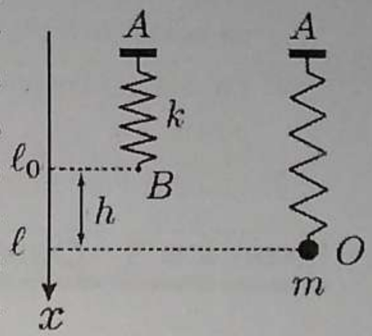
- TD N°3 : Mécanique du point -

Dynamique du point matériel

Exercice 1 : Mesure du champ de pesanteur.

Un ressort de constante de raideur $k > 0$, de longueur à vide ℓ_0 et de masse m_0 négligeable est suspendu verticalement par son extrémité A. A l'autre extrémité B du ressort, on attache une masse quasi-ponctuelle m. Le ressort s'allonge alors de la quantité $BO = h$, pour parvenir à une longueur totale dans la nouvelle position d'équilibre $AO = \ell$. On choisit pour référentiel d'étude le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, que nous supposerons galiléen, et nous utiliserons comme repère d'espace le système des coordonnées cartésiennes.



1. **Etude statique**
   (a) Exprimer le champ de pesanteur terrestre g en fonction des données du problème.
   (b) Application numérique : pour $m = 200$ g, on mesure $h = 59,5$ mm.
   → Déterminer g .
2. **Étude dynamique**
   A partir de la position d'équilibre O précédente, on écarte la masse m d'une quantité x_0 et on la lâche sans vitesse initiale au temps $t = 0$.
   (a) Écrire l'équation du mouvement de la masse m. Montrer que l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique non hamorti donnée par :
   $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
   et de pulsation dite propre, notée ω_0 que l'on déterminera en fonctions des paramètres du problème.
   (b) En tenant compte des conditions initiales déterminer $x(t)$.
   (c) Exprimer g en fonction de h et ω_0.
   (d) Application numérique : pour $m = 200$ g, on compte 113 oscillations par minute. Déterminer g et commenter le résultat.

   Données numériques : $k = 33$ N.m^{-1}, $l_0 = 0,35$ m et $m_0 = 105$ g.

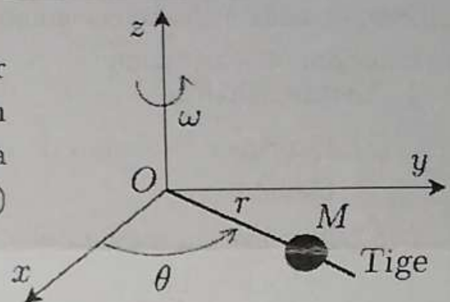
Exercice 2 : Tir d'un projectile.

Un projectile de forme sphérique est lancé à la date $t = 0$ depuis un point origine O, suivant la verticale ascendante (Oz) et avec une vitesse initiale $v_0 = 50$ m $\cdot$ s^{-1}. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen dans les conditions de l'expérience. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, le champ de pesanteur, supposé uniforme dans la zone d'espace décrite par le projectile avec $g = 9,8 m \cdot s^{-2}$. La résistance de l'air est modélisée par une force de frottements d'intensité $F = k\pi r_0^2 v^2$ où k est une constante positive, $r_0 = 2,0$ cm le rayon du projectile et v sa vitesse instantanée. On donne $k = 0,25$ U.S.I. Le projectile est en plomb, de masse volumique $\rho = 11,3$ g.cm^{-3}.

1. Quelle est l'unité S.I. de la constante k ?
2. Comparer la force de frottements au poids. Commenter.
3. Montrer que, dans la phase ascendante de la trajectoire, on a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -2g - 2\frac{k\pi}{m} r_0^2 u$, en posant $u = v^2$.
4. En déduire l'expression de la fonction $z(u)$ au cours de la phase ascendante. On posera $d = \frac{m}{2k\pi r_0^2}$.
5. Calculer l'altitude maximale H atteinte par le projectile.

Exercice 3 : Coulissement sur une tige en rotation.

Une tige T horizontal passant par O tourne autour de l'axe vertical Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. Un anneau $M(m)$ peut coulisser sans frottement sur la tige. Il sera repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (xOy).

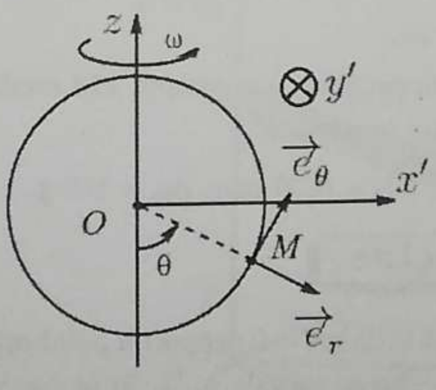


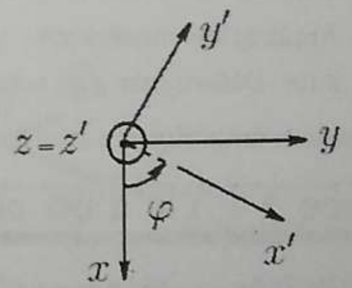
A l'instant initial, le point M est abandonné à la distance $r(t=0) = r_0$ sans vitesse par rapport à la tige $\dot{r} = 0$.
On suppose qu'à ce même instant la tige est confondue avec l'axe $(Ox)(\theta(t=0) = 0)$.

1. Écrire la PFD en projection dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$.
2. Montrer que le mouvement de l'anneau est donné par : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$.
3. Montrer qu'une solution de la forme $r(t) = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t)$ convient, les constantes A et B devront être déterminées à l'aide des conditions initiales.

Exercice 4 : Anneau coulissant sur un cercle en rotation.

On considère un anneau coulissant sur un cercle en rotation.





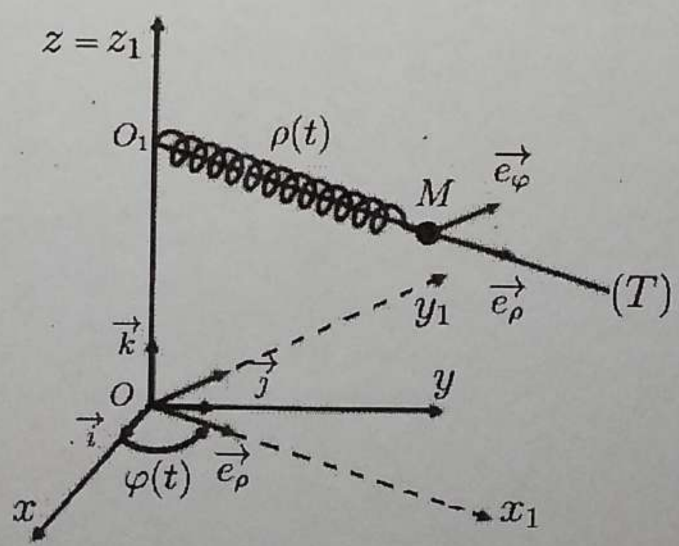
Une circonférence de centre O et de rayon a située dans un plan vertical tourne autour d'un de ses diamètres d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega$.

Un anneau M de masse m assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait OM avec la verticale ascendante.

1. Écrire le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ lié au cercle et en rotation autour de l'axe Oz lié au référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. On notera $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.
2. Montrer que $\vec{F}_{ie}$ est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$, en donnant son expression en fonction de a, m, θ et ω.
3. Montrer que $\vec{F}_{ic}$ est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, en donnant son expression en fonction de $a, m, \theta, \dot{\theta}$ et ω.
4. Projeter le PFD sur $\vec{e}_\theta$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que l'équation obtenue peut se mettre sous la forme :
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta) \quad \text{où } f(\theta) \text{ une fonction à déterminer.}$$
5. On veut étudier l'équilibre relatif de M.
   (a) Écrire la relation $f(\theta) = 0$ donnant les positions d'équilibre dans $\mathcal{R}$.
   (b) Déterminer les positions d'équilibre.
6. En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour θ correspondant aux positions d'équilibre parmi les quatre suivants :
$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \quad \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Exercice 5 : Anneau élastiquement lié.

Soit $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ un référentiel galiléen (Considéré ici comme repère absolu) muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ muni de la base $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k}\right)$. La tige (T) (Confondue avec l'axe (O_1x_1) tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire de rotation ω constante et positive.



L'extrémité O_1 de la tige, se déplace sur l'axe Oz avec une vitesse V_0 constante. A l'instant $t = 0$. Le point O_1 est confondu avec O.

Un petit anneau M de masse m se déplace sans frottement sur la tige (T). Il est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

A) Étude cinématique :

1. Exprimer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ρ, V_0 et t.
3. Déterminer par la méthode directe l'expression de la vitesse absolue $\vec{v}_a$ et de l'accélération absolue de $\vec{a}_a$.
4. Déterminer l'expression de la vitesse relative de $\vec{v}_r$ et d'entrainement de $\vec{v}_e$.
5. Déterminer l'expression de l'accélération relative de a_r, de l'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$ et de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_C$.
6. Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées ?

B) Étude dynamique :

1. Donner les expressions de toutes les forces qui s'appliquent à M dans $\mathcal{R}_1$
2. Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le repère relatif $\mathcal{R}_1$.
3. En projetant l'équation vectorielle obtenue de PFD dans la base ($\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k}$), déduire :
   (a) L'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T).
   (b) Les composantes de la réaction $\vec{R}$.