Le 16 Janvier 2016

Examen

Physique 5 (Filières SMA – S3)

Session Normale – Durée 1h30

Exercice I

Soit un fil conducteur de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité *I*.

1. Calculer à l'aide du théorème d'Ampère le champ d'induction magnétique $\vec{B}_1$ produit par le fil en tout point *M* de l'espace (énoncer les invariances et les symétries qui caractérisent ce système).

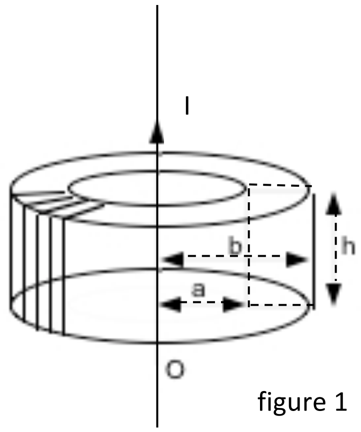

figure 1

I. Les invariances du champ d'induction magnétique :

1. Si une distribution de courants est invariante pour toute translation parallèle à un axe noté (Oz), champ magnétique et potentiel vecteur seront indépendants de la coordonnée cartésienne z.

2. Si une distribution de courants est invariante pour toute translation parallèle à un plan noté (Oxy), champ magnétique et potentiel vecteur ne dépendront que de la coordonnée cartésienne z.

3. Si une distribution de courants est invariante pour toute rotation autour d'un axe noté (Oz), champ magnétique et potentiel vecteur seront indépendants de la coordonnée cylindrique ϕ. Le problème est dit à symétrie de révolution.

4. Si une distribution de courants possède les invariances (1) et (3), champ magnétique et potentiel vecteur ne dépendront que de la coordonnée cylindrique ρ. Le problème est dit à symétrie cylindrique. $\vec{B}_1(M) = \vec{B}_1(\rho)$

Le contour fermé sur lequel le champ magnétique sera constant est un cercle de centre l'axe du fil et de rayon r.

II. Les symétries de la distribution du courant:

En tout point d'un plan de symétrie, le champ magnétique est orthogonal à ce plan : $M \in \Pi_s \Longrightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi_s$

En tout point d'un plan d'antisymétrie, le champ magnétique est contenu dans ce plan $M \in \Pi_a \Longrightarrow \vec{B}(M) \in \Pi_a$

Tout plan contenant le fil infini (axe Oz) constitue un plan de symétrie de cette distribution de courant : $M \in \Pi_s \Longrightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi_s$

Tout plan parallèle au plan Oxy est plan d'antisymétrie pour la distribution du courant : $M \in \Pi_a \Longrightarrow \vec{B}(M) \in \Pi_a$

Alors : $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_\varphi$

Théorème d'Ampère :

$\oint_\Gamma \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{enlacés}$ alors, $B_1 \cdot 2\pi\rho = \mu_0 \sum I_{enlacés}$ d'où $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$

2. Considérons maintenant une bobine torique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b et de hauteur h, contenant un nombre total de N spires. L'axe de symétrie de la bobine est confondu avec celui du fil conducteur (figure 1).

   a. Calculer le flux du champ magnétique à travers la bobine.

$$\Phi = N \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad d\vec{S} = d\vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi = h d\rho \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\Phi = N \frac{\mu_0 hI}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = N \frac{\mu_0 hI}{2\pi} Ln \frac{b}{a}$$

   b. Donner l'expression du coefficient d'induction mutuelle.

$$\Phi = MI = \left(\frac{\mu_0 Nh}{2\pi} Ln \frac{b}{a} \right) I \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 Nh}{2\pi} Ln \frac{b}{a}$$

Exercice II

Nous savons qu'une boucle conductrice de rayon *a*, parcourue par un courant d'intensité I_1 produit en un point *M* (distant de *d*) de son axe, un champ magnétique donné par la relation :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}\vec{e}_z$$

On place à une distance d, dans un plan parallèle à celui de la première spire, une deuxième spire conductrice, de résistance *R*, de rayon *b* et de même axe de symétrie que la première (figure 2). On suppose le champ magnétique uniforme sur toute la surface de cette spire.

1. Pour une intensité de courant $I_1 = I_0 Sin\omega t$, calculer la f.e.m induite qui apparaît dans la deuxième spire.

$$\Phi = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}\vec{e}_z \cdot \pi b^2 \vec{e}_z \qquad \text{d'où} \qquad \Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{\pi a^2 b^2}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2}\frac{\pi a^2 b^2}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}\frac{dI_1}{dt} \qquad \text{et} \qquad e = -\frac{\mu_0}{2}\frac{\pi I_0 a^2 b^2}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}\omega \cdot Cos\omega t$$

Le signe négatif de la f.é.m. induite est défini par rapport à l'orientation de la surface S_2 choisie.

2. En déduire l'intensité du courant induit. Représenter son sens sur la spire (justifier votre réponse).

$$e = Ri_2$$

$$i_2 = -\frac{\mu_0}{2R}\frac{\pi I_0 a^2 b^2 \omega}{\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}Cos\omega t$$

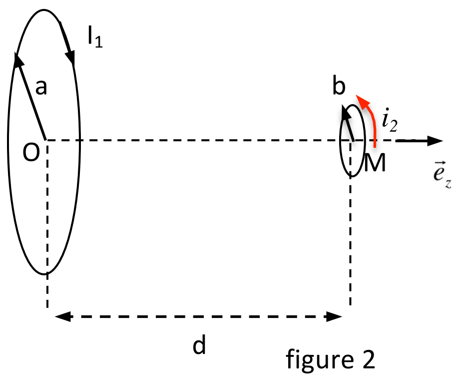

figure 2

En effet, le sens du courant induit est défini par rapport à l'orientatioon de la srface S_2. Ainsi le courant induit est orienté en sens inverse des aiguilles d'une montre.

3. Rappeler la loi de Lenz. Justifier en deux ligne max, que le sens du courant induit est conforme à cette loi.

   La loi de lenz : « tout phénomène induit, par son effet s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance ».

   Le courant induit dans la boucle de rayon R_2 produit un champ magnétique dont le sens est opposé à celui de B_1, le champ qui lui a donné naissance.

4. Quelle est la résultante des forces magnétiques qui s'exerce sur la deuxième spire ? l'ale

   Le champ magnétique B_1 exerce une force de Laplace sur la boucle traversée par i_2.

$$d\vec{F}_L = i_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = -i_2 dl_2 \cdot \vec{e}_\varphi \wedge B_1 \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{F}_L = -i_2 dl_2 B_1 \cdot \vec{e}_\rho(\varphi) \qquad d\vec{F}_L = -i_2 B_1 \oint_{spire} dl_2 \cdot \vec{e}_\rho(\varphi) = -i_2 B_1 \oint_{spire} b\, d\varphi \cdot \vec{e}_\rho(\varphi)$$

$$\oint_{spire} \vec{e}_\rho(\varphi) = \vec{O}$$

   ainsi la résultante des forces magnétique sur la boucle est nulle.

Exercice III

On étudie le dipôle de la figure 3, où le dipôle AD est alimenté par une tension :

u(t) = 100 Cos(1000t)

et $R = 2{,}5\Omega$, $r = 10\Omega$, $L\omega = 5\Omega$, $1/C\omega = 5\Omega$

1. Quelle est l'impédance complexe de la branche parallèle *BD* du circuit?

$$\overline{Z}_{BD} = \frac{\overline{Z}_L \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_C} = \frac{(r + jL\omega)\cdot \frac{-j}{C\omega}}{r + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = 2{,}5 - 5j \quad \overline{Z}_{BD} = 2{,}5 - 5j = 5{,}6 e^{-j63{,}43}$$

2. Calculer l'impédance complexe équivalente du dipôle *AD*

$$\overline{Z}_{AD} = \overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BD} = 5(1 - j)$$

l'expressions complexe de cette grandeur s'écrit alors :

$$\bar{Z}_{AD} = 5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

3. Trouver l'intensité du courant dans le circuit

$$\bar{U} = \bar{Z}_{AD}\bar{I} \qquad \bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{AD}} = \frac{100}{5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

4. Trouver l'angle de déphasage entre la tension et le courant, et indiquer la nature du circuit (justifier votre réponse).

$$\bar{Z}_{AD} = Z_{AD}e^{j\varphi} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Le déphasage est négatif, il s'agit donc d'un circuit capacitif.

5. Donner les expressions des tensions des dipôles *AB* et *BD* du circuit.

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{AB}\bar{I} = 25\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad \bar{U}_{BD} = \bar{Z}_{BD}\bar{I} = 5{,}6e^{-j63{,}43}\cdot 10\sqrt{2}e^{j45} = 56e^{-j18{,}43}$$

6. En déduire les intensités de courant dans chacune des 2 branches du dipôle *BD*.

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_L\bar{I}_L \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_L = \frac{\bar{U}_{BD}}{\bar{Z}_L} = \frac{56e^{-j18{,}43}}{5\sqrt{5}e^{j26{,}6}} = 5e^{-j45} \qquad \bar{Z}_L = r + jL\omega = 5(2+j) = 5\sqrt{5}e^{j26{,}6}$$

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_C\bar{I}_C \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_C = \frac{\bar{U}_{BD}}{\bar{Z}_C} = \frac{56e^{-18{,}43}}{5e^{-j90}} = 11e^{j71{,}57} \qquad \bar{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} = -5j = 5e^{-j90}$$

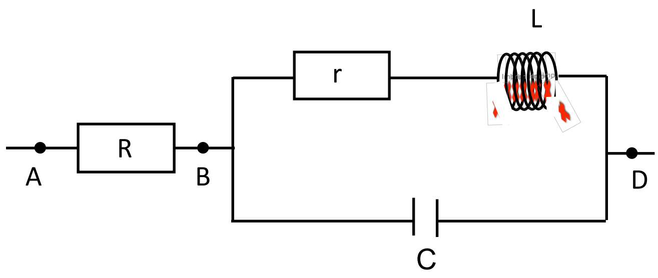

figure 3