Cours d'électromagnétisme

Filière SMI S4

Jaouad DIYADI
Département de physique
Faculté des sciences
Université Ibn Tofail

Chapitre II

Magnétostatique

1. Champ d'induction magnétique

1. Loi de Lorentz

Une charge q en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à :

$$\overrightarrow{F_E} = q\vec{E}$$

Lorsque q est animée d'une vitesse $\vec{v}$, elle peut-être soumise à :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Loi de *Lorentz*

Le champ responsable de la force magnétique est :

$\vec{B}$ **Induction magnétique**

$\vec{B}$ s'exprime en *Tesla* (SI), souvent en *gauss* = 10^{-4} *Tesla*)

La force magnétique correspond à : $\boxed{\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$

La force magnétique qui agit sur une particule chargée en mouvement dans un champs magnétique s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

- F_B = force magnétique (N)
- q = valeur de la charge en mouvement (C)
- V = vitesse de la charge en mouvement (m/s)
- B = valeur du champ magnétique (T)
- Donc des teslas (T) sont des N·s/C·m

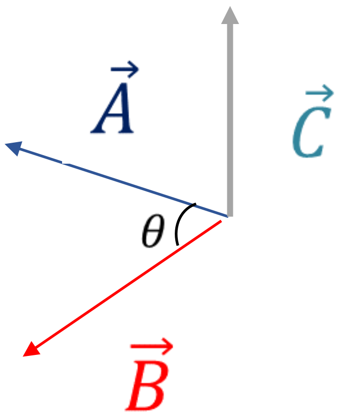
À savoir

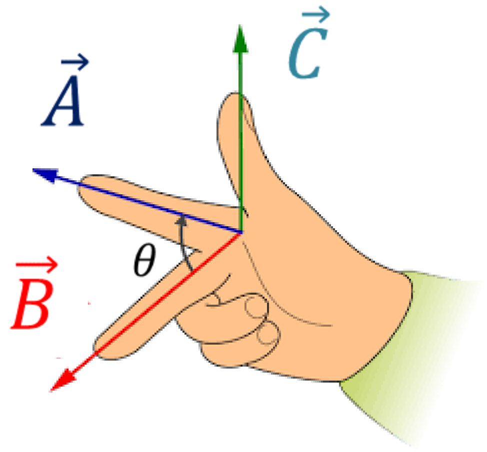
- Dans le SI d'unités, le champ s'exprime en teslas mais c'est une unité peu usuelle.
- On utilise plutôt le gauss (G) 1G = 10^{-4} T
- Un gros aimant permanent peut générer 2 T, un aimant supraconducteur 30 T, le champ magnétique terrestre $\approx$ 0,5 G

Rappels

Produit vectoriel

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

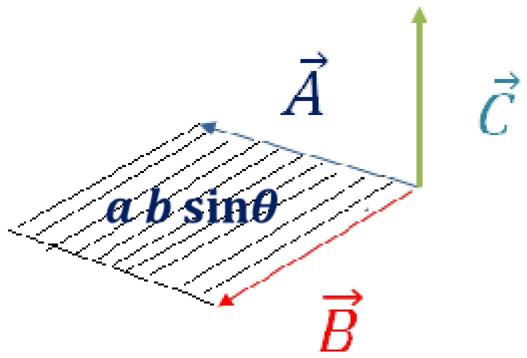




si $\|\vec{A}\| = a$

$\|\vec{B}\| = b$

$$\boxed{\|\vec{C}\| = a\ b \sin\theta}$$



Ou bien si $\vec{A} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$

$\vec{B} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\ \vec{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\ \vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\ \vec{k}$$

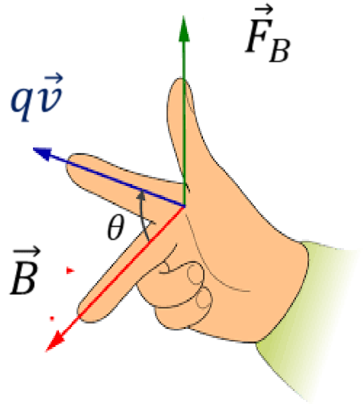
$$= C_x\ \vec{\imath} + C_y\vec{\jmath} + C_z\ \vec{k}$$

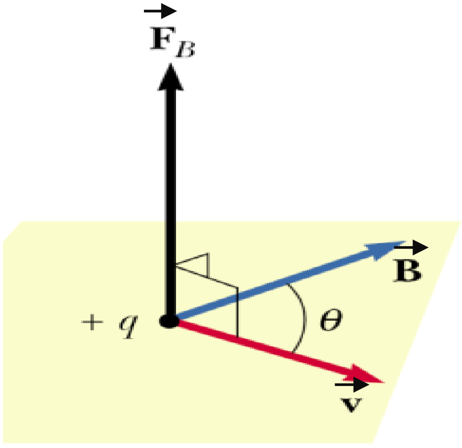
$$\boxed{\|\vec{C}\| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}}$$

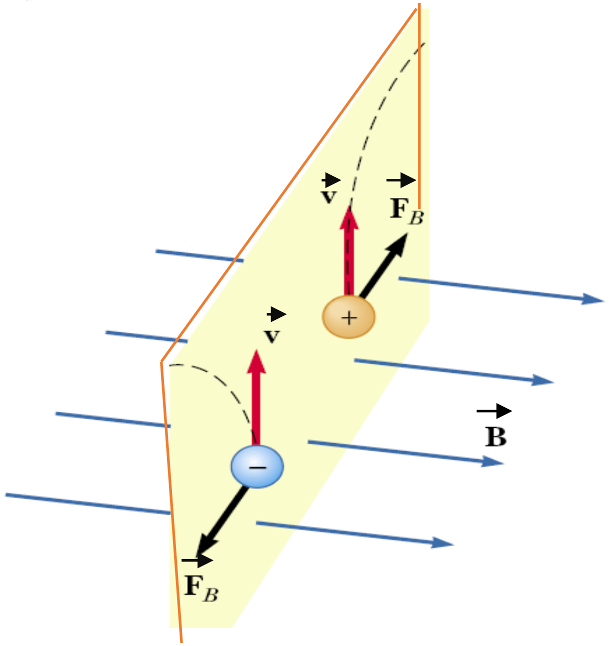
Action de la force magnétique sur une charge en mouvement dans un champ d'induction magnétique

Force de Lorentz= Force électrostatique +Force magnétique $\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{F_B}$

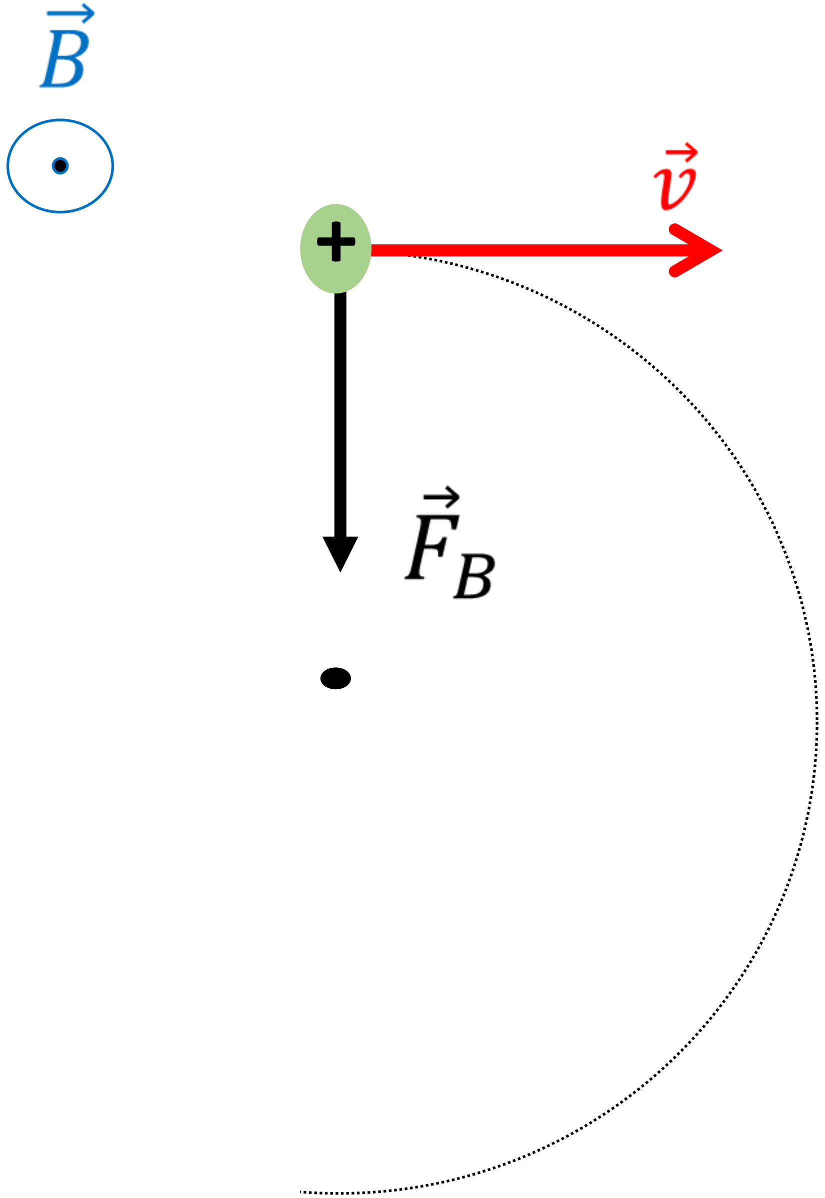
$$\boxed{\vec{F}_B = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

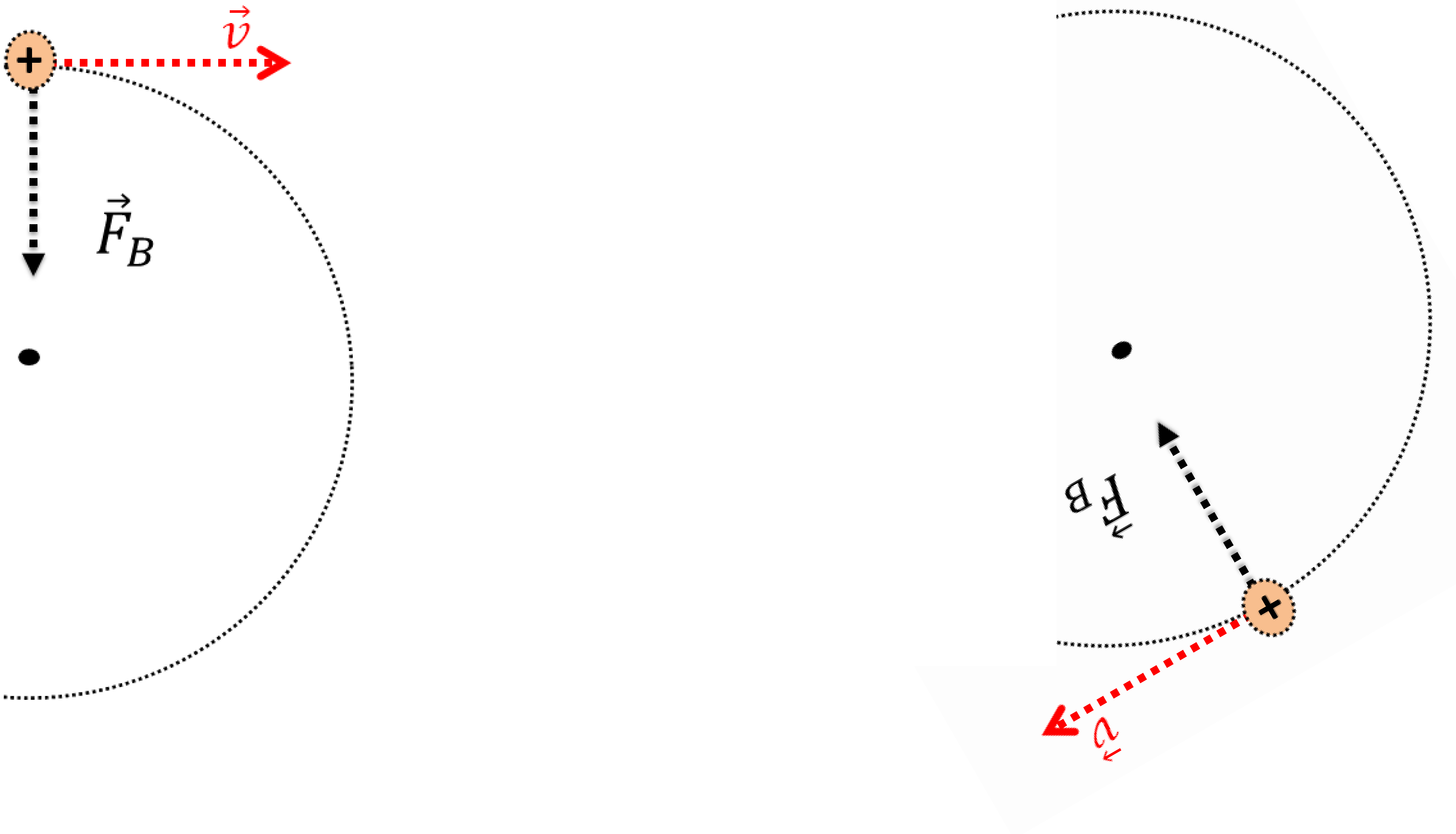




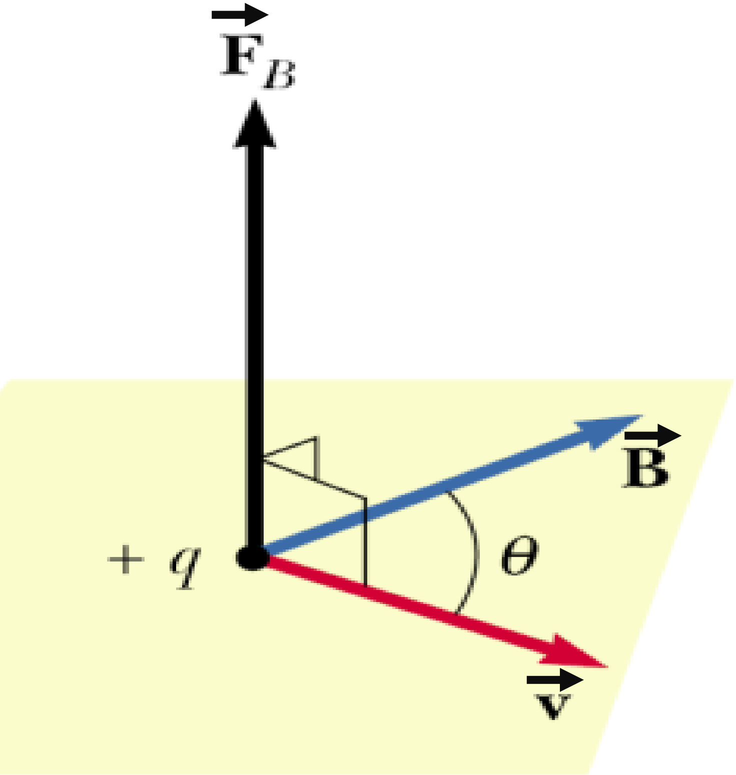


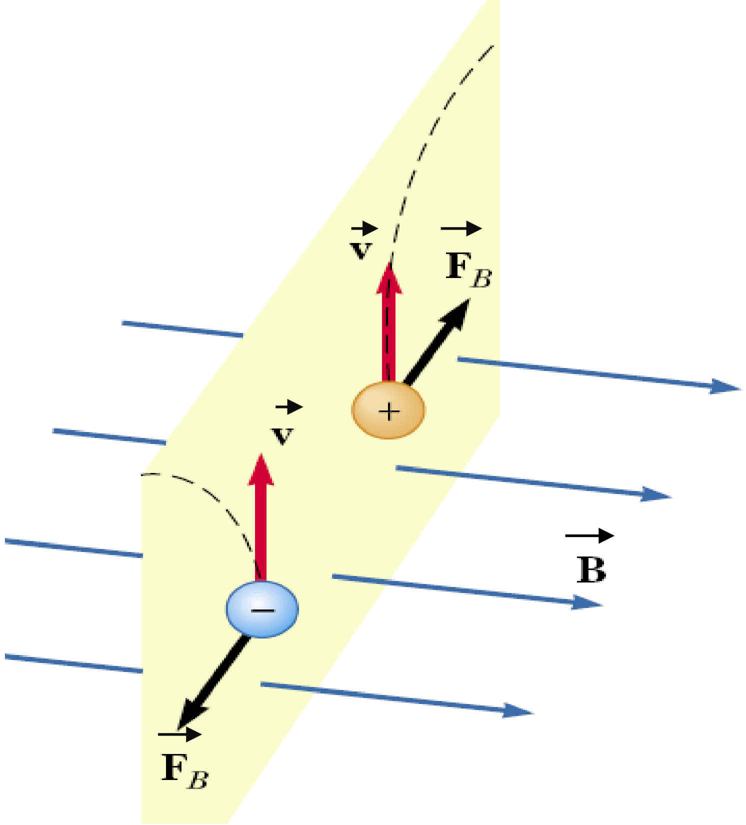
$$\vec{F}_B = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$

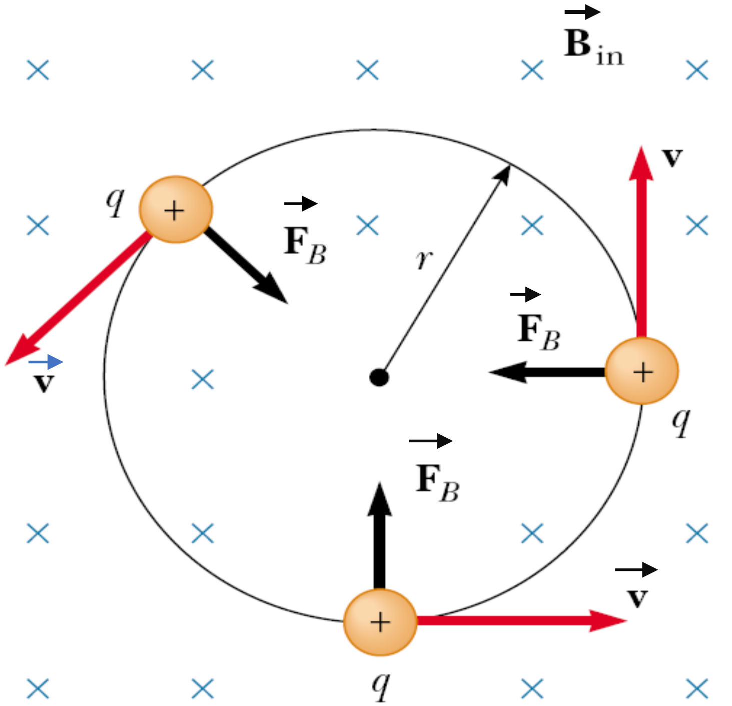



$\vec{v}$
$\vec{F}_B$

$$\vec{F}_B = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$







2. Applications

$$\overrightarrow{F_E} = q\vec{E}$$

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

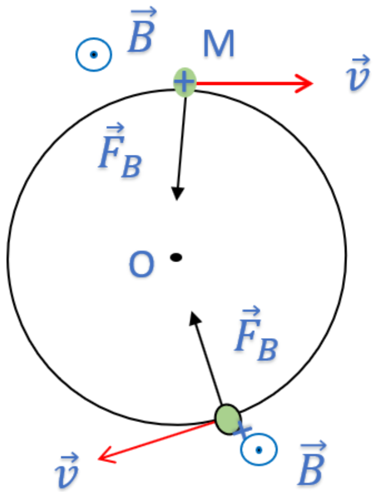
A. Fréquence cyclotronique

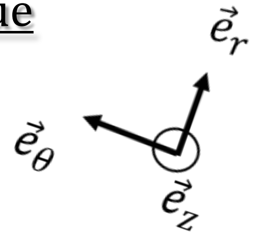
B. Sélecteur de vitesse

C. Spectromètre de masse

D. Accélérateur cyclotron

A. Fréquence cyclotronique



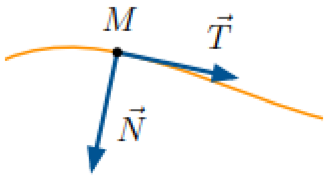


$$\boxed{\vec{F}_B = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

$$\vec{F}_B = |q|.v.B(-\vec{e}_r)$$

On rappelle l'expression du vecteur accélération dans la base polaire pour une trajectoire curviligne en un point M (OM=r)

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N}$$



$$\vec{\gamma} = -\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{e}_r$$

Le PFD $\quad m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ex} = \vec{F}_B$

$$m\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta + m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = |q|.v.B\,\vec{e}_r \longrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = 0 \\ m\dfrac{v^2}{r} = |q|.v.B \end{cases}$$

La trajectoire de la particule est donc un cercle de rayon r=R.

$$m\frac{v^2}{R} = |q|.v.B \longrightarrow \boxed{R = \frac{mv}{|q|.B}}$$

La vitesse angulaire : $\quad \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{|q|.B}{m} \quad [rd/s]$

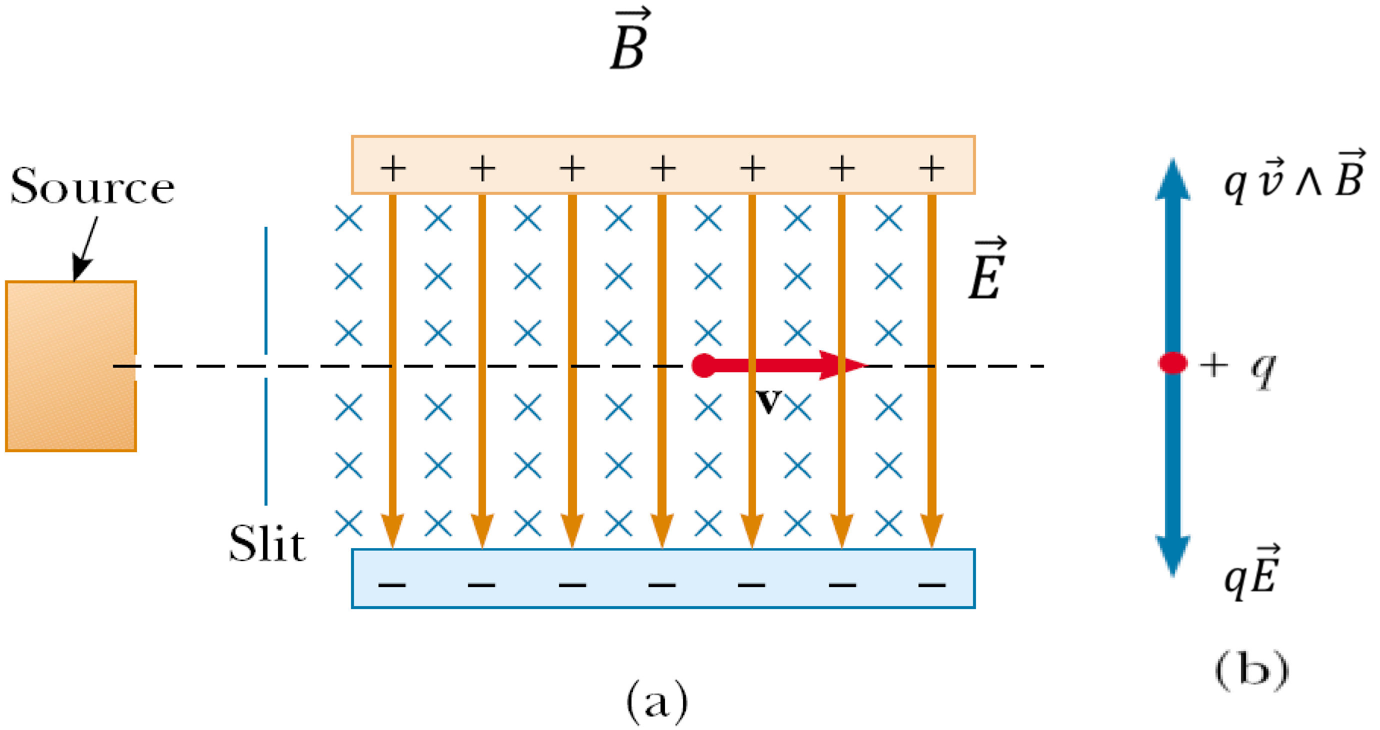
d'où la fréquence cyclotronique

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|.B}{2\pi.m} \quad [Hz]}$$

et la période cyclotronique

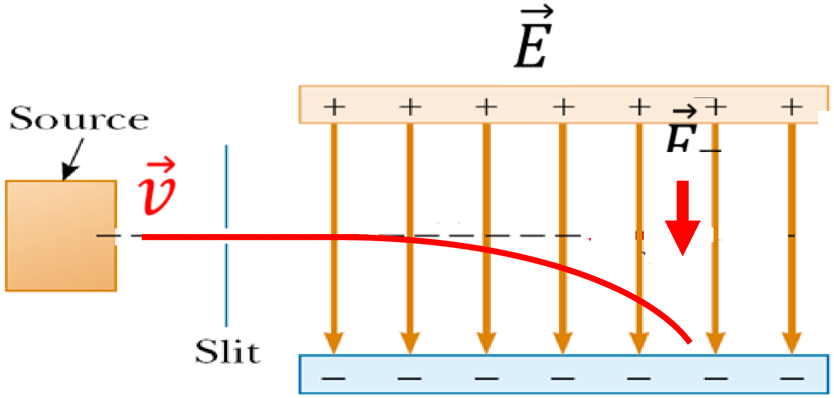
$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi.m}{|q|.B} \quad [s]}$$

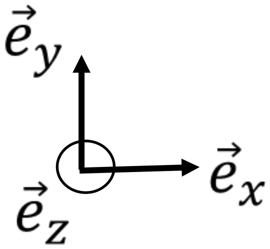
B. Sélecteur de vitesse

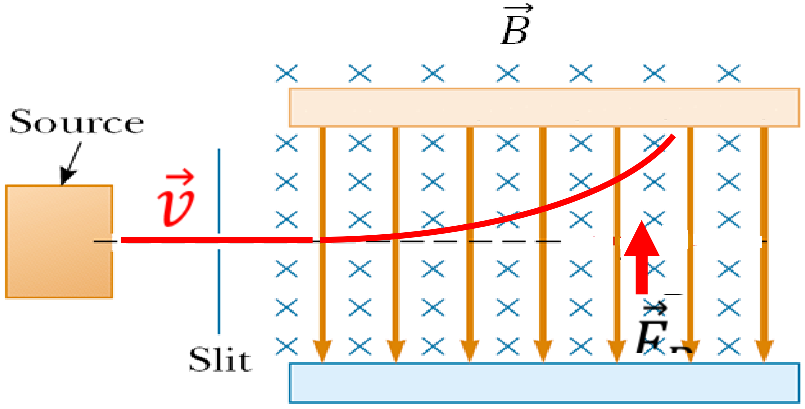


Le sélecteur de vitesse permet de trier un jet de particules chargées en deux groupes de particules :

- Les particules qui ont une vitesse **égale** à la **vitesse de sélection** peuvent traverser le sélecteur.
- Les particules qui **n'ont pas** une **vitesse égale** à la **vitesse de sélection** sont bloquées par le sélecteur.







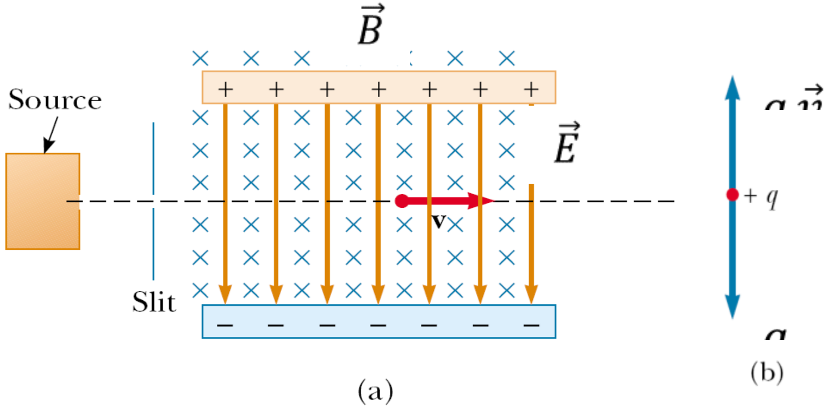
$$\vec{F}_E = q\vec{E} = -qE\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_B = q.\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z) = qvB\vec{e}_y$$

Les particules qui peuvent passer sont celles qui ne sont pas déviées

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = \vec{0}$$

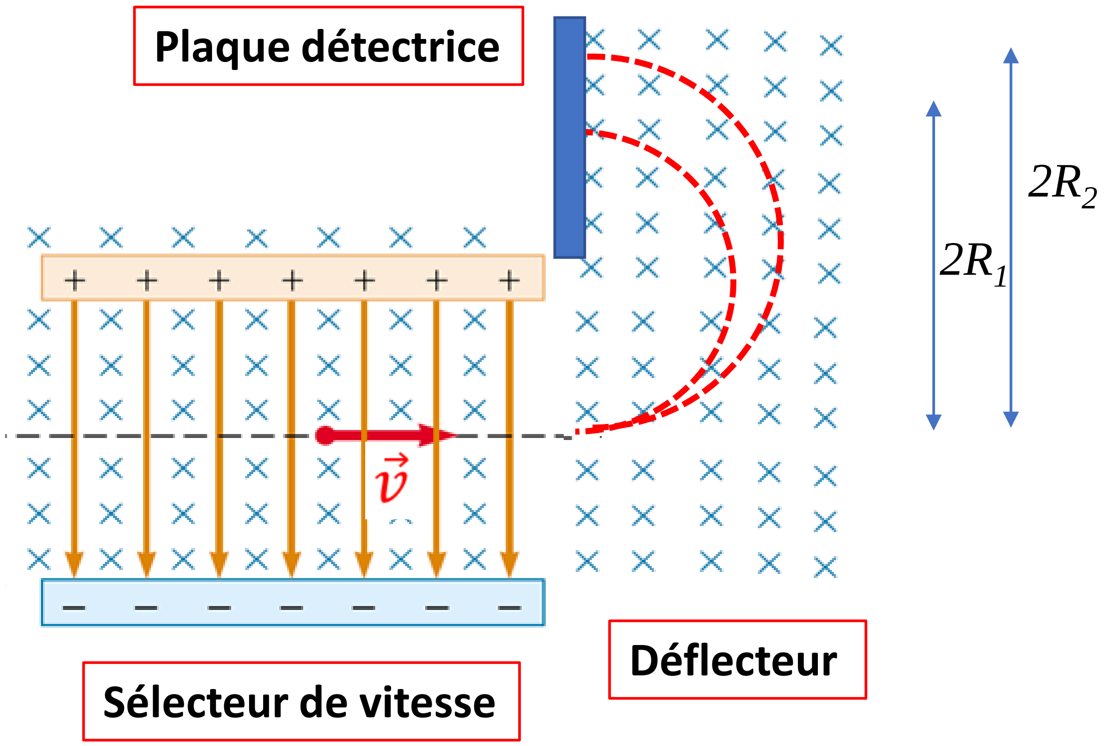
$$F_E = qE = F_B = q.v.B$$



$$\boxed{v = \frac{E}{B} \quad [m/s]}$$

C. Spectromètre de masse

Le spectrographe de masse permet de mesurer la masse des atomes ou des molécules et permet d'identifier les masses de différents isotopes et ions.



Fonctionnement :

Source

Production des particules à analyser. Ces particules ont des vitesses variables.

Sélecteur de vitesse

Le sélecteur de vitesse trie les particules à analyser et laisse passer seulement celles qui ont une vitesse

$$v = \frac{E}{B} \quad [m/s]$$

Déflecteur

Le déflecteur est une zone où le champ magnétique est présent pour permettre aux particules d'effectuer une trajectoire circulaire dont le rayon est déterminé par :

$$R = \frac{mv}{|q|.B}$$

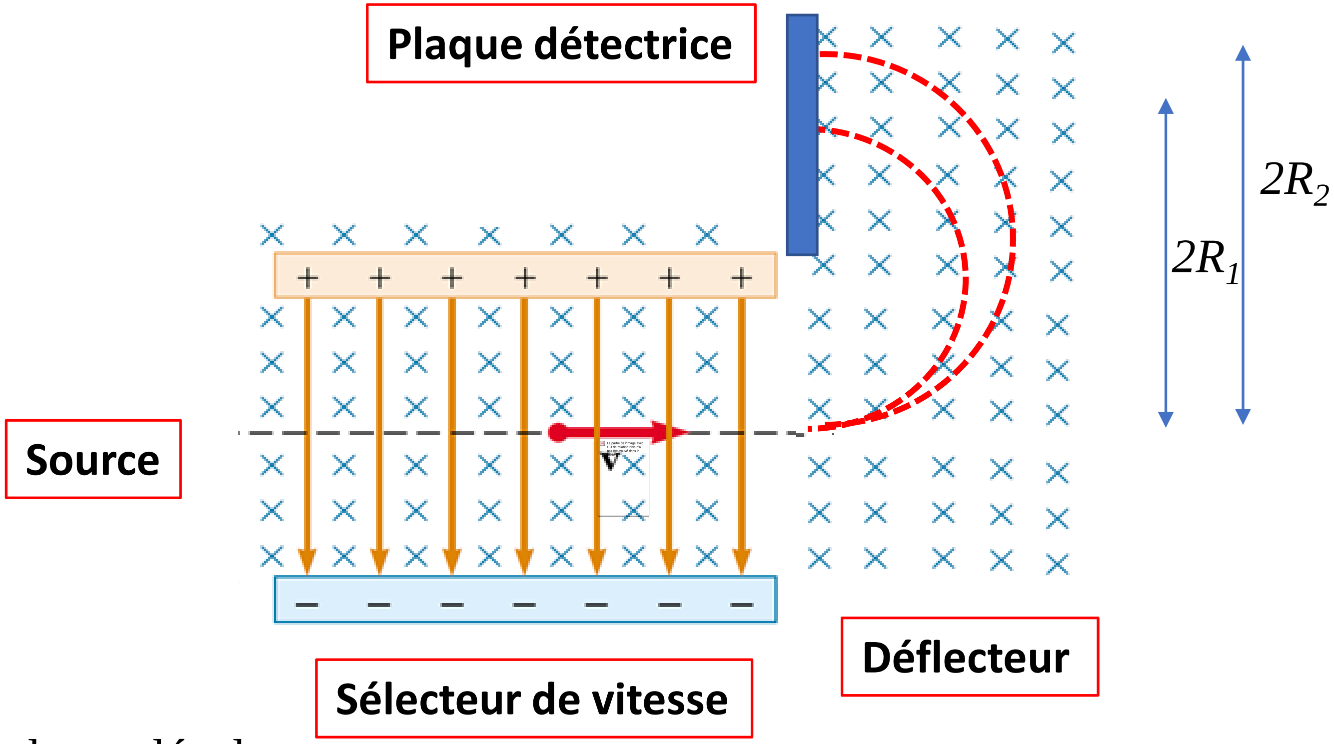
Plaque détectrice

La plaque détectrice permet d'identifier la présence de la particule et de mesurer le rayon de la trajectoire circulaire via la mesure du diamètre de la trajectoire.

$$pour\ une\ masse\ m_1 \ \rightarrow R_1 = \frac{m_1.v}{q.B}\ ;$$

$$pour\ une\ masse\ m_2 \ \rightarrow R_2 = \frac{m_2.v}{q.B}$$

C. Spectromètre de masse

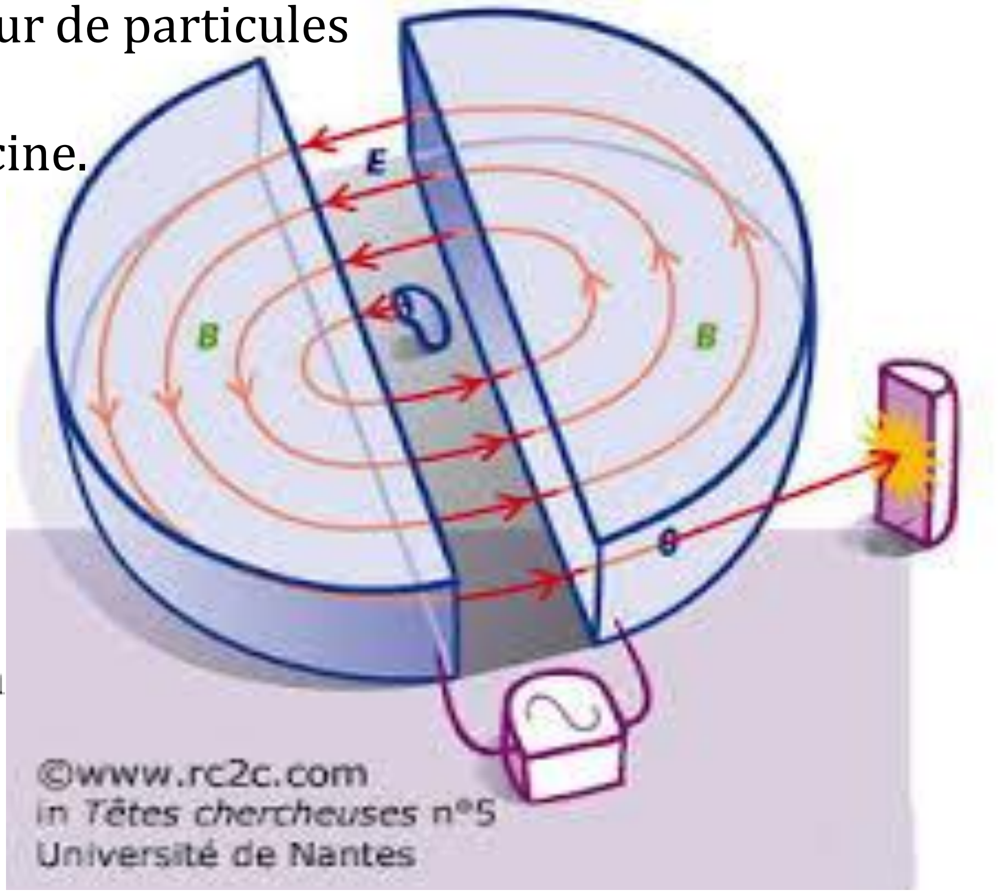


Applications :

- En chimie analytique : détermination de la formule brute des molécules ;
- En chimie de l'environnement : analyse de l'air et de l'eau ; suivi de la pollution par des pesticides ou des processus industriels.
- En biochimie : identification de protéines (séquençage d'acides aminés) et de micro-organismes ; analyse de gaz sanguins ; pharmacologie ; toxicologie.
- En physique fondamentale : mesure de masse d'atomes stables.
- En sciences de la Terre : mesure des rapports isotopiques (géologie, océanographie, glaciologie, volcanologie, physique de l'atmosphère, étude des météorites, planétologie, etc.)

D. Accélérateur cyclotron

Sa découverte a permis à son inventeur Ernest Orlando Lawrence de se voir décerner le prix Nobel de physique en 1939, c'est un accélérateur de particules qui permet de produire des isotopes radioactifs (oxygène 15, carbone 11, azote 13, fluor 18) servant à la médecine.



Fonctionnement :

Il s'agit de l'application successive du champ électrique $\vec{E}$ pour accélérer les particules chargées (électrons ou protons) et d'un champ $\vec{B}$ pour obtenir des trajectoires circulaires de ces particules.

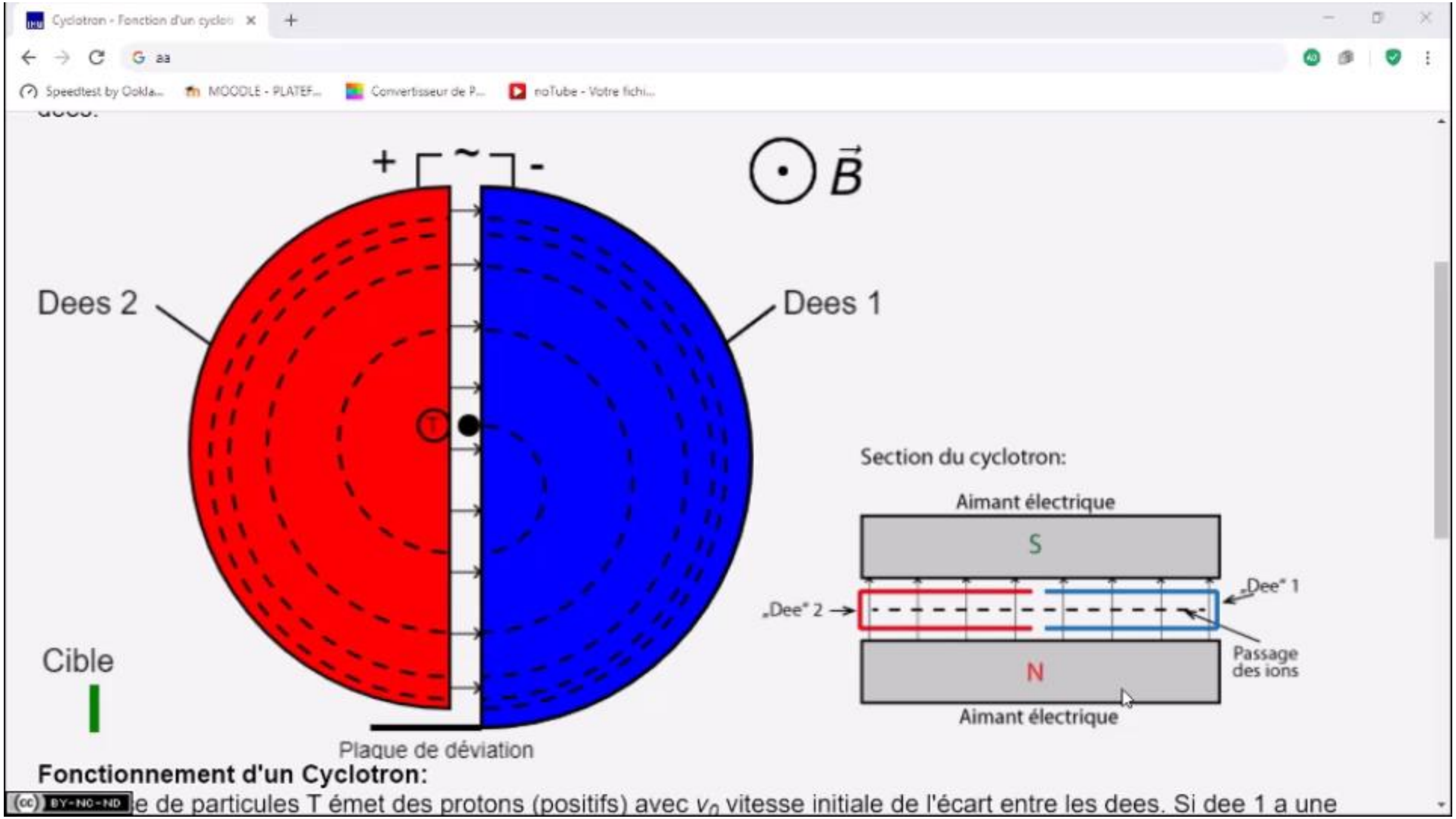
$\vec{F}_E = q\,.\,\vec{E}$ $\Rightarrow$ $|\vec{v}|$ augmente puisque il y a accélération

Lorsque la particule arrive en K dans la région (I), elle décrit une trajectoire circulaire

$\vec{F}_B = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\Rightarrow$ trajectoire circulaire. Le temps de passage T (période) dans la cavité reste constant (période cyclotronique) :

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}}$$

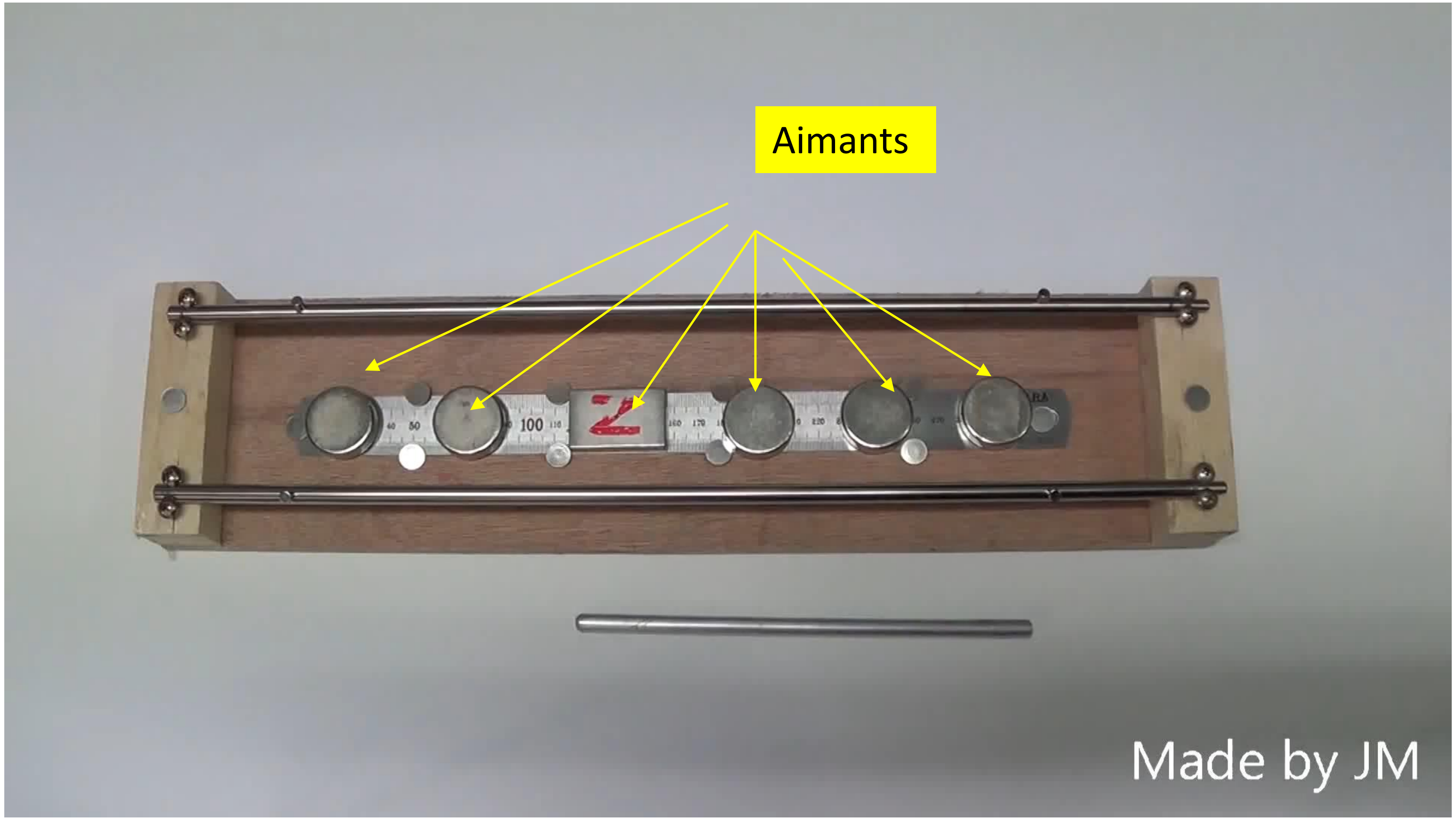
et ne dépend pas de la vitesse



https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/elektronenbahnen/fr/b-feld/anwendung/zyklotron.php

Expériences

Force de Laplace:



4. Loi de Biot et Savart

(Cette loi traduit le caractère magnétique du courant électrique)

a. Expérience:

Une aiguille aimantée placée à proximité d'un conducteur traversé par un courant I, prend une direction différente de celle du pôle magnétique.

b. Postulat de la force magnétique entre deux charges en mouvement

Entre deux charges en mouvement, par rapport à un référentiel Galiléen, la partie magnétique de la force exercée sur la charge 1, par la charge 2, s'écrit:

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q_1\,\vec{v}_1 \wedge q_2\,\vec{v}_2}{r^2} \wedge \vec{u}\right),$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad et \quad \vec{r} = \overrightarrow{M_2M_1}$$

M_1 *et* M_2 *étant les positions respectives des charges* q_1 *et* q_2 *à l'instant* t

Remarque

$\vec{F}_{2\to1}$ *est orthogonale à* $\vec{v}_1$,

$\vec{F}_{2\to1}$ *n'est pas forcément opposée à* $\vec{F}_{1\to2}$

c. Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Force électrostatique

$$\vec{F}_{E\,2\to1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1\,.q_2}{r^2}.\vec{u}\right)$$

$$\vec{F}_{E\,2\to1} = q_1\,.\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2}{r^2}.\vec{u}\right)$$

Champ électrostatique créé, en un point M_1 , par la charge q_2 __immobile__

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2}{r^2}.\vec{u}}$$

$$\vec{F}_{E\,2\to1} = q_1\,.\vec{E}_2$$

Force magnétique

$$\vec{F}_{B\,2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q_1\,\vec{v}_1 \wedge q_2\,\vec{v}_2}{r^2}\wedge\vec{u}\right)$$

$$\vec{F}_{B\,2\to1} = q_1\,\vec{v}_1 \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_2\,\vec{v}_2}{r^2}\wedge\vec{u}\right)$$

Champ d'induction magnétique créé, en un point M_1 , par la charge q_2 __en mouvement__

$$\boxed{\overrightarrow{B_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_2\,\vec{v}_2}{r^2}\wedge\vec{u}}$$

$$\vec{F}_{B\,2\to1} = q_1\,\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_2$$

d. Champ magnétique créé par une distribution de charge en mouvement

Le champ magnétique créé par une charge élémentaire q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2\ \vec{v}_2}{r^2} \wedge \vec{u}}$$

Pour une distribution de charge, considérons une charge élémentaire dq de cette distribution, munit de la vitesse $\vec{v}$ sa contribution au champ magnétique s'écrit:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\ \vec{v}}{r^2} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq\ \vec{v}}{r^2} \wedge \vec{u}$$

Rappel

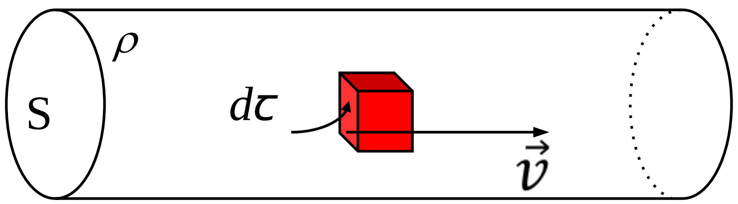
densité de courant $\vec{j}$ en fonction de la densité de charge ρ

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

le courant I en fonction de la densité de courant

$$I = \iint \vec{j}\overrightarrow{ds}$$

$$I = \iint_s \vec{j}\overrightarrow{ds} = j\ s$$



$$dq\ \vec{v} = \rho d\tau\ \vec{v}$$
$$= \rho \vec{v}\ d\tau$$
$$= \vec{j}\ \ d\tau$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau}{r^2} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} d\tau}{r^2} \wedge \vec{u}$$

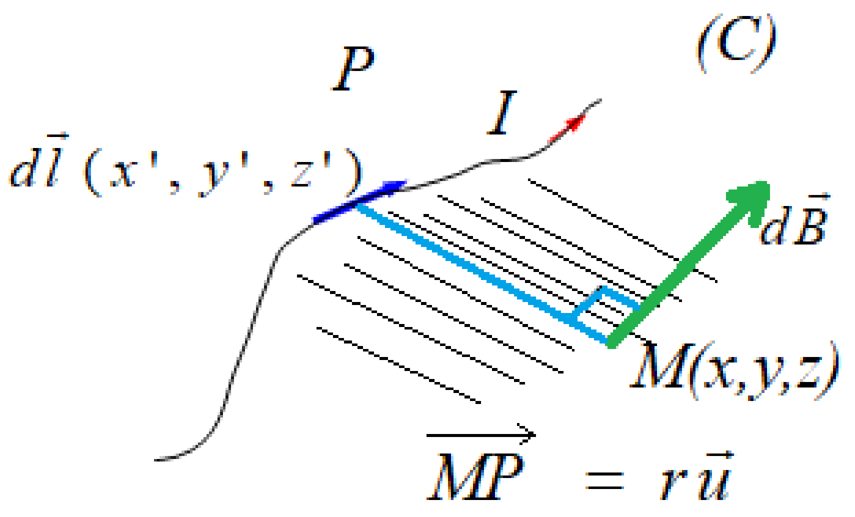
e. Loi de Biot et Savart pour un fil uniforme

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}d\tau}{r^2}\wedge\vec{u} \qquad\qquad \vec{j}d\tau = dq\vec{v} = Idt\vec{v} = I\overrightarrow{dl}$$

Dans le cas d'un fil filiforme de section S

La contribution au champ magnétique d'une portion *dl* d'un fil filiforme parcouru par un courant *I*

$$\boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\overrightarrow{dl}}{r^2}\wedge\vec{u}}$$



Champ magnétique créé par tout le fil

$$\boxed{\vec{B} = \int_c d\,\vec{B} = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\;d\vec{l}\wedge\vec{u}}{r^2}}$$

A retenir

Force électrostatique $\overrightarrow{F_E} = q\vec{E}$

Force magnétique $\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Force de Lorentz $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

Force de Laplace $\vec{F} = I\,\vec{l} \wedge \vec{B}$

Champ d'induction magnétique crée par une distribution de courant :

- volumique $\overrightarrow{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{\vec{j}d\tau \wedge \vec{u}}{r^2}$ $\longrightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{\vec{j}d\tau}{r^2} \wedge \vec{u}$
- linéique $\overrightarrow{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{I\overrightarrow{dl}}{r^2} \wedge \vec{u}$ $\longrightarrow$ $\vec{B} = \displaystyle\int_c d\,\vec{B} = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\ d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$

Applications

- Fil (voir polycopié p21)
- Spire
- Solénoïde
- Bobines d'Helmotz

- Barrières électromagnétiques (Voir TD)
- Effet Hall
- Rails de Laplace

Distribution volumique

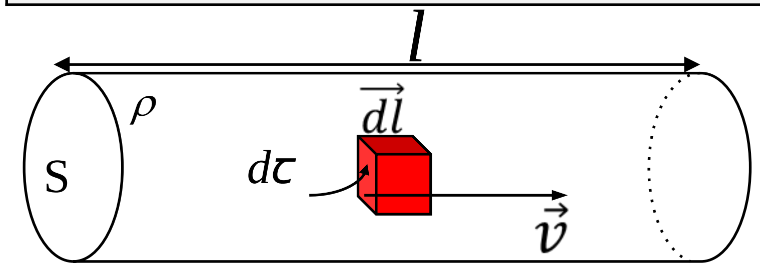
$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{j}\ d\tau \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}\ d\tau \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}}$$

densité de courant $\vec{j}$ en fonction de la densité de charge ρ $\qquad \vec{j} = \rho\vec{v}$

le courant I en fonction de la densité de courant $\qquad I = \iint \vec{j}\,\overrightarrow{ds}$

$$I = \iint_S \vec{j}\,\overrightarrow{ds} = j\ s$$



$$\begin{aligned}\vec{j}\ \ d\tau = \rho\vec{v}\ d\tau &= \rho d\tau\ \vec{v}\\ &= dq\ \vec{v}\\ &= dq\frac{\overrightarrow{dl}}{dt}\\ &= I\overrightarrow{dl}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{j}\ \ d\tau = I\overrightarrow{dl}}$$

Distribution filiforme

(un fil)

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ I\ \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{B} = \int_c d\vec{B} = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}}$$

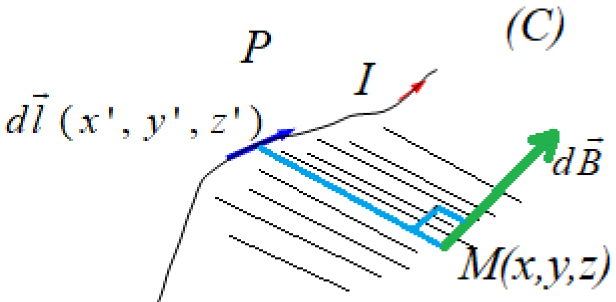
2. le flux de $\vec{B}$ est conservatif

$$\boxed{\phi = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S}}$$

$$\vec{B} = \int_c d\vec{B} = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$I\vec{dl} = \vec{j}\,d\tau$$

$$\vec{B} = \int_{\tau'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2}\,d\tau$$



$$\overrightarrow{MP} = r\,\vec{u}$$

<u>calculons</u> $div\,\vec{B}$

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'} \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2}\right) d\tau$$

or

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{J} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}\right) = \frac{\vec{u}}{r^2}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) - \vec{J}.\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}\right)$$

$$= 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\oiint \vec{B}.d\vec{S} = \iiint div\,\vec{B}.\;d\tau \longrightarrow \phi = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Traduit la conservation du flux du champ d'induction magnétique

---

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} = \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{(x-x')}{r^3} & \frac{(y-y')}{r^3} & \frac{(z-z')}{r^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) + \vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A})$$
$$= \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) - \vec{B}.(\vec{A} \wedge \vec{C})$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) = \vec{0}$$

Un déplacement du point M n'agit pas sur la densité J

Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) :

$$\oiint_S \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_\tau div\,\vec{A}\,d\tau$$

S est une surface qui s'appuie sur le contour (C)

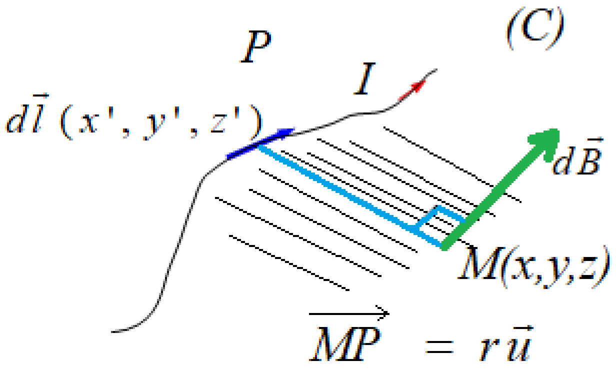
2. le flux de $\vec{B}$ est conservatif

$$\phi = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\vec{B} = \int_c d\vec{B} = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$Id\vec{l} = \vec{j}d\tau$$

$$\vec{B} = \int_{\tau'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2}\, d\tau$$



<u>calculons</u> $div\,\vec{B}$

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'} \vec{\nabla}.(\frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2})\, d\tau$$

or

$$\vec{\nabla}.(\vec{J} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}) = \frac{\vec{u}}{r^2}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{J}) - \vec{J}.(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2})$$

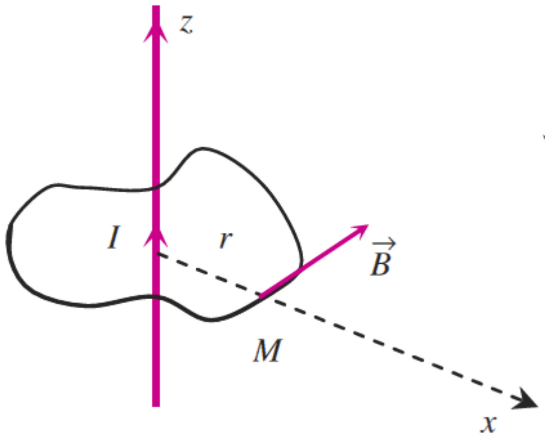
$$= 0$$

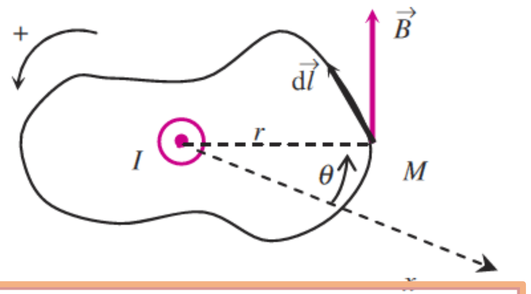
$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\oiint \vec{B}.d\vec{S} = \iiint div\,\vec{B}.\ d\tau \longrightarrow \phi = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

Traduit la conservation du flux du champ d'induction magnétique

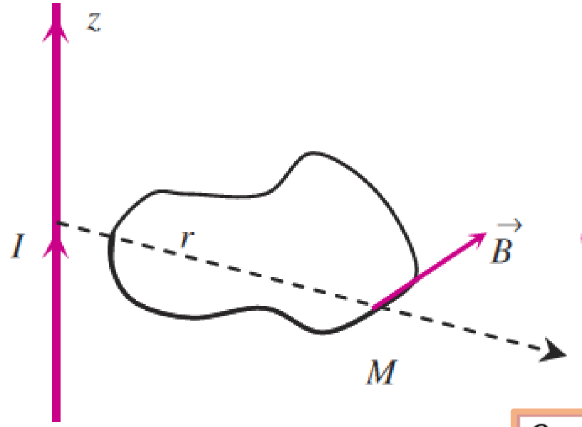
3. Théorème d'*Ampère*

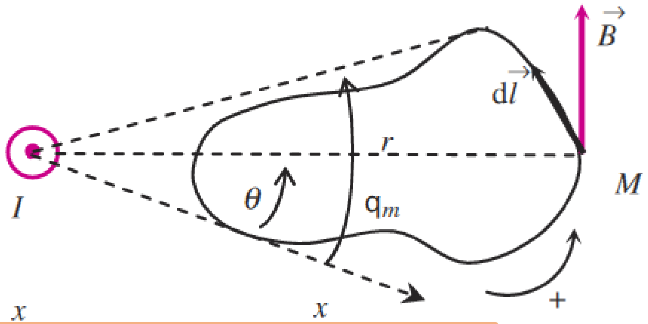




$$\boxed{\theta \ \ varie\ entre\ 0 \ \rightarrow \pi \rightarrow \ 2\pi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$





$$\boxed{\theta\ varie\ entre\ 0 \rightarrow \theta_m \rightarrow 0}$$

Circulation sur un contour fermé du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant

L'expression de la circulation élémentaire est par définition :

$$\overrightarrow{dC} = \vec{B}.\overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{dl} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta \longrightarrow \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\theta$$

$$\vec{C} = \oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\theta$$

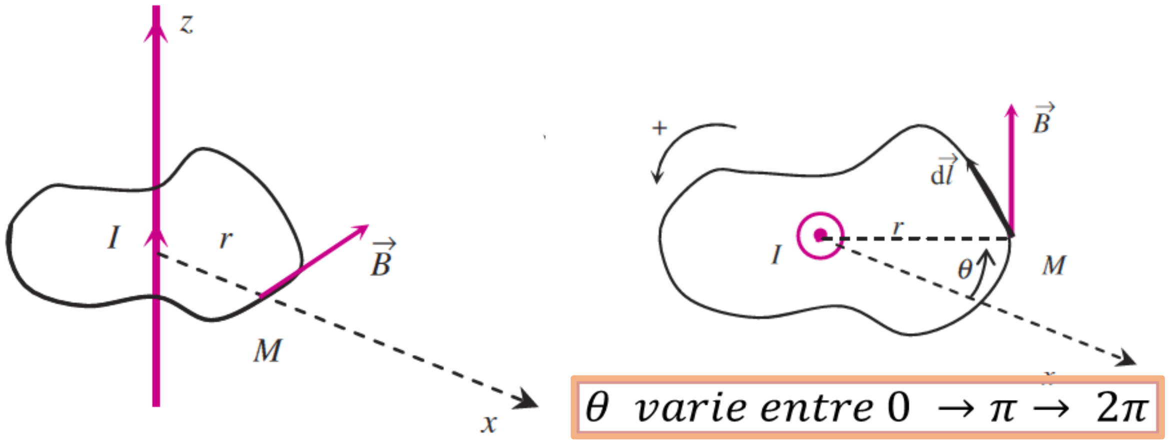
Si le fil traverse la surface du contour

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$$

Si le fil se trouve à l'extérieur de la surface du contour

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{0} d\theta = 0$$

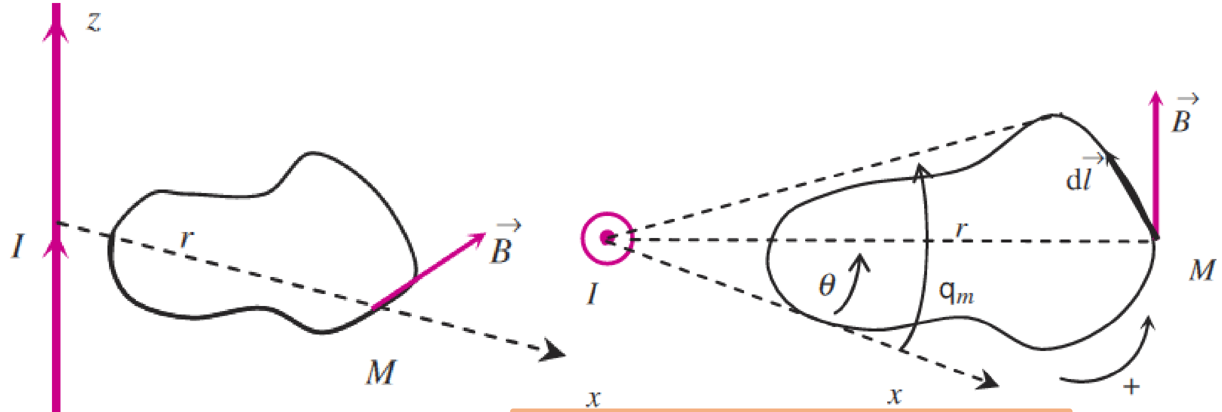
3. Théorème d’*Ampère*



θ *varie entre* $0 \rightarrow \pi \rightarrow 2\pi$

Si le fil traverse la surface du contour

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$$



θ *varie entre* $0 \rightarrow \theta_m \rightarrow 0$

Si le fil se trouve à l’extérieur de la surface du contour

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{0} d\theta = 0$$

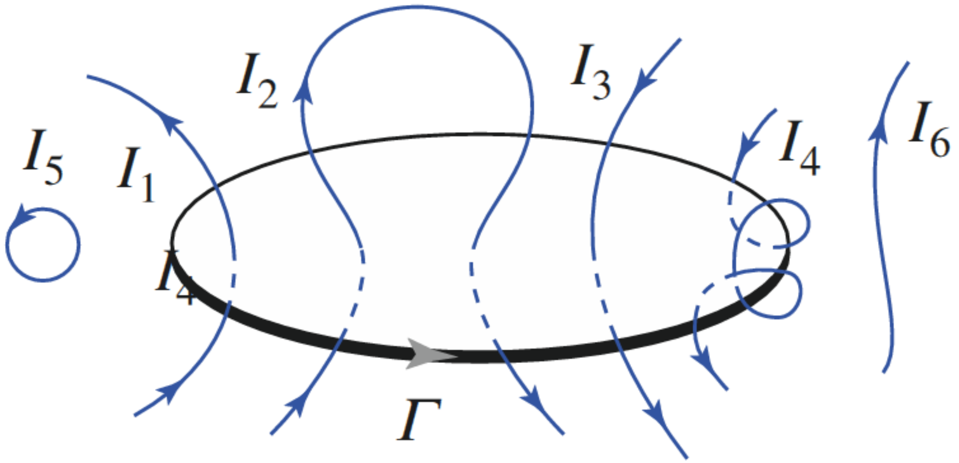
1. Forme Intégrale

La circulation du champ magnétique, crée dans le vide par un courant I, le long d'un contour (Γ) fermé est égale à $\mu_0 I$; la boucle (Γ) entourant une seule fois le circuit dans le sens positif.

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

Généralisation:

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\, d\vec{l} = \sum_k \mu_0 \varepsilon I_k$$



$\varepsilon = +1$ si le sens de parcours est positif
$\varepsilon = -1$ si le sens de parcours est négatif

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\, d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_3 - 3I_4)$$

Intérêt et utilisation du théorème d'Ampère

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir déterminer facilement le champ magnétique en tout point M de l'espace créé par des courants présentant des degrés de symétrie élevés (systèmes infinis tels que cylindre, fil, nappe de courant etc…)

Démarche à suivre

- *Choisir un contour fermé passant par le point M et entourant la distribution de courants, tel que le champ aura une intensité constante sur ce contour.*
- *Calculer ensuite la circulation de $\vec{B}$ le long de ce contour, elle sera égale à μ_0 fois la somme de tous les courants enlacés (**attention au signe des courants, leur signe dépend de l'orientation de la surface**).*

2. Forme locale

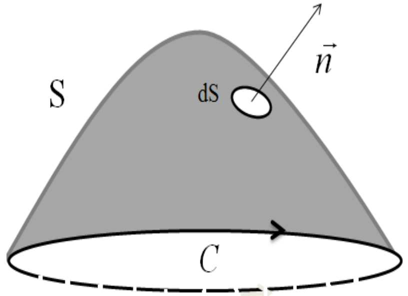
Le théorème de *Stockes* permet d'écrire: $\oint_{\Gamma} \vec{B}.\ d\vec{l} = \iint_{S} \overrightarrow{rot\ \vec{B}}\ .\ d\vec{S}$

Le théorème d'*Ampère* s'écrit: $\oint \vec{B}.\ d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{j}.\ d\vec{S}$ puisque $I = \iint \vec{j}\overrightarrow{ds}$

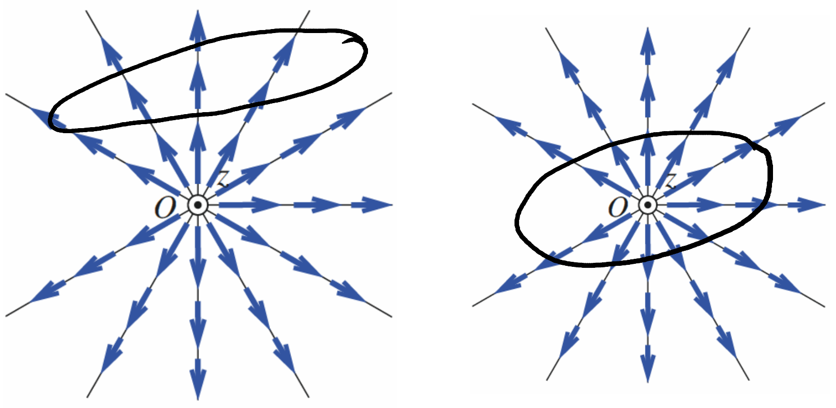
$$\iint_S \overrightarrow{rot\ \vec{B}}\,.\,d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j}.d\vec{S} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{rot\ \vec{B}} = \mu_0 \vec{j}}$$

Théorème de Stokes (ou du rotationnel) :

$$C = \oint_{(C)} \vec{A}\,\overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}\right).\overrightarrow{dS}$$



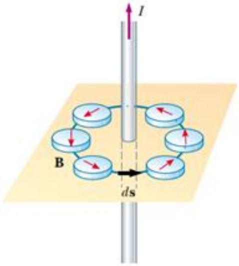
$\vec{E}$ *créé par une charge* $q>0$

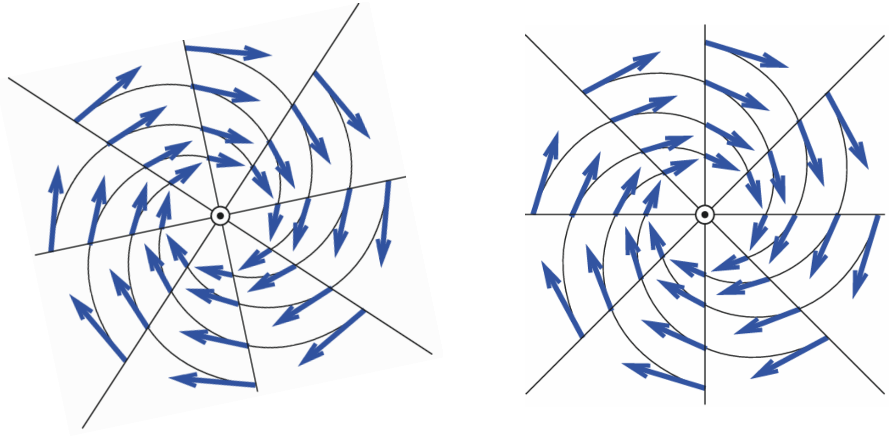


$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oiint_{\Sigma} \vec{E}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int à }\Sigma}}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \qquad \oint_{\Gamma} \vec{E}\,.\,\mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

$\vec{B}$ *créé par un courant I*

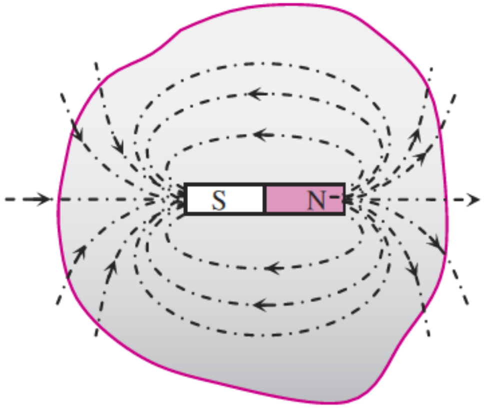


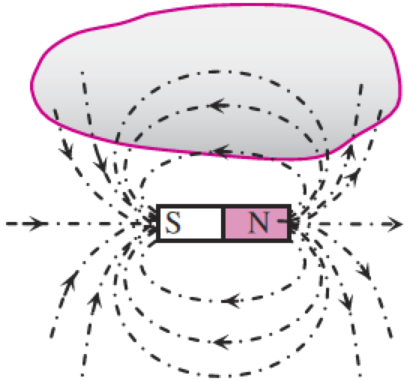


$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \oiint_{\Sigma} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\,. \qquad \oint_{\Gamma} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\text{enlacé}}$$

$\vec{B}$ *créé par un aimant*





$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4. Potentiel-Vecteur $\vec{A}$ du champ $\vec{B}$

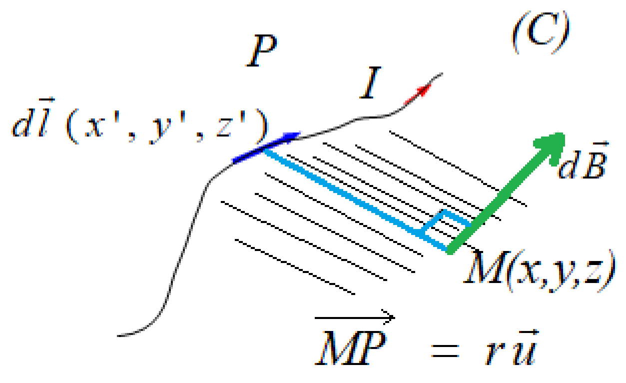
1. Notion de Potentiel-Vecteur

Nous savons que si $\vec{b} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$ alors $\vec{\nabla}.\vec{b} = 0$

Réciproquement, si $\vec{\nabla}.\vec{b} = 0$ \$ au moins $\vec{A}(r)$ / $\vec{b} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

On dit que $\vec{B}$ dérive d'un potentiel–vecteur $\vec{A}$

2. Potentiel-Vecteur du vecteur induction



$$\vec{B} = \int_{\tau'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) \wedge \vec{j} d\tau$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{j}}{r} d\tau) \qquad (\vec{\nabla} \wedge \vec{j} = \vec{0})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (f.\vec{V}) = f(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) + (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{V} \longrightarrow (\vec{\nabla}\ f) \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge (f.\vec{V}) - f\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$$

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\vec{\nabla}.V$$

2. Potentiel-Vecteur du vecteur induction

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'} \frac{\vec{j}}{r}\, d\tau\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'} \frac{\vec{j}}{r}\, d\tau\right)$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{\tau'} \frac{\vec{j}}{r}\, d\tau' \end{cases}$$

Nature du champ		Loi locale	Loi intégral
Électrique	**flux**	Équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{\rho(P)}{\varepsilon_0} \mathrm{d}\tau = \dfrac{Q_{\text{int à } \Sigma}}{\varepsilon_0}$
	circulation	Le rotationnel du champ électrique permanent est nul : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ partout	La circulation du champ électrique permanent est conservative : $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ quel que soit Γ
Magnétique	**flux**	Équation du flux magnétique : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ partout	Le champ magnétique a un flux conservatif : $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ quelle que soit Σ fermée
	circulation	Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$	Théorème d'Ampère : $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ $= \mu_0 I_{\text{enlacé}}$