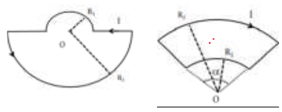
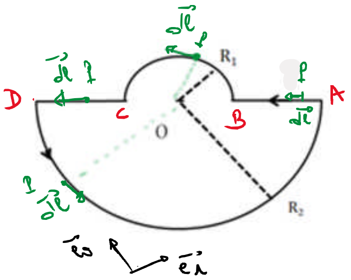
Exercice 3 loi de Biot et Savart demi-spire

Un fil conducteur est formé de deux arcs de cercle de rayons R1 et R2 de même centre O réunis par deux segments. Il circule un courant I dans le fil.



Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ crée par ce courant au point O, pour les deux configurations suivantes:



Loi de Biot et Savart : $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$

$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA}$

• $\vec{B}_{AB}$: $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO}$ $\vec{u} \parallel \vec{dl} \rightarrow \vec{dB} = \vec{0}$ $\vec{B}_{AB} = \vec{0}$

la portion AB ne crée pas de champ en O

• $\vec{B}_{CD} \rightarrow \vec{dB} = \vec{0}$ (pour les mêmes raisons ci-dessus) $\vec{B}_{CD} = \vec{0}$

il reste les portions (BC) et (DA)

• $\vec{B}_{BC}$: $\vec{dl} = R_1 d\theta\, \vec{e_\theta}$ $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO} = -\vec{e_r}$

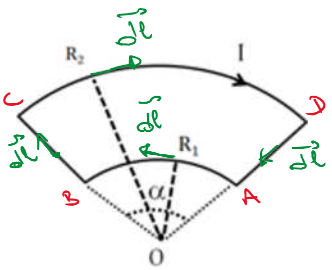
$\vec{dB}_{BC}$ en O créé par $\vec{dl}$ en P :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R_1 d\theta}{R_1^2}\cdot\underbrace{\vec{e_\theta}\wedge(-\vec{e_r})}_{\vec{e_z}}$$

$$\vec{B}_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4R_1}\vec{e_z}$$

• $\vec{B}_{DA}$ $\vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I}{4R_2}\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\vec{e_z}}$$



$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA}$

• $\vec{B}_{AB} = ?$ $\vec{dB}_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{R_1^2}$ $\vec{dl} = R_1 d\theta\, \vec{e_\theta}$ $\vec{u} = -\vec{e_r}$

$\vec{dB}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} d\theta\, \vec{e_z}$ $\vec{B}_{AB} = \int \vec{dB}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}\underbrace{\int d\theta}_{\alpha}\, \vec{e_z}$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}\alpha\, \vec{e_z}$$

• $\vec{B}_{BC} = \vec{B}_{DA} = \vec{0}$ $\vec{u} \parallel \vec{dl}$

• $\vec{B}_{CD} = ?$ $\vec{dB}_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{R_2^2}$ $\vec{dl} = -R_2 d\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{B}_{CD} = \int \vec{dB}_{BC} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2}\underbrace{\int d\theta}_{\alpha}\, \vec{e_z}$

$$\vec{B}_{BC} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2}\alpha\, \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\vec{e_z}}$$