

Le 20 Janvier 2015

Examen

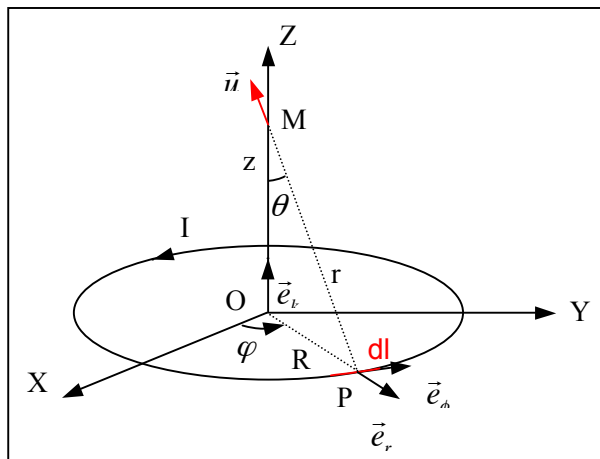
Electromagnétisme (Filière SMA – S3)

Session ordinaire – Durée 1h30

Exercice I

La structure de la figure ci-après, est formée par un rectangle de côtés a et b et d'une demi-spire de rayon r . la structure est placée dans le plan xOy de l'espace vide et est parcourue par un courant d'intensité I . Nous souhaitons déterminer le champ magnétique produit par cetyte distribution de courant au point P , pour cela nous procéderons par étapes :

1. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer l'expression du champ magnétique B produit par une spire parcourue par un courant d'intensité I en un point H de son axe de révolution.



Soit un élément de conducteur de longueur $d\vec{l}$, celui-ci crée au niveau du point M un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$ qui s'écrit selon la loi de Biot et Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où $d\vec{l} = dl \cdot \vec{e}_\phi$; $\vec{u} = \cos\theta \cdot \vec{e}_k - \sin\theta \cdot \vec{e}_r$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} dl \left\{ \frac{\cos\theta \cdot (\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_k) - \sin\theta \cdot (\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_r)}{r^2} \right\}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} dl \left\{ \frac{\cos\theta \cdot \vec{e}_r + \sin\theta \cdot \vec{e}_k}{r^2} \right\} \quad \text{or } dl = R \cdot d\phi$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^2} \{ \cos\theta \cdot \vec{e}_r + \sin\theta \cdot \vec{e}_k \} d\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^2} \int_0^{2\pi} (\cos\theta \cdot \vec{e}_r + \sin\theta \cdot \vec{e}_k) d\phi$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^2} \sin\theta \cdot 2\pi \cdot \vec{e}_k \quad ; \text{or} \quad \sin\theta = \frac{R}{r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} \cdot \vec{e}_k = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_k$$

2. Déterminer le champ B résultant produit par cette structure au niveau du point P . pour cela :
 - a. Calculer le champ produit en P par la demi-spire

Pour une demis spire, nous obtenons : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^2} \sin\theta \cdot \pi \cdot \vec{e}_k = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_k$

De même, pour le point P appartenant au plan de la spire (z=0) : $\vec{B}_{1/2\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \vec{e}_k$

b. Calculer le champ produit en P par chacun des segments du rectangle

Le champ produit par les segments de longueur b :

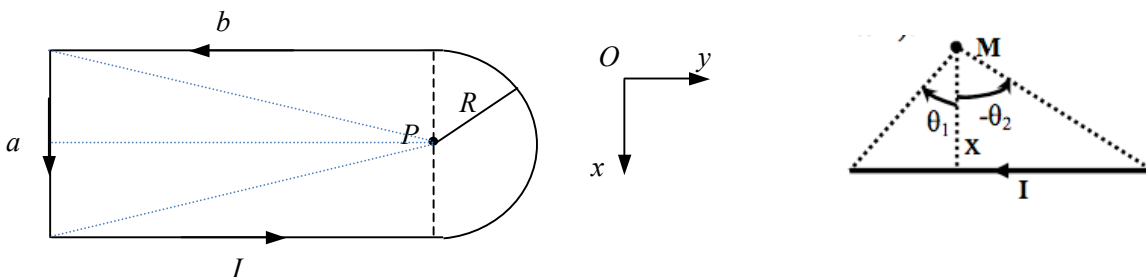
$$\vec{B}_b = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi x_b} \sin\theta_b \cdot \vec{e}_k \quad \text{avec} \quad \sin\theta_b = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad x_b = \frac{a}{2}$$

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_a} 2 \sin\theta_a \cdot \vec{e}_k \quad \text{avec} \quad \sin\theta_a = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad x_b = b$$

c. Dédurre le champ total produit en P par cette distribution de courant.

$$\vec{B}_P = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_{1/2\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}} \cdot \vec{e}_k + \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a}{2}} \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}} \cdot \vec{e}_k + \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{e}_k$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}} \left(\frac{\frac{a}{2}}{b} + \frac{b}{\frac{a}{2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{2a} \right\} \vec{e}_k \quad \text{d'où} \quad \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left\{ \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}}{b} + \frac{\pi}{2} \right\} \vec{e}_k$$



On donne le champ B produit par un fil de longueur finie, parcouru par un courant I , en un point M de l'espace :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} [\sin\theta_2 + \sin\theta_1] \vec{e}_k$$

Exercice II

On considère le circuit de la figure ci-après. Le dipôle AD est alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude E et de pulsation ω .

1. Déterminer l'impédance complexe Z_{AD} équivalente du circuit.

$$\bar{Z}_{BD} = \frac{\bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_R}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_R} = \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$\bar{Z}_{AD} = jL\omega + \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} \quad \text{soit} \quad \bar{Z}_{AD} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j \left\{ L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2} \right\}$$

2. Donner l'expression de l'inductance L du circuit en fonction de R , C et ω dans le cas où le circuit est équivalent à une résistance pure R_{eq} . Donner l'expression de L .

$$\bar{Z}_{AD} = R_{eq} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2}$$

la partie imaginaire est nulle : $L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2} = 0$ d'où $L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2}$

3. Donner l'expression complexe du courant i qui circule dans le circuit.

$$\bar{U}_{AD} = \bar{Z}_{AD} \bar{I} = R_{eq} \bar{I} \quad \text{d'où} \quad \bar{I} = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R} \{1 + (RC\omega)^2\}$$

4. En déduire les tensions individuelles (expressions complexes).

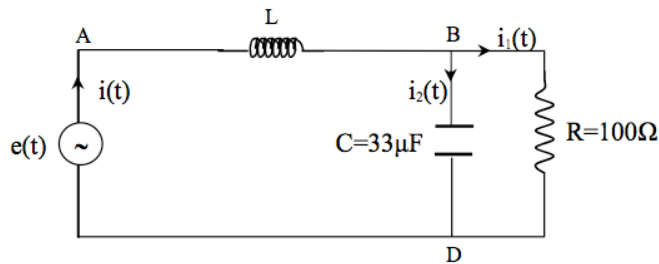
$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{AB} \bar{I} = jL\omega \bar{I} \quad \text{d'où} \quad \bar{U}_{AB} = j \frac{L\omega E}{R} \{1 + (RC\omega)^2\}$$

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_{BD} \bar{I} \quad \text{et} \quad \bar{U}_{BD} = E(1 - jRC\omega)$$

5. Exprimer les courants i_2 et i_1 qui circulent respectivement dans le condensateur C et dans la résistance R .

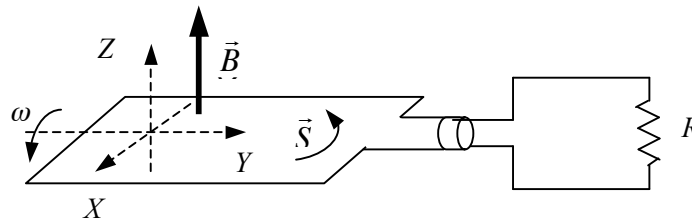
$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_C \bar{I}_2 \quad \text{et} \quad \bar{I}_2 = EC\omega(RC\omega - j)$$

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_R \bar{I}_1 \quad \text{et} \quad \bar{I}_1 = \frac{E}{R}(1 - jRC\omega)$$



Exercice III

Un générateur électrique simple, tourne autour de l'axe Oy (voir figure ci-après) avec la vitesse angulaire ω . Il est placé dans une région où règne un champ d'induction magnétique uniforme \vec{B} dirigé suivant Oz . Le rotor est constitué d'une bobine de n spires de surface S chacune. A travers des contacts glissants, le générateur alimente une ampoule de résistance R . La résistance de la bobine étant négligeable, comparée à celle de l'ampoule.



1. Rappeler la loi de FARADAY et donner l'expression de la f.é.m. induite

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad \varphi = n\phi \quad (\varphi \text{ étant le flux de } \vec{B} \text{ à travers une spire})$$

$$\varphi = n \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = n \cdot B \cdot \vec{e}_z \cdot S \cdot \vec{e}_n = nBS \cdot \cos\theta$$

$$\varphi = nBS \cdot \cos(\omega t)$$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = nBS\omega \cdot \sin(\omega t)$$

2. En déduire l'expression de l'intensité du courant induit dans ce circuit

$$e = Ri \Rightarrow i = \frac{e}{R} = n \frac{BS\omega}{R} \sin(\omega t)$$

3. En déduire l'expression de l'intensité maximale (I_{max}) du courant induit.

$$I_{max} \text{ est obtenu pour } \sin\omega t = 1$$

$$\text{et donc } I_{max} = \frac{nBS\omega}{R}$$

4. Quelle position devrait alors prendre le solénoïde (illustrer éventuellement par un schéma).
 I sera max lorsque la bobine est dans le plan XOY