moment cinétique en O de la bille en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.
3. En appliquant le théorème du moment cinétique à la bille, trouver son équation du mouvement.
4. En déduire la période T des petites oscillations.

Exercice 2 : Mouvement d'un palet.

Un palet M de masse $m = 5,0$ kg, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2,0$ m et d'angle $BOC = \pi/2 + \alpha$.



Le palet, initialement lancé depuis A avec la vitesse V_A glisse sans frottement sur la piste. On désigne par $g = 10$ m · s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur.

1. Montrer que la vitesse V_B a pour expression :

$$V_B = \left(V_A^2 - 2gR\cos\alpha\right)^{1/2}$$

2. Afin que le point B soit effectivement atteint par le palet, il est nécessaire que $V_A > V_{A,l}$. Calculer $V_{A,l}$. Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

3. En appliquant la deuxième loi de Newton au palet, montrer que la durée τ de parcours de la portion AB a pour expression :

$$\tau = \frac{V_A - V_B}{g \sin \alpha}$$

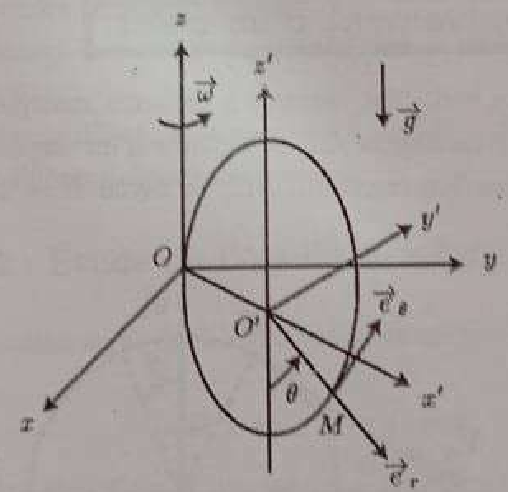
4. En appliquant la deuxième loi de Newton sur la partie BC, exprimer N la norme de la réaction du support en fonction de θ et $\dot{\theta}$. 5. En appliquant la conservation de l'énergie mécanique sur la partie circulaire, en déduire que :

$$N = 3mg\cos\theta - \frac{mV_A^2}{R}$$

5. À quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ?
6. Déterminer, en fonction des données du problème, l'angle θ_d de θ pour lequel le palet quitte la piste.

Exercice 3 : Composition de deux en rotations.

Une circonférence (C) de centre O' et de rayon a, située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz, d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par $O'.\theta$ est compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma.

Partie 1 : Étude du mouvement par deux méthode

1. Bilan des forces

1.1. On note $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. le référentiel fixe, supposé galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}'$ (O', x', y', z') lié au cercle est-t-il galiléen ? Justifier.

1.2. On notera $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis et $\vec{R}$ la réaction de (C) sur M.

1.2.1. Montrer que $\vec{F}_{ie}$ est donnée par :

$$\vec{F}_{ie} = ma\omega^2(1+\sin\theta)\,\vec{e}_{x'}$$

1.2.2. Montrer que $\vec{F}_{ic}$ est donnée par :

$$\vec{F}_{ic} = -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y'}$$

→ Déduire sa norme en fonction de $\theta, m, v = \|\vec{v}\,(M/\mathcal{R}')\|$ et ω.

2. Utilisation du théorème du moment cinétique

2.1. Calculer le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans $\mathcal{R}'$ et montrer qu'il est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$.

2.2. En appliquant le théorème du moment cinétique en O' du point M dans $\mathcal{R}'$, montrer que l'équation obtenue peut se mettre sous la forme :

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$$

où $f(\theta)$ une fonction à déterminer.

3. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

3.1. Calculer l'énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entraînement en fonction de θ. On prendra $U_1(\theta = 0) = 0$.

3.2. Calculer l'énergie potentielle U_2 dont dérive le poids de M en fonction de θ. On prendra $U_2(\theta = 0) = 0$.

3.3. Écrire, en la justifiant, la conservation de l'énergie mécanique du point M et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

Partie 2 : Étude de l'équilibre relatif de M sur (C)

1. Montrer que l'équation en θ, dont les solutions donnent les positions d'équilibre relatif de M sur (C), est :

$$a\omega^2(1+\sin\theta) = g\tan\theta$$

2. . En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour θ correspondant aux positions d'équilibre parmi les quatre suivants :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

3. Retrouver, graphiquement, le résultat de la question 2.

4. On désire que l'équilibre corresponde à $\theta = \theta_0 = 30°$.

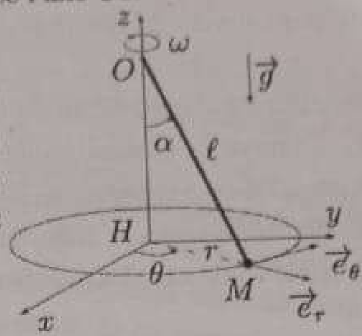
4.1. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0,2$ m et $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2} ?

4.2. Étudier la stabilité de la position d'équilibre $\theta_0 = 30°$.

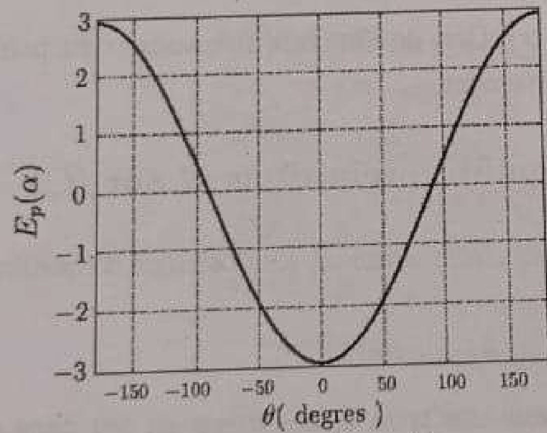
Exercice 4 : Pendule conique - Positions d'équilibre.

Soit un pendule constitué d'une masselotte de masse m, modélisée par un point matériel M, et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse qu'on négligera. La tige est liée en O à un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire, par une liaison rotule. On met en rotation la tige autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω. On étudie la possibilité que la tige s'écarte de la verticale, formant un angle α avec l'axe Oz.

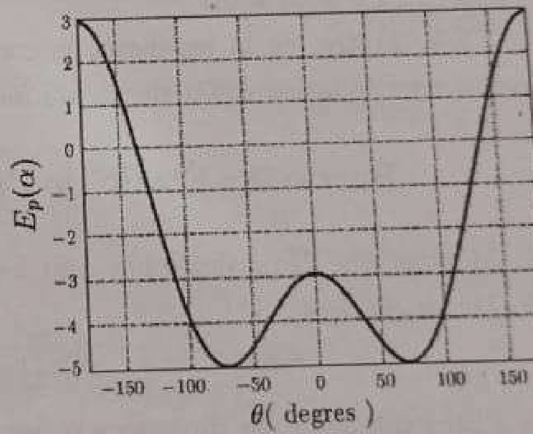
On se place dans le référentiel tournant autour de Oz avec la tige. Ce référentiel est non galiléen, aussi, il faut ajouter aux vraies forces, une pseudo-force, dite centrifuge, d'expression $\overrightarrow{f}_{ie} = mr\omega^2\overrightarrow{e}_r$, avec $r = HM$.



1. Montrer que la force centrifuge $\overrightarrow{f}_{ie}$ dérive d'une énergie potentielle dont on déterminera l'expression.
2. Le système est-il consevatif, justifier la réponse.
3. Exprimer l'énergie potentielle totale du système, notée E_p, en fonction de α et E_{p0} , à une constante près. Sachant que $E_{p0} = -mgl$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$
4. Sur la figure ci-dessous est représenté cette énergie potentielle pour différentes valeurs des paramètres du problème. Commenter.



(a) $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}, \ell = 30$ cm, $\omega = 1\mathrm{rad.s^{-1}}, m = 1$ kg



(b) $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}, \ell = 30$ cm, $\omega = 10\mathrm{rad.s^{-1}}, m = 1$ kg

5. Discuter l'existence de positions d'équilibre α_{eq} suivant la valeur de ω, à partir de l'expression $E_p(\alpha)$.
6. Discuter la stabilité de ces positions suivant la valeur de ω à partir de $E_p(\alpha)$.
7. Décrire alors le phénomène qui se produit lorsqu'on augmente progressivement la vitesse de rotation ω du pendule initialement vertical. Interpréter.
8. On suppose $\omega > \omega_0$ et on note α_{eq} la position d'équilibre stable du système. Montrer qu'au voisinage de α_{eq}, le système se comporte comme un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre.