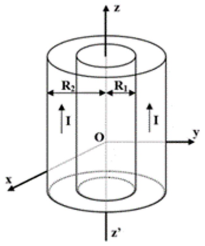
Exercice 7 corrigé

Exercice 7



Soit un fil conducteur cylindrique creux dont les parois intérieures et extérieures forment deux cylindres coaxiaux de rayons respectifs R_1 et R_2 (figure ci-contre). Ce conducteur est parcouru par un courant d'intensité totale constante I dans le sens de l'axe (OZ) On supposera ce courant homogène, sa densité de courant est donc constante ($\vec{j} = j\vec{e}_z$)

a) Quel type de coordonnées choisissez-vous pour analyser les propriétés de la distribution de courant?

b) On considère un point M situé à la distance r de l'axe (Oz). Analyser la symétrie et les invariances de cette distribution de courant et en déduire la direction et le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution. De quelles coordonnées dépend le module $\vec{B}(M)$ du champ ?

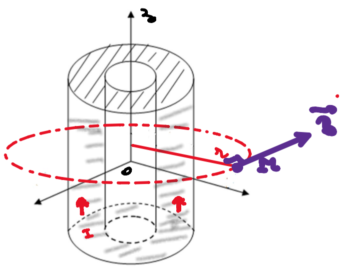
c) Donner l'expression de la norme de la densité de courant dans le conducteur en fonction de I, R_1 et R_2.

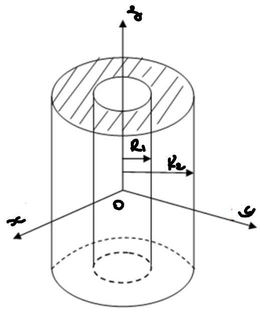
d) A l'aide du théorème d'Ampère, calculez la norme du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution de courant en tout point de l'espace. Tracer le graphe de $B(r)$ lorsque r varie de zéro à l'infini.

e) On fait tendre R_1 vers R_2, de telle sorte que l'épaisseur de la paroi du conducteur tende vers zéro en gardant I constant. On obtient alors une nappe de courant cylindrique. Définir le vecteur densité de courant surfacique j_S en fonction de I et R_2. et des vecteurs unitaires de la base de coordonnées choisie.

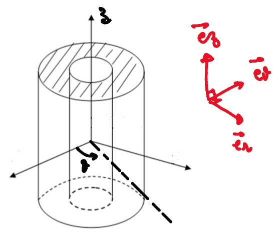
a) Pour le choix des coordonnées, on adopte les coord. cylindriques.

b)





- Le plan formé par Oz et M est un plan de symétrie pour la distribution des courants (cause), (M ∈ plan de symétrie)
  $\vec{B}$ en M est ⊥ à ce plan



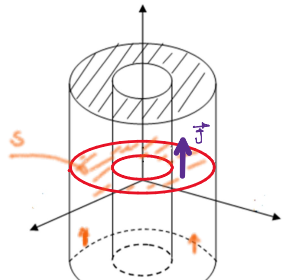
- le cylindre est invariant par rotation de θ
  " " " " translation de z.

On en déduit :

$$\vec{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\,\vec{e_r} + B_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e_\theta} + B_z(r,\theta,z)\,\vec{e_z}$$

- $\vec{B} \perp$ au plan de symétrie $\longrightarrow$ $\vec{B}(M) = B_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e_\theta}$
- les invariances $\longrightarrow$ $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\,\vec{e_\theta}$

$\forall M$, $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e_\theta}$ et ne dépend que de r

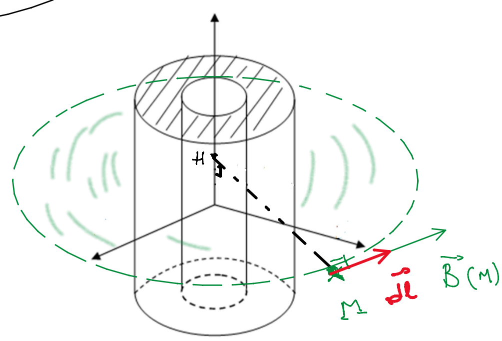


(c)
- $\vec{J} = J\,\vec{e_z}$ $\qquad I = \iint_S \vec{J}\,\vec{dS}$
- $\vec{dS} = dS.\vec{n}$; $\vec{n} \equiv \vec{e_z}$

$$I = \iint_S J\,dS = J.\iint_S dS = J(\pi R_2^2 - \pi R_1^2)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{J = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}}$$

(d) th. d'Ampère : $\oint_C \underbrace{\vec{B}.\vec{dl}}_{(1)} = \mu_0 \underbrace{\sum I_{(enlacés)}}_{(2)}$



soit un pt M qcq de l'espace.

quel est le champ $\vec{B}$ en M : $\vec{B}(M)$?

on sait d'après les considérations de symétrie

$\vec{B}(M) = B_\theta(r)\,\vec{e_\theta}$

si on choisit un contour circulaire de rayon

$HM = r$ (H projection de M sur Oz)

(1) $\rightarrow$ $\oint_C \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_C B\,dl$ car $\vec{B} \parallel \vec{dl}$

$$= B\int_0^{2\pi} r\,d\theta \quad \text{car } B \text{ ne dépend que de } r$$

$$= B(r).\,2\pi r$$

(2) $\rightarrow$ $\sum I_{enlacés}$, il faut distinguer 3 cas :

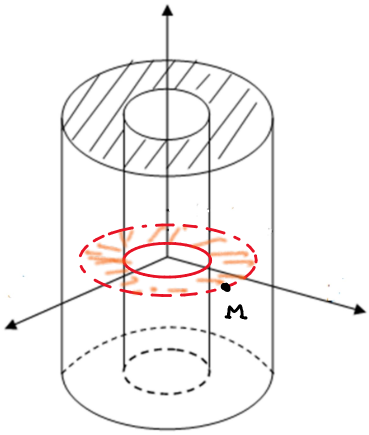
$r > R_2$; $R_1 < r < R_2$; $r < R_1$

* $r > R_2$ $\sum I_{enlacés} = I$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 J \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J}{2r}(R_2^2 - R_1^2) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 J}{2}\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{r}\,\vec{e}_\theta}$$

* $R_1 < r < R_2$



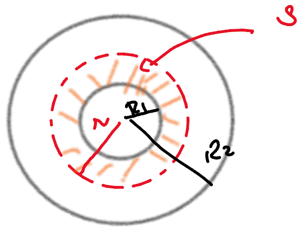
le courant qui traverse la surface du contour

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

$$= J \iint_S dS = J(\pi r^2 - \pi R_1^2)$$

d'où $B_\theta(r) \cdot 2\pi r = J(\pi r^2 - \pi R_1^2)$

$$B_\theta(r) = \frac{J\pi}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$



$$\boxed{\vec{B}(M) = J\frac{\pi}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_\theta}$$

* $r < R_2$

$\sum I_{enlacés} = 0$ $\boxed{\vec{B}(M) = \vec{0}}$