Université Ibn Zohr — Année universitaire 2009/2010

Ecole Nationale des Science Appliquées — durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

DS1 d'Algebre.

Exercice I.

On considère les applications de $E = R\backslash\{0,1\}$ dans lui-même définies par:

$$i(x) = x, \quad f(x) = 1 - x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = \frac{x}{x-1}, \quad k(x) = \frac{x-1}{x}, \quad l(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(a) Construire la table donnant la composée de deux éléments quelconques de l'ensemble $G = \{i, f, g, h, k, l\}$.

(b) Montrer que G muni de la composition des applications est un groupe non commutatif.

Exercice II.

Soit $p \in N^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante:

(a)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \text{2p-1} & \text{2p} \\ \text{2p} & \text{2p-1} & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \text{p} & \text{p+1} & \text{p+2} & \cdots & \text{2p-1} & \text{2p} \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & \text{2p-1} & 2 & 4 & \cdots & \text{2p-2} & \text{2p} \end{pmatrix}$$

Exercice III.

On définit $P = \{(x, y, z) \in R^3, x + z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((2, 0, 1))$.

(1) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de R^3.

(2) Montrer que $R^3 = P \bigoplus D$.

(3) On considére $f : R^3 \to R^3$ par $f((x, y, z)) = (x - 2z, 2y, -x + 2z)$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer Ker(f) et Im(f).

(c) f est-il projecteur de R^3 sur P parallèment à D?

(d) Donner l'image par f de $F = \{(x, y, z) \in R^3, y + z = 0\}$ et de $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$.

Exercice IV.

Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que $\text{Ker}(f) \bigcap \text{Im}(f) = f(\ker(fof))$.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fog = gof$. Montrer Ker(f) et Im(f) sont stables par g.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice I.

(a)

o	i	f	g	h	k	l
i	i	f	g	h	k	l
f	f	i	k	l	g	h
g	g	l	i	k	h	f
h	h	k	l	i	f	g
k	k	h	f	g	l	i
l	l	g	h	f	i	k

(b)

1. D'aprés le tableau $\forall f_1, f_2 \in G$ on a $f_1 o f_2 \in G$ donc o est une loi de composition interne.
2. On sait que o est associative sur l'ensemble des applications donc o est associative sur G qui est une partie de l'ensemble des applications.
3. (G, o) possède un élément neutre i,
4. Tout élément de (G, o) est symétrisable, $\forall f_1 \in G$ on a $f_1^{-1} = f_1$.
5. on $fog \neq gof$ donc o n'est pas commutative.

Donc G muni de la composition des applications est un groupe non commutatif.

Exercice II.

(a) $I(\sigma) = (2p-1) + (2p-2) \cdots + 1 + 0 = p(2p-1)$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p(2p-1)}$.

(b) $I(\sigma) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (2p-1) + 0 + \cdots + 0 = p(2p-1)$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p(2p-1)}$.

Exercice III.

(1) on a $0 + 0 + 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in P$ donc $P \neq \emptyset$.

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in P$ on a $(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x - 2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ et $(x_1 - x - 2) + (z_1 - z_2) = x_1 + z_1 - (x_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$.

Donc P est un sous-espace vectoriel de R^3.

(2) Soit $u(x,y,z) \in P\bigcap D \Longrightarrow \exists\lambda \in R$ tel que $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \\ x + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$

$\Longrightarrow x = y = z = 0$. Donc $P\bigcap D = \{(0,0,0)\}$.

On a $dimP = 2$ et $dimD = 1$ donc $dimP + dimD = dimR^3$ alors $R^3 = P\bigoplus D$.

(3) (a) Il est facile de montrer que

$f(0,0,0) = (0,0,0)$,

$\forall(x,y,z),(x',y',z') \in R^3, \forall\alpha,\beta \in R, f(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$.

f est une application linéaire.

(b) $\forall(x,y,z) \in kerf$ on a $f(x,y,z) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$

Donc $Kerf = \{(2x,0,x)/x \in R\} = D$.

$\forall(x,y,z) \in imf$ alors $\exists(x',y',z') \in R^3$ tel que $f(x',y',z') = (x,y,z) \Longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2z' \\ y = 2y' \\ z = -x' + 2z' \end{cases}$

$\Longrightarrow x + z = 0$ Donc $Imf = P$.

(c) on a $fof \neq f$ donc f n'est pas un projecteur.

(d) on a $F = \{(x,y,-y)\} = Vect((1,0,0),(0,1,-1))$

donc $f(F) = Vect(f(1,0,0), f(0,-1,-1)) = Vect((1,0,-1),(2,-2,-2))$,

$f(G) = Vect(f(1,0,0), f(0,0,1)) = Vect((1,0,-1),(-2,0,2))$.

Exercice IV.

Soit $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f)\bigcap\mathrm{Im}(f) \Longrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\exists\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{u} \Longrightarrow fof(\vec{x}) = \vec{0}$ et $f(\vec{x}) = \vec{u} \Longrightarrow$ $\vec{x} \in ker(fof)$ et $f(\vec{x}) = \vec{u} \Longrightarrow \vec{u} \in f(ker(fof))$. Donc $\mathrm{Ker}(f)\bigcap\mathrm{Im}(f) \subset f(ker(fof))$.

Soit $\vec{u} \in f(ker(fof)) \Longrightarrow \exists\vec{x} \in ker(fof)$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{u} \Longrightarrow fof(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}$ et $f(\vec{x}) = \vec{u} \Longrightarrow \vec{u} \in \mathrm{Ker}(f)\bigcap\mathrm{Im}(f)$. Donc $f(ker(fof)) \subset \mathrm{Ker}(f)\bigcap\mathrm{Im}(f)$.

Alors $f(ker(fof)) = \mathrm{Ker}(f)\bigcap\mathrm{Im}(f)$.

Soit $\vec{u} \in \mathrm{Ker}f, f(g(\vec{u})) = g(f(\vec{u})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $g(\vec{u}) \in \mathrm{Ker}f$. Alors $\mathrm{Ker}f$ est stable par g.

Soit $\vec{u} \in \mathrm{Im}f, \exists\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{u}$ donc $g(\vec{u}) = g(f(\vec{x})) = f(g(\vec{x})) \in \mathrm{Im}f$. Alors $\mathrm{Im}f$ est stable par g.

Université Ibn Zohr | Année universitaire 2009/2010

Ecole Nationale des Science Appliquées | durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

DS2 d'Algebre.

Exercice I.

Soit

$$G = \{(\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, -\alpha, -2\alpha - \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

et

$$H = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in R^4, 3\alpha - \gamma = 0, \alpha + \gamma - \delta = 0\}.$$

(a) Montrer que G et H sont deux sous-espace vectoriels et déterminer leurs dimensions.

(a) Trouver la dimension de $G \bigcap H$ et $G + H$ et une base de chacun d'eux.

Exercice II.

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et on considère le sous-espave vectoriel F défini par:

$$F = \{(x, y, z, t) : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

Donner une base de F. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Exercice III.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $C = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 = e_2 - e_3 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

(1) Montrer que C est une base de E et que $F = Vect(f_1, f_2)$ et $G = Vect(f_3)$ sont supplèmentaires dans E.

On note p le projecteur sur F parallèlement à G.

(2) Exprimer la matrice de passage P de B à C et calculer P^{-1}.

(3) Donner la matrice $M_C(p)$ et en deduire la matrice $A = M_B(p)$

(4) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice IV.

Soit E un K-espace vectorielde dimension finie n et $f \in L(E)$ tel que $rg(f - id) = 1$. On note $H = ker(f - id)$.

(1) Soit $\{e_1, .., e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Monter que $\{e_1, .., e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.

Soient E et F de dimensions finies et $g, h \in L(E, F)$.

(2) Montrer que $rg(g + h) \leq rg(g) + rg(h)$.

(3) En déduire que $|rg(g) - rg(h)| \leq rg(g + h)$.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice I.

(a) $G = \{(\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, -\alpha, -2\alpha - \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha(1, 2, -1, -2) + \beta(2, 3, 0, -1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((1, 2, -1, -2), (2, 3, 0, -1))$, donc G est un s.e.v et $\dim G = 2$.

$H = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathbb{R}^4, 3\alpha - \gamma = 0, \alpha + \gamma - \delta = 0\}$

$= \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathbb{R}^4, \gamma = 3\alpha, \delta = 4\alpha\}$

$= \{(\alpha, \beta, 3\alpha, 4\alpha\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((1, 0, 3, 4), (0, 1, 0, 0))$, donc H est un s.e.v et $\dim H = 2$.

(b) Soit $u(x, y, z, t) \in G \bigcap H \Longrightarrow \begin{cases} 3(\alpha + 2\beta) + \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta - \alpha + 2\alpha + \beta = 0. \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{-3\beta}{2}$,

donc $G \bigcap H = Vect(1, 0, 3, 4)$ et $\dim G \bigcap H = 1$.

D'aprés théoréme de quatres dimensions $dim(G + H) = dimG + dimH - dim(G \bigcap H) = 3$. Il est facile de montrer que $((1, 2, -1, -2), (2, 3, 0, -1), (0, 1, 0, 0))$ c'est une base de $G + H$.

Exercice II.

$F = \{(x, y, z, t) : x + 2y + 3z + 4t = 0\} = \{(-2y - 3z - 4t, y, z, t) : y, z, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-2, 1, 0, 0) + z(-3, 0, 1, 0) + t(-4, 0, 0, 1) : y, z, t \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1)), (-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$ est une base de F alors $dimF = 3 = dim\mathbb{R}^4 - 1$, donc F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Exercice III.

(1) Il est facile de montrer que C est une base de E. On a $dimF = 2$ et $dimG = 1$, pour montrer que F et G sont supplèmentaires dans E, d'aprés théoréme de quatres dimensions il suffit de montrer que $F \bigcap G = \{(0, 0, 0)\}$. Soit $u(x, y, z) \in G \bigcap H \Longrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(3) Comme f_1 et f_2 sont deux vecteurs de $F = Im(p)$, on a $p(f_1) = f_1$ et $p(f_2) = f_2.f_3$ est un

vecteur de $G = Ker(p)$, donc $p(f_3) = 0$. On a donc $M_C(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $M_B(p) = P^{-1}M_C(p)P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(4) $A^n = P^{-1}(M_C(p))^nP = M_B(p)$.

Exercice IV.

(1) Pour monter que $\{e_1, .., e_n\}$ est une base de E. Il suffit de la montrer qu'elle est libre. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.(*)$ Si $\alpha_n \neq 0 \Longrightarrow e_n = -(\alpha_1/\alpha_n)e_1 - \cdots - (\alpha_{n-1}/\alpha_n)e_{n-1} \Longrightarrow e_n \in H$. Absurde donc $\alpha_n = 0$ alors d'aprés $(*)\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1}e_{n-1} = 0$. Comme $\{e_1, .., e_{n-1}\}$ est une base de H. Alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Par conséquent $\{e_1, .., e_n\}$ est libre de E.

(2) On a $Im(f + g) \subset Imf + Img$ donc

$$rg(f + g) = dim(Imf + Img) = dimImf + dimImg - dimImf \bigcap Img \leq rg(f) + rg(g).$$

$$rg(f) = rg(f - g + g) \leq rg(f - g) + rg(g).$$

Donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f - g)$. On a

$$rg(g) = rg(g - f + f) \leq rg(g - f) + rg(f).$$

Donc $rg(g) - rg(f) \leq rg(g - f)$. Sachant $rg(f - g) = rg(g - f)$, on conclut

$$|rg(g) - rg(h)| \leq rg(g + h).$$

Université Ibn Zohr
Année universitaire 2010/2011

Ecole Nationale des Science Appliquées
durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre.

Exercice I.

Soit A un anneau commutatif non-nul. On dit qu'un sous-ensemble B de A vérifie la propriété **P** si les conditions suivantes sont satisfaites:

- B contient au moins 2 éléments.
- B est stable par les LCI de A et les LCI de A induisent une structure d'anneau sur B.
- $1_B \neq 1_A$. Autrement dit, B n'est pas un sous-anneau de A.

Le but de cet exercice est de montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:

(a) Il existe un sous-ensemble B de A vérifiant la propriété **P.**

(b) Il existe un élément $e \in A$ tel que $e \neq 0_A, 1_A$ et que $e^2 = e$.

(c) A est isomorphe au produit de 2 anneaux non-nuls : $A \simeq A_1 \times A_2$.

On pourra suivre les étapes ci-dessous:

(1) Montrer que (a) implique (b).

(2) Montrer que (c) implique (a).(Indication: On pourra identifier A avec $A_1 \times A_2$ puis choisir $B = A_1 \times \{0\}$).

(3) Suppons qu'il existe un élément e comme dans b). A est-il intègre ? Soient $A_1 = (e) = \{ae|a \in A\}$ (resp. $A_2 = ((1-e)) = \{a(1-e)|a \in A\}$) engendrés par e (resp. $(1-e)$). Justifier que les LCI de A induisent des structures d'anneaux sur A_1, A_2.

(4) Soit $\phi : A \longrightarrow A_1 \times A_2, a \longrightarrow (ea, (1-e)a)$. Montrer que c'est un morphisme d'anneau.

(5) Montrer que ce morphisme est bijectif. En déduire que (b) implique (c).

Exercice II.

Dans S_9, groupe des permutations de $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, on considère $s_1 = (3\ 4\ 5\ 9), s_2 = (2\ 7\ 1\ 8)$ et $s_3 = (s_1)^4 o (s_2)^2$.

(a) Décomposer la permutation s_3 en produit de cycles à supports disjoints.

(b) Déterminer la signature de chacune des permutations s_1, s_2 et s_3.

(c) Déterminer $(s_1)^{1502}, (s_2)^{1635}$ et $(s_3)^{1946}$.

(d) Calculer le nombre d'inversions de la permutation s_3.

Exercice III.

On définit $P = \{(x, y, z) \in R^3, x + z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((2, 0, 1))$.

(1) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de R^3.

(2) Montrer que $R^3 = P \bigoplus D$.

(3) On considére $f : R^3 \to R^3$ par $f((x, y, z)) = (x - 2z, 2y, -x + 2z)$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer Ker(f) et Im(f).

(c) Donner l'image par f de $F = \{(x, y, z) \in R^3, y + z = 0\}$ et de $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$.

Exercice IV.

Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que $\text{Ker}(f) \bigcap \text{Im}(f) = f(\ker(fof))$.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fog = gof$. Montrer Ker(f) et Im(f) sont stables par g.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice I.

(1) Comme B contient au moins 2 éléments, alors $1_B \neq 0_B = 0_A$. Si on prend $e = 1_B$, alors: $e \neq 0_A, 1_A$ et $e^2 = 1_B^2 = 1_B = e$.

(2) Soit $A = A_1 \times A_2$ avec A_1 et A_2 2 anneaux non-nuls. On choisit $B = A_1 \times \{0\}$. Si on restreint les LCI de A sur B, les calculs se font uniquement sur la première composante. Comme A_1 est un anneau non-nul, B l'est aussi. De plus, $1_B = (1,0) \neq (1,1) = 1_A$. Donc, B vérifie la propriété P.

(3) A n'est pas intgre car $e(1-e) = 0$ et que $e, 1-e \neq 0$. Pour montrer que les LCI de A induisent une structure danneau sur A_1, il suffit de vrifier:

(a) A_1 est un sous-groupe de A et A_1 est stable par la multiplication. C'est évident parce qu'il est même un idéal de A.

(b) L'exsitence de l'élément neutre: e est l'élément neutre de A_1 car $e(ea) = e^2a = ea$. On n'a pas besoin de vérifier l'associativité et la distributivité de la multilication car les LCI de A_1 sont la restriction des LCI de A. On remarque que $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$. Quitte à remplacer e par $1-e$, on montre également la même chose pour A_2.

(4) ϕ est un morphisme danneau car pour tout $a, b \in A$:

(a) $\phi(a+b) = (e(a+b), (1-e)(a+b)) = (ea, (1-e)a) + (eb, (1-e)b) = \phi(a) + \phi(b)$.

(b) $\phi(ab) = (eab, (1-e)ab) = (e^2ab, (1-e)^2ab) = (ea, (1-e)a)(eb, (1-e)b) = \phi(a)\phi(b)$.

(c) $\phi(1) = (e, (1-e))$ est l'élément neutre de $A_1 \times A_2$.

(5) Soit $a \in Ker(\phi)$. Alors $ea = (1-e)a = 0$ d'ou $a = 0$. Donc ϕ est injectif.
Soit $(ea, (1-e)b) \in A_1 \times A_2$ avec $a, b \in A$. Alors, $\phi(ea + (1-e)b) = (e^2a + e(1-e)b, (1-e)ea + (1-e)^2b) = (ea, (1-e)b)$.
Donc, ϕ est surjectif. L'application ϕ est bijectif et a la fois un morphisme d'anneau ce qui signifie qu'il est un isomorphisme d'anneau. On a montré effectivement que b) implique c).

Exercice II.

(a) $s_3 = (3\ 9\ 5\ 4\ 1)(2\ 1)(7\ 8) = (1\ 2\ 3\ 9\ 5\ 4)(7\ 8)$.

(b) $\epsilon(s_1) = (-1)^{l(s_1)-1} = (-1)^4 = 1, \epsilon(s_2) = (-1)^{4-1} = -1$, $\epsilon(s_3) = (-1)^{6-1}(-1) = 1$.

(c)

$$(s_1)^{1502} = (s_1)^{5300+2} = (s_1)^2 = (3\ 4\ 9\ 1\ 5),$$

$$(s_2)^{1635} = (s_2)^{4400+49-1} = (s_2)^{-1} = (2\ 8\ 1\ 7)$$

et

$$(s_3)^{1946} = (s_3)^{1800+144+2} = (s_3)^2 = (3\ 5\ 1)(9\ 4\ 2).$$

(d) $I(s_3) = 1 + 1 + 6 + 0 + 0 + 1 + 2 + 1 = 12$.

Université Ibn Zohr | Année universitaire 2010/2011

Ecole Nationale des Science Appliquées | durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre (DS2).

Exercice I.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que: $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \bigcap G)$.

Exercice II.

Soit

$$G = \{(\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, -\alpha, -2\alpha - \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

et

$$H = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in R^4, 3\alpha - \gamma = 0, \alpha + \gamma - \delta = 0\}.$$

(a) Montrer que G et H sont deux sous-espace vectoriels et déterminer leurs dimensions.

(a) Trouver la dimension de $G \bigcap H$ et $G + H$ et une base de chacun d'eux.

Exercice III.

On considére $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f((x, y, z)) = (5x + y - z, 2x + 4y - 2z, x - y + 3z)$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Donner la matrice A de f dans la base canonique.

(3) Soient $E_1 = Ker(f - 2Id), E_2 = Ker(f - 4Id)$ et $E_3 = Ker(f - 6Id)$, où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Donner une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces.

(4) Choisir $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$ et$v_3 \in E_3$ tels que la deuxième coordonnée de v_1, la troisième coordonnée de v_2 et la première coordonnée de v_3 soient égales à 1. Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice A' de f dans la base B.

(6) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base B et calculer P^{-1}.

(7) Exprimer A' en fonction de A, P et P^{-1}.

(8) Montrer que $A^n = PA'^n P^{-1}$ pour $n \geq 1$. Calculer A^n pour $n \geq 1$.

Exercice IV.

Soit E un K-espace vectorielde dimension finie n et $f \in L(E)$ tel que $rg(f - id) = 1$. On note $H = ker(f - id)$.

(1) Soit $\{e_1, .., e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Monter que $\{e_1, .., e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.

Soient E et F de dimensions finies et $g, h \in L(E, F)$.

(2) Montrer que $rg(g + h) \leq rg(g) + rg(h)$.

(3) En déduire que $|rg(g) - rg(h)| \leq rg(g + h)$.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice 1: Soient $G = \{(\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta, -\alpha, -2\alpha - \beta)/\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

$$H = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4 \qquad 3\alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \gamma - \delta = 0\}$$

1) $G = Vect((1,2,-1,-2),(2,3,0,-1))$ donc G est un sous-espace vectoriel et $\{(1,2,-1,-2),(2,3,0,-1)\}$ est libre donc $dim(G) = 2$.

   $H = \{(\alpha, \beta, 3\alpha, 4\alpha)/\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ alors $H = Vect((1,0,3,4),(0,1,0,0))$ donc H est un sous-espace vectoriel et la famille $\{(1,0,3,4),(0,1,0,0)\}$ est libre donc $dim(H) = 2$.

2)

$$Soit \quad (x,y,z,t) \in G \cap H \Rightarrow (x,y,z,t) \in G \quad et \quad (x,y,z,t) \in H$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \\ z = -\alpha \\ y = -2\alpha - \beta \end{cases} \quad et \begin{cases} 3(\alpha + 2\beta) + \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta - \alpha + 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 6\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{2}\beta$$

$$\Rightarrow \quad G \cap H = \{(\frac{1}{2}\beta, 0, \frac{3}{2}\beta, 2\beta)/\beta \in \mathbf{R}\}$$

$$\Rightarrow \quad G \cap H = Vect((\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 2)) \quad alors \quad dim(G \cap H) = 1.$$

D'aprs le Thorme de quatre dimentions

$$dim(G + H) = dim(G) + dim(H) - dim(G \cap H)$$

donc $dim(G+H) = 3$ et la famille $\{(1,2,-1,-2),(2,3,0,-1),(0,1,0,0)\}$ est une base de $G+H$

Exercice 2: $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ par $f((x,y,z)) = (5x + y - z, 2x + 4y - 2z, x - y + 3z)$

1) • $f((0,0,0)) = (0,0,0)$

- $$\begin{aligned}
& f(\alpha(x,y,z)+\beta(x^{'},y^{'},z^{'})) = f(\alpha x+\beta x^{'},\alpha y+\beta y^{'},\alpha z+\beta z^{'}) \\
= \ & (5(\alpha x+\beta x^{'})+(\alpha y+\beta y^{'})-(\alpha z+\beta z^{'}),2(\alpha x+\beta x^{'})+4(\alpha y+\beta y^{'}) \\
& -2(\alpha z+\beta z^{'}),(\alpha x+\beta x^{'})-(\alpha y+\beta y^{'})+3(\alpha z+\beta z^{'})) \\
= \ & \alpha(5x+y-z,2x+4y-2z,x-y+3z)+\beta(5x^{'}+y^{'}-z^{'},2x^{'}+4y^{'}-2z^{'},x^{'}-y^{'}+3z^{'}) \\
= \ & \alpha f((x,y,z))+\beta f((x^{'},y^{'},z^{'}))
\end{aligned}$$

donc f est une application linaire.

2)

$$f(e_1)=f((1,0,0))=(5,2,1)=5e_1+2e_2+e_3$$

$$f(e_2)=f((0,1,0))=(1,4,-1)=e_1+4e_2-e_3$$

$$f(e_3)=f((0,0,1))=(-1,-2,3)=-e_1-2e_2+3e_3$$

donc la matrice de f dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) -

$$\begin{aligned}
Soit \quad (x,y,z)\in E_1 \quad & \Rightarrow \quad f((x,y,z))=2(x,y,z) \\
& \Rightarrow \begin{cases} 4y-4z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_1=\{(0,y,y)/y\in\mathbf{R}\}$ donc $dim(E_1)=1$ et $(0,1,1)$ est base de E_1.

-

$$\begin{aligned}
Soit \quad (x,y,z)\in E_2 \quad & \Rightarrow \quad f((x,y,z))=4(x,y,z) \\
& \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_2=\{(x,0,x)/x\in\mathbf{R}\}$ donc $dim(E_2)=1$ et $(1,0,1)$ est base de E_2.

-

$$\begin{aligned}
Soit \quad (x,y,z)\in E_3 \quad & \Rightarrow \quad f((x,y,z))=6(x,y,z) \\
& \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_3 = \{(x,x,0)/x \in \mathbf{R}\}$ donc $dim(E_3) = 1$ et $(1,1,0)$ est base de E_3.

4) $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$.

$det(v_1,v_2,v_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $B = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

5)

$$f(v_1) = f((0,1,1)) = 2v_1$$

$$f(v_2) = f((1,0,1)) = 4v_2$$

$$f(v_3) = f((1,1,0)) = 6v_3$$

donc la matrice de f dans la base B est $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

6) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7) $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A = PA'P^{-1}$ donc $A^n = PA'^nP^{-1}$

$$A'^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

,

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + 6^n & -4^n + 6^n & 4^n - 6^n \\ -2^n + 6^n & 2^n + 6^n & 2^n - 6^n \\ -2^n + 4^n & 2^n - 6^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

.

Exercice 3: $dim(E) = n$, $rg(f - id) = 1$ et $H = ker(f - id)$

1) $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ est une base de H et $e_n \notin H$

Montrons que $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E on a $dim\{e_1, ..., e_n\} = dim(E)$ donc il suffit de montrer que $\{e_1, ..., e_n\}$ est libre.

$$Soit \qquad \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n = 0 \tag{1}$$

Si $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow e_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}e_1 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}e_{n-1} \Rightarrow e_n \in H \qquad absurd$

Donc $\alpha_n = 0$ alors (1) $\Rightarrow \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1}e_{n-1} = 0$ et comme $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ est une base de H alors $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$ par consequent $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E

2) $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g) \Rightarrow rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.

3)

$$\begin{aligned} rg(g) &= rg(g+h-h) \leq rg(g+h) + rg(-h) \\ &\Rightarrow rg(g) \leq rg(g+h) + rg(h) \\ &\Rightarrow rg(g) - rg(h) \leq rg(g+h) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} rg(h) &= rg(h+g-g) \leq rg(h+g) + rg(-g) \\ &\Rightarrow rg(h) \leq rg(h+g) + rg(g) \\ &\Rightarrow rg(h) - rg(g) \leq rg(h+g) \end{aligned} \tag{3}$$

D'aprs (2) et (3) $|rg(g) - rg(h)| \leq rg(g+h)$

Université Ibn Zohr

Ecole Nationale des Science Appliquées

Agadir

Année universitaire 2011/2012

durée 2 heures

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre.

Exercice I.

Soit $A = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$

(1) Montrer que A est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.
Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de A, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.

(2) Montrer que pour tous x, y de $A, N(xy) = N(x)N(y)$.

(3) En déduire que x est inversible dans $A \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$.

(4) Montrer que les éléments $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ de A sont inversibles.

(5) Réciproquement, on veut montrer que tout inversible x de A est de la forme précédente.

(a) Monter qu'on peut se ramener à supposer $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$.

(b) monter alors que x est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure. Indication: si $b \geq 1$, considérer $x_1 = \frac{x}{1+\sqrt{2}}$.

Exercice II.

Décomposer les permutations ci-dessous sous forme de produit de cycles à supports disjoints puis Déterminer leur signatures. Sont-elles des cycles?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \sigma^2\tau$$

Exercice III.

(1) On considére $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ par $f((x, y, z)) = (x - 2y + z, 2x - y + 5z, -x - 3y, 3x - 3y + 6z)$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Déterminer Ker(f) et Im(f).

(d) Donner l'image par f de $F = \{(x, y, z) \in R^3, y + z = 0\}$ et de $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$.

Exercice IV.

Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$. On suppose que $\text{Ker}(f) \bigcap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Montrer que si $x \notin \text{Ker}(f)$ alors pour tout $n \in N, f^n(x) \neq 0$

Soit F un autre espace vectoriel et $g \in L(E, F)$. Montrer que $g(E) \subset g(F) \iff E + \text{Ker}(g) \subset F + \text{Ker}(g)$.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice 1: Soit $A = \{a + b\sqrt{2}, \quad a \in \mathbf{Z}, \quad b \in \mathbf{Z}\}$

1) On a $A \neq \varnothing$ car $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in A$

   Soit $x, y \in A \Rightarrow \exists a, b \in \mathbf{Z} \quad et \quad c, d \in \mathbf{Z} \quad tel \quad que:$

   $x = a + b\sqrt{2} \quad et \quad y = c + d\sqrt{2}$

   On a $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in A$ et $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in A$,

   alors A est un sous anneau de $\mathbf{R}$

   Comme $\mathbf{R}$ est integre alors A est integre.

2) $x = a + b\sqrt{2}$, $N(x) = a^2 - 2b^2$

$$\begin{aligned} N(xy) &= N((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}) \\ &= (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 \\ &= (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) \\ &= N(x)N(y) \end{aligned}$$

3) x est inversible dans $A \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$

   $\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} x \quad est \quad inversible \quad &\Rightarrow \quad \exists y \in A \quad tel \quad que \quad xy = 1 \\ &\Rightarrow \quad N(xy) = N(1) \\ &\Rightarrow \quad N(x)N(y) = 1 \\ Or \quad N(x) \in \mathbf{Z} \quad &\Rightarrow \quad N(x) = \pm 1 \end{aligned}$$

   $\Leftarrow)$

   Soit $x = a + b\sqrt{2}$, posons $y = a - b\sqrt{2}$

   On a $xy = a^2 - 2b^2 = N(x) = \pm 1 \Rightarrow x(\pm y) = 1 \Rightarrow x$ est inversible et son inverse $\pm y$

4) $N(\pm 1(1 + \sqrt{2})^n) = N(\pm 1)N((1 + \sqrt{2})^n) = N((1 + \sqrt{2})^n) = N((1 + \sqrt{2}))^n = (-1)^n = \pm 1$

   donc les lments $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ sont inversibles dans A.

Exercice 2: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$

les inversions de σ: $(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)$.

$Sign(\sigma) = (-1)^7 = -1$ et σ n'est pas un cycle.

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ les inversions de τ sont: $(2,4),(3,4)$.

$Sign(\tau) = (-1)^2 = 1$ et τ est un cycle.

$\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ les inversions de $\sigma^2\tau$ sont: $(1,2),(1,3),(1,4),(3,4)$.

$Sign(\sigma^2\tau) = (-1)^4 = 1$ et $\sigma^2\tau$ est un cycle.

Exercice 3: $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$

$f((x,y,z)) = (x-2y+z, 2x-y+5z, -x-3y, 3x-3y+6z)$.

1) f est une application linaire

2) Soit $(x,y,z) \in Kerf \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y+5z=0 \\ -x-3y=0 \\ 3x-3y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0,$

   donc Ker f={(0,0,0)}. D'aprs le thorme de rang on a

   $rg(f) + dim(Kerf) = 3 \Rightarrow dim(Imf) = 3 \Rightarrow Imf = \mathbf{R}^3$.

3) $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad /y+z=0\} = \{(x,y,-y) \quad /(x,y) \in \mathbf{R}^2\}$,

   donc $F = Vect\,((1,0,0),(0,1,-1))$.

   $f(F) = Vect\,(f(1,0,0), f(0,1,-1)) = Vect\,((1,2,-1,3),(-3,-6,-3,-9))$.

   $f(G) = Vect\,(f(1,0,0), f(0,0,1)) = Vect\,((1,2,-1,3),(1,5,0,6))$.

Exercice 4:

1) Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$, on suppose que $(Kerf) \cap (Imf) = \{0\}$. Montrons que si $x \notin Kerf$ alors $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^n(x) \neq 0$

   Si $x \notin Kerf \Rightarrow f(x) \neq 0$. Supposons la proprit est vraie l'ordre n c'est dire $f^n(x) \neq 0$.

   Montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} Si \quad f^{n+1}(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f^n(x) \in Kerf \quad et \quad f^n(x) \in Imf \\ &\Rightarrow \quad f^n(x) \in (Kerf) \cap (Imf) = \{0\} \\ &\Rightarrow \quad f^n(x) = 0 \quad absurde \quad donc \quad f^{n+1}(x) \neq 0. \end{aligned}$$

2) Montrons que $g(E) \subset g(F) \Leftrightarrow E + Kerg \subset F + Kerg$

Soit $y = x + u \in E + Kerg$

$\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} g(y) = g(x) &\Rightarrow g(x) \in g(E) \Rightarrow g(x) \in g(F) \\ &\Rightarrow y = x + u \in F + Kerg \Rightarrow E + Kerg \subset F + Kerg \end{aligned}$$

$\Leftarrow$)

Soit $y \in g(E) \Rightarrow \exists x \in E \quad tq \quad y = g(x)$

$y = g(x+v)$ avec $v \in Kerg \Rightarrow x + v \in E + Kerg \subset F + Kerg$

$y = g(x+v) = g(x) \in g(F)$ alors $g(E) \subset g(F)$.

Université Ibn Zohr
Ecole Nationale des Science Appliquées
Agadir

Année universitaire 2012/2013
durée 2 heures

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre.

Exercice I.(7 pts 2-2-1-2)

Soit $E = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \quad et \quad impair\}$.

(a) Monter que $(E, +, .)$ est un anneau intègre.

(b) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de E est de la forme:

$$I(E) = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}/a \in \mathbb{Z} \quad, b \in \mathbb{N}^* \quad a \quad et \quad b \quad sont \quad impairs\}.$$

(c) E est-il un corps?

(d) Soit $\frac{a}{b} \in E$. Montrer qu'il existe $\frac{c}{d} \in I(E)$ tels que $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = 2$.

Exercice II.(7 pts 2-1-2-2)

(1) On considère dans S_8 les permutations suivantes :

$$\sigma = (1625)(3847)$$

$$\tau = (1864)(3752)$$

$$\rho = (834)(752)(61)$$

(a) Montrer que $\rho\tau$ est un cycle dont vous préciser son ordre.

(b) Calculer $(\rho\tau)^2$.

(c) Montrer que σ est une puissance de $\rho\tau$.

(2) Soient $c = (ijk)$ un 3-cycle de S_4 et $\varrho \in S_4$. Montrer $\varrho c \varrho^{-1} = (\varrho(i)\varrho(j)\varrho(k))$.

Exercice III.(6 pts 2-2-2)

On considére $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (x - 2y + z, x + 3y, x - y + 2z)$.

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer Ker(f) et Im(f).

(c) Donner l'image par f de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$ et de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice 1: Soit $E=\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}/a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^* \quad et \quad impair\}$

1) Montrons que E est un sous anneau integre de $(\mathbb{Q},+,\times)$

   (a) $0\in E$, $E\neq\emptyset$

   (b) Soit $x=\frac{a}{b}, y=\frac{a'}{b'}\in E$
   $x-y=\frac{ab'-a'b}{bb'}$, on a bb' est impair et $bb'\in\mathbb{N}^*$ donc $x-y\in E$

   (c) $xy=\frac{aa'}{bb'}\in E\Rightarrow (E,+,\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$

   (d) on a $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un integre donc $(E,+,\times)$ est un integre.

2) $I(E)=\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}/a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^* \quad a \quad et \quad b \quad sont \quad impairs\}$
   On a $2=\frac{2}{1}\in E$ mais $\frac{1}{2}\notin E$ donc E n'est pas un corps.

3) $\frac{a}{b}\in E\Rightarrow b$ est impair et $\frac{c}{d}\in E\Rightarrow b$ est impair
   $\frac{ac}{bd}=2\Rightarrow ac=2bd\Rightarrow 2/ac\Rightarrow 2/a\Rightarrow a=2p'\Rightarrow 2p'c=2bd\Rightarrow p'c=bd$,
   or bd est impair donc c est impair alors $\frac{c}{d}\in I(E)$.

Exercice 2:

1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&6&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8&4&7\end{pmatrix}$
   $\tau=\begin{pmatrix}1&8&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7&5&2\end{pmatrix}$
   $\rho=\begin{pmatrix}8&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\end{pmatrix}$
   $\rho\tau=\begin{pmatrix}8&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&8&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7&5&2\end{pmatrix}$,
   alors $\rho\tau=\begin{pmatrix}1&3&5&7&2&4&6&8\end{pmatrix}$ donc $\rho\tau$ est un $8-$cycle

2) $(\rho\tau)^2=\begin{pmatrix}1&5&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7&4&8\end{pmatrix}$

3) On a $\sigma=((\rho\tau)^2)^{-1}$ or $(\rho\tau)^8=Id$,
   donc $(\rho\tau)^2(\rho\tau)^6=Id\Rightarrow((\rho\tau)^2)^{-1}=(\rho\tau)^6\Rightarrow\sigma=(\rho\tau)^6$
   Donc σ est une puissance de $\rho\tau$.

4) Soit $C=\begin{pmatrix}i&j&k\end{pmatrix}$ un $3-$cycle de S_4 et $\rho\in S_4$.
   Montrons que $\rho C\rho^{-1}=\begin{pmatrix}\rho(i)&\rho(j)&\rho(k)\end{pmatrix}$
   $\rho C\rho^{-1}(\rho(i))=\rho C(i)=\rho(j)$,

$\rho C\rho^{-1}(\rho(j)) = \rho C(j) = \rho(k)$,

$\rho C\rho^{-1}(\rho(k)) = \rho C(k) = \rho(i)$,

alors $\rho C\rho^{-1} = \begin{pmatrix} \rho(i) & \rho(j) & \rho(k) \end{pmatrix}$.

Exercice 3: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dfinie par $f((x, y, z)) = (x - 2y + z, x + 3y, x - y + 2z)$

1) $f((0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$

   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \alpha f((x, y, z)) + \beta f((x', y', z'))$,

   donc f est une application linaire.

2) Soit $(x, y, z) \in Kerf$

   $$\Rightarrow f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

   Donc $kerf = \{(0, 0, 0)\}$ d'aprs le thorme de rang $dim(kerf) + dim(Imf) = 3$

   alors $dim(Imf) = 3 \Rightarrow Imf = \mathbb{R}^3$.

3) $F = \{(x, y, -x)/x, y \in \mathbb{R}\}$

   $F = Vect((1, 0, -1), (0, 1, 0))$

   $f(F) = Vect(f(1, 0, -1), f(0, 1, 0)) = Vect((0, 1, -1), (-2, 3, -1))$

   $G = \{(x, 0, z)/x, z \in \mathbb{R}\}$

   $G = Vect((1, 0, 0), (0, 0, 1))$

   $f(G) = Vect((1, 1, 1), (1, 0, 2))$

Exercice 4: $f \in L(E)$, $f^p = 0$

1) $\vec{u} \in KerE \backslash Kerf^{p-1}$ Montrons que $(\vec{u}, f(\vec{u}), ..., f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre.

   $\forall \alpha_0, ..., \alpha_{p-1} \in K$ on a $\alpha_0\vec{u} + \alpha_1 f(\vec{u}) + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(\vec{u}) = \vec{0}$

   $$\Rightarrow \quad f^{p-1}(\alpha_0\vec{u} + \alpha_1 f(\vec{u}) + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(\vec{u})) = \vec{0}$$

   $$\Rightarrow \quad \alpha_0 f^{p-1}(\vec{u}) = 0 \quad or \quad f^{p-1}(\vec{u}) \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

   $$\alpha_0\vec{u} + \alpha_1 f(\vec{u}) + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 f(\vec{u}) + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(\vec{u}) = \vec{0}$$

   $$\Rightarrow \quad f^{p-2}(\alpha_1 f(\vec{u}) + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(\vec{u})) = \vec{0}$$

   $$\Rightarrow \quad \alpha_1 f^{p-1}(\vec{u}) = 0 \quad or \quad f^{p-1}(\vec{u}) \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

   et on continue de même procdure, on trouve $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{p-1} = 0$

   $\Rightarrow$ la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}), ..., f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre.

Université Ibn Zohr — Année universitaire 2014/2015

Ecole Nationale des Science Appliquées — durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

Contrôle d'Algebre.

Problème 1.(13 pts)

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1\}$.

(1) E est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$? (0.5 pts)

(2) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ vers E définie par: $\varphi(x) = (2(x + \frac{1}{x}), (x - \frac{1}{x}))$.

(a) Montrer que φ est bijective et détérminer φ^{-1}. (3 pts)

(3) Pour tout $(x, y) \in E$ et $(x', y') \in E$, on définit la loi $*$ par:

$$(x, y) * (x', y') = \left(\frac{xx'}{4} + yy', \frac{xy' + x'y}{4} \right).$$

(a) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur E. (1.5 pts)

(b) Soient x et x' deux réels non nuls. Exprimer $\varphi(x) * \varphi(x')$ en fonction de $\varphi(xx')$. (1.5 pts)

(c) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif. (2 pts)

(d) Montrer que les groupes $(E, *)$ et $(\mathbb{R}^*, .)$ sont isomorphes. (1 pt)

(4) Soit (x, y) un élément de E, et un entier $n \geq 2$. Calculer $(x, y)^n = (x, y) * (x, y) * \cdots * (x, y)(n$ fois).(indic. utiliser (d)) (1.5 pts)

(5) On fixe un élément a dans E et on considère l'application f définie par:

$$\forall \alpha \in E, f(\alpha) = a * sym(\alpha).$$

(d) Montrer que $f^2 = id_E$. (1 pt)

(d) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit un automorphisme du groupe E. (1 pt)

Exercice 1.(4 pts)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$ et $\sigma = (a_1 \cdots a_p)$ un p-cycle.

(1) Montrer que: $\forall \theta \in S_n$, $\theta\sigma\theta^{-1} = (\theta(a_1) \cdots \theta(a_p))$. (2 pts)

(2) En déduire: $(1 \quad 3 \quad 2)(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(1 \quad 2 \quad 3)$. (2 pts)

Exercice 2.(4 pts)

Soit E un espace véctoriel sur $\mathbb{R}$ et f une application lineaire de E tel que

$$f^2 = 3f - 2id_E.$$

(1) Montrer que $E = ker(f - id_E) \bigoplus ker(f - 2id_E)$. (2 pts)

(2) Montrer qu'il existe $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tel que $f^k = a_k f - b_k id_E$ et calculer a_k, b_k en fonction de k. (2 pts)

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Problème 1.

$E\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1\}$

1) E n'est pas un sous groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(0,0)\notin E$

2) $\varphi:\mathbb{R}^*\longrightarrow E \quad \varphi(x)=(2(x+\frac{1}{x}),x-\frac{1}{x})$.
Montrons que φ est bijective
$\varphi(x)=\varphi(x^{'})\Rightarrow\begin{cases}2(x+\frac{1}{x})=2(x^{'}+\frac{1}{x^{'}})\\ x-\frac{1}{x}=x^{'}-\frac{1}{x^{'}}\end{cases}$
$L_1+2L_2\Rightarrow x=x^{'}$
$\forall(x,y)\in E\ \exists?x^{'}\in\mathbb{R}^*$ tq $\varphi(x^{'})=(x,y)$
$\Rightarrow\begin{cases}2(x^{'}+\frac{1}{x^{'}})=x\\ x^{'}-\frac{1}{x^{'}}=y\end{cases}\Rightarrow x^{'}=\frac{x+2y}{4}$
donc φ est surjective et $\varphi^{-1}((x,y))=\frac{x+2y}{4}$.

3) $(x,y)*(x^{'},y^{'})=(\frac{xx^{'}}{4}+yy^{'},\frac{xy^{'}+x^{'}y}{4})$

(a) Il est facile de dmontrer que
$\frac{1}{16}(\frac{xx^{'}}{4}+yy^{'})^2-\frac{1}{4}(\frac{xy^{'}+x^{'}y}{4})^2=1$
en utilisant $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ et $\frac{x^{'2}}{16}-\frac{y^{'2}}{4}=1$ donc $*$ est une loi de composition interne dans E.

(b)

$$\begin{aligned}\varphi(x)*\varphi(x^{'}) &= \left(2(x+\frac{1}{x}),x-\frac{1}{x}\right)*\left(2(x^{'}+\frac{1}{x^{'}}),x^{'}-\frac{1}{x^{'}}\right)\\ &= \left(2(xx^{'}+\frac{1}{xx^{'}}),xx^{'}-\frac{1}{xx^{'}}\right)=\varphi(xx^{'})\end{aligned}$$

(c) On a $\varphi:(\mathbb{R}^*,.)\longrightarrow(E,*)$.
On a $(\mathbb{R}^*,.)$ est un groupe commutatif et $\varphi(\mathbb{R}^*)=E$ car φ est surjective, de plus $\varphi(\mathbb{R}^*)$ est un groupe commutatif car φ est un homomorphisme donc E est un groupe commutatif.

(d) d'aprs (b) et (c) les groupes $(\mathbb{R}^*,.)$ et $(E,*)$ sont isomorphes.

4) $\forall(x,y)\in E$ comme φ est surjective $\exists t\in\mathbb{R}^*$ tel que $\varphi(t)=(x,y)$

$$
\begin{aligned}
(x,y)^n = (x,y)\times ... \times (x,y) &= \varphi(t)\times ... \times \varphi(t)\\
&= (\varphi(t))^n = \varphi(t^n)\\
&= \left(2(t^n+\frac{1}{t^n}), t^n-\frac{1}{t^n}\right)\\
&= \left(2((\frac{x+2y}{4})^n+\frac{1}{(\frac{x+2y}{4})^n}), (\frac{x+2y}{4})^n-\frac{1}{(\frac{x+2y}{4})^n}\right).
\end{aligned}
$$

5) (a) $\forall \alpha \in E f(\alpha) = a * Syn(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
f^2(\alpha) = f(a * Syn(\alpha)) &= a * Syn(a * Syn(\alpha))\\
&= a * \alpha * Syn(a)\\
&= \alpha * a * Syn(a)) \quad car \quad * \quad est \quad commutative\\
&= \alpha\\
&\Rightarrow f^2 = id_E
\end{aligned}
$$

(b) f est un automorphisme

$\Rightarrow f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$

$\Rightarrow a * Syn(\alpha) * Syn(\beta) = a * Syn(\alpha) * a * Syn(\beta)$

$\Rightarrow a * a = a \Rightarrow a = e$

Si $a = e \Rightarrow f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$ donc f est un automorphisme

<u>Exercice 1</u>: $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_p \end{pmatrix}$ un p-cycle

$\theta\sigma\theta^{-1}(\theta(a_1)) = \theta\sigma(a_1) = \theta(a_2)$

$\theta\sigma\theta^{-1}(\theta(a_2)) = \theta\sigma(a_2) = \theta(a_3)$

..

..

$\theta\sigma\theta^{-1}(\theta(a_p)) = \theta\sigma(a_p) = \theta(a_1)$

donc $\theta\sigma\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \theta(a_1) & \theta(a_2) & ... & \theta(a_P) \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta(1) & \theta(2) & \theta(3) & \theta(4) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Exercice 2</u>: Soit f est une application linaire de E tel que $f^2 = 3f - 2id_E$

(1) Soit $\vec{x} \in Ker(f - id_E) \cap ker(f - 2id_E) \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{x}) = \vec{x} \\ f(\vec{x}) = 2\vec{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\forall \vec{x} \in E$ $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} = 2\vec{x} - f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{x}) - \vec{x}$

$f(\vec{u}) = 2f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = 2\vec{x} - f(\vec{x}) = \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \in Ker(f - id_E)$

$f(\vec{v}) = f^2(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 2(f(\vec{x}) - \vec{x}) = 2\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \in Ker(f - 2id_E)$

donc $E = Ker(f - id_E) \oplus Ker(f - 2id_E)$.

Université Ibn Zohr — Année universitaire 2014/2015

Ecole Nationale des Science Appliquées — durée 2 heures

Agadir

ENSA 1.

DS2 d'Algebre.

Exercice I.(7 pts)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, \alpha, 1), \vec{v}_2 = (\alpha, 1, \alpha), \vec{v}_3 = (-\alpha, \alpha, \alpha)$.

(1) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? (2 pts)

(2) Discuter Le rang de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ suivant la valeur de α. (2 pts)

(3) On prend $\alpha = 2$. ($B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$).
Déterminer les matrices de passage $P_{BB'}$ et $P_{B'B}, B$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (3 pts)

Exercice II.(4 pts) (2-2)

Dans $M_3(\mathbb{R})$ on considére la matrice suivante:

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

(1) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice A_α est inversible?

(2) Discuter le rang de A_α selon la valeur de α.

Exercice III.(12 pts)(1.5-0.5-1-3-1-2-2)

On considère l'application lineaire f de $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f_\alpha((x, y, z)) = (x + \alpha y - \alpha z, \alpha x + y + \alpha z, x + \alpha y + \alpha z), (\alpha \in \mathbb{R})$$

(1) Déterminer, suivant le paramétre α, une base de $Im(f_\alpha)$.

(2) Discuter, suivant le paramétre α, le rang de f_α.

(3) On prend $\alpha = 2$.

(a) Vérifier que $B' = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2), (-2, 2, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer les matrices de passage $P_{BB'}$ et $P_{B'B}, B$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) En déduire que $M_{B'}(f_2) = M_B(f_2)$.

(3) On prend $\alpha = -1$.

(a) Déterminer une base de $Ker(f_{-1})$ et une base de $Im(f_{-1})$.

(b) Vérifier que $Ker(f_{-1}) \bigoplus Im(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$.

Exercice III.(5 pts)(1-2-2)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur K.

(1) Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$dim(F \cap G) \geq dimF + dimG - n.$$

(2) Soient $H_1, H_2, \cdots, H_r$ r hyperplans de E. Montrer que $dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r) \geq n - r$.

(3) Soit f une application linéaire de E. n est le plus élément de $\mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$. Montrer que $B = (a, f(a)), f^2(a), \cdots, f^{n-1}(a)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

Bonne chance

Prof: Abdellah Bnouhachem

Correction

Exercice I. ★ $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, avec $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (\alpha, 1, \alpha)$ et $v_3 = (-\alpha, \alpha, \alpha)$

1) Cherchons les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

★ $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si seulement si $M(S)/B$ est inversible, B tant la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

- ▶ $M(S)/B = A_\alpha$
- ▶ Donc $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si A_α est inversible.
- ▶ Or la matrice A_α est inversible ssi $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$ {**(D'après II)**}
- ▶ **Donc le systme $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$**

2) Discutons $rg(S)$ suivant les valeurs du paramtre $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad 1 \leq rg(S) \leq 3$

★ $rg(S) = rg(M(S/B))$: $\quad M(S)/B = A_\alpha$

- ▶ Donc $rg(S) = rg(A_\alpha)$
- ▶ Or : **(D'après II)**
  - ○ $rg(A_\alpha) = 3$ si $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$
  - ○ $rg(A_\alpha) = 2$ si $(\alpha = 0)$ ou $(\alpha = 1)$ ou $(\alpha = -1)$
- ▶ Donc
  - ○ Si $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$ alors $rg(S) = 3$
  - ○ Si $(\alpha = 0)$ ou $(\alpha = 1)$ ou $(\alpha = -1)$ alors $rg(S) = 2$

3) On prend $\alpha = 2$: $\quad v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$ et $v_3 = (-2, 2, 2)$

- ▶ donc $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- ▶ $P_{BB'} = A_2$, donc $P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1} = (A_2)^{-1}$.
- ▶ Calculons $P_{BB'})^{-1}$:
  - ○ $detP_{BB'} = detA_2 = 2 \times 2(1 + 2)(1 - 2) = -12$

$$\circ\ C(P_{BB'}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -8 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\circ\ {}^tC(P_{BB'}) = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} :$$

$$(P_{BB'})^{-1} = \frac{1}{detP_{BB'}}\,{}^tC(P_{BB'}) \Rightarrow (P_{BB'})^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\circ\ \text{Donc } P_{B'B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice II.

1) La matrice A_α est inversible ssi $A_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$:

► Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$

$$\circ\ \text{or } \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{L_2 \to L_2 + L_1, L_3 \to L_3 + L_1}} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha+1 & 1+\alpha & 0 \\ 2 & 2\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2(1+\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\circ\ \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} \underline{\underline{suivant C_3}}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1 - \alpha$$

∘ Donc $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)$

▶ Solution de l'quation $\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0$

∘ $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha = -1) ou (\alpha = 0) ou (\alpha = 1)$

▶ La matrice A_α est alors inversible ssi $(\alpha \neq -1)$, $(\alpha \neq 0)$ et $(\alpha \neq 1)$

2) le rang de la matrice A_α selon les valeurs du paramtre $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad 1 \leq rg(A_\alpha) \leq 3$

★ $rg(A_\alpha) = 3$ ssi la matrice A_α est inversible.

▶ Donc $rg(A_\alpha) = 3$ ssi $(\alpha \neq -1), (\alpha \neq 0) et (\alpha \neq 1)$

▶ Pour $\alpha = -1$: $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq rg(A_{-1}) \leq 3$

∘ $rg(A_{-1}) = 3$ ssi la matrice A_{-1} est inversible.

∘ Donc $rg(A_{-1}) < 3$ car $det A_{-1} = 0$.

∘ On cherche une sous matrice carre inversible d'ordre 2 extraite de la matrice A_{-1} :

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice inversible de $M(2)$ extraite de A_{-1} : $det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$

∘ Donc $rg(A_{-1}) = 2$.

▶ Pour $\alpha = 0$: $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq rg(A_0) \leq 3$

∘ $rg(A_0) = 3$ ssi la matrice A_0 est inversible.

∘ Donc $rg(A_0) < 3$ car $det A_0 = 0$.

∘ On cherche une sous matrice carre inversible d'ordre 2 extraite de la matrice A_0 :

• $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice inversible de $M(2)$ extraite de A_0 : $det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

∘ Donc $rg(A_0) = 2$.

▶ Pour $\alpha = 1$: $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq rg(A_1) \leq 3$

- ∘ $rg(A_1) = 3$ ssi la matrice A_1 est inversible.
- ∘ Donc $rg(A_1) < 3$ car $detA_1 = 0$.
- ∘ On cherche une sous matrice carre inversible d'ordre 2 extraite de la matrice A_1 :
  - $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice inversible de $M(2)$ extraite de A_1 : $det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$
- ∘ Donc $rg(A_1) = 2$.

★ ***<u>Résumé</u>:***

- ∘ Si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$ alors $rg(A_\alpha) = 3$.
- ∘ Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ alors $rg(A_\alpha) = 2$.

Exercice III.

$$f_\alpha((x, y, z)) = (x + \alpha y - \alpha z, \alpha x + y + \alpha z, x + \alpha y + \alpha z)$$

1) Une base de $Im(f_\alpha)$, suivant le paramtre α :

★ $Im(f_\alpha) = \langle f_\alpha(e_1), f_\alpha(e_2), f_\alpha(e_3)\rangle$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

★ $dim(Im(f_\alpha)) = rg\{f_\alpha(e_1), f_\alpha(e_2), f_\alpha(e_3)\}$

▶ $\begin{cases} f_\alpha(e_1) = (1, \alpha, 1) = v_1 \\ f_\alpha(e_2) = (\alpha, 1, \alpha) = v_2 \\ f_\alpha(e_3) = (-\alpha, \alpha, \alpha) = v_3 \end{cases}$ Donc : $dim(Im(f_\alpha)) = rg(S)$, avec $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

▶ Or : **(D'après I)**

- ∘ $rg(S) = 3$ si $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$
- ∘ $rg(S) = 2$ si $(\alpha = 0)$ ou $(\alpha = 1)$ ou $(\alpha = -1)$

▶ Donc

- ∘ Si $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$ alors $dim(Im(f_\alpha)) = 3$ et $Im(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$
- ∘ Si $(\alpha = 0)$ alors $dim(Im(f_0)) = 2$: $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (-0, 0, 0)$
  - $\{v_1, v_2\}$ est une base de $Im(f_0)$.
- ∘ Si $(\alpha = 1)$ alors $dim(Im(f_1)) = 2$: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 1)$
  - $\{v_1, v_3\}$ est une base de $Im(f_1)$.

- ∘ Si $(\alpha = -1)$ alors $dim(Im(f_{-1})) = 2$: $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (-1,1,-1)$, $v_3 = (1,-1,-1)$
  - • $\{v_1, v_3\}$ est une base de $Im(f_{-1})$.

2) Le rang de f, suivant le paramtre α :

- ▶ $rg(f_\alpha) = Im(f_\alpha)$
- ▶ Donc
  - ∘ Si $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$ alors $rg(f_\alpha) = 3$
  - ∘ Si $(\alpha = 0)$ ou $(\alpha = 1)$ ou $(\alpha = -1)$ alors $rg(f_\alpha) = 2$

3) $\alpha = 2$:

a. $B' = \{(1,2,1),(2,1,2),(-2,2,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- ▶ $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, avec , $\alpha = 2$
- ▶ Or le systme $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $(\alpha \neq 0)$, $(\alpha \neq 1)$ et $(\alpha \neq -1)$
- ▶ Donc $B' = \{(1,2,1),(2,1,2),(-2,2,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Les matrices de passage $P_{BB'}$ et $P_{B'B}$, B tant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- ▶ $P_{BB'} = M(B'/B)$, donc $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- ▶ Donc, **(D'après I)** : $P_{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c. $M(f_2/B', B') = M(f_2/B, B)$?

- ▶ $M(f_2/B', B') = P_{B'B}.M(f_2/B, B).P_{BB'}$:
- ▶ Or $P_{BB'} = A_2$ et $M(f_2/B, B) = A_2$ car $M(f_\alpha/B, B) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = A_\alpha$
- ▶ Donc $M(f_2/B', B') = M(f_2/B, B)$ car $P_{B'B}.M(f_2/B, B).P_{BB'} = (A_\alpha)^{-1}.A_\alpha.A_\alpha = A_\alpha$

4) $\alpha = -1$: $\quad f_{-1}((x,y,z)) = (x - y + z, -x + y - z, x - y - z)$

a. Une base de $Im(f_{-1})$ et une base de $ker(f_{-1})$.

- ▶ Une base de $Im(f_{-1})$:
  - ∘ $\{(1,-1,1),(1,-1,-1)\}$ est une base de $Im(f_{-1})$. **(D'après I))**
- ▶ $ker(f_{-1})$:
  - ∘ $ker(f_{-1}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f_{-1}(x,y,z) = (0,0,0)\}$
  - ∘ $(x,y,z) \in ker(f_{-1})$ ssi $(x-y+z, -x+y-z, x-y-z) = (0,0,0)$
  - ∘ $(x,y,z) \in ker(f_{-1})$ ssi $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$
    - • or $\begin{cases} x-y+z=0 & (1) \\ x-y-z=0 & (2) \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y=x & (1)+(2) \\ z=0 & (1)-(2) \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$
  - ∘ Donc $(x,y,z) \in ker(f_{-1})$ ssi $(x,y,z) = (x,x,0) = x(1,1,0)$, $x \in \mathbb{R}$
  - ∘ Donc $ker(f_{-1}) = \langle (1,1,0) \rangle$, $dimker(f_{-1}) = 1$
  - ∘ $\{(1,1,0)\}$ est alors une base de $ker(f_{-1})$.

b. $Im(f_{-1}) \oplus ker(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$.

★ Pour vrifier que $Im(f_{-1}) \oplus ker(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$, il suffit de vrifier que la runion dune base de $ker(f_{-1})$ et une base de $Im(f_{-1})$; est une base de $\mathbb{R}^3$:

- ▶ $\{(1,1,0)\}$ est alors une base de $ker(f_{-1})$
- ▶ $\{(1,-1,1),(1,-1,-1)\}$ est alors une base de $Im(f_{-1})$
- ▶ Vrifions que $S = \{(1,-1,1),(1,-1,-1),(1,1,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
  - ∘ $M(S/B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: S est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $det\,(M(S/B)) \neq 0$
  - ∘ Calcul de $det\,(M(S/B))$:
    - • $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{\underline{L_2 \to L_2 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underline{suivant C_3} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$
  - ∘ $S = \{(1,-1,1),(1,-1,-1),(1,1,0)\}$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$.
- ▶ Donc $Im(f_{-1}) \oplus ker(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$.