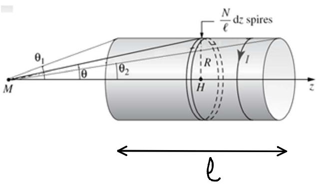
Exercice 8 corrigé solénoïde

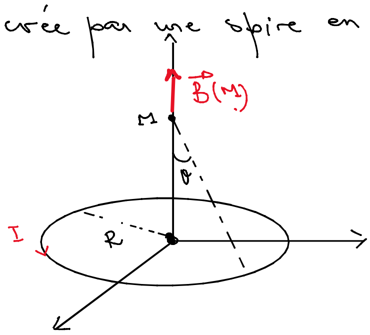
Soit une bobine de longueur **l**, formée de **N** spires, parcourue par un courant ***I***



a) Calculer le champ $\vec{B}$ en un point quelconque M situé sur l'axe de la bobine Oz, en prenant ce point pour origine et en utilisant le résultat obtenu dans l'exercice 6
b) Trouver le champ au centre du solénoïde
c) Quel est le champ crée par un solénoïde de très grande longueur ?
d) Retrouver le résultat de la question " c" en considérant un solénoïde infini et en utilisant le théorème d'Ampère?

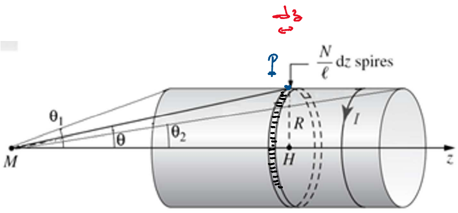
a) Le solénoïde est la juxtaposition de plusieurs spires jointives
Le champ d'induction $\vec{B}$ sera donc la superposition de champs créés par chacune des spires.

On a vu dans l'exercice 6, que le champ crée par une spire en un point M ∈ l'axe de la spire s'écrit :



$$\vec{B}_{1\,spire}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{e_z}$$

θ étant l'angle sous lequel on voit la spire à partir de M
et $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e_z}$



- Soit un point P pris sur l'enroulement des spires, H sa projection sur oz
on note MH = z

- Au voisinage du point P, on considère une tranche de longueur dz

Quel est le nombre de spires contenues dans dz, sachant que les spires sont enroulées de manière uniforme autour du cylindre

La règle de trois :

$$\ell \xrightarrow{\text{contient}} N \text{ spires}$$
$$dz \longrightarrow dN \qquad \Rightarrow \quad dN = \frac{N}{\ell} dz$$

dz est une longueur très petite devant la distance d'application de l'induction $\vec{B}$; on peut alors supposer que les dN spires sont vues sous le même angle.

si une spire crée $\boxed{\vec{B}_{1\,spire}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{e_z}}$

alors dN spires créent $\vec{dB}(M) = dN \, \vec{B}_{1\,spire}(M)$

$$\vec{dB}(M) = \left(\frac{N}{\ell} dz\right) \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{e_z}$$

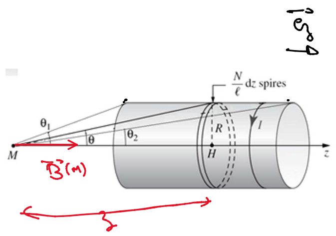
MH = z

et Les N spires créent $\vec{B}(M) = \int \vec{dB}(M)$

$$= \left(\frac{N}{\ell}\right) \frac{\mu_0 I}{2R} \int_{\ell} \sin^3\theta \, . \, dz \, \vec{e_z}$$

z et θ sont dépendants :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{z} \longrightarrow z = \frac{R}{\operatorname{tg}\theta} \longrightarrow dz = -\frac{R}{\sin^2\theta}\,d\theta$$



d'où $$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{N}{\ell}\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin\theta)\,d\theta$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{N}{\ell}\right)(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\vec{e_z}}$$

$\theta_2 < \theta_1 \Rightarrow \vec{B}(M)$ est de m̂ sens que $\vec{e_z}$

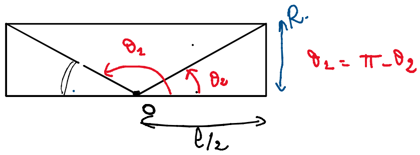
si on note $\frac{N}{\ell} = n$ (densité de spires = nombre de spires / unité de longueur)

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I n}{2R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\vec{e_z}}$$

b)

b) Trouver le champ au centre du solénoïde

au centre du solénoïde



$\theta_1 + \theta_2 = \pi$

$\theta_1 = \pi - \theta_2 \longrightarrow \cos\theta_1 = -\cos\theta_2$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \mu_0 I\, n \cdot \cos\theta_2\,\vec{e_z}} \Longrightarrow \boxed{\vec{B}(O) = \mu_0 n I \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + R^2}}\,\vec{e_z}}$$

$n = \frac{N}{\ell}$ $\qquad \cos\theta_2 = \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + R^2}}$

c)

c) Quel est le champ crée par un solénoïde de très grande longueur ?

Pour un solénoïde de longueur infinie

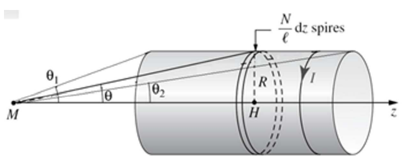
$$\left|\begin{array}{l}\theta_1 \longrightarrow \pi \\ \theta_2 \longrightarrow 0\end{array}\right. \quad \text{ou bien } \ell \to \infty$$

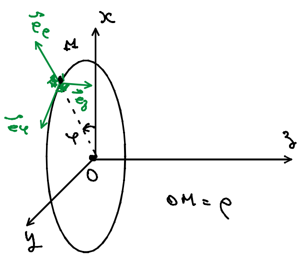
$$\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 n I\,\vec{e_z}}$$

Conclusion

Pour un solénoïde infini (grande longueur devant le rayon), l'induction $\vec{B}$ est uniforme et il est porté par l'axe du solénoïde.

d) Retrouver le résultat de la question "c " e en utilisant le théorème d'Ampère?





Le théorème d'Ampère $\quad \oint_C \vec{B}\,\vec{d\ell} = \mu_0 \sum I(\text{enlacés})$

Pour le choix du contour C, on utilise les règles de symétrie pour déterminer la direction de l'induction $\vec{B}$ (topographie de $\vec{B}$)

• Plan de symétrie :

$\forall$ M $\in$ à l'espace, le plan contenant M et $\perp$ à Oz est un plan de symétrie $\longrightarrow$ $\vec{B}(M)$ est $\perp$ à ce plan $\longrightarrow$ $\vec{B}$ est porté par $\vec{e}_z$

• Invariances :

En coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

le système (l'ensemble des spires enroulées sur le cylindre) est invariant

- par rotation de φ autour de l'axe Oz
- par translation le long de Oz.

$$\vec{B}(M) = \cancel{B_\rho(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\rho} + \cancel{B_\varphi(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\varphi} + B_z(\rho,\cancel{\varphi},\cancel{z})\,\vec{e}_z$$

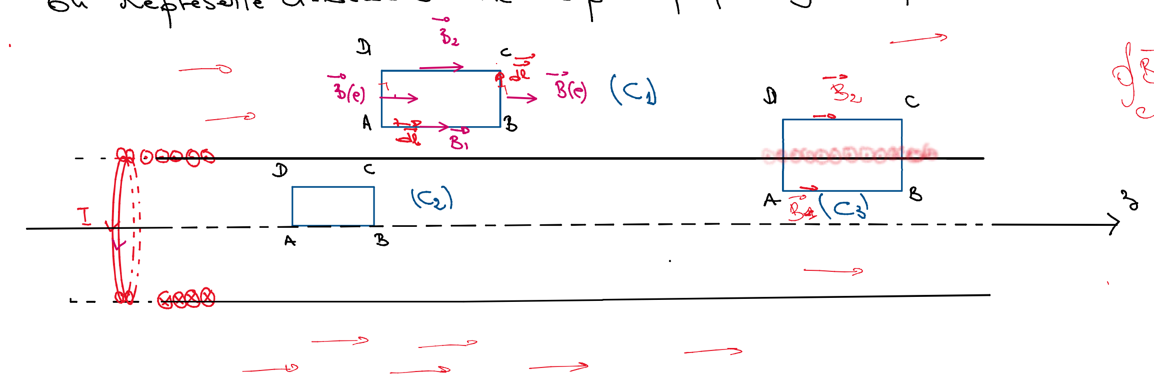
cette expression se réduit après l'étude de la symétrie du système à

$$\vec{B}(M) = B_z(\rho)\,\vec{e}_z$$

$\forall$ M point de l'espace $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e}_z$ et ne pourrait dépendre que de ρ

Dans le cas du solénoïde, on choisit 3 contours pour déterminer les caractéristiques de $\vec{B}(M)$ $\forall$ le point M choisi

On représente ci-dessous une coupe qcq du cylindre par l'axe Oz



$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B_1 \cdot AB$

$\forall$ M $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e}_z$, on choisit alors des contours rectangulaires de façon à avoir $\vec{B} \parallel \vec{dl}$ ou $\vec{B} \perp \vec{dl}$

$\int_A^B B_1\,dl$

$B_1 \int_A^B dl = B.(AB)$

• Contour (1) • $\oint_{C_1} \vec{B}\,\vec{dl} = \underbrace{\int_A^B \vec{B}_2\,\vec{dl}}_{B_1 \cdot AB} + \int_B^C \vec{B}.\vec{dl} + \int_C^D \vec{B}_2 \cdot \vec{dl} + \int_D^A \vec{B}\,\vec{dl}$

$B_1 \cdot AB + 0 + (-B_2 \cdot CD) + 0$

AB = CD $\Longrightarrow$ $\oint_{C_1} \vec{B}\,\vec{dl} = (B_1 - B_2) \cdot AB = 0 \Longrightarrow B_1 = B_2$

• $\sum I(\text{enlacés}) = 0$

th. d'Ampère $\Longrightarrow$ $\boxed{B_1 = B_2}$

Le champ à l'extérieur est uniforme
comme le champ est nul à l'infini } $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{B}_{ex} = \vec{0}}$

Le champ est nul à l'extérieur du solénoïde

- Contour 2

$$\oint_{C_2} \vec{B}\,\vec{dl} = (B_1 - B_2) \cdot AB \,.$$
$$\sum I(\text{enlacés}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_1 = B_2}$$

Le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde

- Contour 3

$$\oint_{C_3} = (B_1 - B_2) \cdot AB \quad ; \quad B_2 = B_{ex} = 0 \qquad \oint_{C_3} \vec{B} \cdot \vec{dl} = B_1 \cdot \cancel{AB} = \mu_0 n I \cdot \cancel{AB}$$

$$\sum I(\text{enlacés}) = \left(\frac{N}{\ell}\right) \cdot AB \cdot I \quad ; \quad \frac{N}{\ell} = n \text{ densité de spires}$$

th. d'Ampère $\longrightarrow$ $B_1 \cdot \cancel{AB} = \mu_0 \cdot n I \cdot \cancel{AB}$ $\qquad \vec{B_1} = \mu_0 n I \quad \vec{e_z}$

le champ est uniforme à l'interieur du solénoïde (d'après le contour 2)

$\forall$ M à l'interieur du solénoïde

$$\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e_z}}$$

Conclusion :

Pour un solénoïde de longueur très grande par rapport à son rayon,

$\vec{B}_{ex} = \vec{0}$ — L'induction est nulle à l'extérieur du solénoïde

$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e_z}$ — L'induction est uniforme à l'interieur et $\vec{B}$ est porté par l'axe du solénoïde

$$n = \frac{N}{\ell}$$