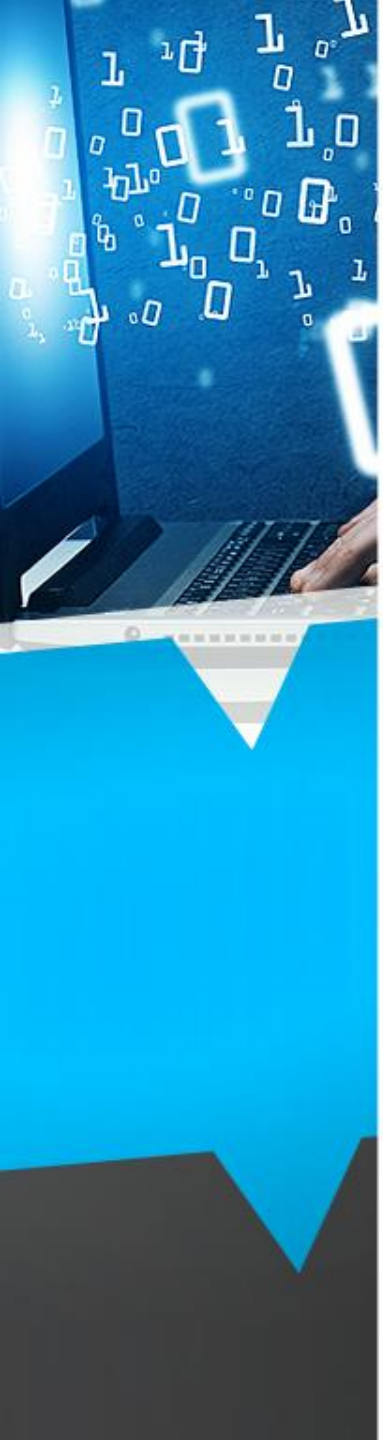
# Structures de Données

Pr. Salma AZZOUZI

# Plan

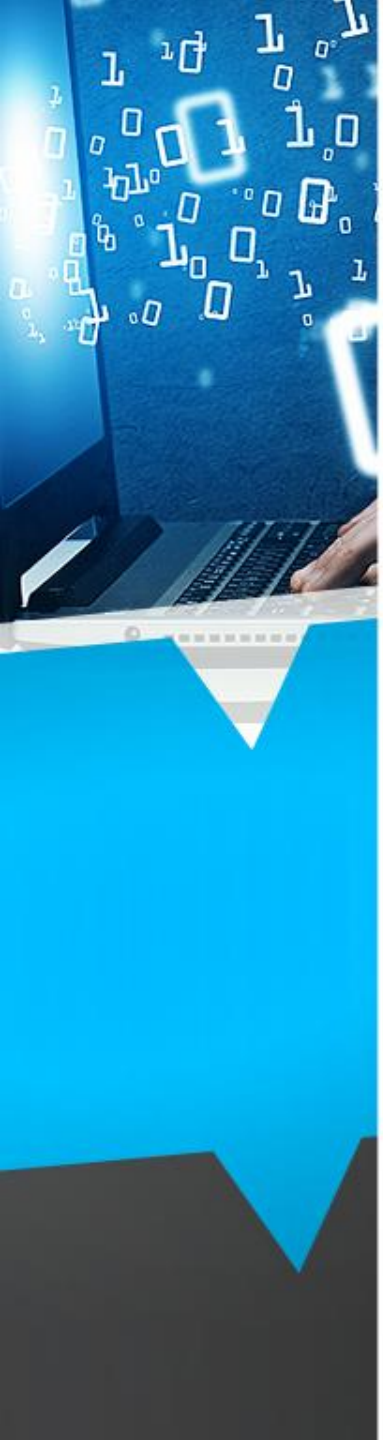
Les structures de Données non Linéaires(Arborecsantes)

- Introduction



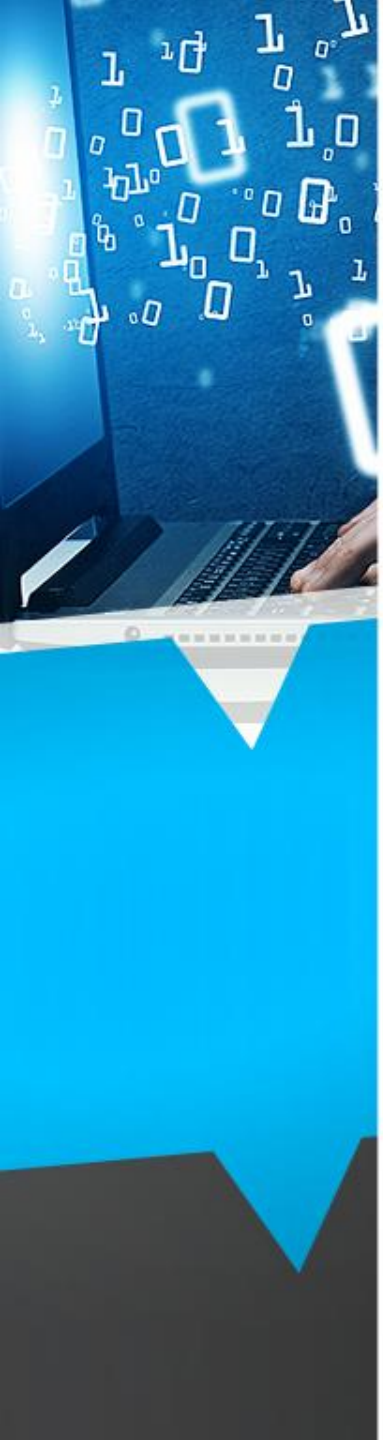
# INTRODUCTION : Les structures de données non Linéaires

- La structure de données est considérée comme **linéaire** si les éléments de données construisent une séquence d'une liste linéaire.
- Les éléments sont attachés de manière adjacente les uns aux autres et dans un ordre spécifié.
- Il consomme de l'espace mémoire linéaire et les éléments de données devant être stockés de manière séquentielle dans la mémoire.
- Lors de la mise en œuvre de la structure de données linéaire, la quantité de mémoire nécessaire est déclarée précédemment (Tableaux).
- Cela ne permet pas une bonne utilisation de la mémoire et entraîne un gaspillage de mémoire. Les éléments de données sont visités de manière séquentielle, un seul élément pouvant être directement atteint.



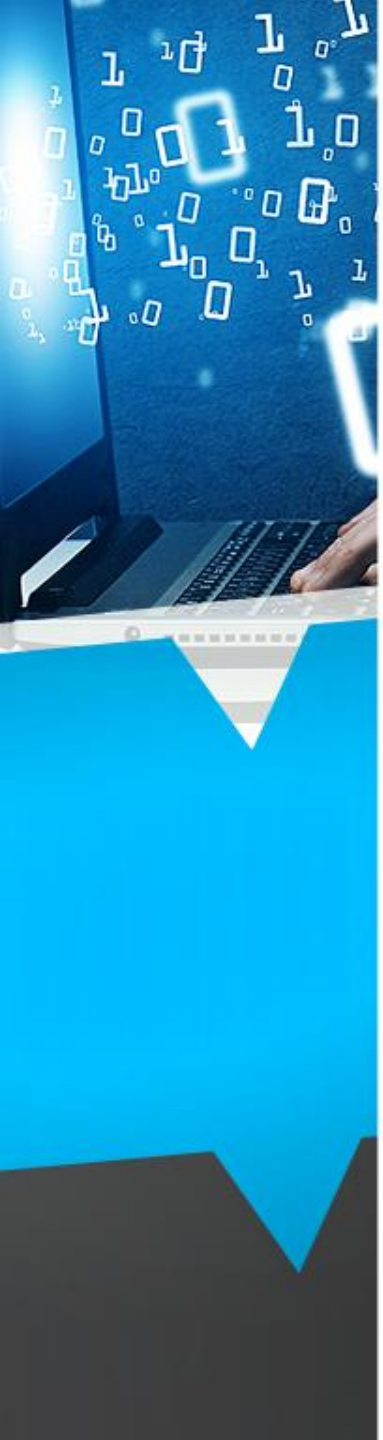
# INTRODUCTION : Les structures de données non Linéaires

- **La structure de données non linéaire** n'organise pas les données de manière consécutive, mais plutôt dans un ordre de tri.
- En cela, les éléments de données peuvent être attachés à plusieurs éléments présentant la relation hiérarchique qui implique la relation entre l'enfant, le parent et les grands-parents.
- Dans la structure de données non linéaire, la traversée d'éléments de données et l'insertion ou la suppression ne sont pas effectuées de manière séquentielle.
- La structure de données non linéaire utilise efficacement la mémoire et ne nécessite pas de déclaration préalable de la mémoire. Il existe deux exemples courants de la structure de données non linéaire - **arbre** et **graphique** . Une structure de données arborescente organise et stocke les éléments de données dans une relation hiérarchique.
- .



# INTRODUCTION : Les structures de données non Linéaires

- La structure de données non linéaire utilise efficacement la mémoire et ne nécessite pas de déclaration préalable de la mémoire.
- 
- Il existe deux exemples courants de la structure de données non linéaire :
    - **Arbres,**
    - **Graphes**.
- .

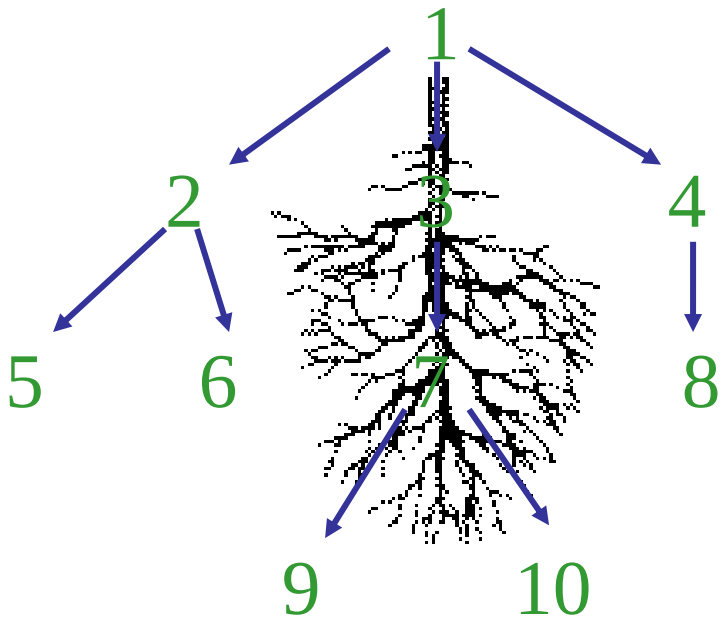


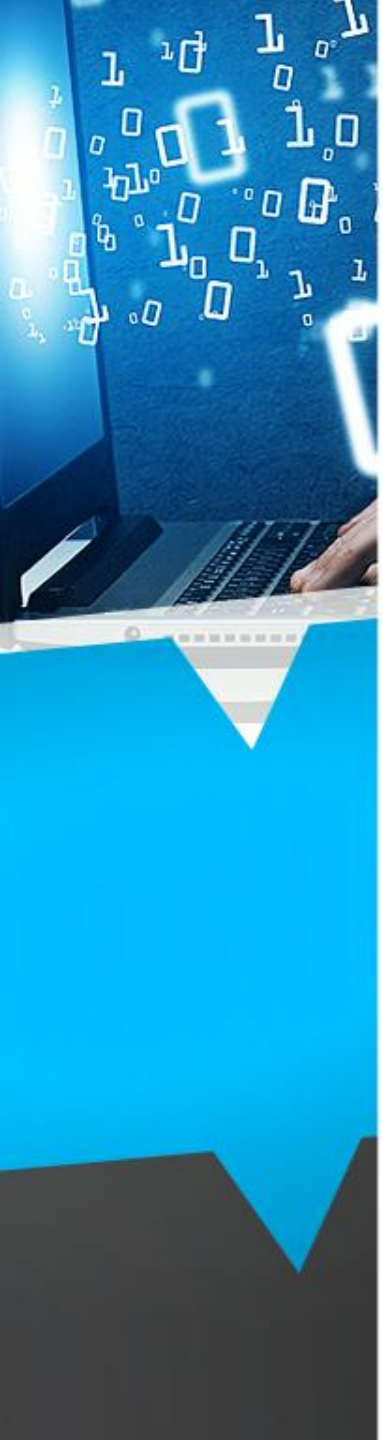
# ARBRES : Définition

- Un arbre est un ensemble d'éléments appelés nœuds, liés par une relation induisant une structure hiérarchique;

- Un nœud parmi les nœuds de l'arbre se singularise → la racine,

- Un nœud, comme tout élément d'une liste, peut-être de n'importe quel type.





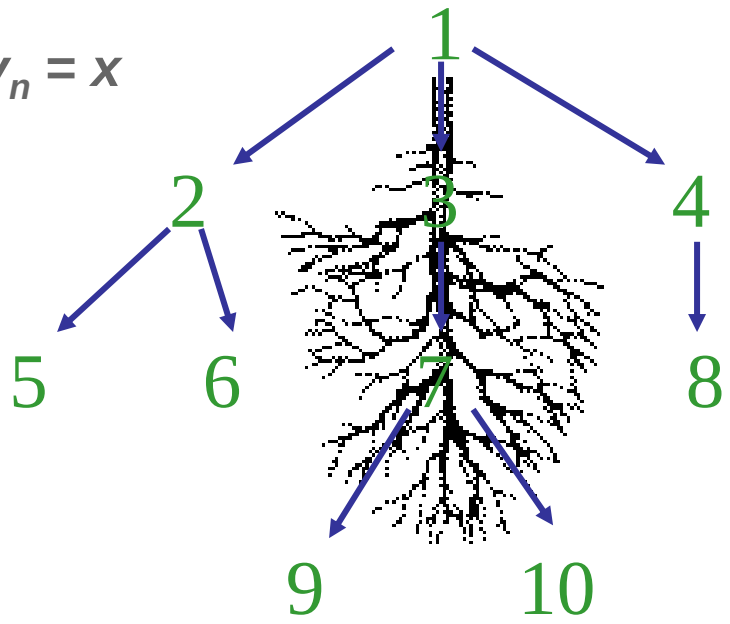
# ARBRES : Définition formelle

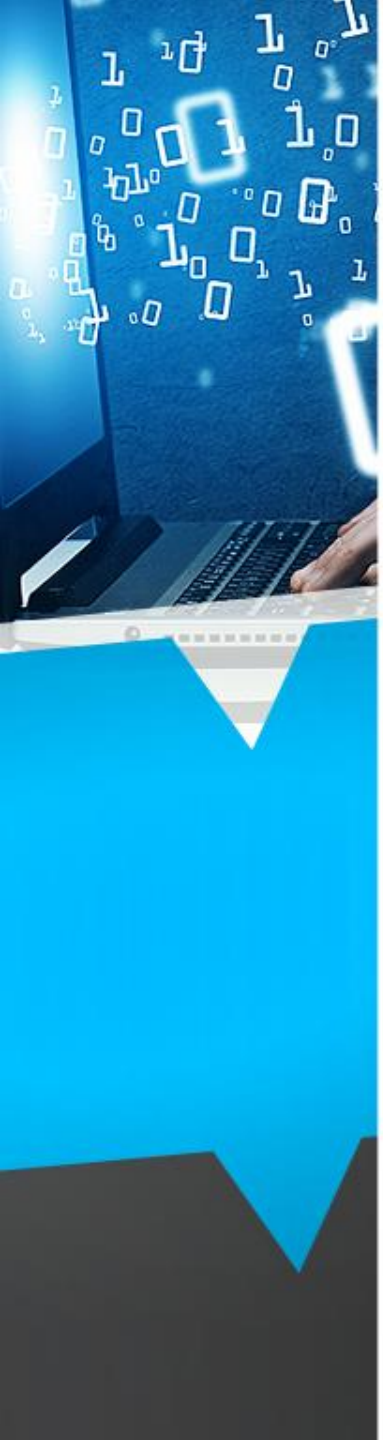
**Un Arbre : $A = (N,P)$**

- **$N$ ensemble des nœuds**
- **$P$ relation binaire « parent de »**
- **$r \in N$ la racine**

**$\forall\, x \in N \;\; \exists$ un seul chemin de $r$ vers $x$**

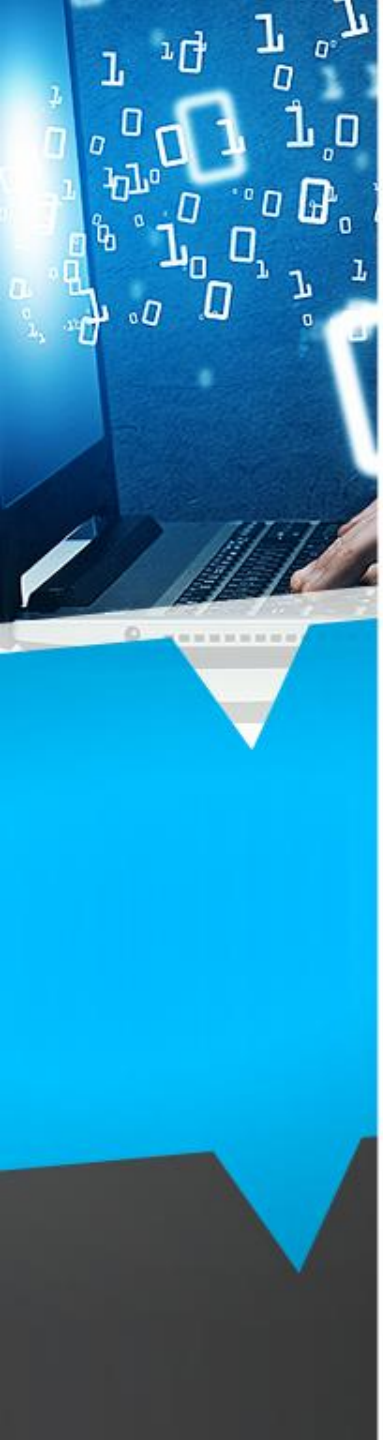
$r = y_0 \; P \; y_1 \; P \; y_2 \; \ldots \; P \; y_n = x$





# ARBRES : Vocabulaires

- **nœud :** caractérisé par une donnée associée + un nombre fini de fils, possède un unique père;
- **feuille :** nœud sans fils;
- **nœud interne :** un nœud qui n'est pas une feuille;
- **arité d'un nœud n :** nombre de fils du nœud n;
- **arité d'un arbre a :** nombre maximal de fils d'un nœud de a;
- **racine d'un arbre a** : c'est le seul nœud sans père;



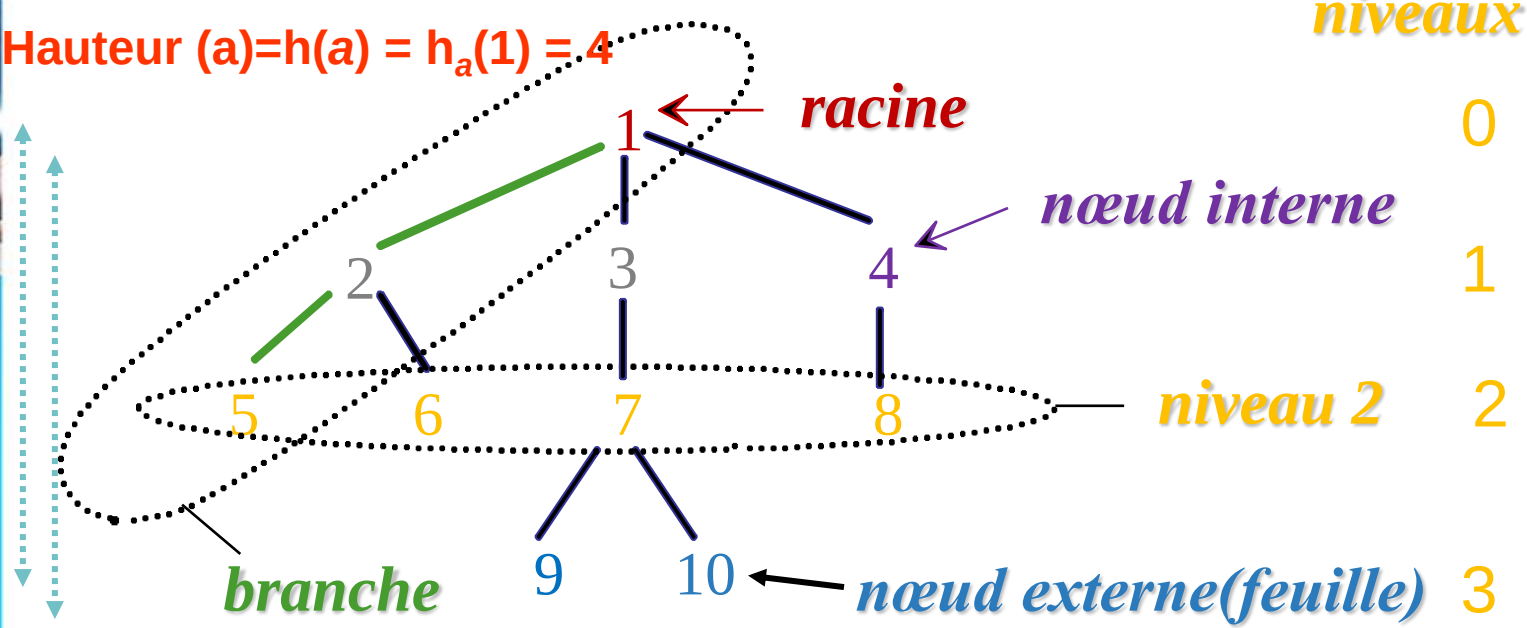
# ARBRES : Vocabulaires

- **profondeur d'un nœud n :** nombre de nœuds sur la branche entre la racine et le nœud n.
- **hauteur d'un arbre a :** c'est le nombre de nœuds sur la branche qui va de la racine de a à la feuille de profondeur maximale
- **La taille d'un arbre B :** correspond au nombre de ses nœuds;

# ARBRES : Vocabulaires

$h_a(8) = 3$, $h_a(7) = 3$, $h_a(3) = 2$

**Hauteur (a)=h(a) = $h_a(1) = 4$**

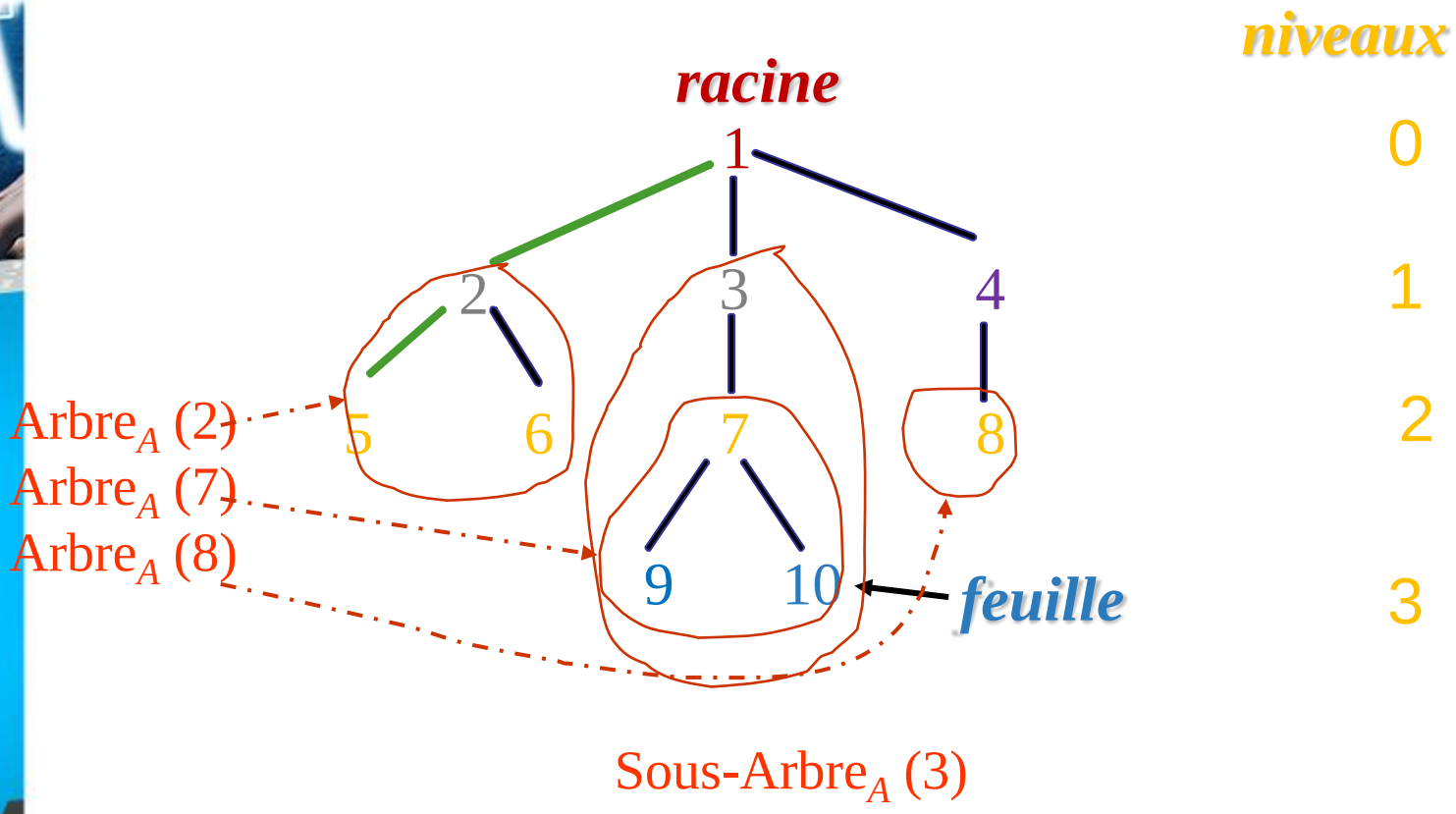


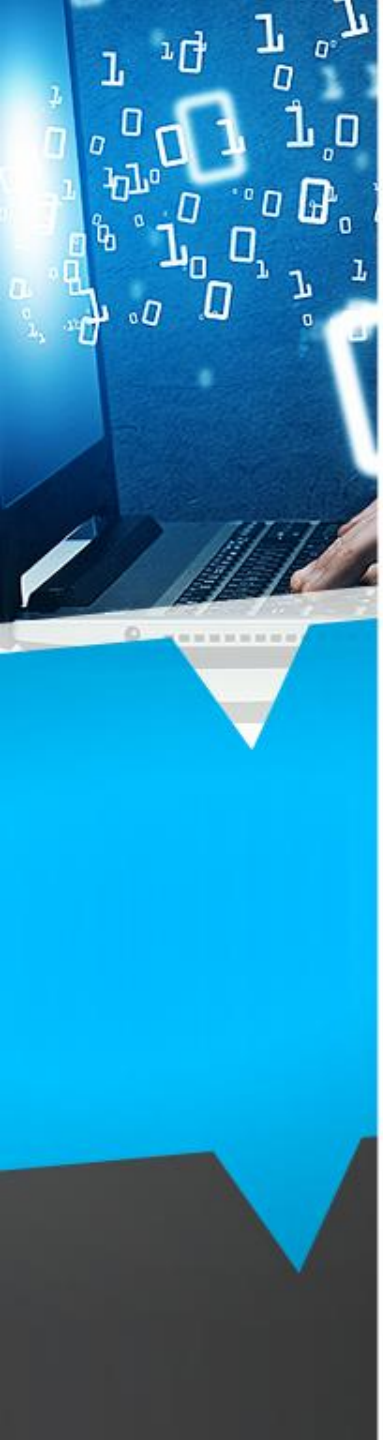

| | |
|---|---|
| 2, 3, 4 | enfants de 1 |
| 3, 4 | frères de 2 |
| 2 | fils de 1 |
| 1 | père de 2, 3 et 4 |
| 1, 3 | ancêtres de 7 |
| 9, 10 | descendants de 7 |

Taille(a)=10

# ARBRES : Vocabulaires

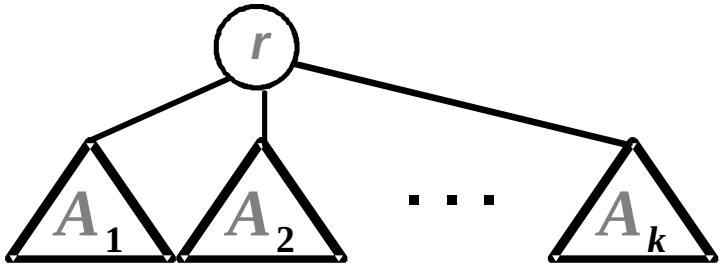
## Sous Arbre





# ARBRES : Définition Récursive

- un arbre est :
  - soit vide
  - soit constitué d'un nœud auquel sont chaînées un ou plusieurs sous arbres

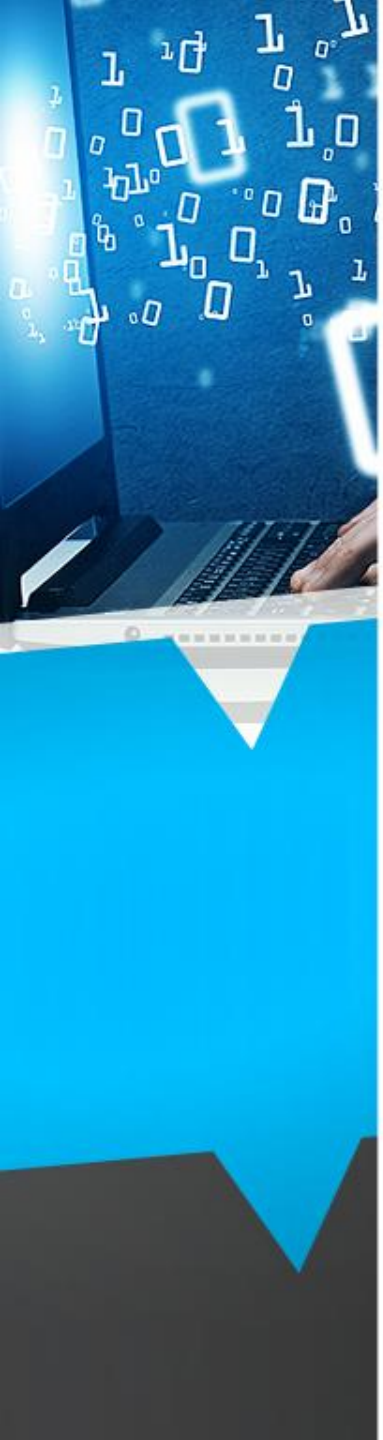



***Définition récursive formelle***

Arbre A = { arbre vide ou

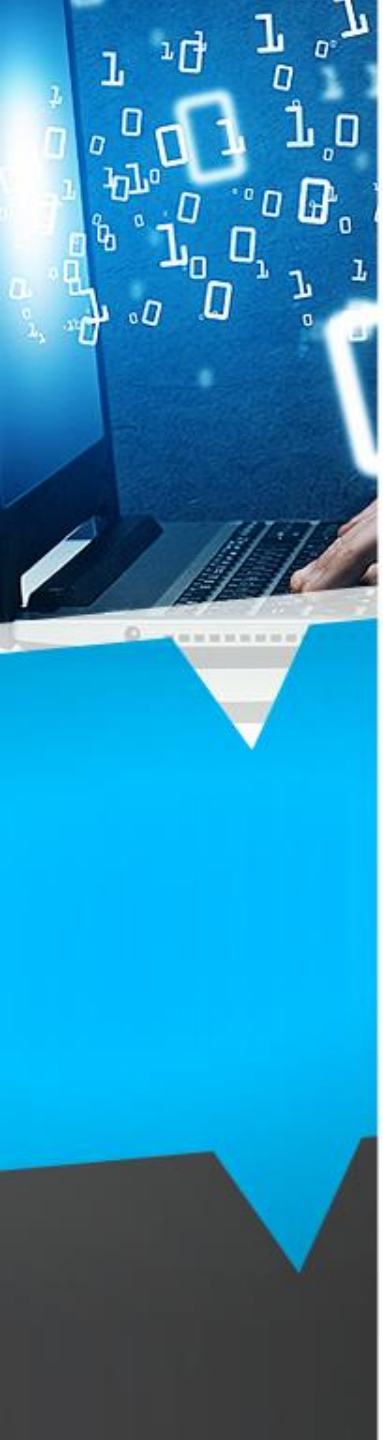
(r, {$A_1$, ..., $A_k$} )

Avec r élément, $A_1$, ..., $A_k$ arbres



# ARBRES : Exemples

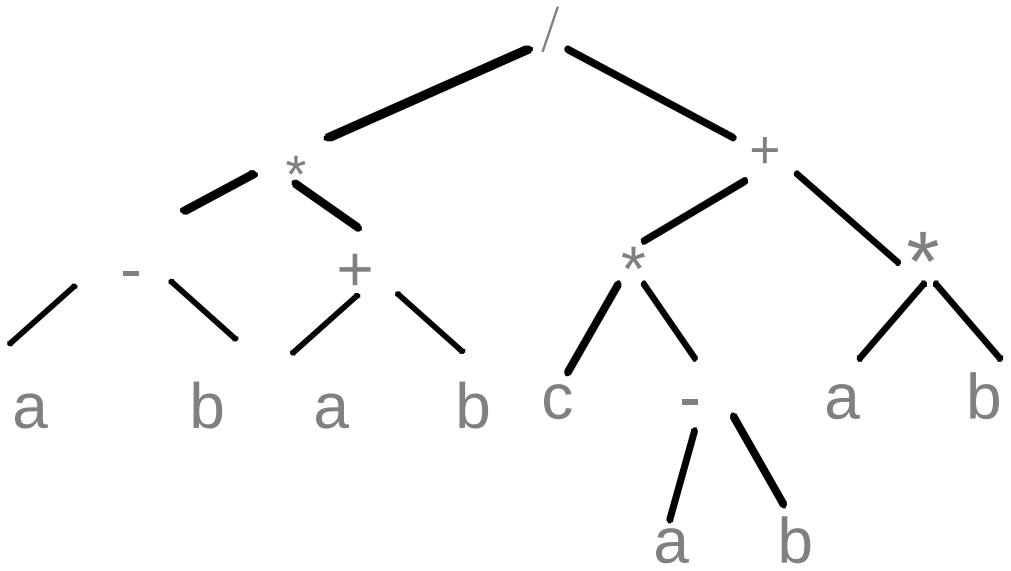
- *tables des matières*



# ARBRES : Exemples

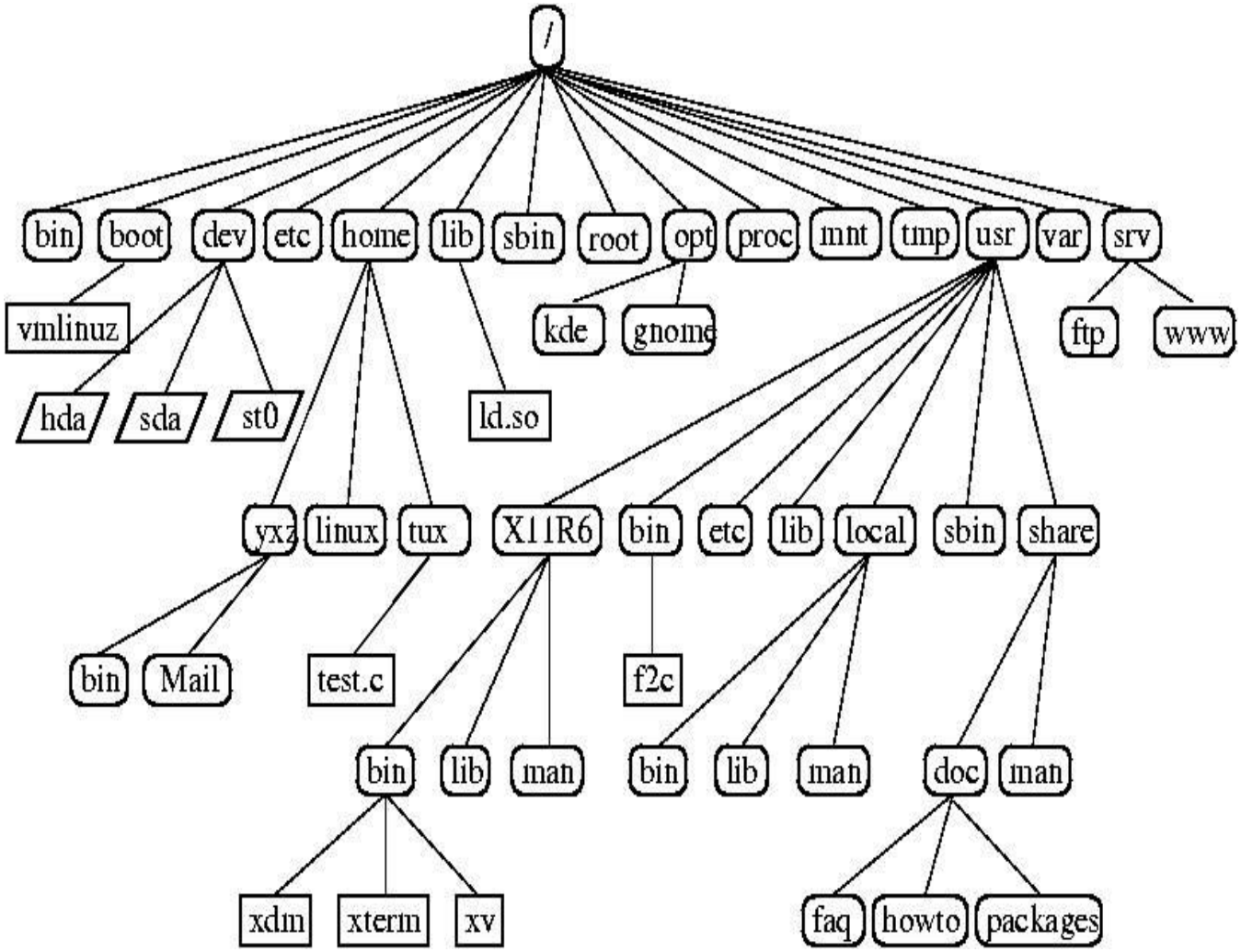
- Expression arithmétique

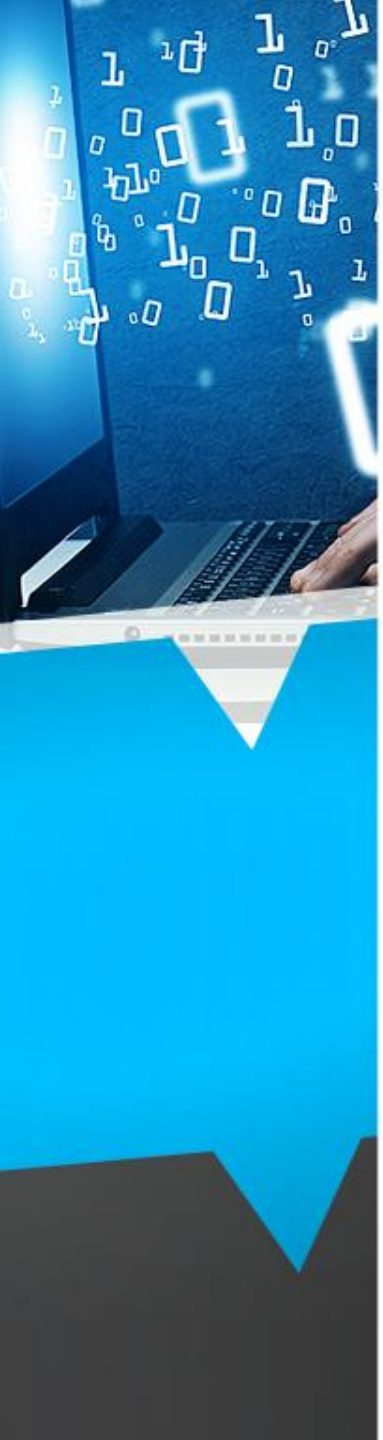
**( a - b)* ( a + b) / ( c * (a - b ) + (a*b) )**



# ARBRES : Exemples

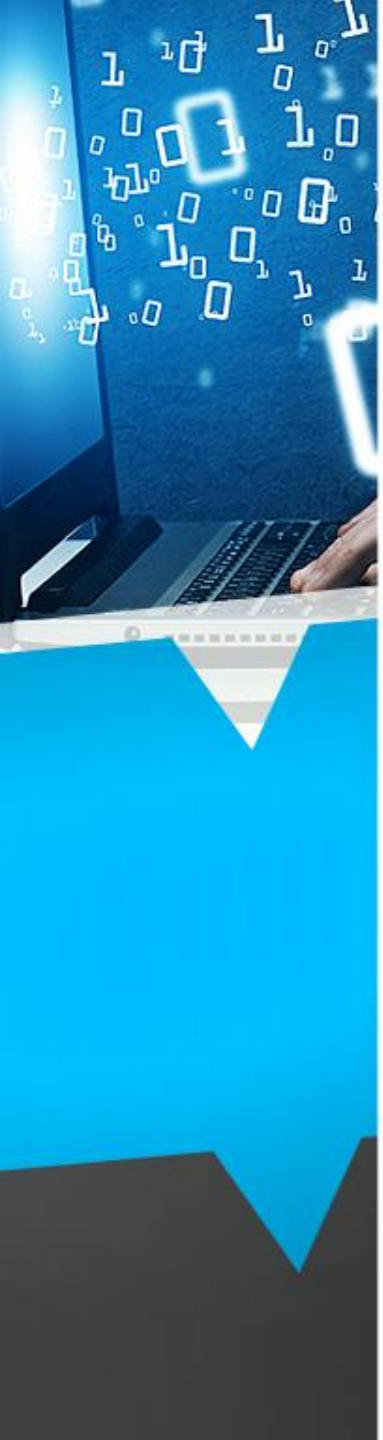
- Arborescence des fichiers





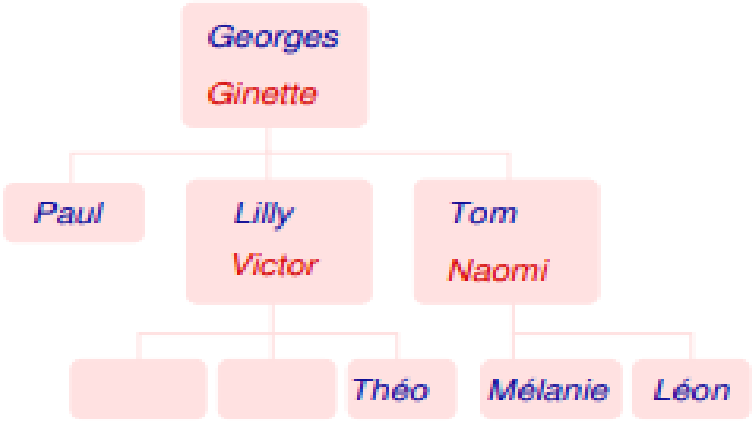
# ARBRES : Exemples

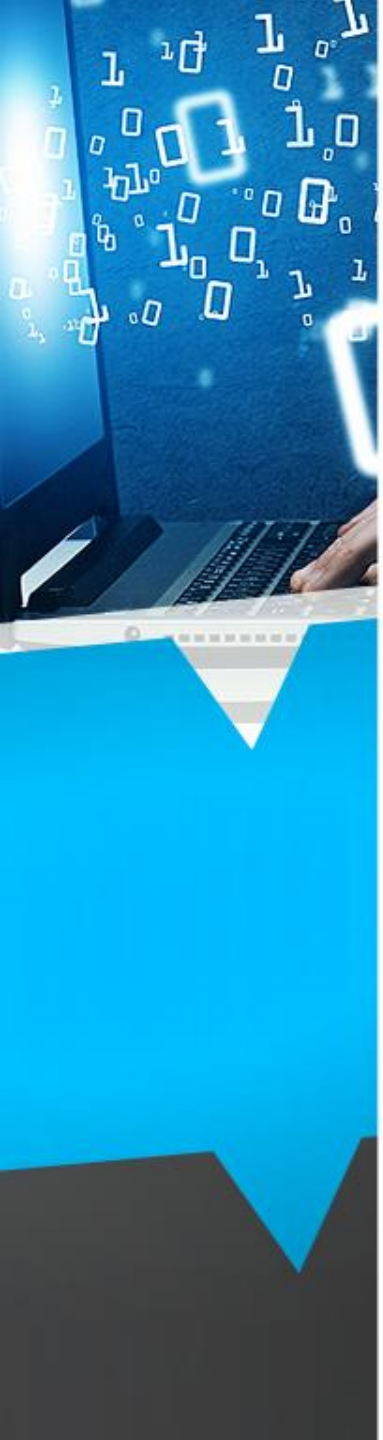
- Arbre Syntaxique



# ARBRES : Exemples

- Arbres généalogiques

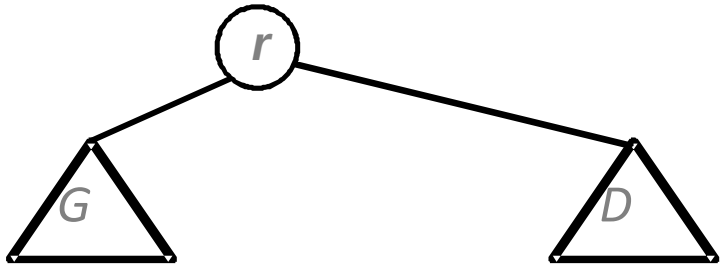


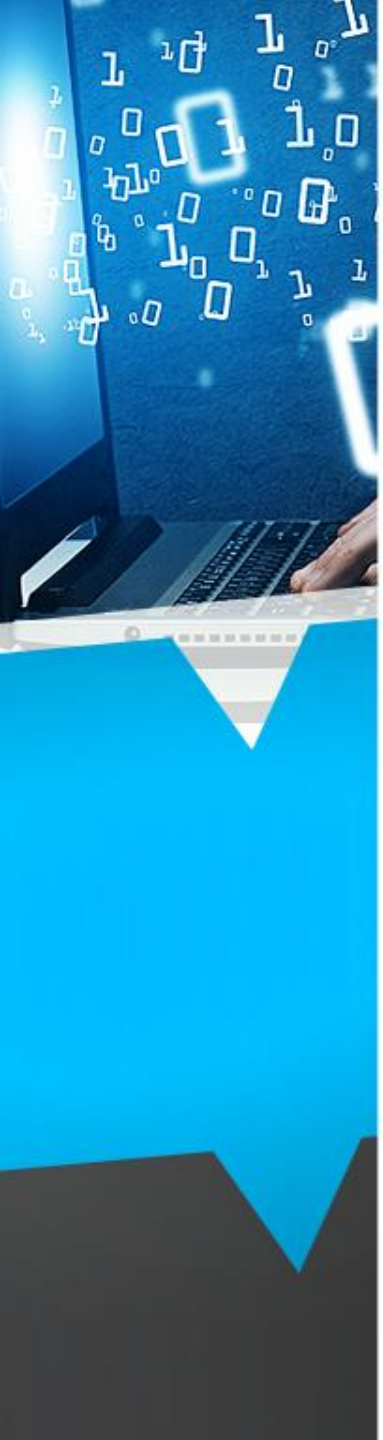


# ARBRES BINAIRES

- Lorsqu'un arbre admet, pour chaque nœud, au plus n fils, l'arbre est dit n-aire

- si n est égale 2, l'arbre est dit binaire



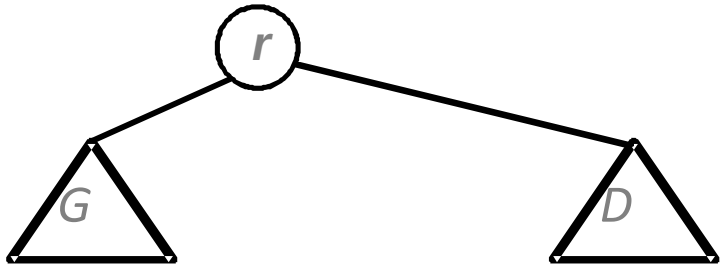


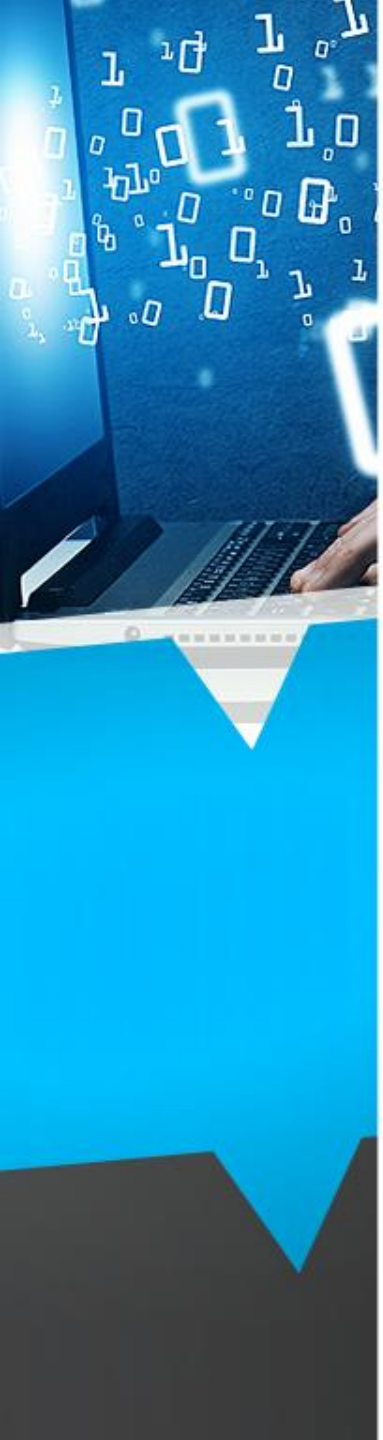
# ARBRES BINAIRES

***Définition***

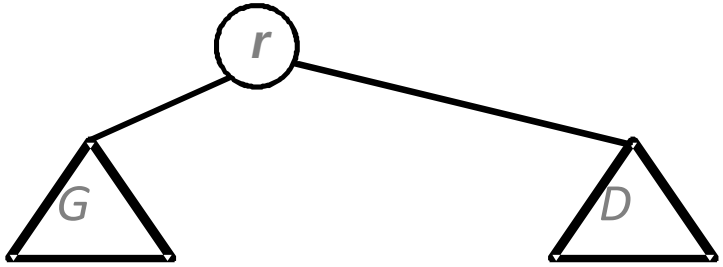
Un arbre binaire est soit :

- l'arbre vide,
- soit un triplet (g, r, d), appelé nœud, dans lequel
  - r est l'élément, ou encore étiquette, de la racine de l'arbre,
  - g est le sous-arbre gauche de l'arbre ;
  - et d est le sous-arbre droit de l'arbre.



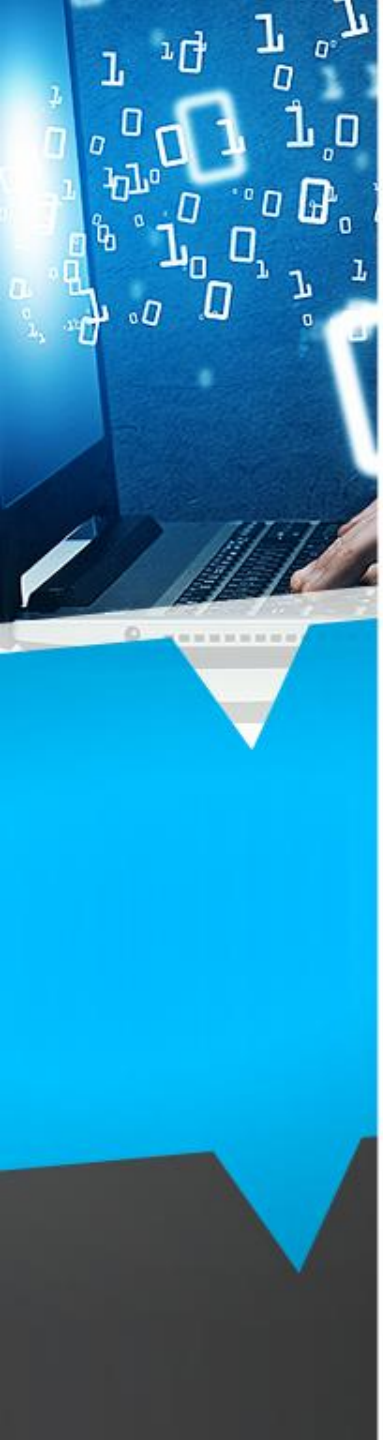


# ARBRES BINAIRES




Les sous-arbres gauche et droit d'un arbre binaire non vide sont eux-mêmes des arbres binaires.

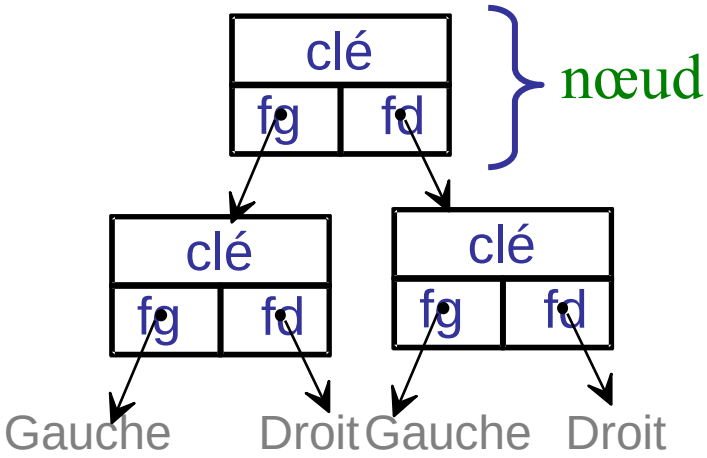
La structure d'arbre binaire est donc une structure récursive

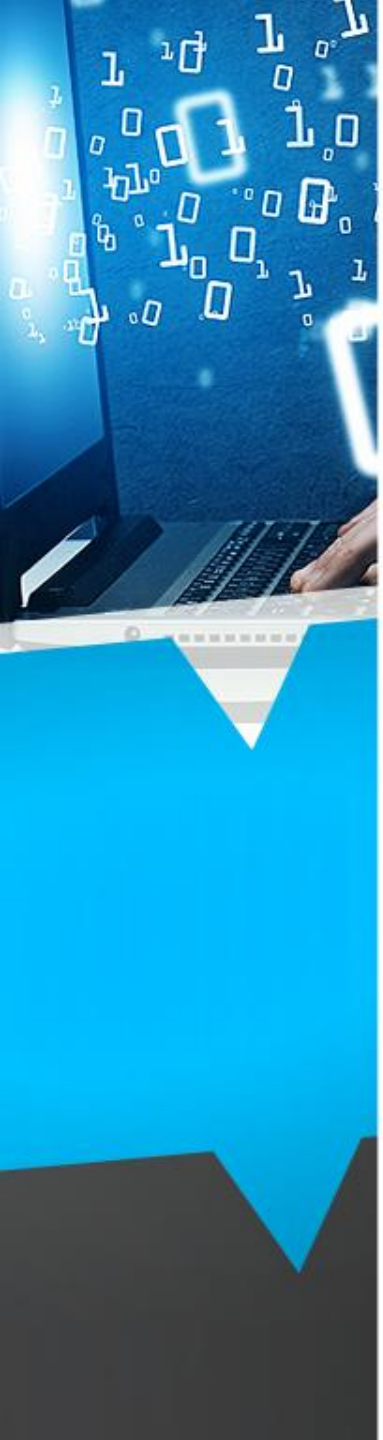


# ARBRES BINAIRES

***Implémentation***

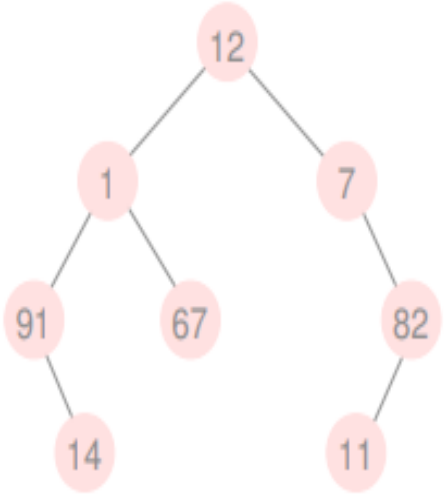
```
type
nœud = Enregistrement
            Info : typeElement;
          fg, fd : Arbre;
Fin_Enreg;

Arbre = ^nœud;
```



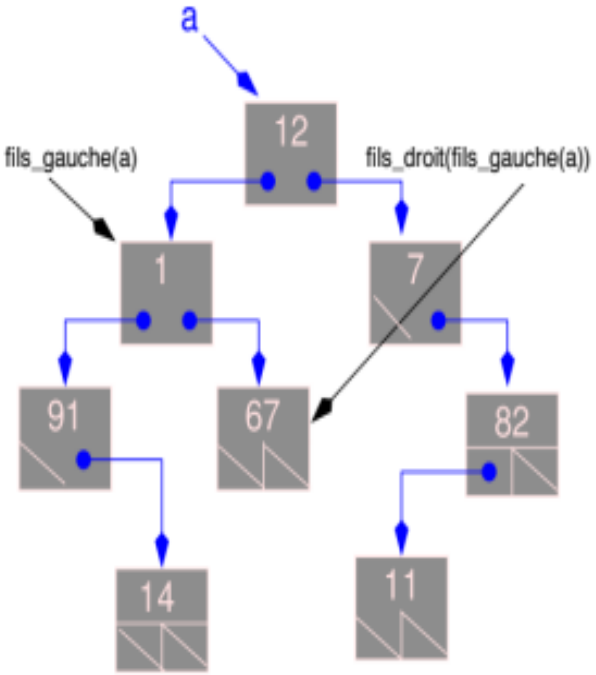


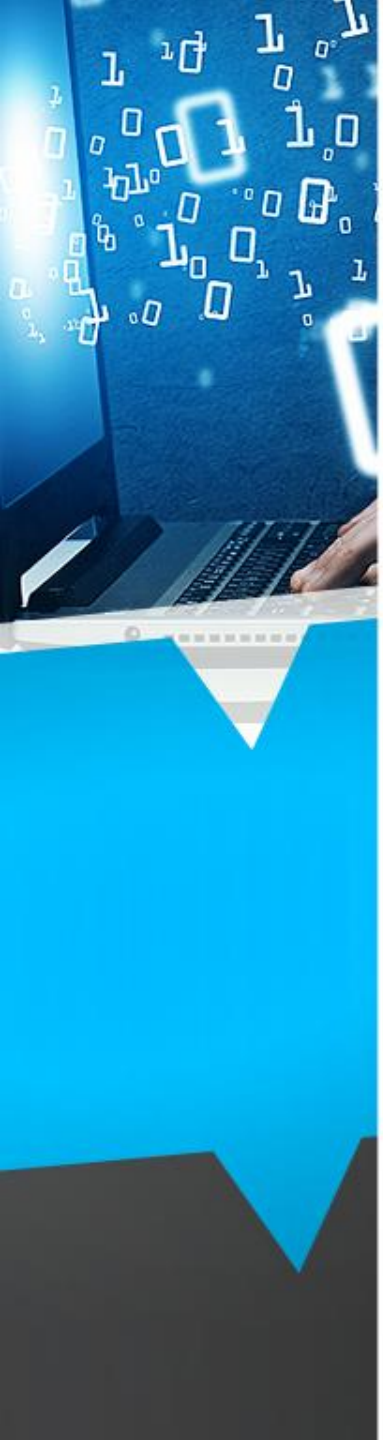
# ARBRES BINAIRES

## Arbre Binaire




## Implémentation





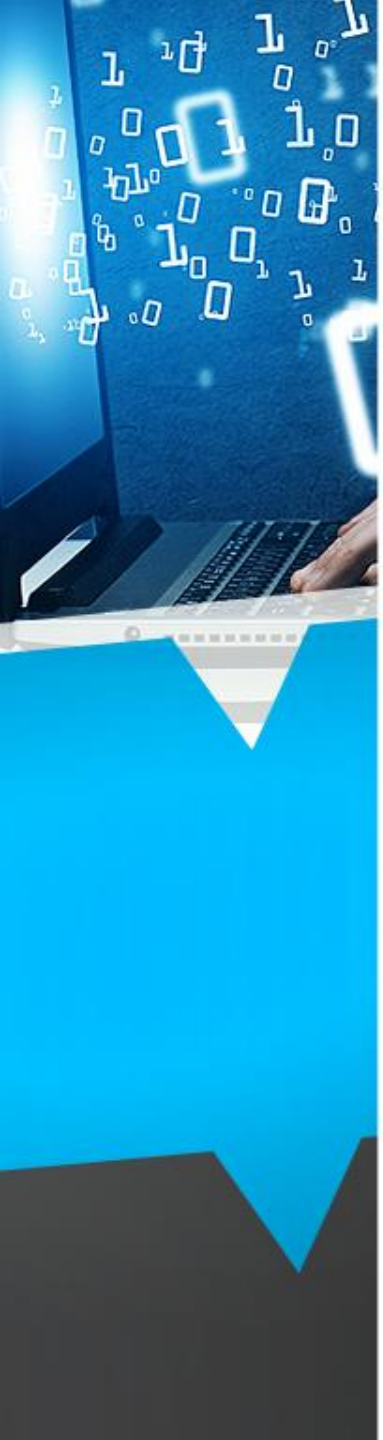
# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

**Parcours:**

Le parcours le plus simple à programmer est le parcours dit en profondeur .

pour parcourir un arbre non vide a, on parcourt récursivement son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit, la racine de l'arbre pouvant

- être traitée au début → ordre préfixe
- entre les deux parcours → ordre infixe
- Ou à la fin → ordre postfixe

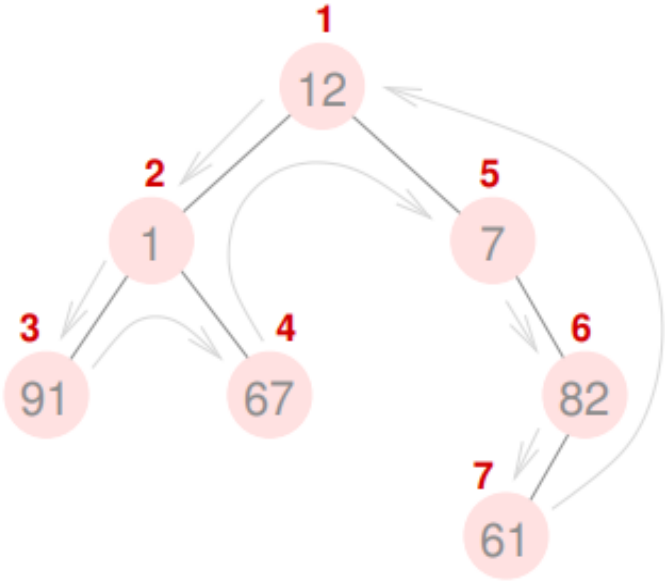


# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

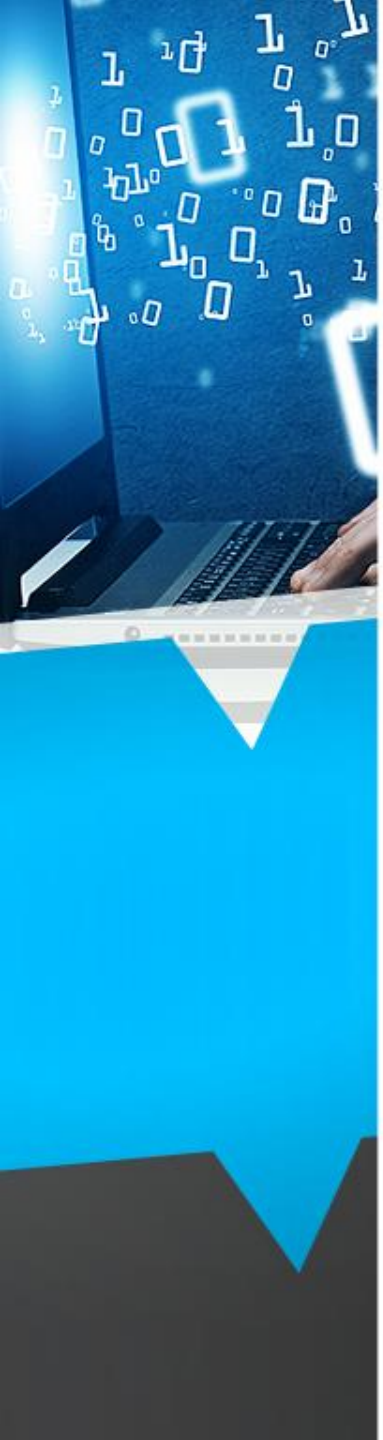
**Parcours préfixe:**

1. racine
2. sous-arbre gauche
3. sous-arbre droit

```
procedure prefixe(a: Arbre );
{
    Si (a<>nil) Alors
        traiter(a) ;
        préfixé(a^.fg);
        préfixé(a^.fd);
    Fin_Si
}
```




12 1 91 67 7 82 61

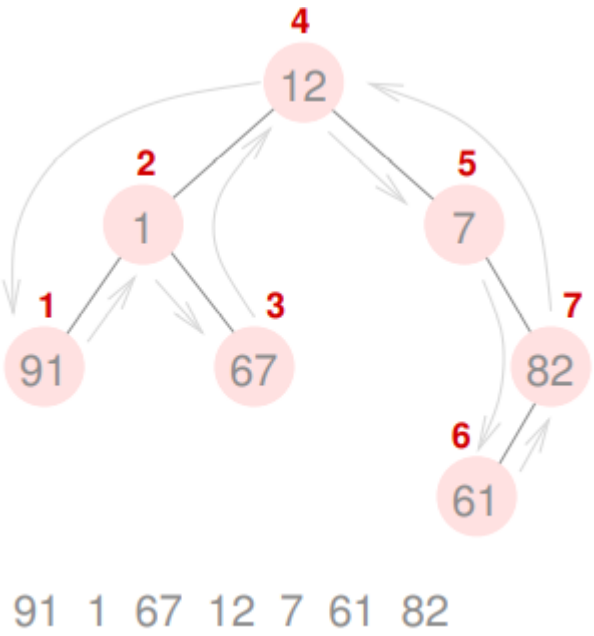


# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

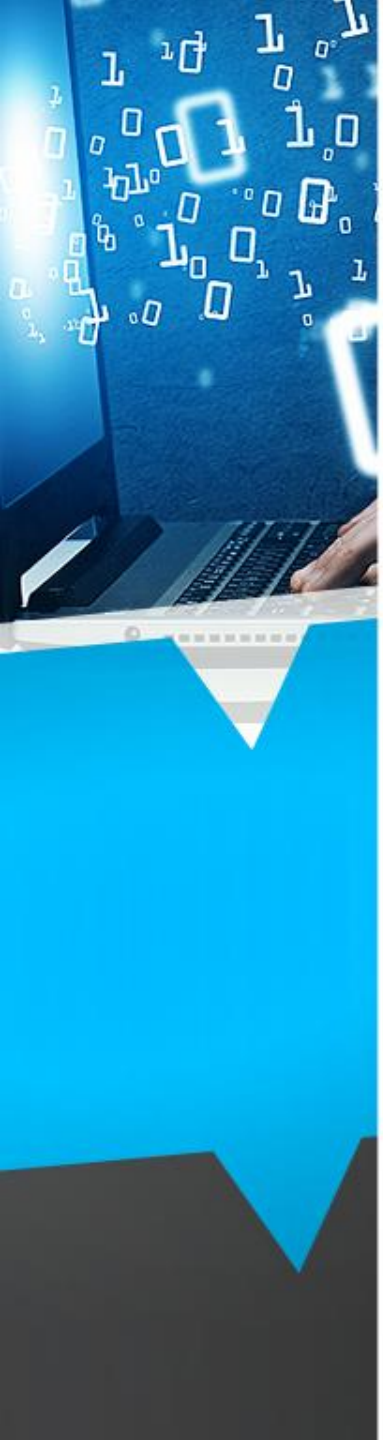
**Parcours infixe:**

1. sous-arbre gauche
2. racine
3. sous-arbre droit

```
procedure infixe(a: Arbre );
{
    Si (a<>nil) Alors
        Infixé(a^.fg);
        traiter(a) ;
        Infixé(a^.fd);
    Fin_Si
}
```




91 1 67 12 7 61 82

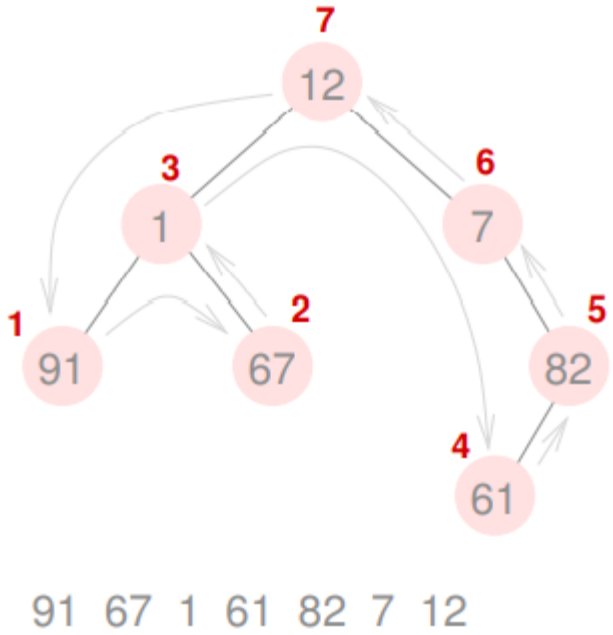


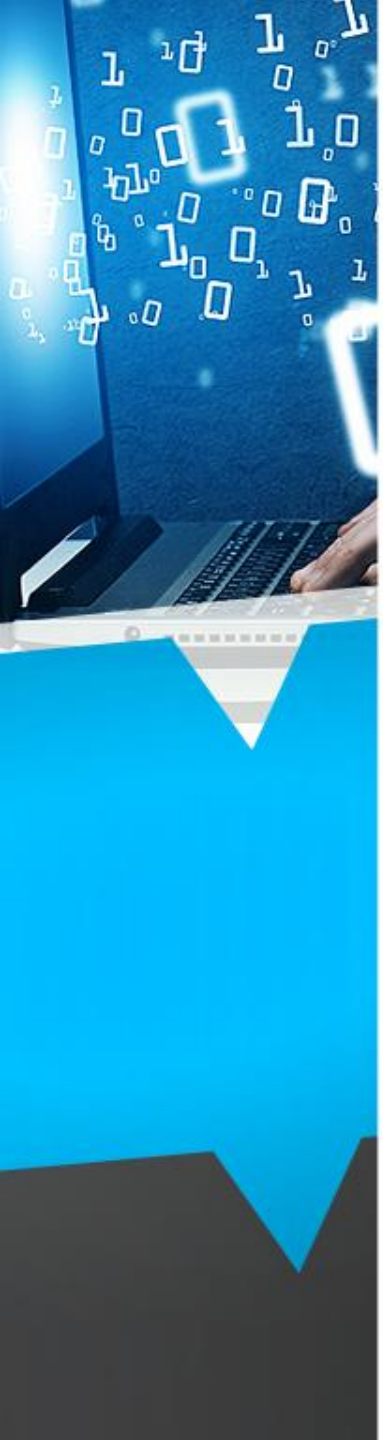
# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

**Parcours postfixe:**

1. sous-arbre gauche
2. sous-arbre droit
3. racine

```
procedure postfixe(a: Arbre );
{
    Si (a<>nil) Alors
        postfixé(a^.fg);
        postfixé(a^.fd);
        traiter(a) ;
    Fin_Si
}
```

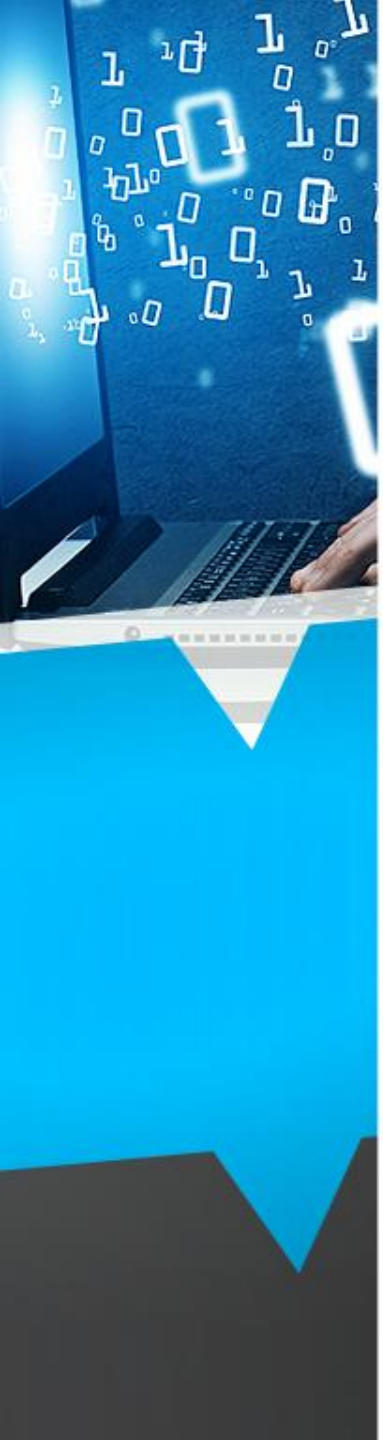




# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

- **Rechercher un élément**

```
Fonction Recherche(a:Arbre, val: typeElement) : boolean
{
        Si (a=null)  alors
          Retourner faux
        Sinon Si (a^.info =val) Alors
        Retourner true
            Sinon
      Retourner Recherche(a^.fg, val) ou Recherche(a^. fd, val);
end;
```



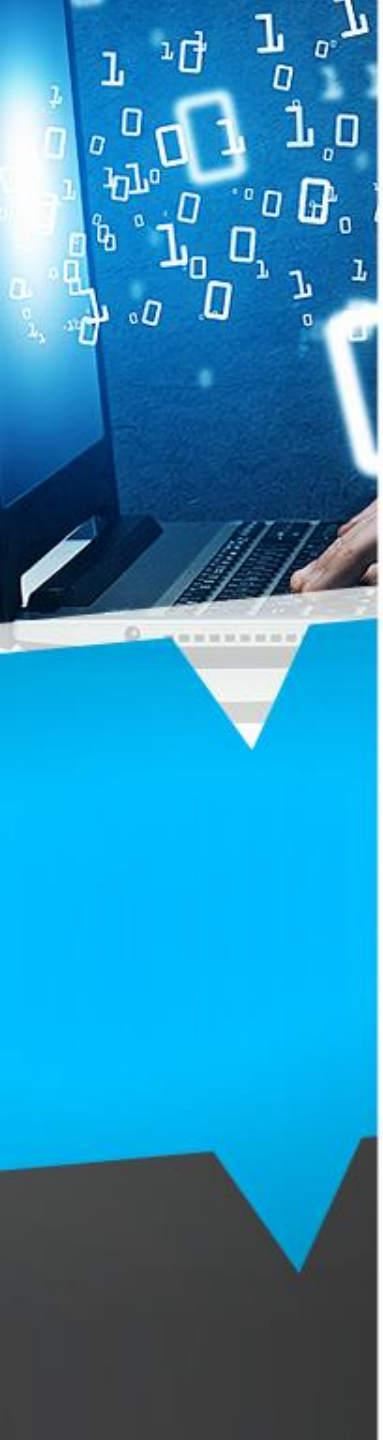
# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

**Calculer la taille d'un arbre:**

**Taille (A) =**

- **0 si A arbre vide**
- **1 + Taille(G)+ Taille(D) avec A=( *r*, G, D)**

```
fonction taille(a: Arbre):Entier;
{
        Si(a=null)alors
            Retourner 0;
        Sinon
            Retourner 1+ taille(a^.fg) + taille(a^.fd);
}
```



# ARBRES BINAIRES: Opérations courantes

**Calculer le nombre de feuilles d'un arbre:**

NbreFeuilles (A) =

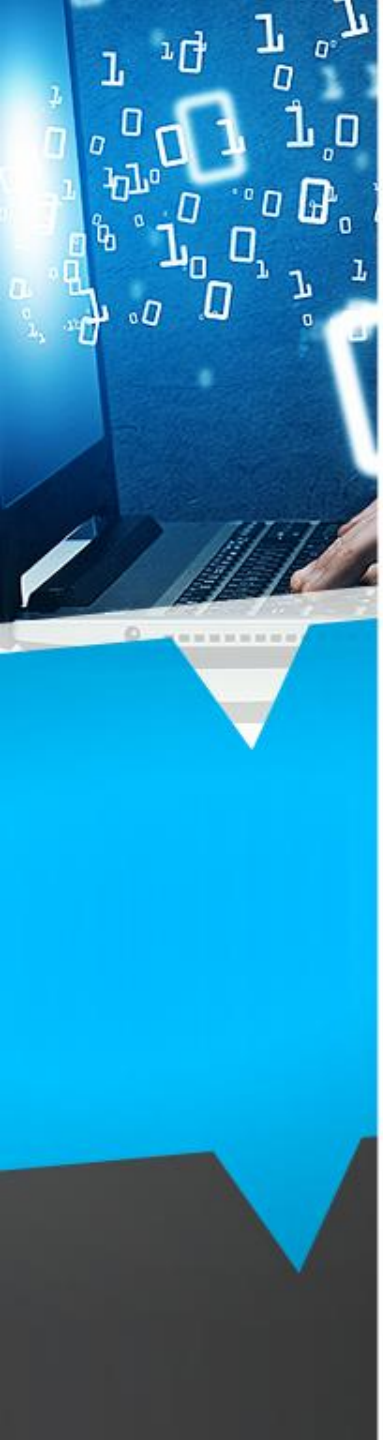
| | |
|---|---|
| 0 | si arbre vide |
| 1 | si A est une feuille |
| nbFeuille(G)+ nbFeuille(D) | si A=(r,G, D) |

```
fonction NbreFeuilles(a: Arbre): Entier
{
        Si (a=NULL) Alors
            Retourner 0 ;
        Sinon Si (a^.fg= null and a^.fd=null ) alors
                Retourner 1;
         Sinon
           Retourner NbreFeuilles(a^.fg) + NbreFeuilles(a^.fd);
}
```

# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Définition

- Un arbre binaire de recherche (ou ABR) est une structure de donnée qui permet de représenter un ensemble de valeurs si l'on dispose d'une relation d'ordre sur ces valeurs.

- Les opérations caractéristiques sur les arbres binaires de recherche sont :
    - l'insertion,
    - la suppression,
    - et la recherche d'une valeur.



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Définition

- **Définition**

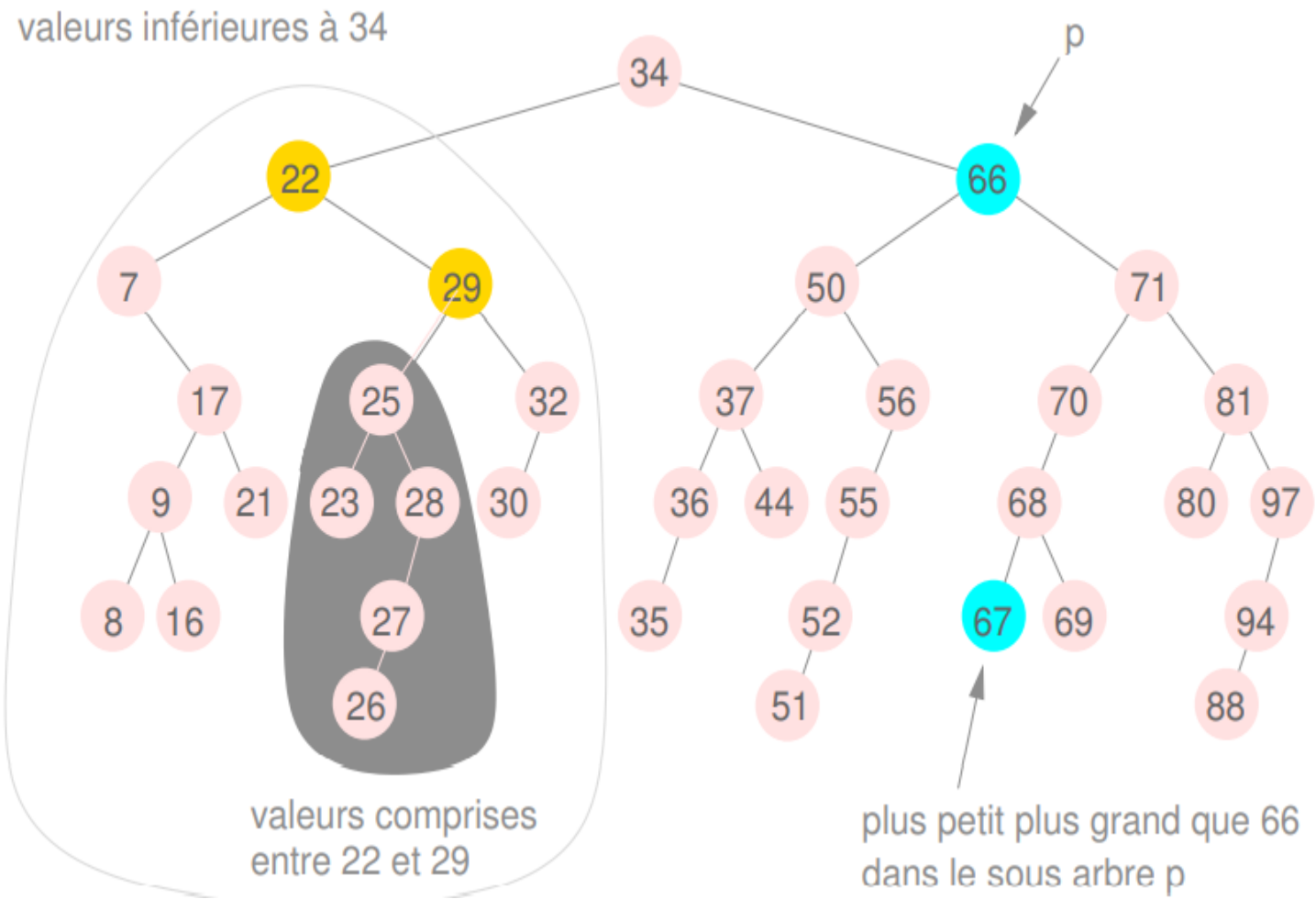
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre, et soit A un arbre binaire portant des valeurs de E.

L'arbre A est un arbre binaire de recherche si pour tout noeud p de A, la valeur de p est strictement plus grande que les valeurs figurant dans son sous-arbre gauche et strictement plus petite que les valeurs figurant dans son sous-arbre droit.

Cette définition suppose donc qu'une valeur n'apparaît au plus qu'une seule fois dans un arbre de recherche.

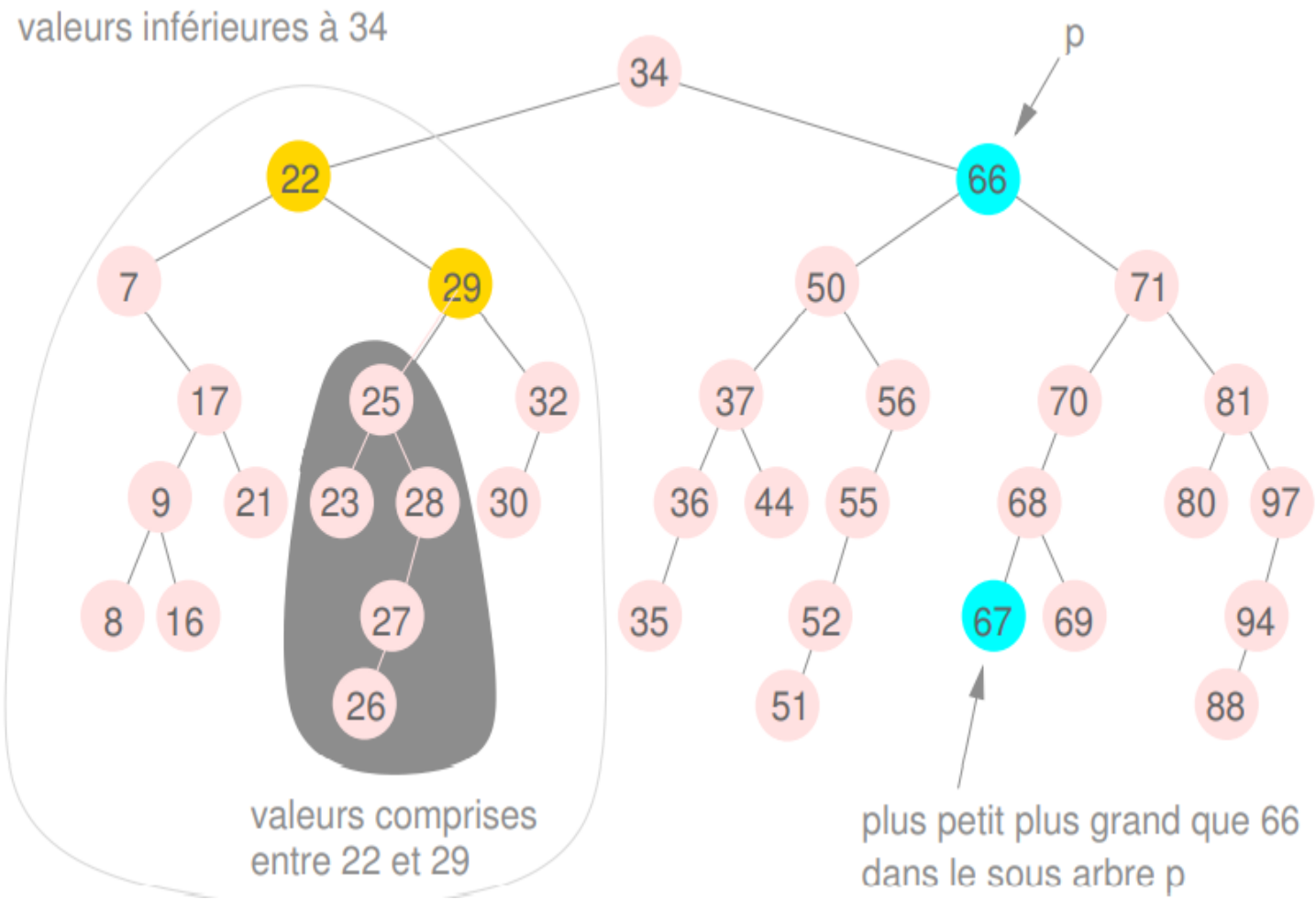
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Définition

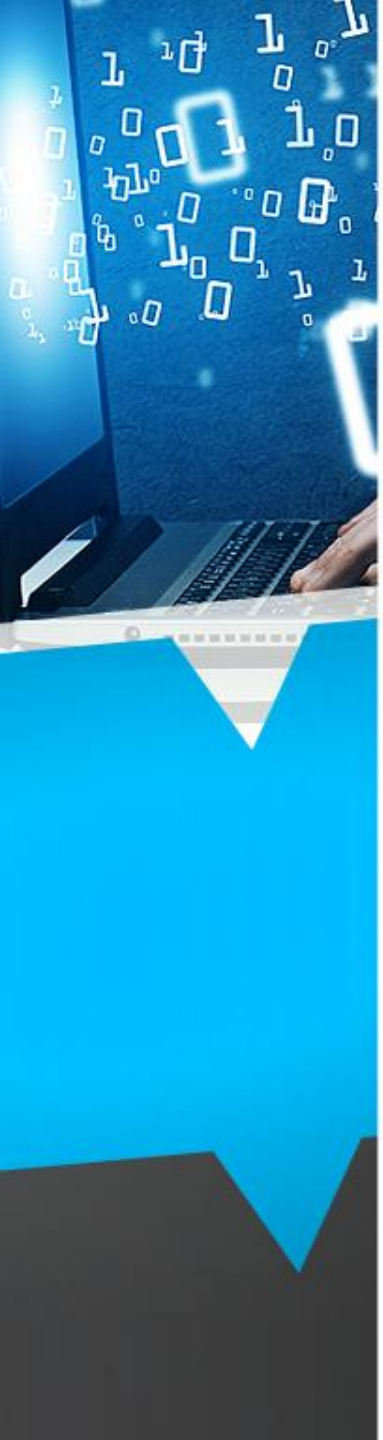
- **Exemple**



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Définition

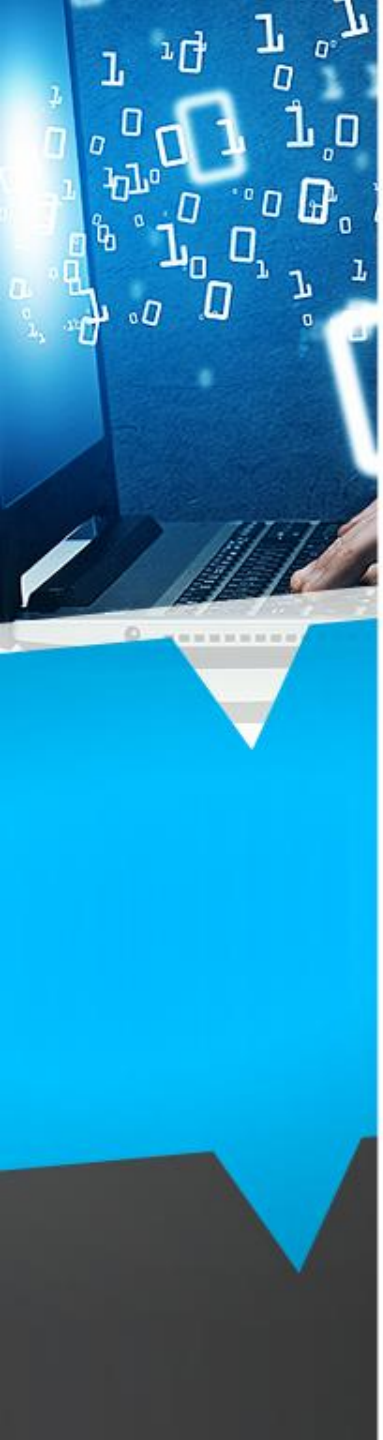
- **Exemple**





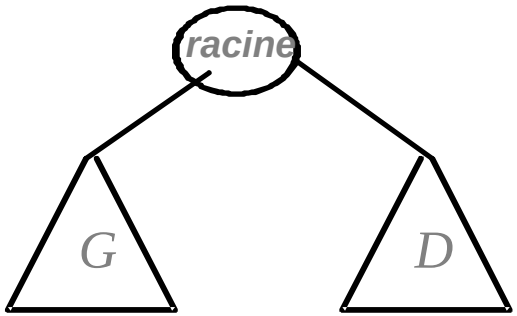
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:
## Opération courante

- **Recherche**
- La recherche dans un ABR d'un nœud ayant une clé particulière est un procédé récursif.
- On commence par examiner la racine.
  - Si sa clé est la clé recherchée, l'algorithme se termine et renvoie la racine.
  - Si elle est strictement inférieure, alors elle est dans le sous-arbre gauche, sur lequel on effectue alors récursivement la recherche.
  - De même si la clé recherchée est strictement supérieure à la clé de la racine, la recherche continue dans le sous-arbre droit.
- Si on atteint une feuille dont la clé n'est pas celle recherchée, on sait alors que la clé recherchée ne figure donc pas dans l'arbre de recherche..



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Opération courante

- **Recherche**




*Recherche (A, clé)) =*

| | |
|---|---|
| *faux* | *si A vide* |
| *vrai* | *si clé = racine* |
| *Recherche (G(A), clé)* | *si clé< racine* |
| *Recherche (D(A), clé)* | *si clé > racine* |

# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Opération courante

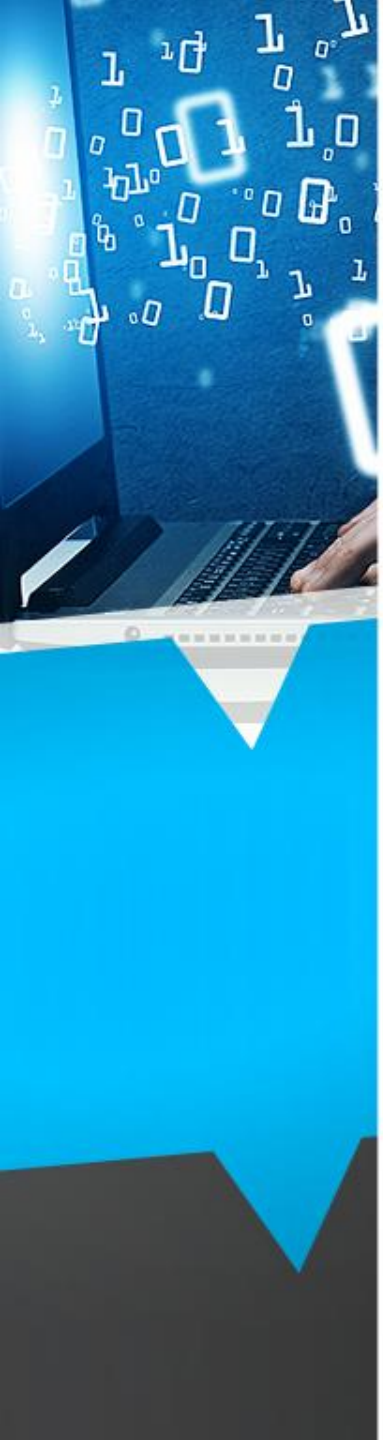
- **Recherche :** ***Version récursive***

```
fonction RechercheRecursif(a:Arbre, cle:typeElement):
    Boolean
{
    Si (a=Null) Alors
    Retouner faux
    Sinon Si (a^.info = cle)  Alors
                Retourner True
            Sinon  Si(cle < a^.info) Alors
                        RechercheRecursif (a^.fg, val)
                    Sinon
                        RechercheRecursif (a^.fd, val);
                     Fin_Si
                Fin_Si
   Fin_Si
}
```

# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Opération courante

- **Recherche :** ***Version Itérative***

```
fonction RechercheItérative(a:Arbre, cle:typeElement): Boolean
Var  trouve:boolean;
{
Trouve<-false;
        Tant que (a<> Null and not(trouve)) faire
                Si (a^.info = cle)  Alors
                    Triouve <- true;
                 Sinon Si (cle <a^.info ) Alors
                              a<-  a^.fg;
                          Sinon
                               a<-  a^.fd;
                          Fin_Si
                   Fin_Si
           Fin_ Tant_que
    Retourner trouve;
   Fin_Si
}
```



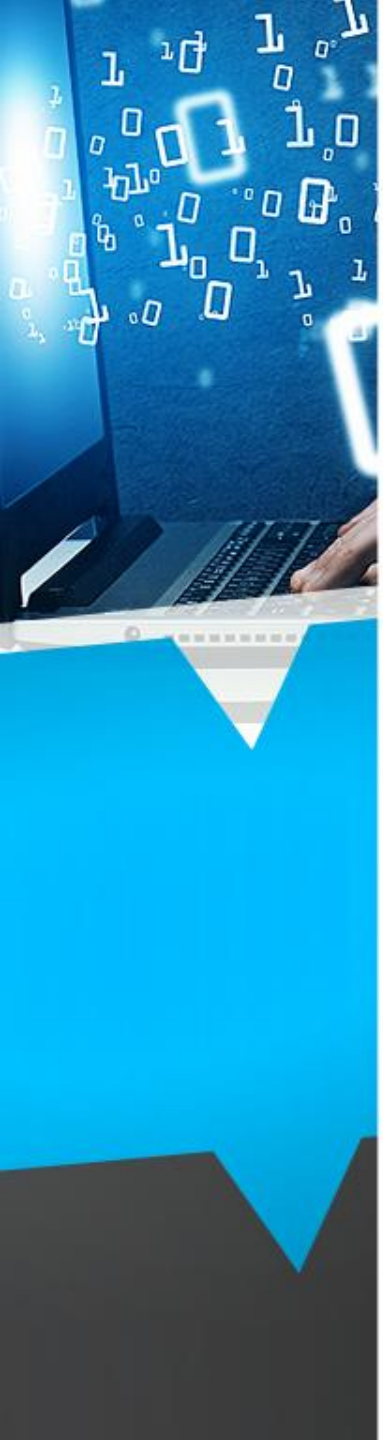
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:
## Opération courante

- **Insertion**

- L'insertion d'un nœud dans un ABR commence par une recherche :

  - on cherche la clé du nœud à insérer ;
  - lorsqu'on arrive à une feuille, on ajoute le nœud comme fils de la feuille en comparant sa clé à celle de la feuille :

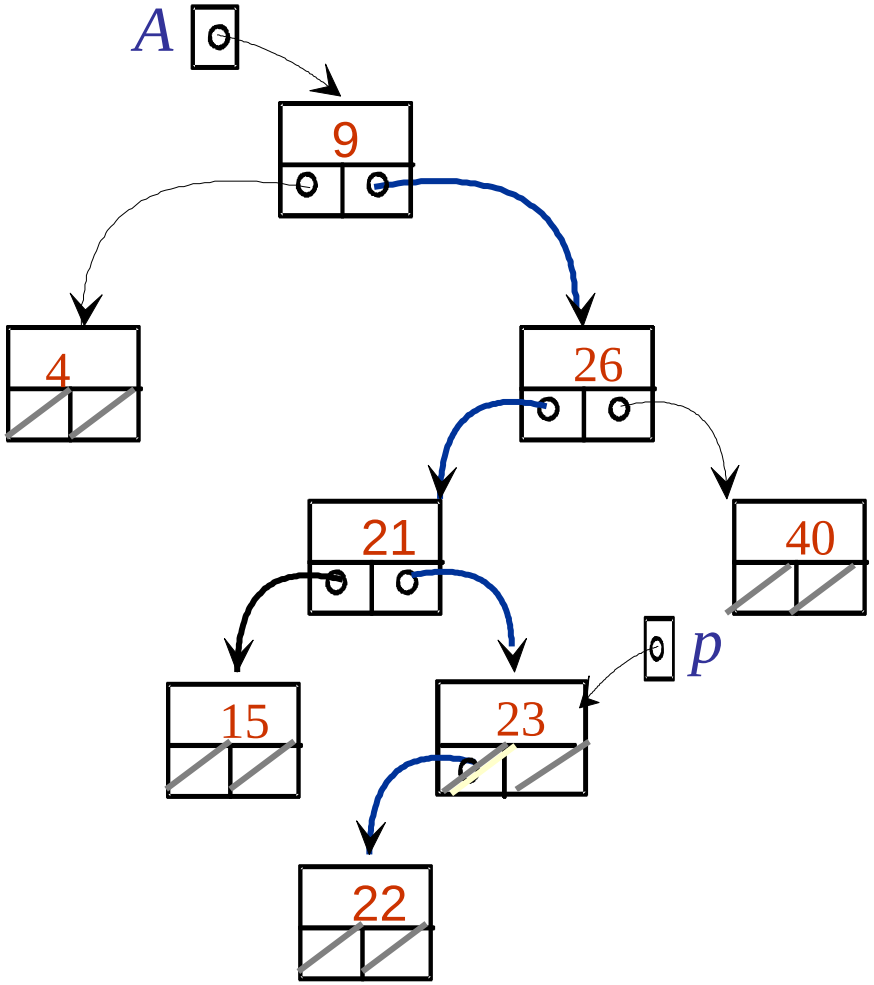
    - si elle est inférieure, le nouveau nœud sera à gauche;
    - sinon il sera à droite.

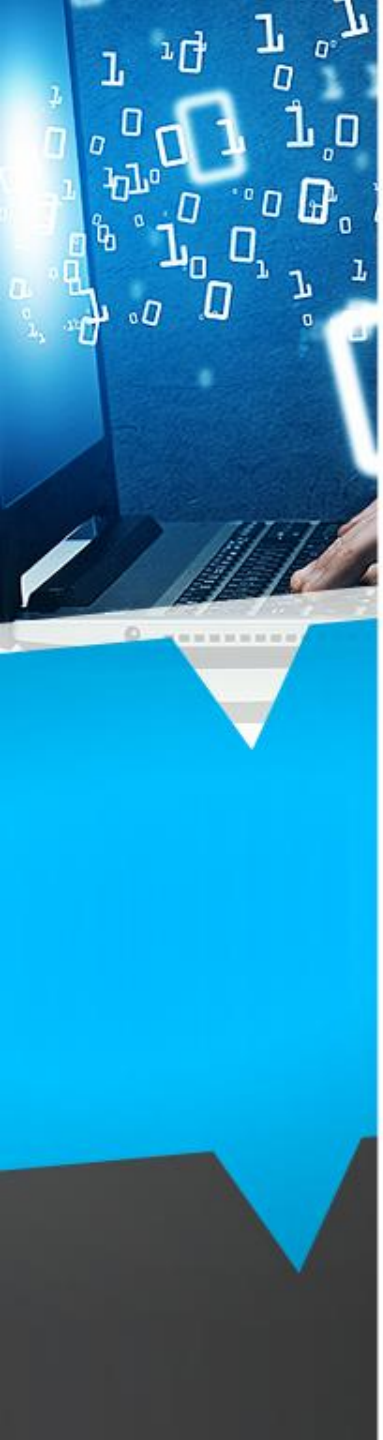


# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Opération courante

- **Insertion**

$cle = 22$





# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

- **Insertion:** ***Version Itérative***

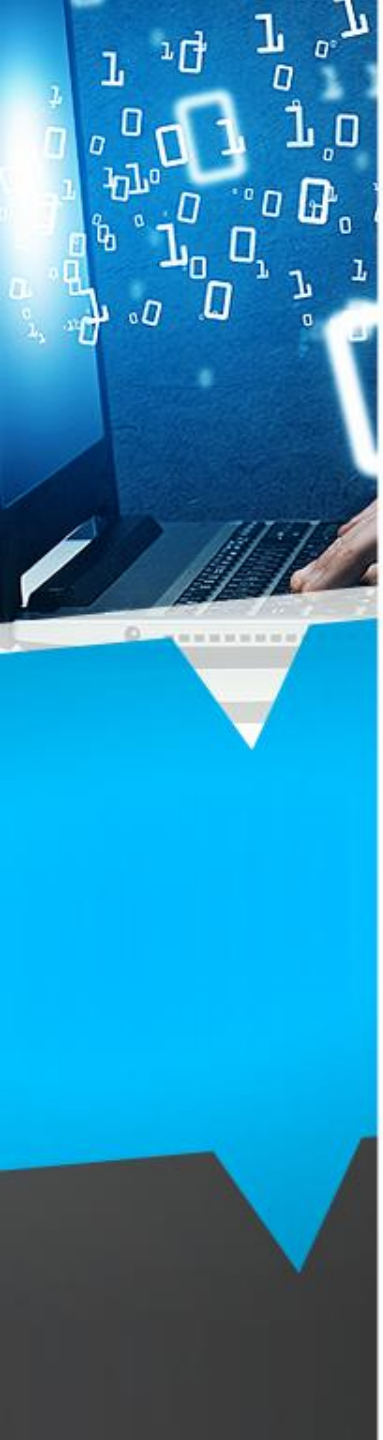
```
procedure InsertionIterative(var a:ARbre, cle:Entier);
var p , pere:Arbre;
{
      p<- a;
    pere <- Null;
     Tant que (p<> Null) faire
              pere <- p;
              Si (cle <= p^.info) Alors
                    p <- p^.fg;
              Sinon
                 p <- p^.fd;
            Fin_Si
     Fin_Tant_QUe
       Allouer(p);
       p^.info <-cle;
       p^.fg <- Null;
       p^.fd <- Null;
      Si (pere =Null) Alors
          a <- p
      Sinon Si  (cle <=pere^.info)Alors
              pere^.fg <- p;
               Sinon
               pere^.fd <- p;
}
```

# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

- **Insertion:** ***Version Récursive***

```
procedure InsertionRecursive (var a:Arbre, cle:TypeElement)
{
    Si (a =Null)  Alors
                    allouer(a);
                    a^.info <- cle;
                    a^.fg <- Null ;
                    a^.fd <- Null;
     Sinon si (cle <= a^.info) Alors
                      InsertionRecursive (a^.fg, cle);
            Sinon
                  InsertionRecursive (a^.fd, cle);
            Fin_Si
      Fin_Si
}
```



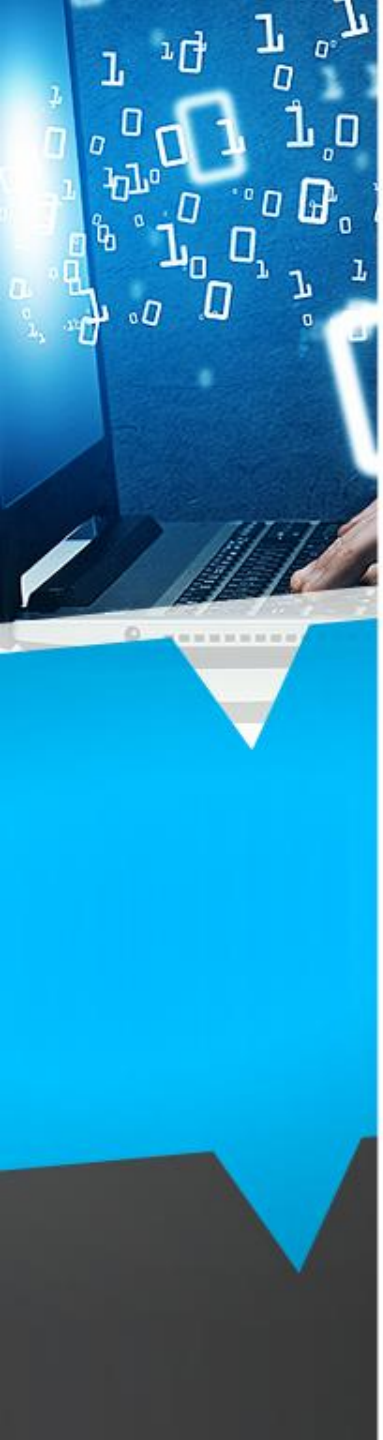
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:
## Opération courante

- **Suppression**

- On commence par rechercher la clé du noeud à supprimer dans l'arbre. Plusieurs cas sont à considérer, une fois que le nœud à supprimer a été trouvé à partir de sa clé :

  **Cas1. Suppression d'une feuille** : Il suffit de l'enlever de l'arbre puisqu'elle n'a pas de fils.

  **Cas2. Suppression d'un nœud avec un enfant :** Il faut l'enlever de l'arbre en le remplaçant par son fils.

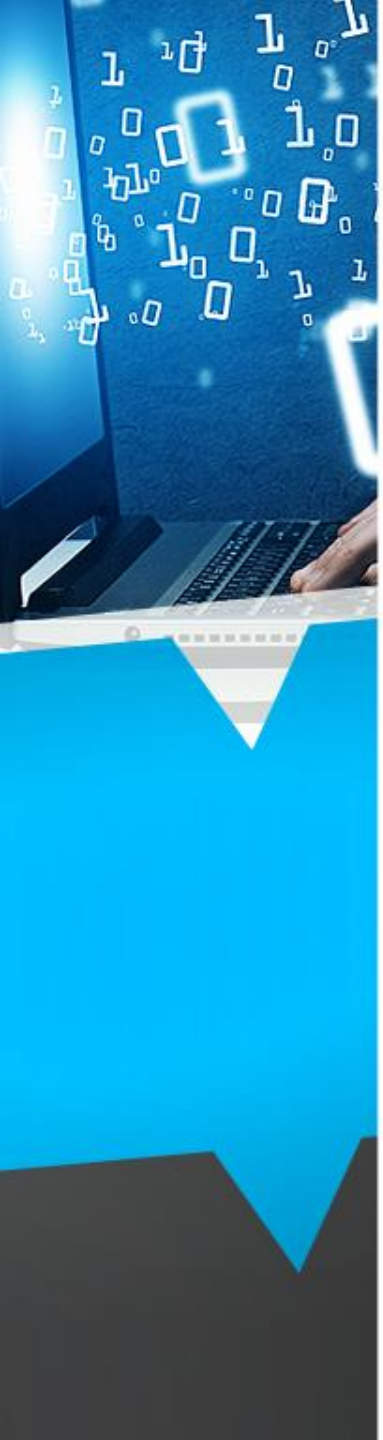


# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:
## Opération courante

- **Suppression**

- On commence par rechercher la clé du noeud à supprimer dans l'arbre. Plusieurs cas sont à considérer, une fois que le nœud à supprimer a été trouvé à partir de sa clé :

  **Cas3.** Suppression d'un nœud avec deux enfants : Supposons que le nœud à supprimer soit appelé *N.* On échange le nœud N avec son successeur le plus proche (le nœud le plus à gauche du sous-arbre droit) ou son plus proche prédécesseur (le nœud le plus à droite du sous-arbre gauche). Cela permet de garder à la fin de l'opération une structure d'arbre binaire de recherche. Puis on applique à nouveau la procédure de suppression à *N*, qui est maintenant une feuille ou un nœud avec un seul fils.

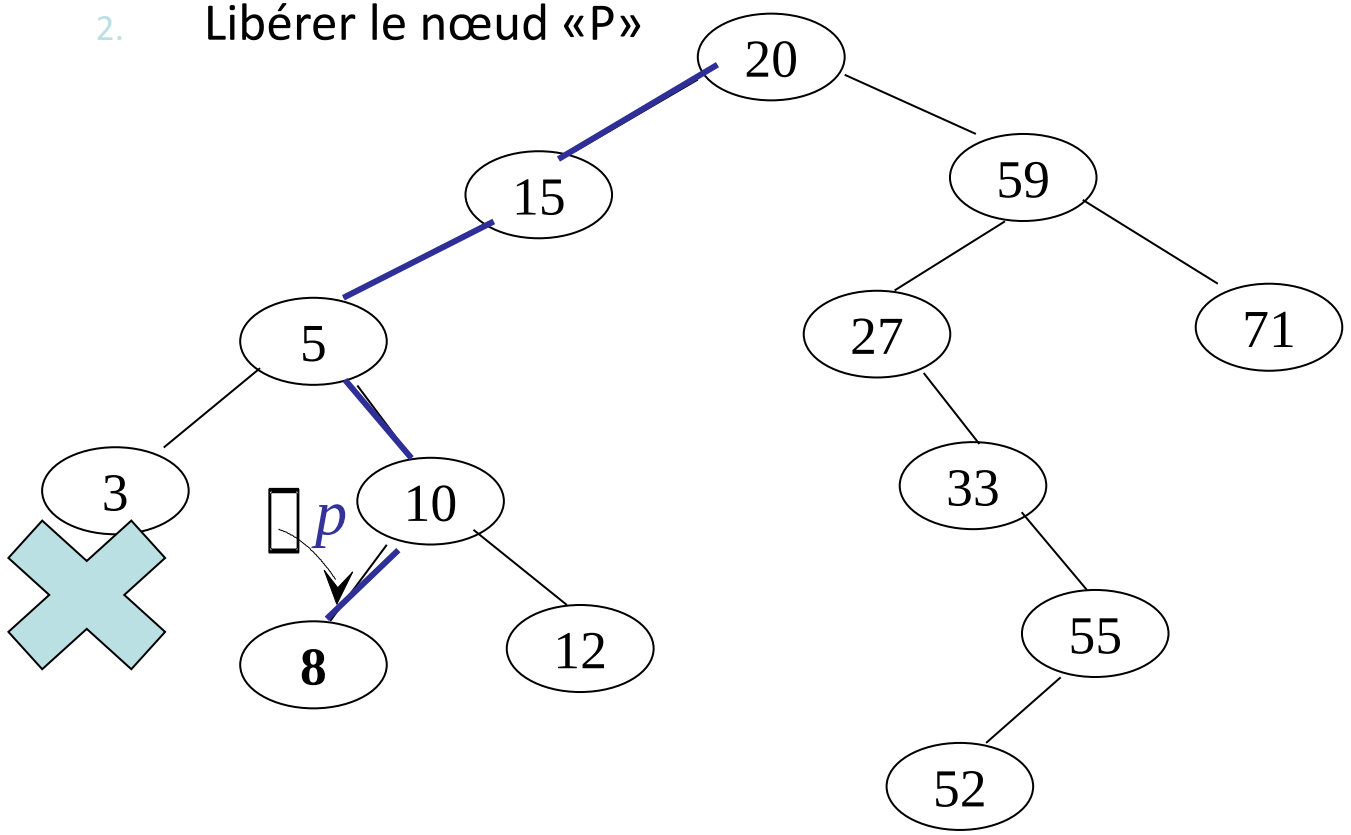


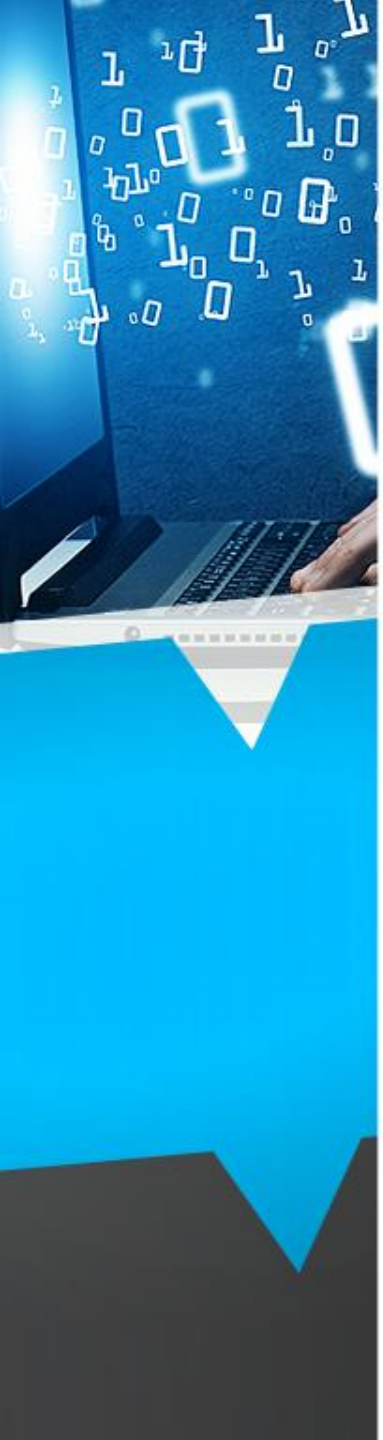
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE: Opération courante

- **Suppression: Cas1. Suppression d'une feuille** :

**Exemple:** supprimer le nœud P qui contient la valeur 8

1. Rechercher(**8**)
2. Libérer le nœud «P»





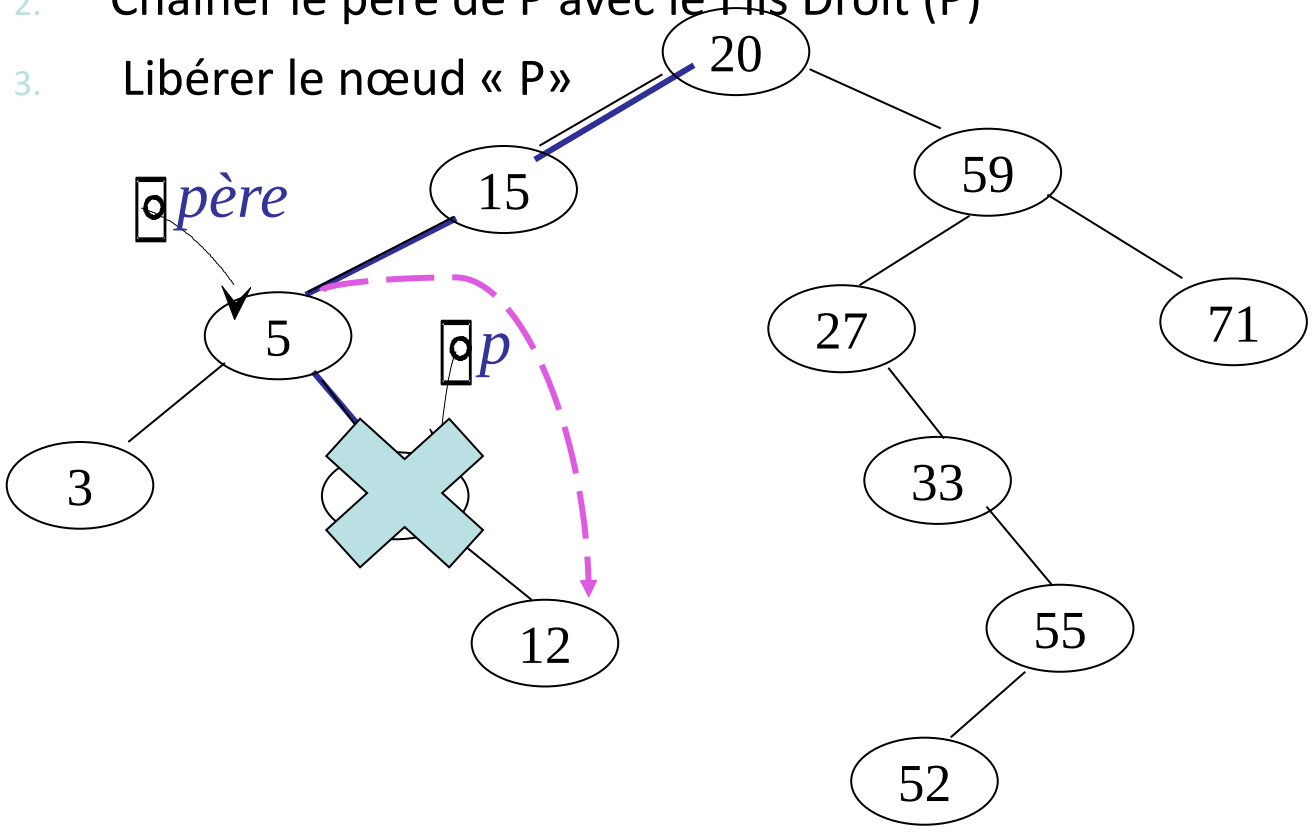
# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

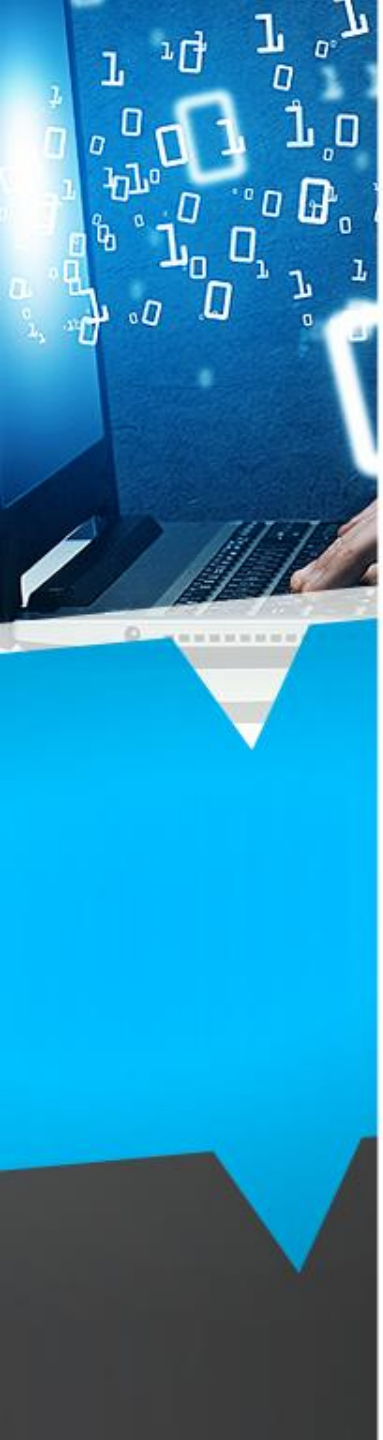
## Opération courante

- **Suppression: Cas2. Suppression d'un nœud avec un enfant**

**Exemple:** supprimer le nœud P qui contient la valeur 10

1. Rechercher(**10**)
2. Chainer le père de P avec le Fils Droit (P)
3. Libérer le nœud « P»

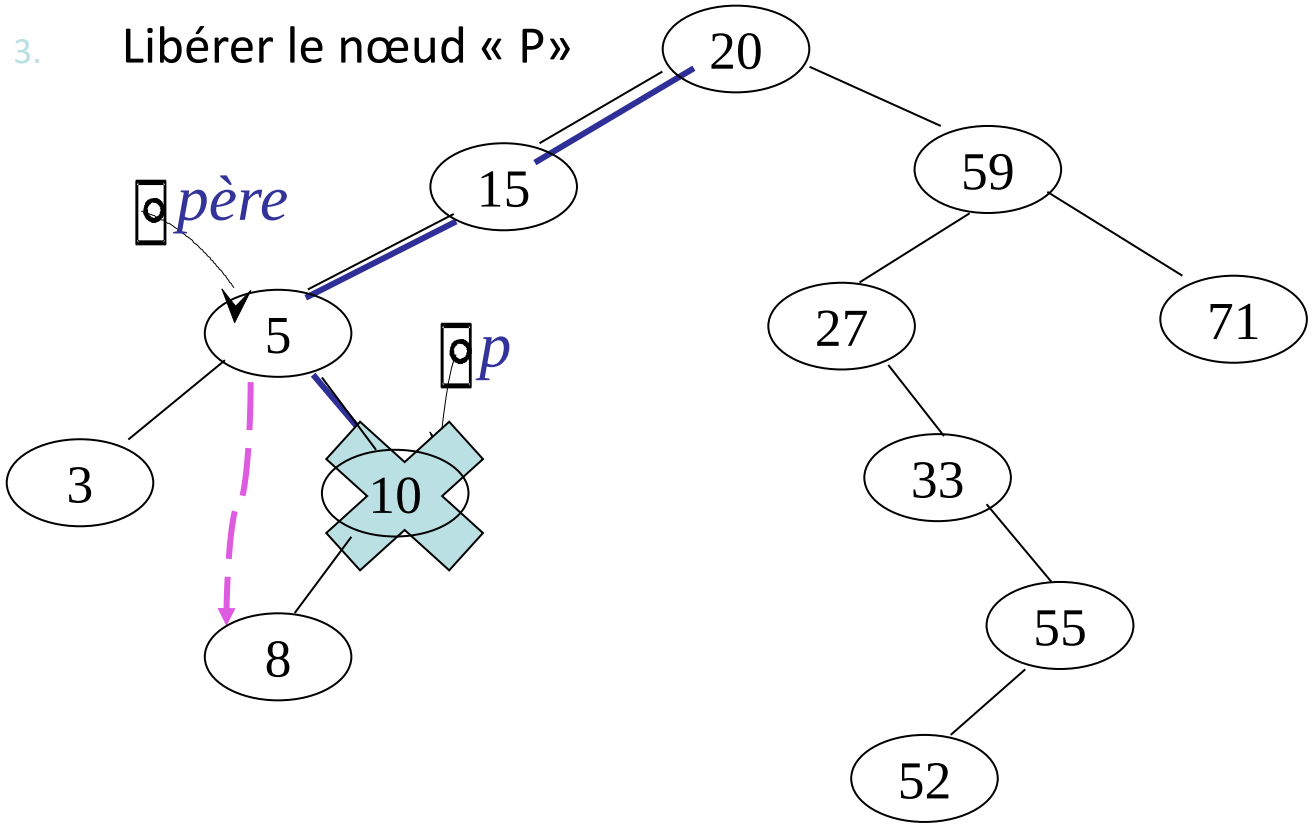




# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

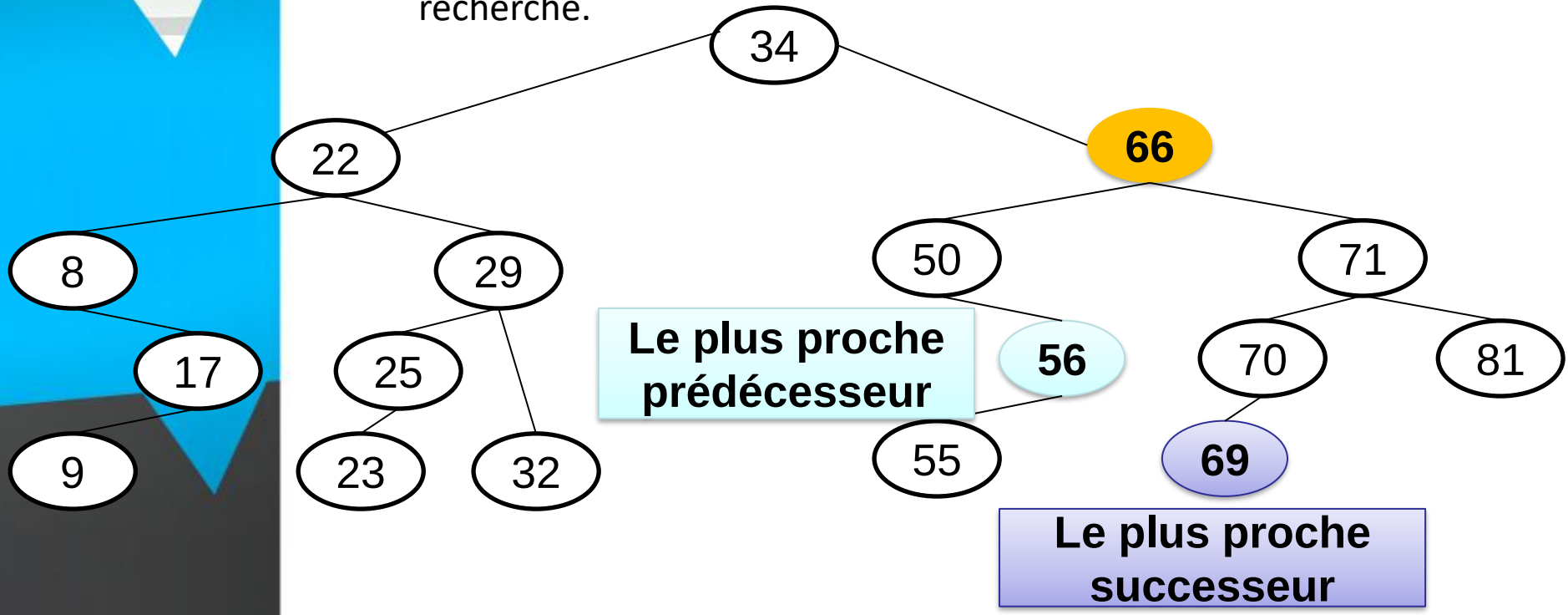
- **Suppression: Cas2. Suppression d'un nœud avec un enfant**
- **Exemple:** supprimer le nœud P qui contient la valeur 10
  1. Rechercher(**10**)
  2. Chainer le père de P avec le Fils Droit (P)
  3. Libérer le nœud « P»



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

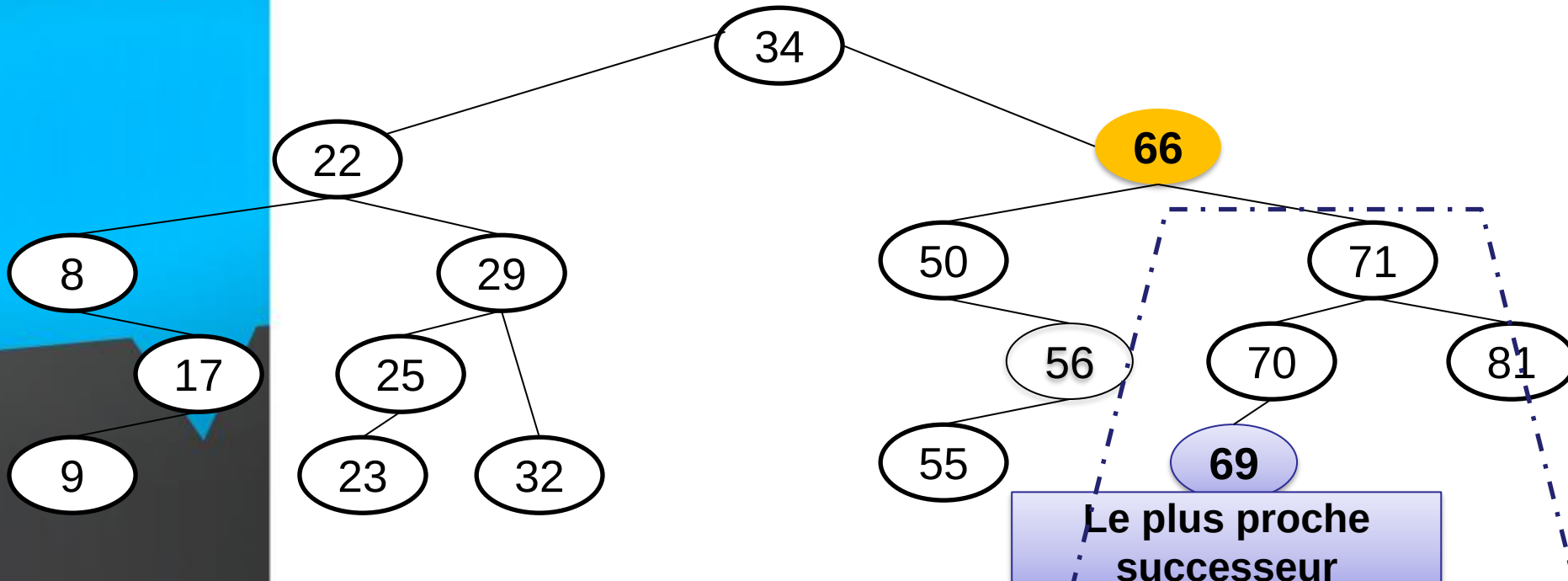
- **Suppression: Cas3. Suppression d'une feuille** :
  - **Etape 1:** On échange le nœud à supprimer avec **son successeur le plus proche** (le nœud le plus à gauche du sous-arbre droit) ou **son plus proche prédécesseur** (le nœud le plus à droite du sous-arbre gauche). Cela permet de garder une structure d'arbre binaire de recherche.



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

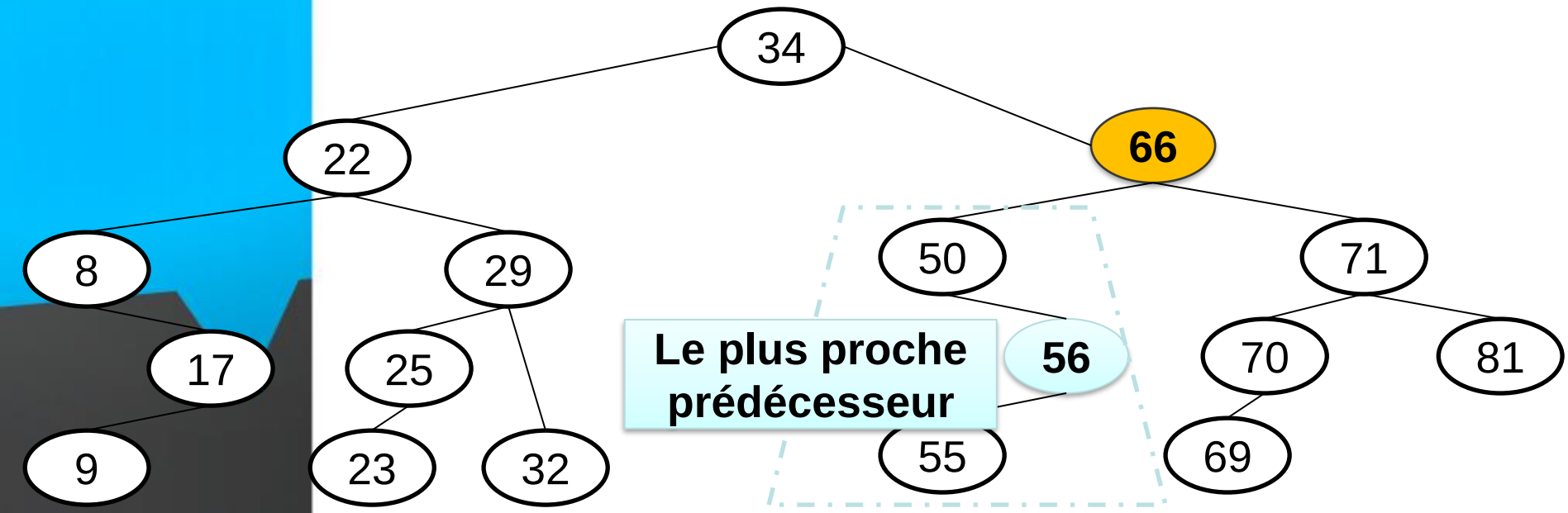
- **Suppression: Cas3. Suppression d'une feuille** :
  - **Etape 1 → Cas A:** On échange le nœud à supprimer avec **son successeur le plus proche** (le nœud le plus à gauche ou le plus petit du sous-arbre)
    - Racine: 71
    - La plus petite valeur : 69



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

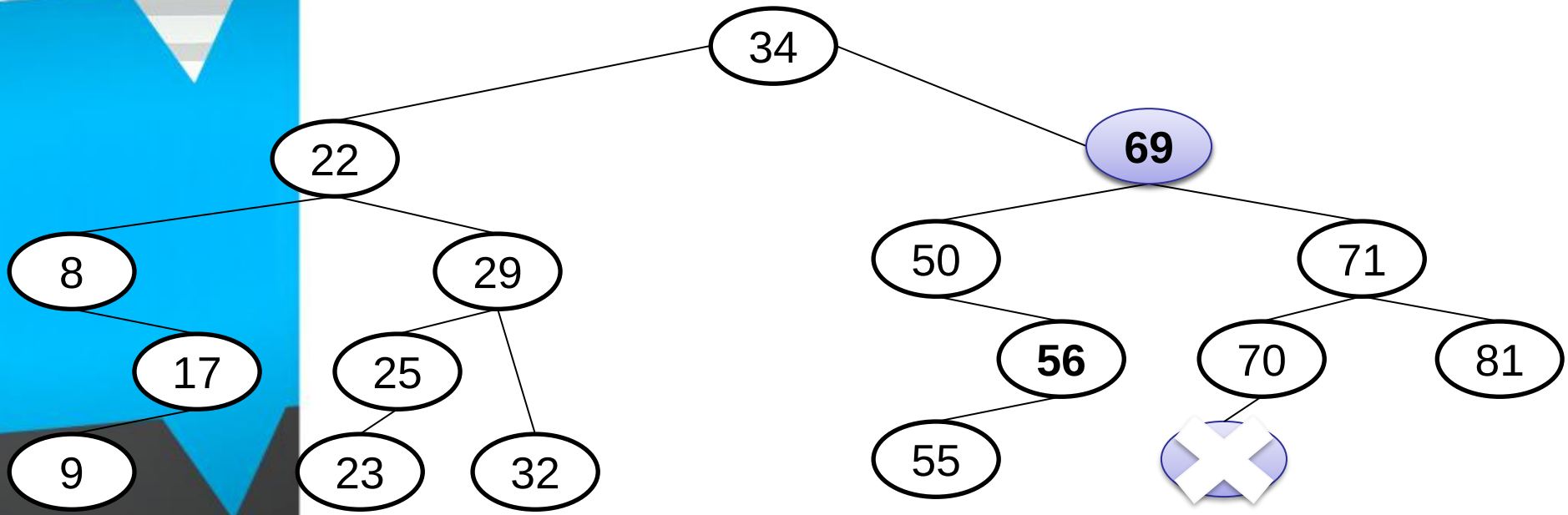
- **Suppression: Cas3. Suppression d'une feuille** :
  - **Etape 1 → Cas A:** On échange le nœud à supprimer avec **son successeur le plus proche** (le nœud le plus à gauche ou le plus petit du sous-arbre)
    - Racine: 50
    - La plus petite valeur : 56



# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

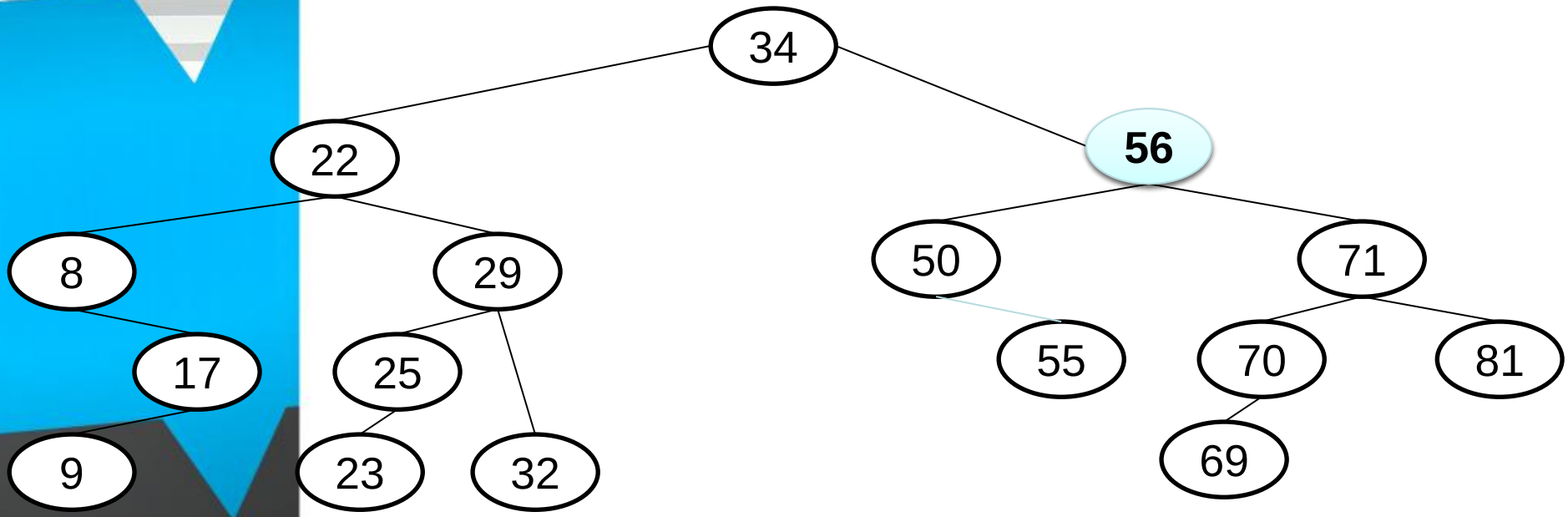
- **Suppression: Cas3. Suppression d'une feuille** :
  - **Etape 2:** on applique à nouveau la procédure de suppression qui est maintenant une feuille ou un nœud avec un seul fils.
  - Ainsi, si on choisit d'échanger le nœud « 66 » avec son plus proche successeur « 69 », on obtient

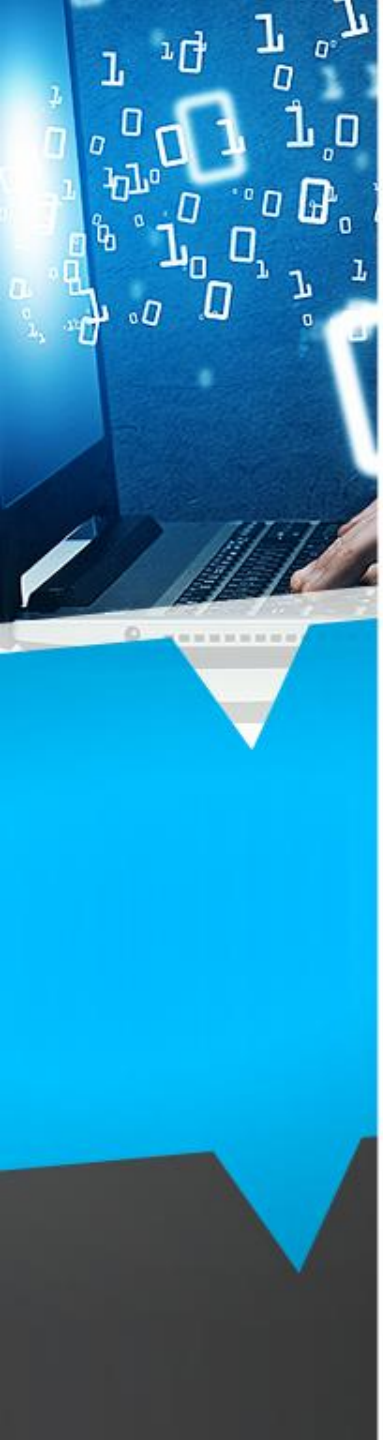


# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Opération courante

- **Suppression: Cas3. Suppression d'une feuille** :
  - Puis on applique à nouveau la procédure de suppression qui est maintenant une feuille ou un nœud avec un seul fils.
  - Ainsi, si on choisit d' échanger le nœud « 66 » avec son plus proche prédécesseur « 56 », on obtient

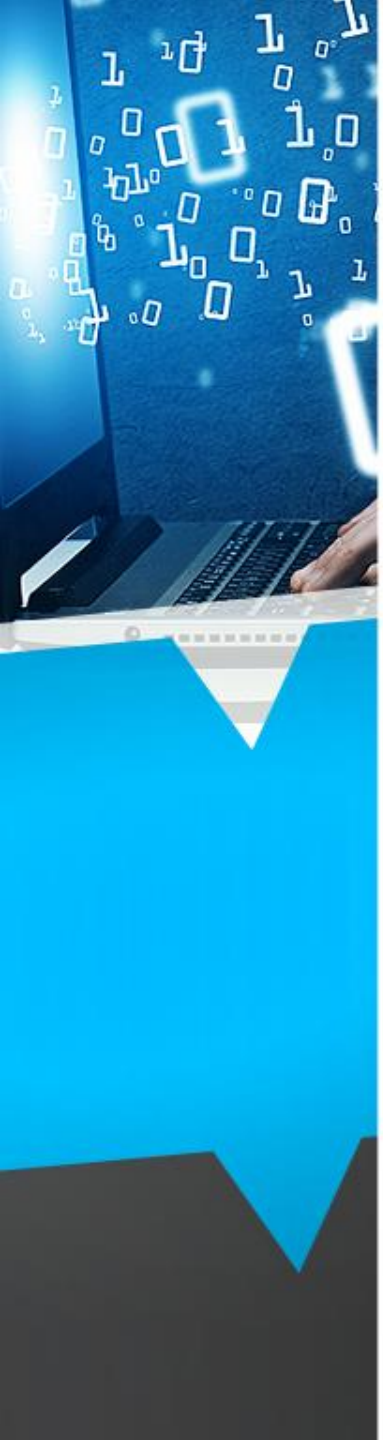




# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE:

## Récapitulatif suppression dans un ABR

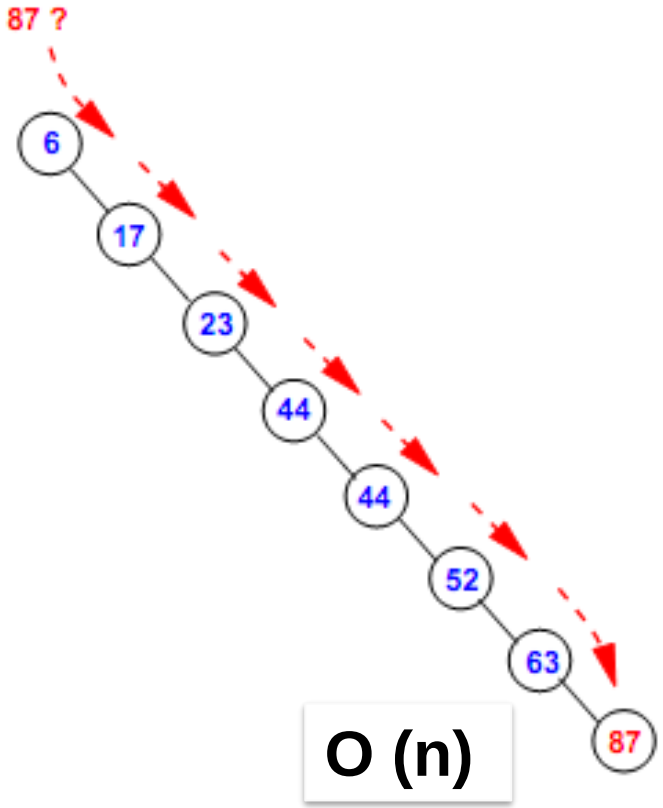
| Cas | « N » | | Action |
|---|---|---|---|
| | FG | FD | |
| Feuille | Null | Null | Libérer le nœud « N » |
| Avec un fils | Null | ≠Null | Chaîner le père au fils de « N » (FG(N) ou FD(N)) ensuite libérer le nœud « N » |
| | ≠Null | Null | |
| Avec deux fils | ≠Null | ≠Null | 1. Rechercher le plus proche prédécesseur ou successeur de «N», soit « P ».<br>2. Remplacer Info(N) par Info(P)<br>3. Supprimer le nœud « P » |

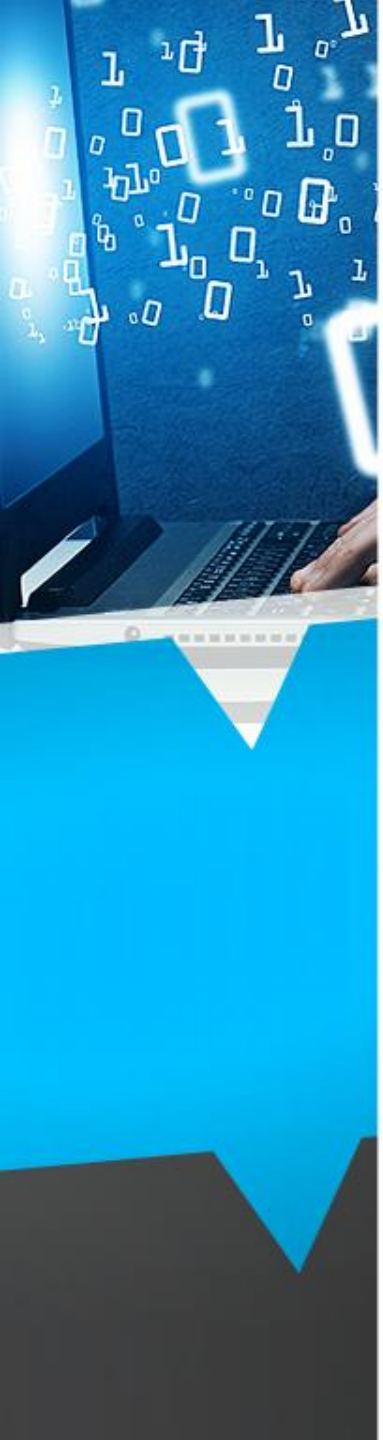


# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE

## Arbre dégénéré

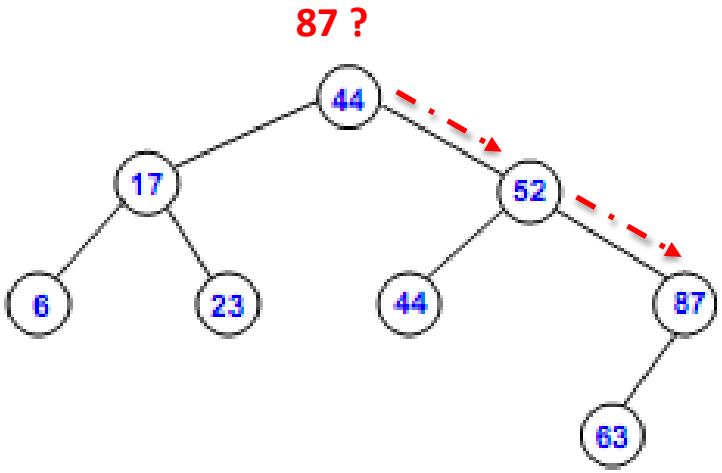
- **un arbre binaire est dit dégénéré, si tous les nœuds de cet arbre ont au plus 1 fils.**





# ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE

**Arbre Equlibré**




**O (h)** *tel que* $h = log_2(n)$

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Introduction

- La complexité au meilleur des cas de la recherche, de l'insertion et de la suppression dans un ABR est **O(h),** où h est la hauteur (ou profondeur) de l'arbre. Ce cas est atteint par des arbres équilibrés.

- Cependant, la complexité au pire cas pour un arbre à n nœuds, est **O(n).** Ce cas est atteint par des arbres très déséquilibrés, ou «filiformes».

- Plusieurs espèces des arbres équilibrés ont été développés: les arbres AVL, les arbres 2-3, les arbres rouge et noir, etc.

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Définition

- Un arbre AVL est un ABR équilibré dont:
  - la différence de hauteur (ou profondeur) entre le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit d'un nœud « R » diffère d'au plus 1.

    **|Profondeur(FG(R) ) – Profondeur(FD(R)) | ≤ 1**

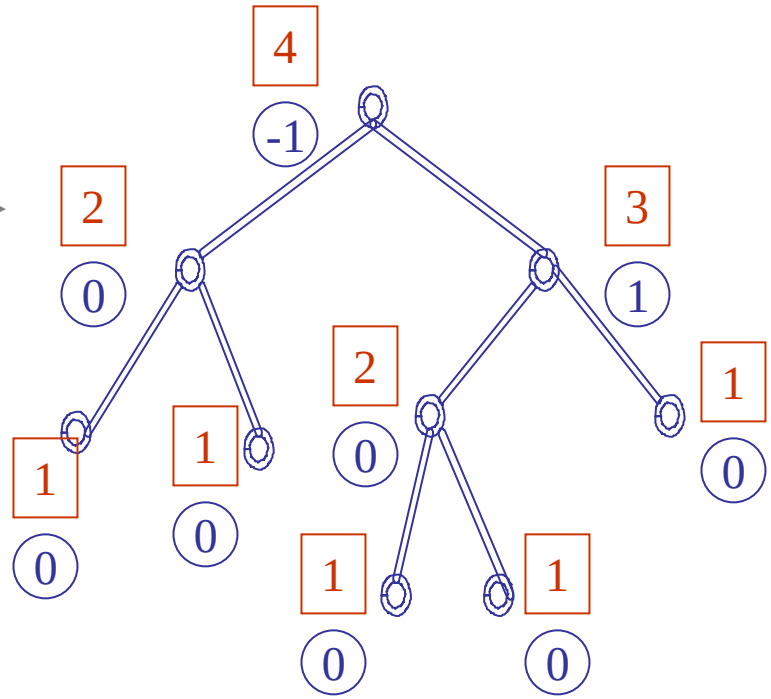
- Un champs supplémentaire est ajouté à tous les nœuds: c'est le **facteur de déséquilibre** (appelé aussi **facteur de balance « Bal »**) qui est calculé après chaque insertion/suppression.

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Définition

**arbre binaire équilibré**

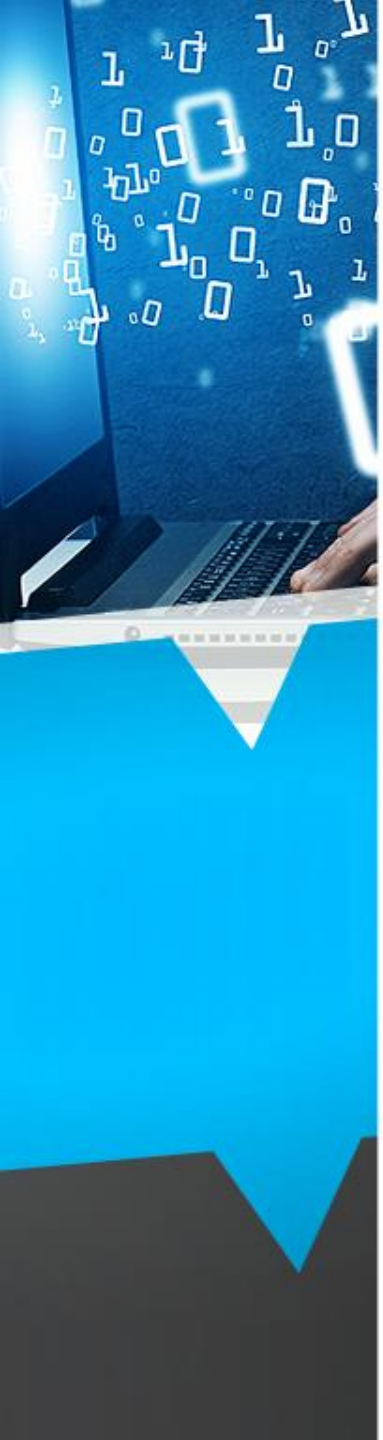
- pour tout nœud de l'arbre la valeur absolue du facteur d 'équilibre est inférieur ou égale à **1**

**Arbre binaire équilibré** →



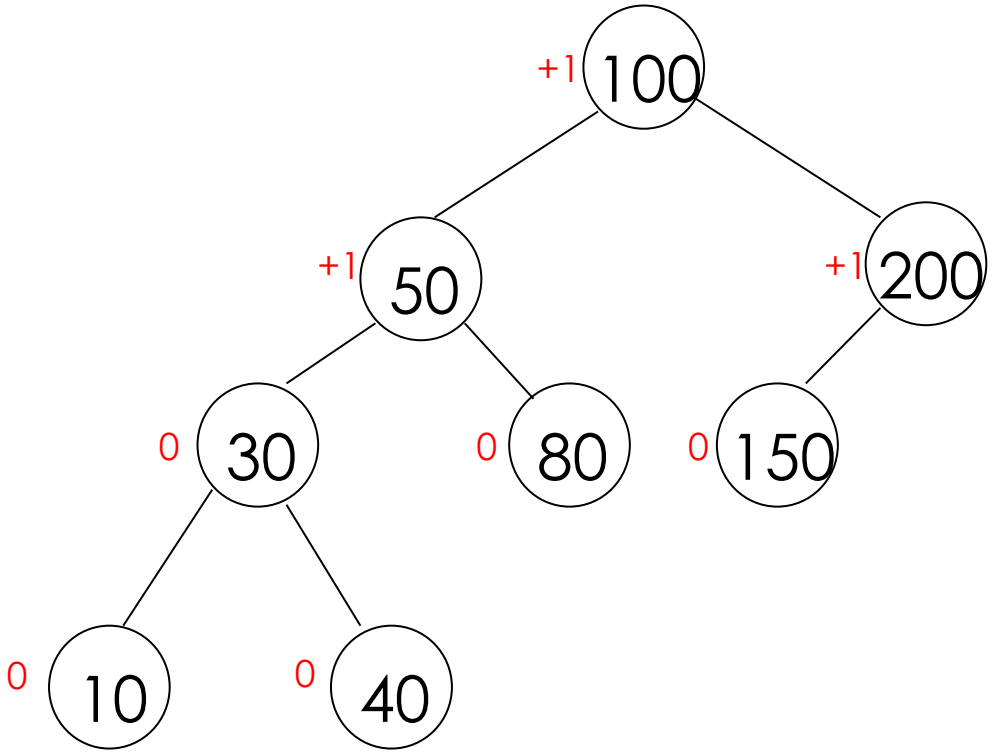

1 **La hauteur**

**Facteur d'équilibre**



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Arbre binaire équilibré

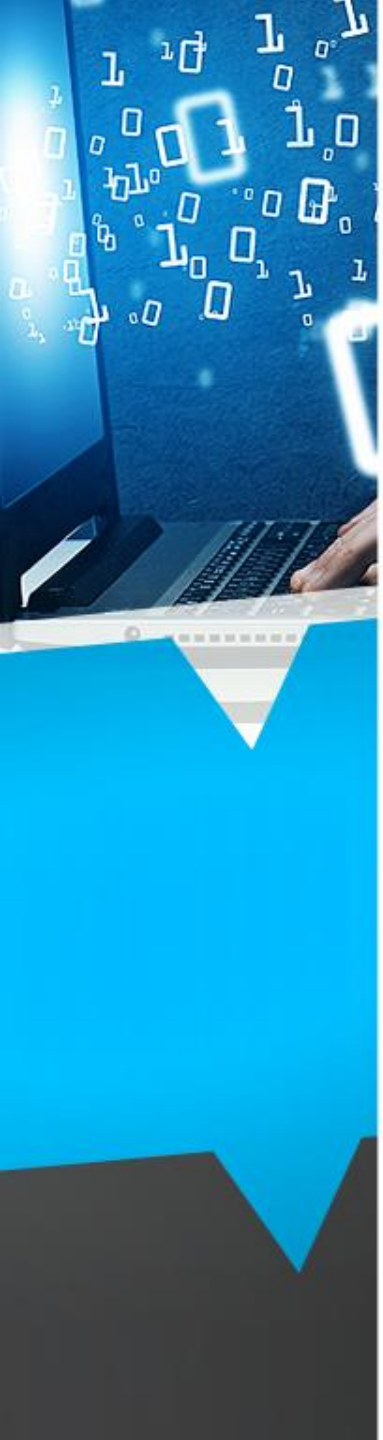
## Exemple:




**À vérifier pour chaque nœud R, on a:**

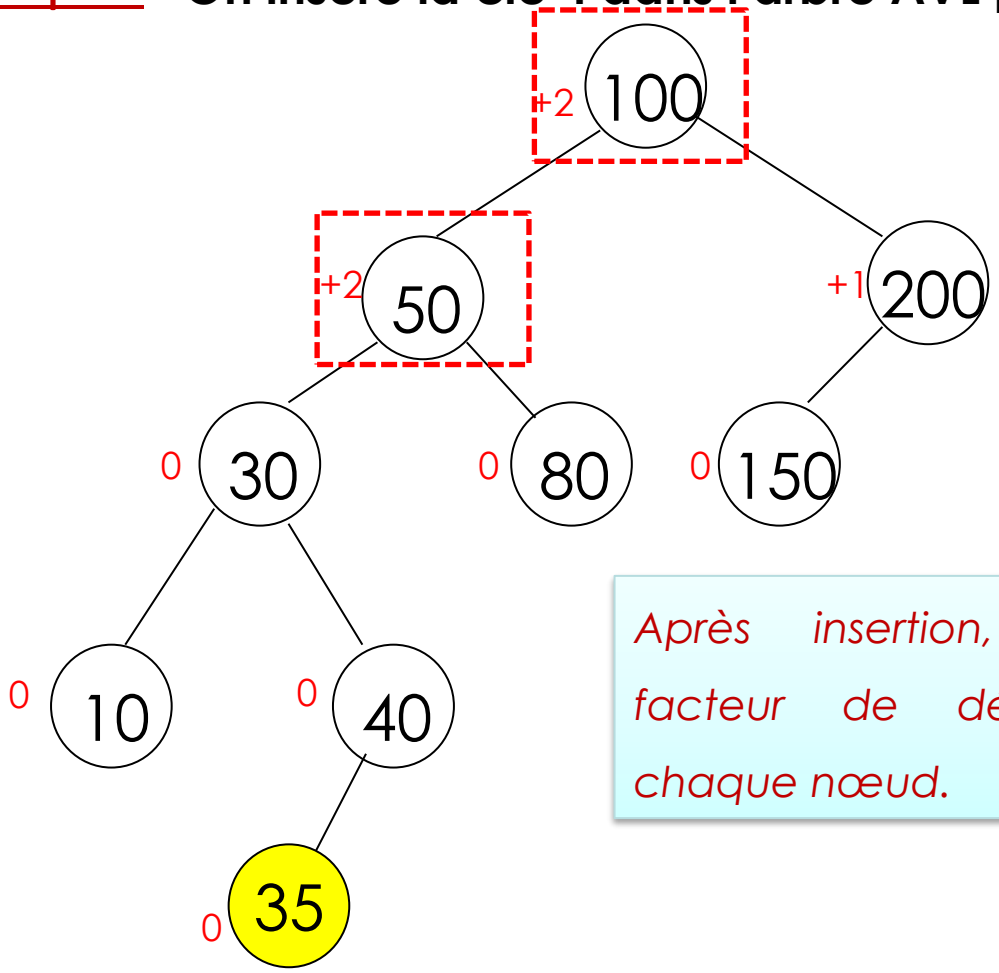
**| Profondeur(FG(R) ) – Profondeur(FD(R)) | <= 1**

**Cet arbre est un arbre AVL**



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Arbre binaire équilibré

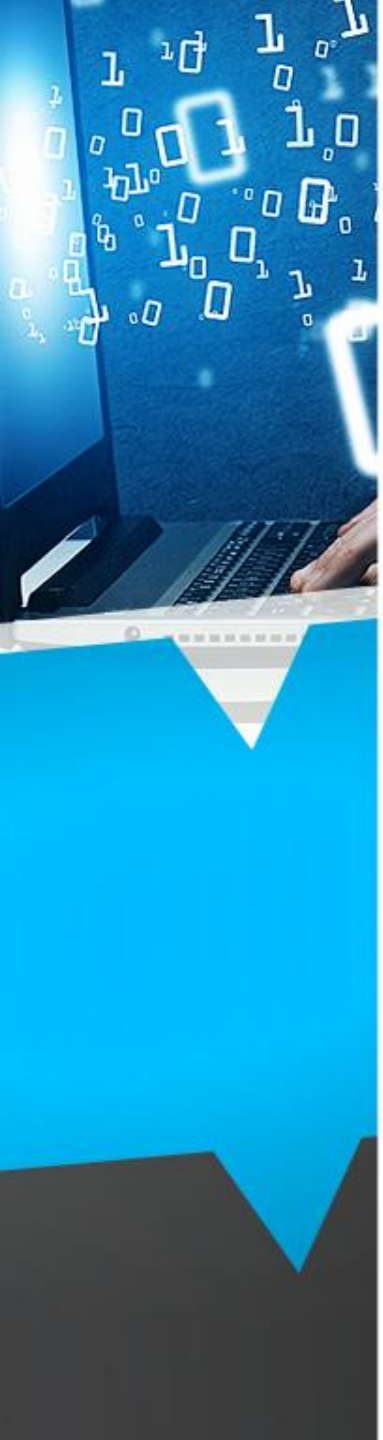
**Exemple:** **On insère la clé 4 dans l'arbre AVL précédant**




*Après insertion, calculer le facteur de déséquilibre de chaque nœud.*

Cet arbre n'est pas un arbre AVL après insertion de 35

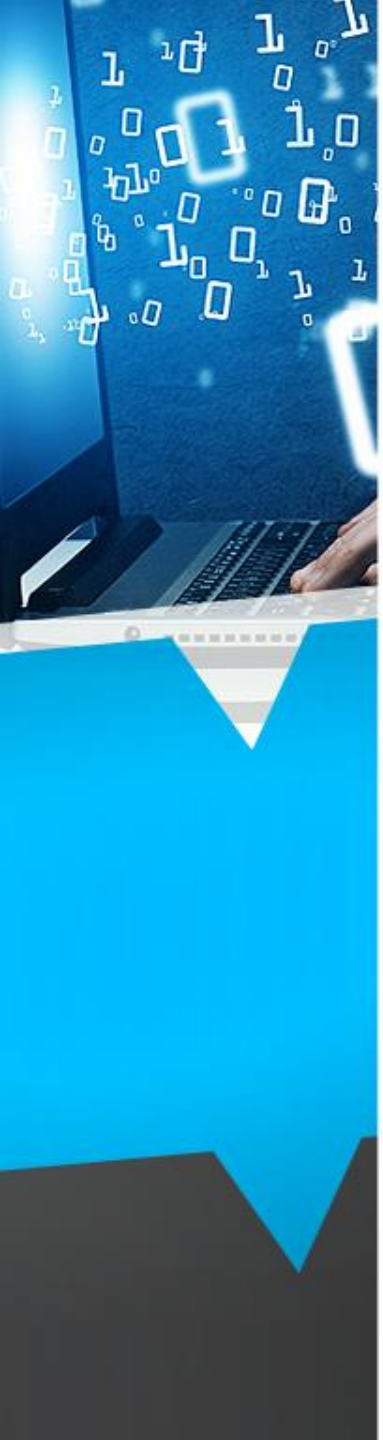
➔ arbre déséquilibré



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- L'opération d'équilibrage, appelée **rotation**, s'applique à tous les arbres binaires.

- Le but des rotations est de pouvoir rééquilibrer un ABR.
  - On opère donc une **rotation gauche** lorsque l'arbre est **«déséquilibré à droite»**, i.e. son sous-arbre droit est plus haut que son sous-arbre gauche.



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

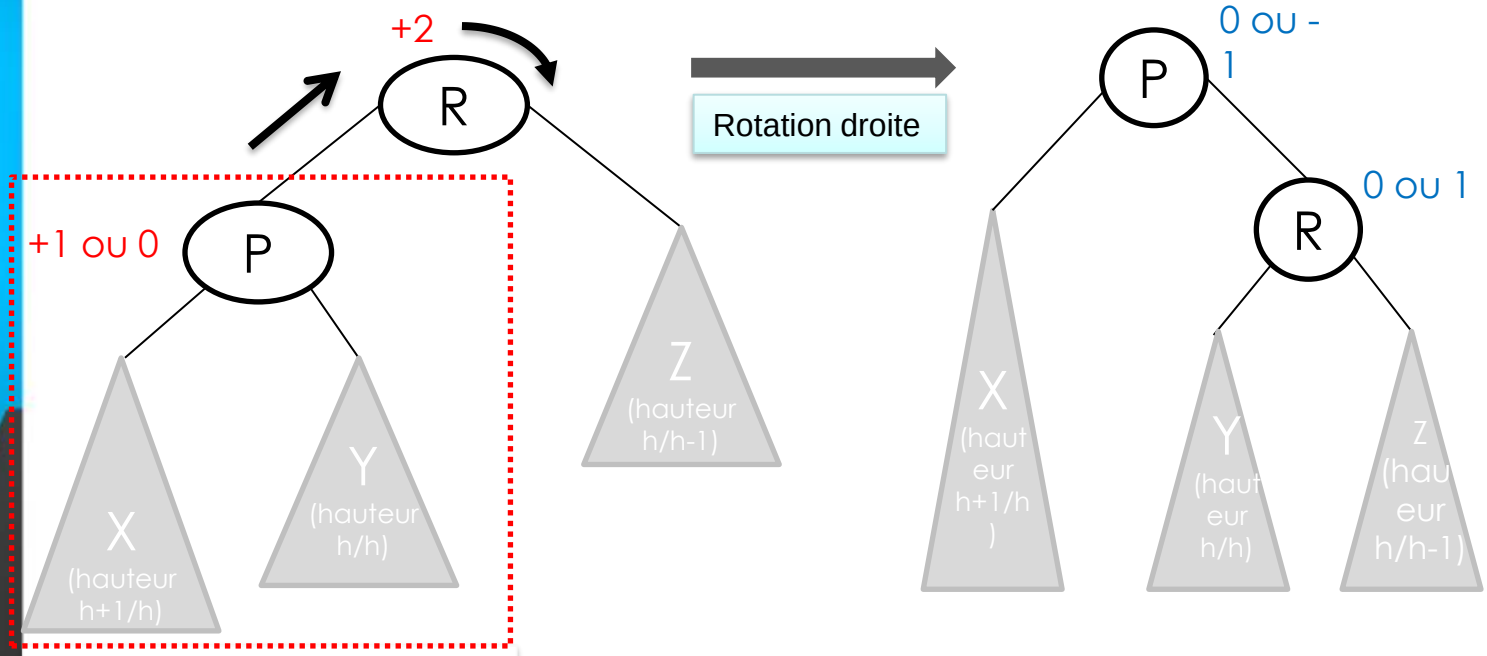
- Le but des rotations est de pouvoir rééquilibrer un ABR.
  - On opère une **rotation droite** dans le cas contraire à savoir son sous-arbre gauche est plus haut que son sous-arbre droit.

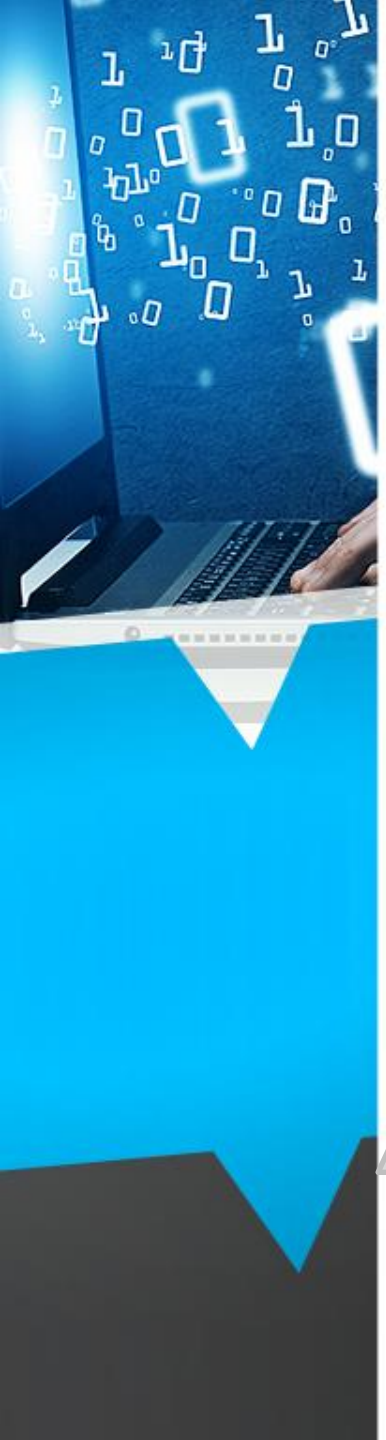
- Les rotations ne sont donc définies que pour les arbres binaires non vides dont le sous-arbre gauche (pour rotation gauche) et sous-arbre droit (pour rotation droite) n'est pas vide.

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Rotation simple : Rotation droite**
  - Soit A=(B, R, Z) un arbre binaire tel que B=(X, P, Y).
  - La rotation droite est l'opération:

**((X, P, Y), R, Z) → (X, P, (Y, R, Z))**

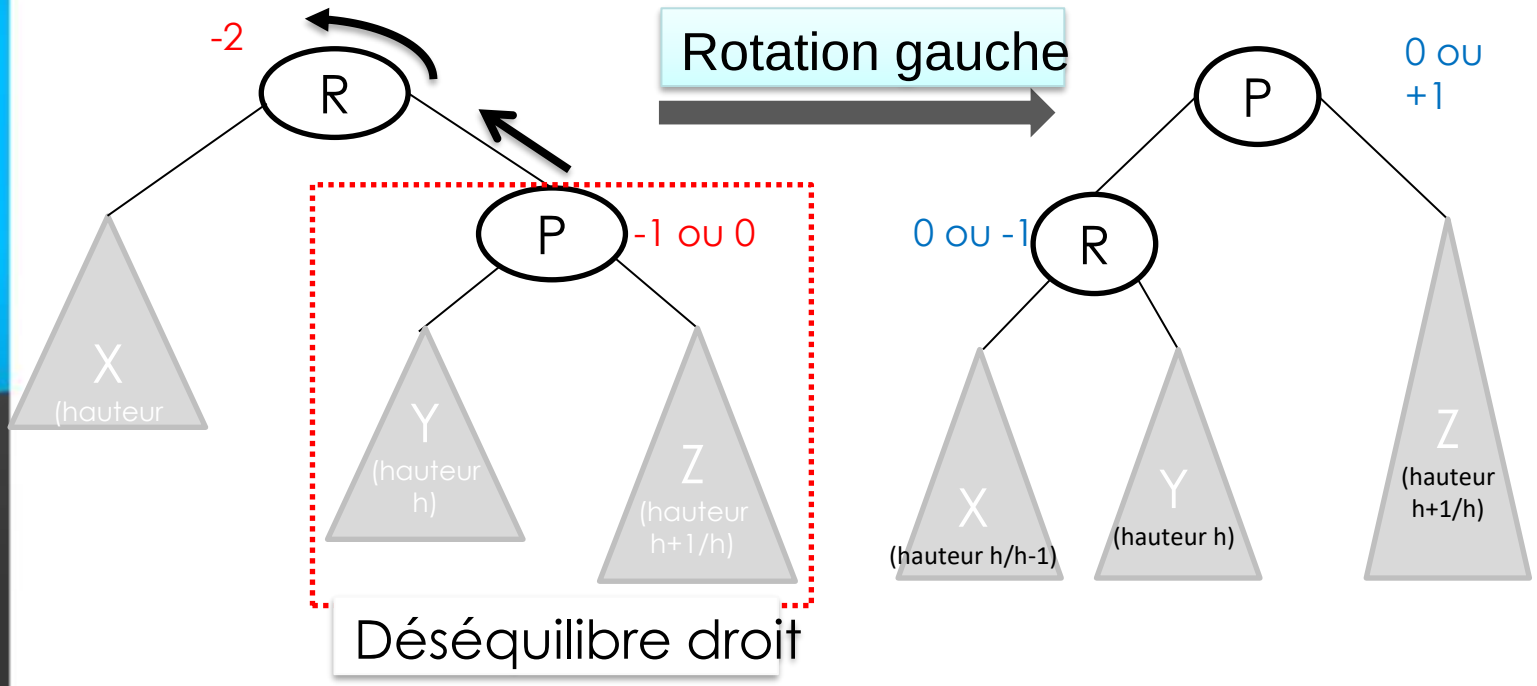


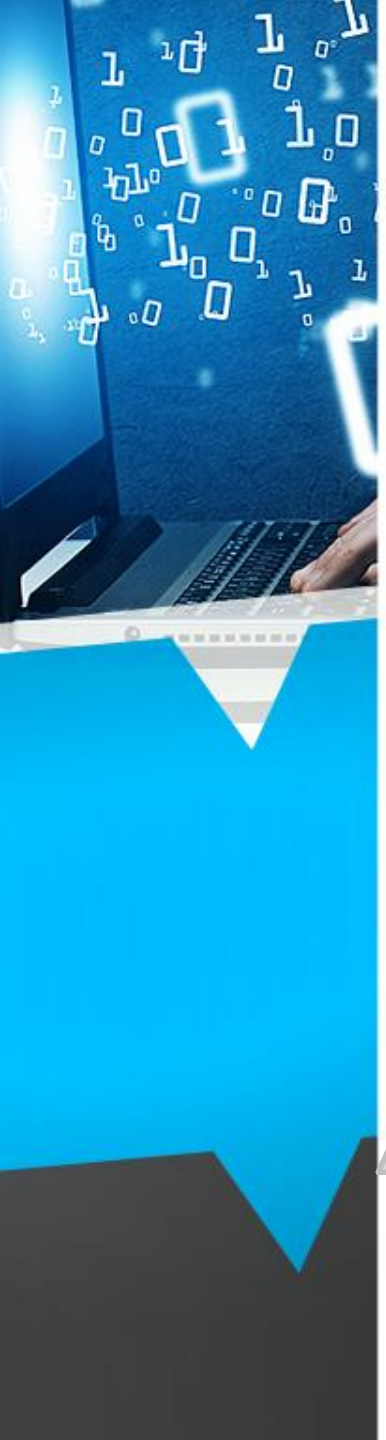


# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Rotation simple : Rotation gauche**
  - Soit A=(X, R, B) un arbre binaire tel que B=(Y, P, Z).
  - La rotation gauche est l'opération:

**( X, R, (Y, P, Z)) → ((X, R, Y), P, Z)**

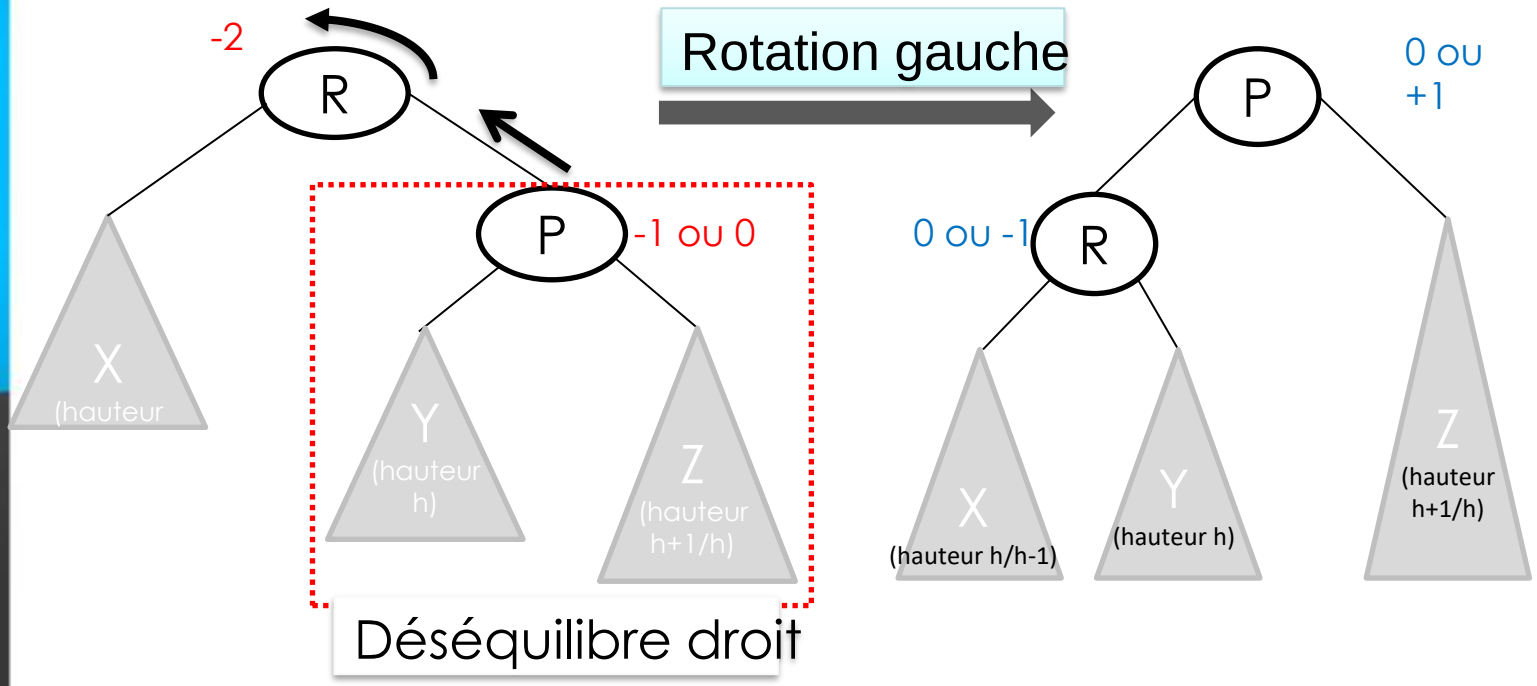




# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Rotation simple : Rotation gauche**
  - Soit A=(X, R, B) un arbre binaire tel que B=(Y, P, Z).
  - La rotation gauche est l'opération:

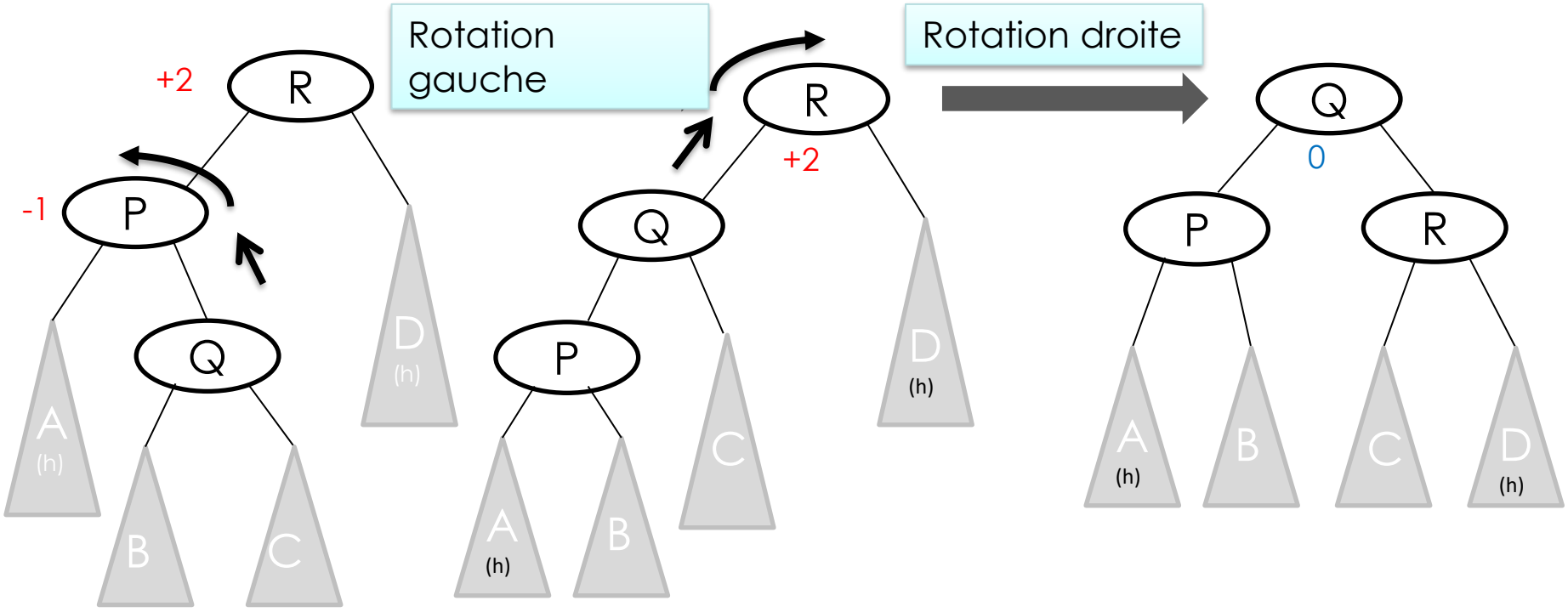
**( X, R, (Y, P, Z)) → ((X, R, Y), P, Z)**



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Rotation double : double rotation gauche-droite**

C'est une rotation gauche sur le sous arbre-gauche du nœud R suivie d'une rotation droite sur le nœud R

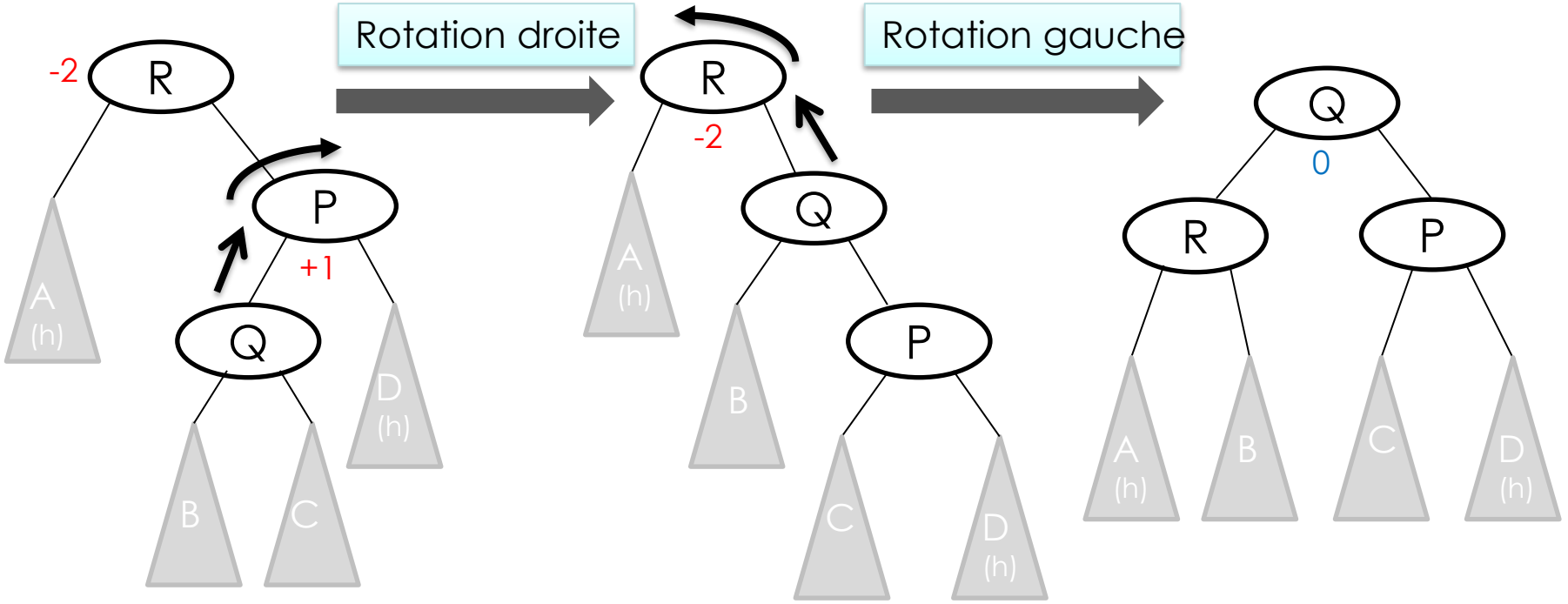



**((A, P, (B, Q, C)), R, D) → (((A, P, B), Q, C), R, D) → ((A, P, B), Q, (C, R, D))**

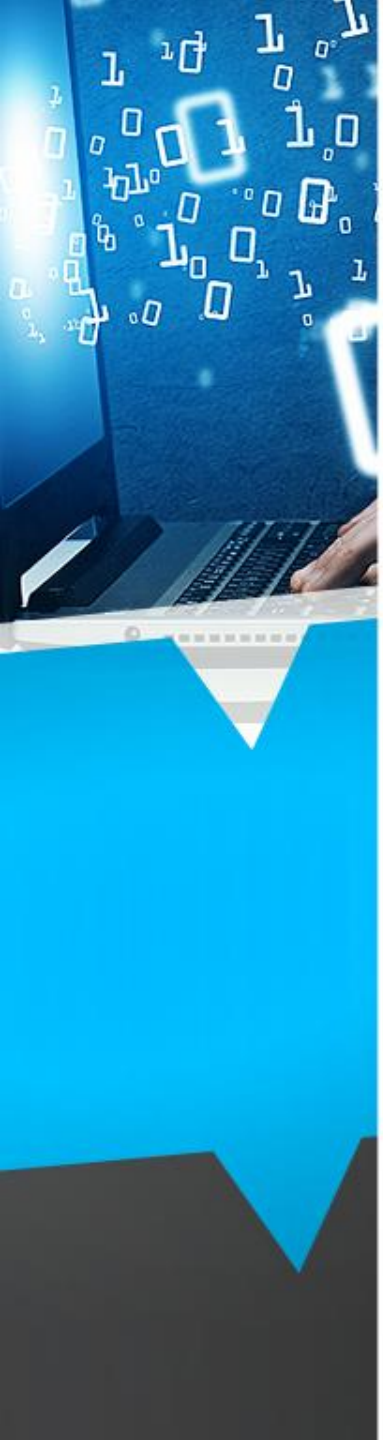
# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Rotation double : double rotation droite-gauche**

C'est une rotation droite sur le sous arbre-droit du nœud R suivie d'une rotation gauche sur le nœud R

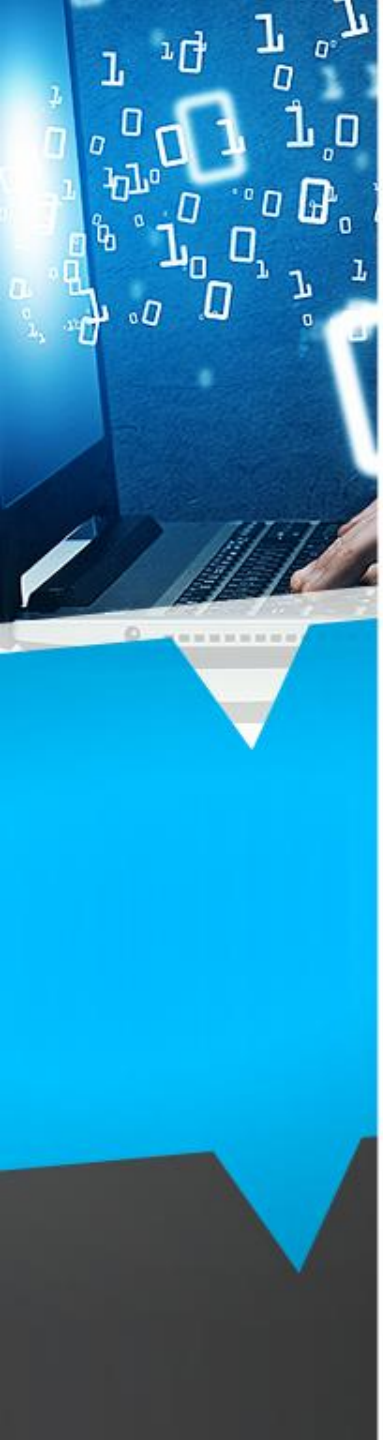



**(A, R, ((B, Q, C), P, D)) → (A, R, (B, Q, (C, P, D))) → ((A, R, B), Q, (C, P, D))**



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Opérations de Base

- La **recherche** est identique à celui des ABR car les arbres AVL sont avant tout des ABR équilibrés.
- L'**insertion** d'un élément dans un arbre AVL peut provoquer un déséquilibre. Donc, pour rétablir l'équilibre (rééquilibrer) de l'arbre après une insertion, une seule rotation (simple ou double) suffit.
- La **suppression** d'un élément dans un arbre AVL peut provoquer un déséquilibre. Donc pour rétablir l'équilibre (rééquilibrer) de l'arbre après une suppression, il faut faire entre 1 et h rotations (h est la hauteur de l'arbre).



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Opérations de Base

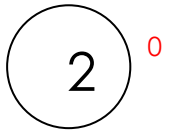
## Insertion

- L'ajout d'un nœud se fait toujours au niveau d'une feuille, puis on rééquilibre l'arbre AVL si l'insertion a déséquilibré l'arbre.
- Le déséquilibre est rencontré lorsque le facteur d'équilibrage d'un nœud de l'arbre égale à $\pm 2$.

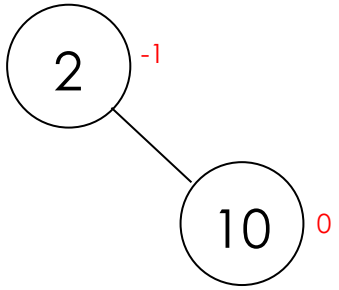
# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Exemple**: soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL (2 10 12 4 16 8 6 14 )

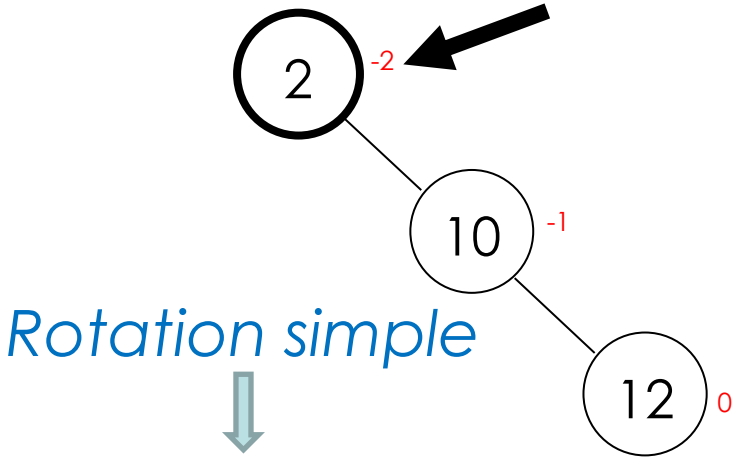
2 10 12 4 16 8 6 14



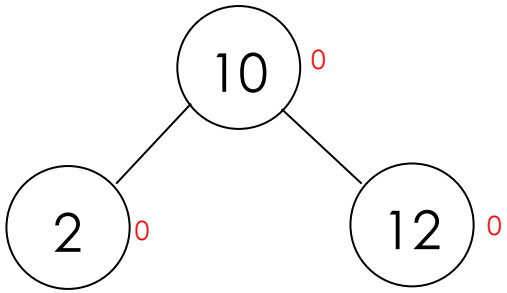

2 10 12 4 16 8 6 14




2 10 12 4 16 8 6 14



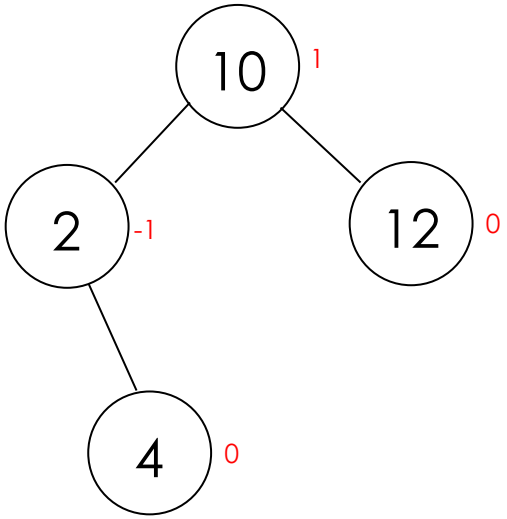

*Rotation simple*



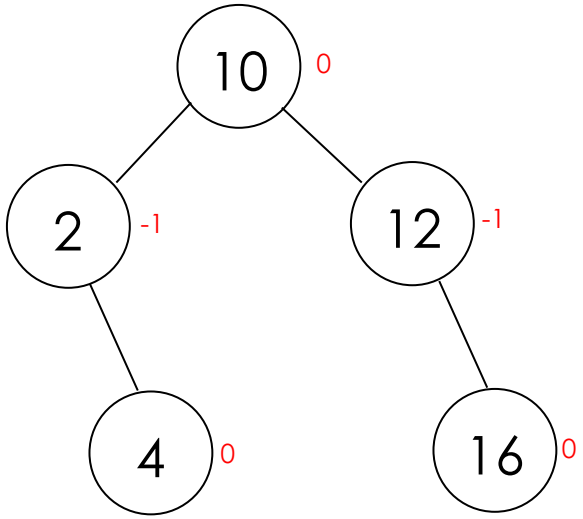
# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Exemple**: soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL (2 10 12 4 16 8 6 14 )

2 10 12 4 16 8 6 14



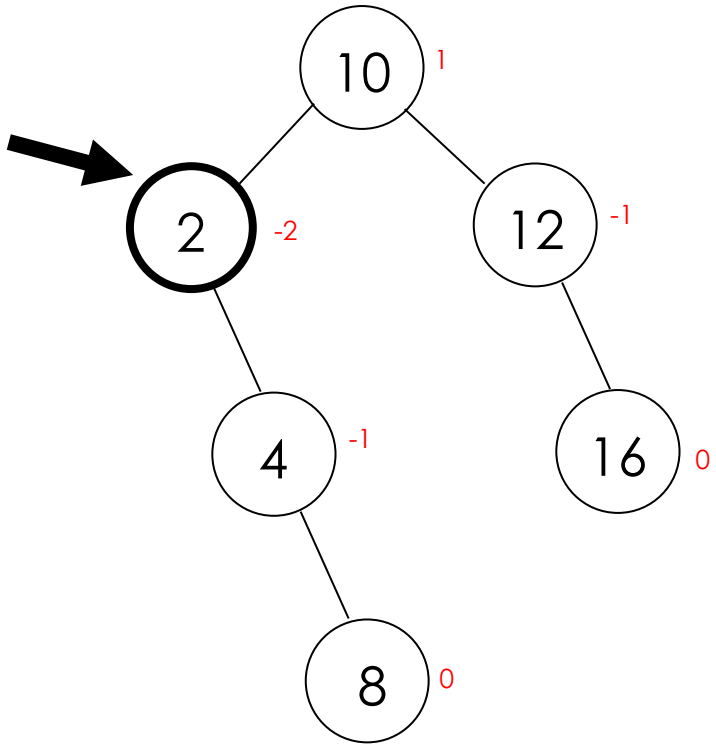

10 12 4 16 8 6 14



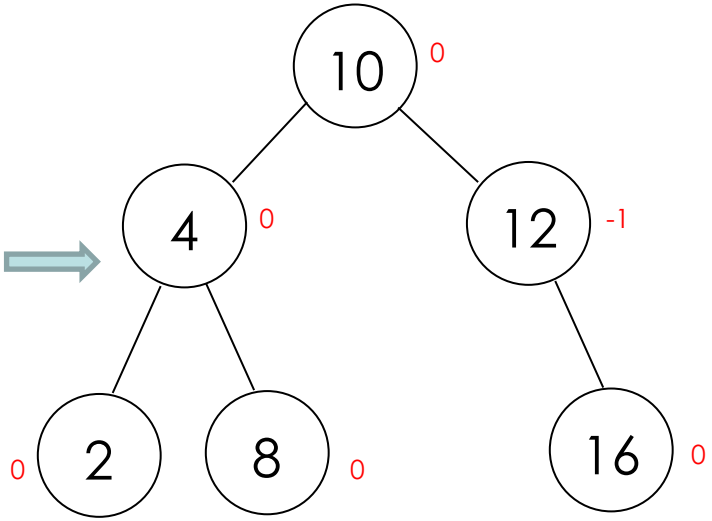
# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Exemple**: soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL (2 10 12 4 16 8 6 14 )

2 10 12 4 16 8 6 14



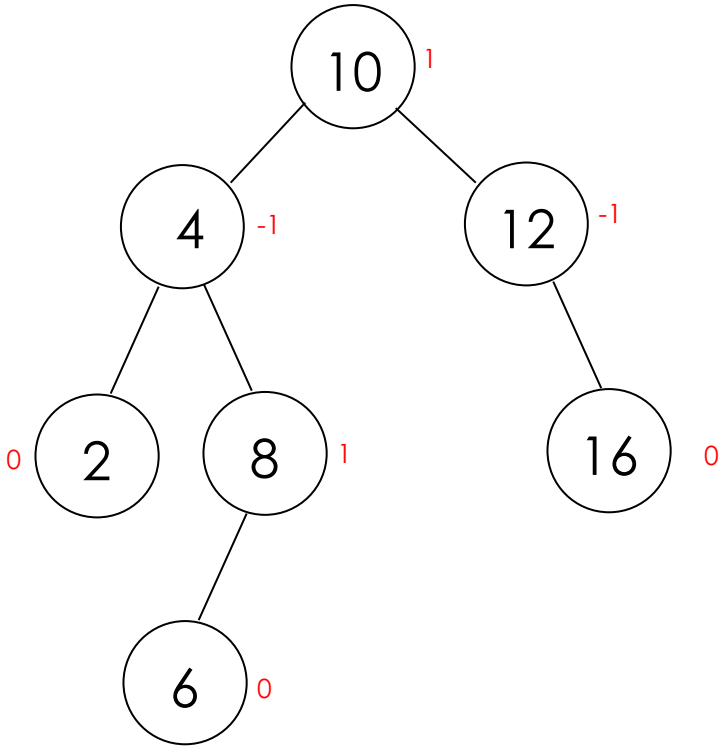

*Rotation simple*



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

- **Exemple**: soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL (2 10 12 4 16 8 6 14 )

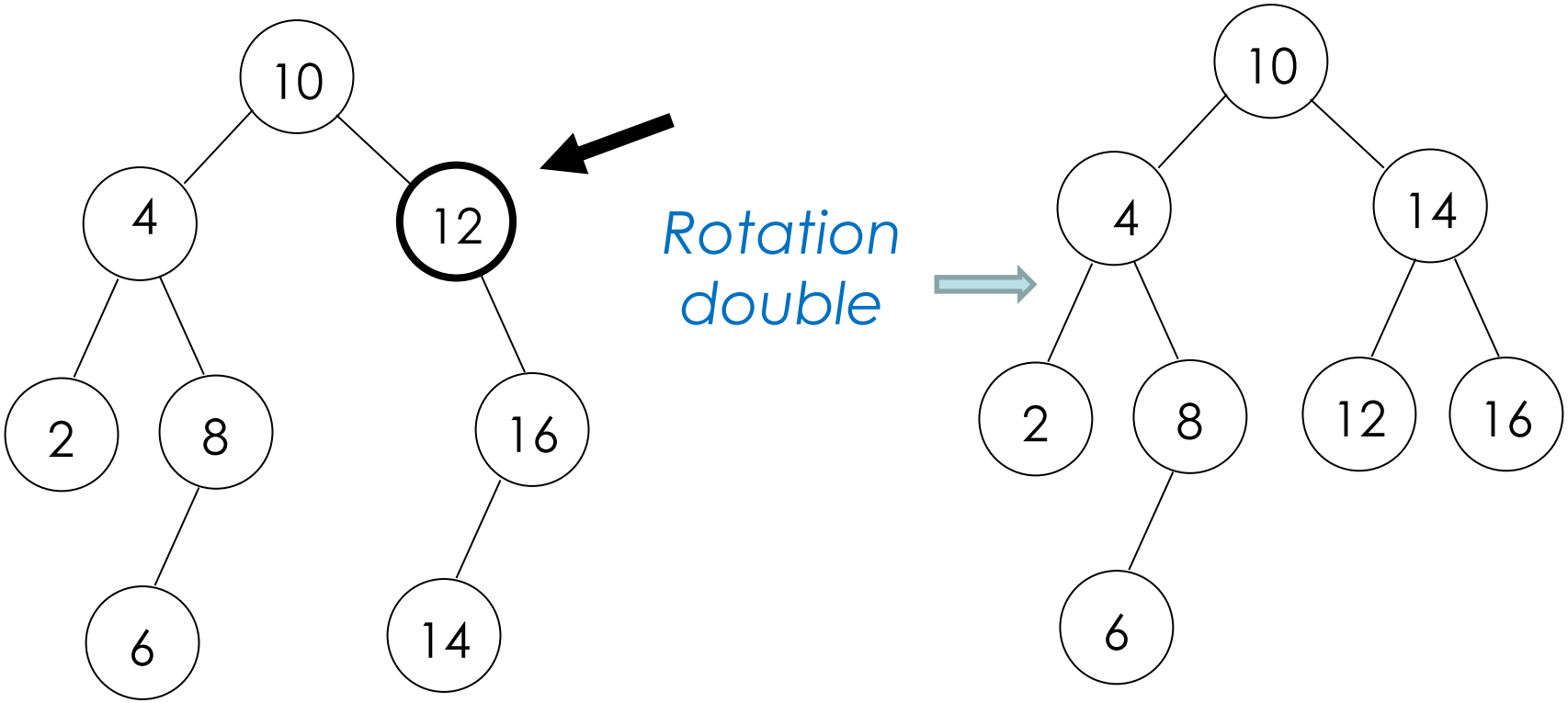
2 10 12 4 16 8 6 14



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

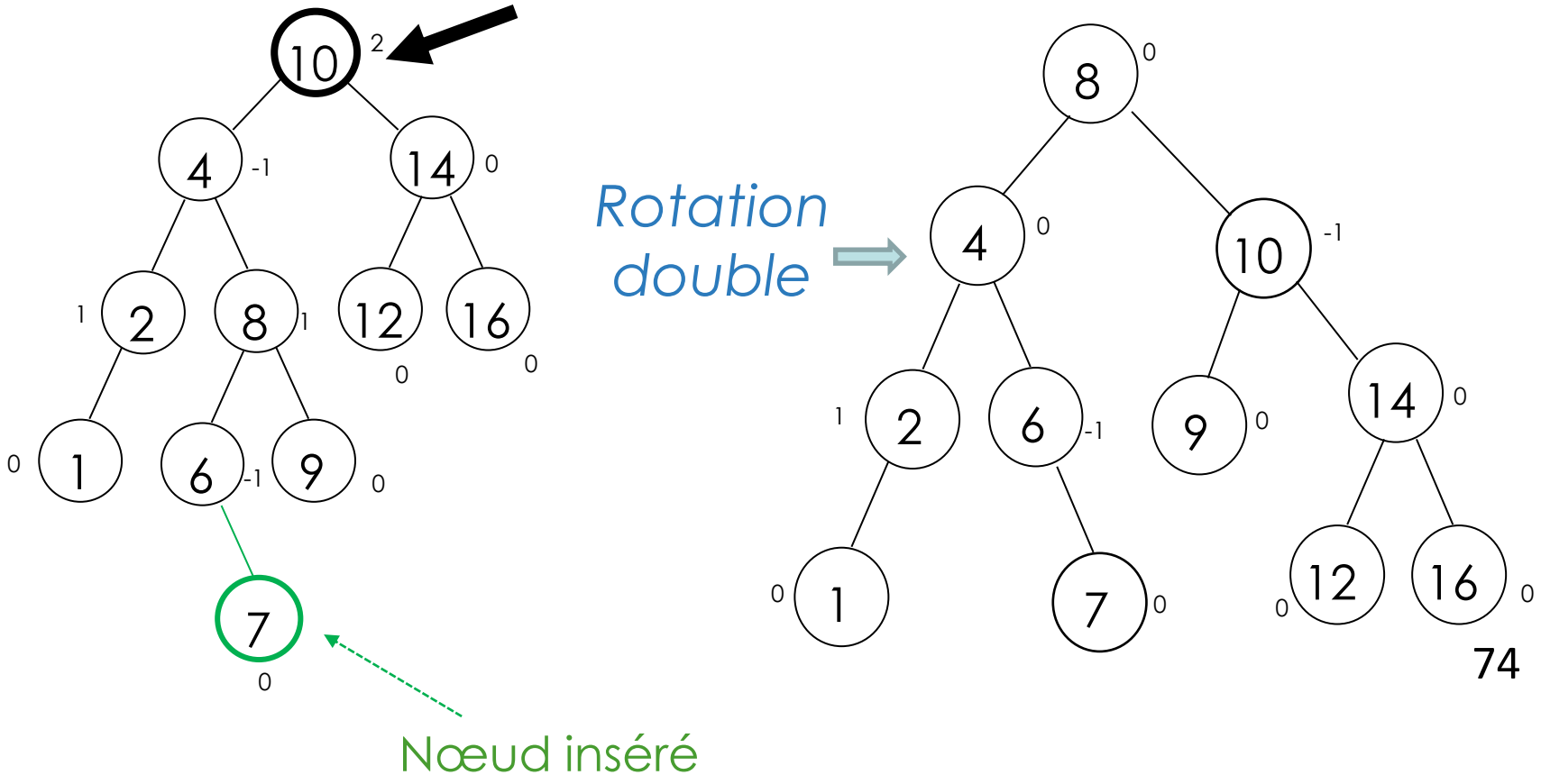
- **Exemple**: soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL (2 10 12 4 16 8 6 14 )

2 10 12 4 16 8 6 14



# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Techniques d'équilibrage

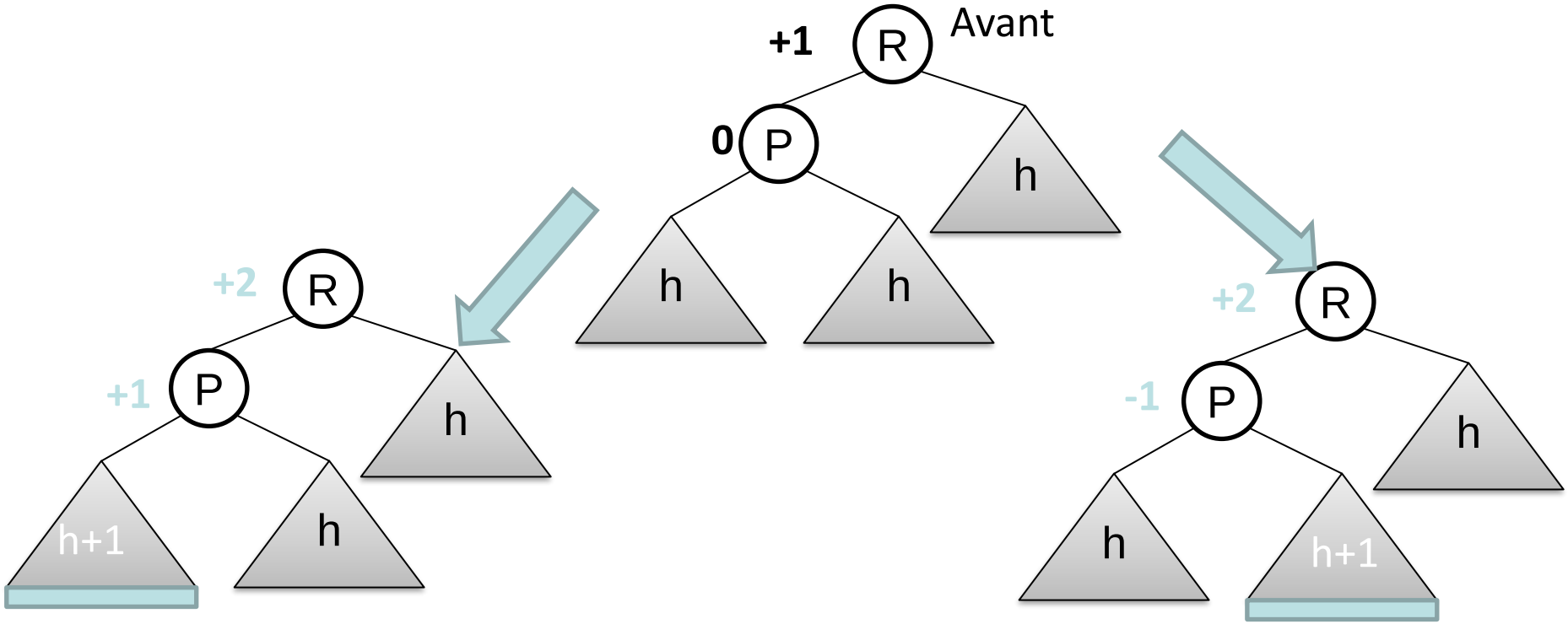
- **Exemple**: On insère le 7



Cas A

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Récapitulatif

## Insertion dans le sous arbre gauche




Si insertion dans le sous-arbre gauche du fils gauche alors

Rotation Simple à droite

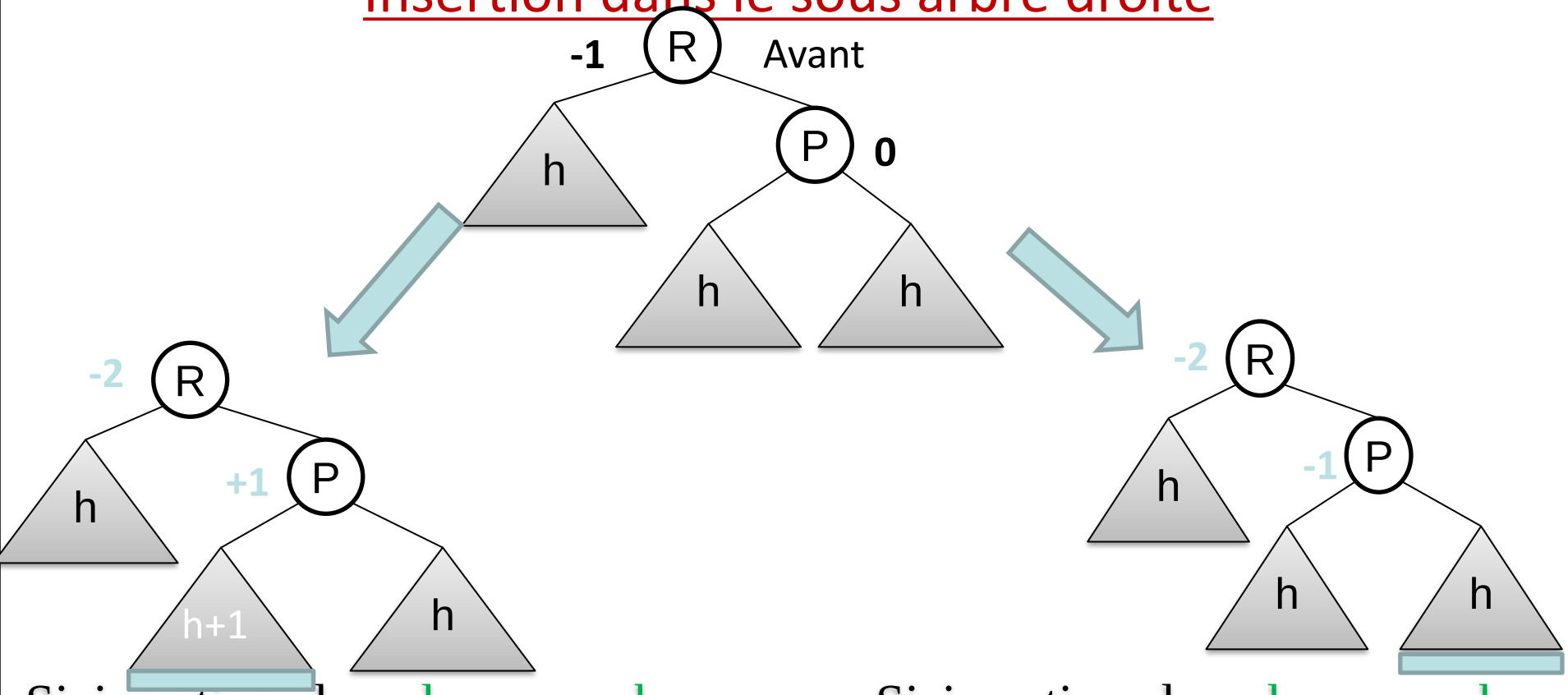
Si insertion dans le sous-arbre droit du fils gauche alors

Rotation Double Gauche-Droite

# Cas A

# Arbres Binaires de Recherche Équilibrés (Arbres AVL): Récapitulatif

## Insertion dans le sous arbre droite




Si insertion dans le sous-arbre gauche du fils droit alors

Rotation Double Droite-Gauche

Si insertion dans le sous-arbre droit du fils droit alors

Rotation Simple à gauche