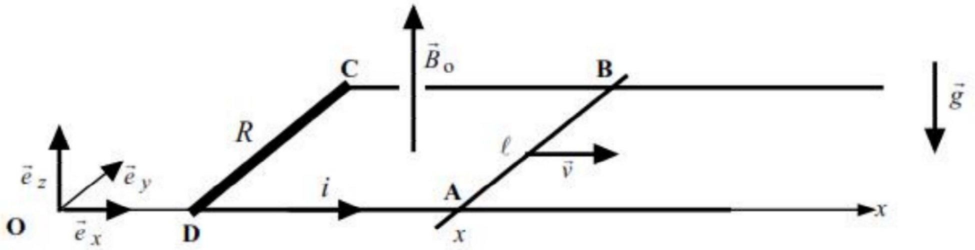
Exercice 10

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (***O,x,y,z***) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Deux rails métalliques parallèles et distants de ℓ, parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice ***CD*** rectiligne, de résistance ***R***. Ces conducteurs constituent un ensemble rigide et immobile.



Afin de fermer le circuit, une barre métallique, parfaitement conductrice, est posée sur les rails, orthogonalement à ceux-ci. Soient ***A*** et ***B*** les points de contact entre la barre et les rails. Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, avec $B_0 > 0$.

Le circuit ***ABCD*** est situé dans un plan horizontal et les rails sont maintenus parallèles à l'axe ***Ox***. La barre est animée d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v.\vec{e}_x$ (avec $v > 0$)

1- La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre ***ABCD***.

2- Montrer que, dans la barre, les porteurs de charge sont soumis à l'action d'un champ électromoteur $\vec{E}_m$. Donner son expression vectorielle.

3- Prendre en compte l'orientation indiquée sur la figure et préciser le signe du courant ***i*** induit dans le circuit ***ABCD***.

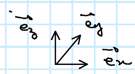
4- Exprimer, en fonction de ***R, v, B₀*** et ℓ, l'intensité du courant ***i***.

5- Ce courant induit s'accompagne de forces dites « de Laplace » appliquées à toutes les portions du circuit. Préciser sur un schéma la direction et le sens de la résultante $\vec{F}$ des forces d'induction appliquées à la barre ***AB***.

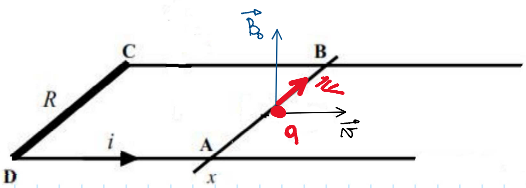
Corrigé

1- $DA = x$, $AB = \ell$ $\quad \Phi_{\vec{B}_0/S} = \iint_{DABCD} \vec{B}_0 \, \vec{dS}$, $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$; $\vec{dS} = dx\,dy\,\vec{e}_z$

$\Phi_{\vec{B}_0/S} = B_0 \iint dS = B_0 S \qquad \boxed{\Phi_{B_0/S} = B_0 \ell x}$



2- La barre est métallique donc elle contient des $\bar{e}$ libre qui peuvent se mouvoir facilement sous l'action d'une force ou d'un champ électrique



Lorsqu'on déplace la barre avec une vitesse $\vec{v}$ les $\bar{e}$ à l'intérieur seront entraînés avec la m̂ vitesse et dans la m̂ direction de déplacement de la barre et si on est en présence d'une induction $\vec{B}_0$, les $\bar{e}$ vont subir la force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = -e(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)}$$

Sous l'action de cette force, les $\bar{e}$ vont se déplacer dans la barre dans le sens AB c'est le courant induit

Si on identifie cette force à l'action d'un champ électrique $\vec{E}_m$ c.à.d si l'on écrit $\vec{F} = q\vec{E}_m = -e\,\vec{E}_m$; $\vec{E}_m$ aura pour expression

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0}$$

$\vec{E}_m$ = champ électromoteur

$\vec{v} = v\,\vec{e}_x$, $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{E}_m = -v\,B_0\,\vec{e}_y}$$

3- Le sens du courant doit indiquer le sens de déplacement des charges positives dans notre cas

$$\boxed{i < 0}$$

(ce qui veut dire que le sens réel du courant doit être dans le sens opposé)

4- D'après la loi de Faraday $\quad e = -\dfrac{d\phi}{dt}$

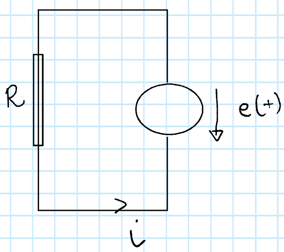
$\phi = B_0\,\ell\,x \quad \Rightarrow \quad e = -B_0\ell\,\dfrac{dx}{dt} = -B_0\,\ell\,v(t)$

et d'après la loi d'Ohm $\quad u = e = Ri \quad$ on obtient

$$\boxed{i(t) = -\frac{B_0\ell\,v(t)}{R}}$$

Remarque :

- On peut remplacer ce système par un circuit électrique équivalent

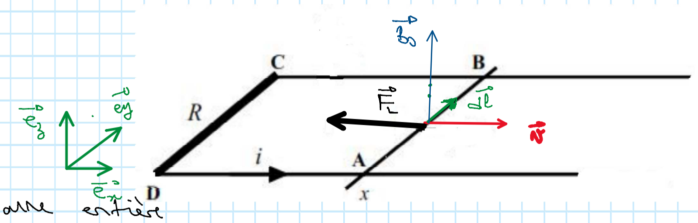


- Si on veut obtenir un courant $i(t)$ périodique (sinusoïdal par exemple), il suffit d'appliquer un mvt de déplacement périodique sur la barre

5- La force de Laplace exercée sur l'élément $d\ell$ de la barre s'écrit :

$d\vec{F}_L = i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}_0$, $\vec{d\ell} = dy\,\vec{e}_y$

$= i\,dy.\,B_0\,\underbrace{(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z)}_{\vec{e}_x}$



On en déduit la force exercée sur la barre entière

$$\vec{F}_L = \int_\ell d\vec{F}_L = \int_0^\ell \left(-\frac{B_0\,\ell\,v}{R}\right) B_0\,dy\;\vec{e}_x$$

Soit
$$\boxed{\vec{F}_L = -\frac{B_0^2\,\ell^2\,v}{R}\;\vec{e}_x}$$

La force **s'oppose** au mouvement qui la crée, en bon accord avec la loi de Lenz