Le 25 Janvier 2014

Examen

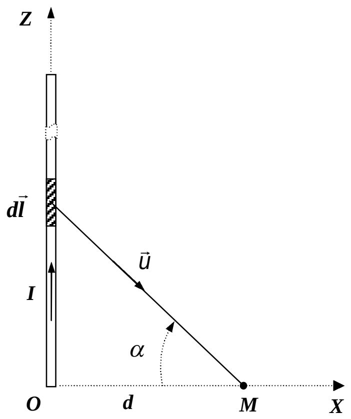
Electromagnétisme (Filières SMP et SMAI – S3)

Session ordinaire – Durée 1h30

Exercice I

Un conducteur métallique de longueur semi infinie, est parcouru par un courant d'intensité *I* constante (figure ci-contre).

En utilisant la loi de Biot et Savart, calculer le champ magnétique $\vec{B}$ produit en un point *M* situé sur l'axe *OX* à une distance *d* de *O*.



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

$$\vec{u}=\cos\alpha\cdot\vec{e}_i-\sin\alpha\cdot\vec{e}_k \quad \text{et} \quad d\vec{l}=dl\cdot\vec{e}_k$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\{(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_k)\cos\alpha-(\vec{e}_k\wedge\vec{e}_k)\sin\alpha\}$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\cos\alpha.\vec{e}_j$$

or $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{d}{r}\\ \dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\alpha}{d^2}\end{cases}$; $\begin{cases}tg\alpha=\dfrac{l}{d}\\ dl=\dfrac{d}{\cos^2\alpha}d\alpha\end{cases}$ alors, $d\vec{B}=-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\cos\alpha}{d}d\alpha\cdot\vec{e}_j$

$$d\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\cos\alpha\, d\alpha\cdot\vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}}Cos\alpha\, d\alpha\cdot\vec{e}_j$$

et $$\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]\vec{e}_j$$

d'où $$\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\vec{e}_j$$

1. Que devient ce résultat en cas de fil de longueur infinie

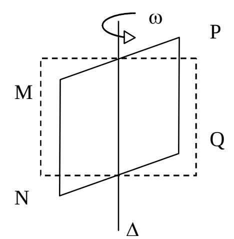
$$\vec{B}_\infty=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_\theta$$

2. retrouver ce dernier résultat en utilisant le théorème d'Ampère (*expliquer en détails l'utilisation du théorème*)
   - définir les symétries
   - préciser les invariances
   - en déduire le contour fermé

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\,d\vec{M}=\mu_0 I \qquad \text{d'où} \qquad \vec{B}_\infty=-\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_j$$

Exercice II

Dans un champ magnétqiue uniforme $\vec{B}=B_0\cdot\vec{e}_z$, on fait tourner à vitesse angulaire *ω* constante, une spire conductrice indéformable, rectangulaire, fermée, autour de son axe □. On désigne par *a* = *MP* et *b* = *MN*, les longueurs des côtés du rectangle et *r* sa résistance électrique.



1. Exprimer en fonction de B_0, *ω*, *a* et *b* le flux de du champ magnétique à travers la surface de la spire.

$$\iint_S \vec{B}.\,d\vec{S}=\iint_S B.\,dS\cos\theta \qquad \Phi_{B/S}=B.\,a.\,b.\,Cos\omega t$$

2. En appliquant la loi de Faraday, calculer la *f.e.m.* induite *e* qui apparaît dans le spire

$$e=\frac{d\Phi_{B/S}}{dt}=-B.\,a.\,b.\,\omega\sin\omega t$$

3. En déduire l'intensité du courant *i* qui circule dans la spire.

$$e = Ri = -B.a.b.\omega \sin\omega t$$

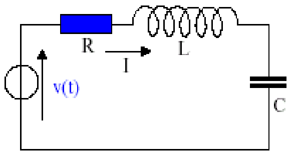
$$i = \frac{e}{R} = -\frac{B.S.\omega}{R} \sin\omega t$$

Exercice III

On considère un circuit R, L, C série ci-dessous, alimenté par une tension v(t) sinusoïdale.

1. Etablir l'expression de l'impédance complexe du circuit.

$$\overline{Z_t} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$



2. En déduire l'expression de l'amplitude complexe du courant. Préciser les valeurs de l'intensité du courtant ainsi que le déphasage du courant par rapport à la tension.

$$\overline{U} = \overline{Z_t}\,\overline{I}$$

$$I = \frac{U_0}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

3. Donner une définition du phénomène de résonnance dans un tel circuit. A quelle condition obtient-on la résonnance du circuit ci-dessus? (tout résultat non justifié ne sera pas considéré).

La résonnance correspond à une réponse maximale qu'apporte un circuit à une excitation. Elle se produit pour une fréquence particulière appelée fréquence propre.

Dans le circuit ci-dessus, elle correspond à

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

4. Dans ces conditions, que devient l'impédance du circuit? Que peut-on dire de la tension et du courant.

Dans ces conditions l'impédance est un réel pur : $Z = R$

Le courant est en phase avec la tension.

5. On définit la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Etablir l'équation qui permet de définir les deux pulsations ω_1, ω_2 et donnez leurs valeurs.

Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Kénitra
Années Universitaire 13-14

Pour définir le caractère plus au moins aigu de la résonance, on cherche les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquels: $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_0$ où $Z = \sqrt{2} \cdot R$; I_0 étant la valeur du courant à la résonance.

$$2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

soit :

$$\omega^2 \pm \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Cette équation possède deux racines réelles positives :

$$\omega = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

6. Rappeler l'expression du facteur de qualité Q. Donner son expression en fonction de $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ et de la pulsation de résonnance.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}$$ appelé <u>facteur de qualité</u> ou <u>coefficient de surtension</u>.