Le 20 Janvier 2015

Examen

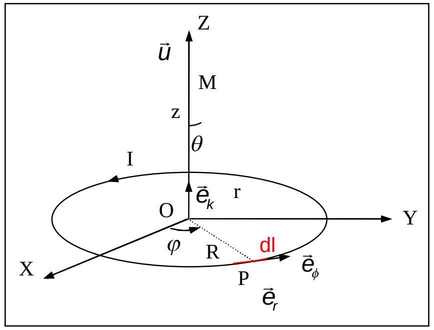
Electromagnétisme (Filière SMA – S3)

Session ordinaire – Durée 1h30

Exercice I

La structure de la figure ci-après, est formée par un rectangle de côtés *a* et *b* et d'une demi-spire de rayon *r*. la structure est placée dans le plan *xOy* de l'espace vide et est parcourue par un courant d'intensité *I*. Nous souhaitons déterminer le champ magnétique produit par cetyte distribution de courant au point *P*, pour cela nous procéderons par étapes :

1. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer l'expression du champ magnétique *B* produit par une spire parcourue par un courant d'intensité *I* en un point *H* de son axe de révolution.



Soit un élément de conducteur de longueur $d\vec{l}$, celui-ci créé au niveau du point *M* un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$ qui s'écrit selon la loi de *Biot et Savart*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

où $d\vec{l} = dl\cdot\vec{e}_\phi$; $\vec{u} = Cos\theta\cdot\vec{e}_k - Sin\theta\cdot\vec{e}_r$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}dl\left\{\frac{Cos\theta\cdot(\vec{e}_\phi\wedge\vec{e}_k) - Sin\theta\cdot(\vec{e}_\phi\wedge\vec{e}_r)}{r^2}\right\}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}dl\left\{\frac{Cos\theta\cdot\vec{e}_r + Sin\theta\cdot\vec{e}_k}{r^2}\right\}$$

or $dl = R.d\varphi$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^2}\{Cos\theta\cdot\vec{e}_r + Sin\theta\cdot\vec{e}_k\}\,d\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^2}\int_0^{2\pi}(\underbrace{Cos\theta\cdot\vec{e}_r}_{=0} + Sin\theta\cdot\vec{e}_k)\,d\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^2}Sin\theta.2\pi\cdot\vec{e}_k \quad ;or \quad Sin\theta = \frac{R}{r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{r^3}\cdot\vec{e}_k = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{e}_k$$

2. Déterminer le champ *B* résultant produit par cette structure au niveau du point *P*. pour cela :
   a. Calculer le champ produit en P par la demi-spire

Pour une demis spire, nous obtenons : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^2}Sin\theta.\pi\cdot\vec{e}_k = \frac{\mu_0 I}{4}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{e}_k$

De même, pour le point P appartenant au plan de la spire (z=0) : $\vec{B}_{1/2 spire} = \frac{\mu_0 I}{2a}\cdot\vec{e}_k$

   b. Calculer le champ produit en P par chacun des segments du rectangle

Le champ produit par les segments de longueur b :

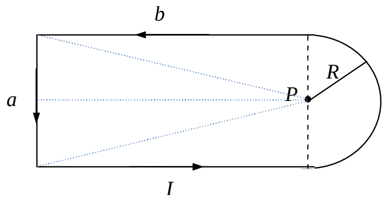
$$\vec{B}_b = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi x_b}Sin\theta_b.\,\vec{e}_k \quad \text{avec} \quad Sin\theta_b = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}} \quad \text{et} \quad x_b = \frac{a}{2}$$

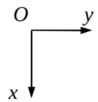
$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_a}2Sin\theta_a.\,\vec{e}_k \quad \text{avec} \quad Sin\theta_a = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}} \quad \text{et} \quad x_b = b$$

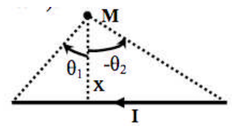
   c. Déduire le champ total produit en P par cette distribution de courant.

$$\vec{B}_P = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_{1/2 spire} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}}.\,\vec{e}_k + \frac{\mu_0 I}{2\pi\frac{a}{2}}\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}}.\,\vec{e}_k + \frac{\mu_0 I}{2a}\vec{e}_k$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}}\left(\frac{\frac{a}{2}}{b}+\frac{b}{\frac{a}{2}}\right)+\frac{\mu_0 I}{2a}\right\}\vec{e}_k \quad \text{d'où} \quad \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}}{b}+\frac{\pi}{2}\right\}\vec{e}_k$$







On donne le champ *B* produit par un fil de longueur finie, parcouru par un courant *I*, en un point *M* de l'espace :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}[\sin\theta_2 + \sin\theta_1]\,\vec{e}_k$$

Exercice II

On considère le circuit de la figure ci-après. Le dipôle *AD* est alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude *E* et de pulsation ω.

1. Déterminer l'impédance complexe Z_{AD} équivalente du circuit.

$$\bar{Z}_{BD} = \frac{\bar{Z}_C . \bar{Z}_R}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_R} = \frac{R(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2}$$

$$\bar{Z}_{AD} = jL\omega + \frac{R(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2} \quad \text{soit} \quad \bar{Z}_{AD} = \frac{R}{1+(RC\omega)^2} + j\left\{L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2}\right\}$$

2. Donner l'expression de l'inductance *L* du circuit en fonction de *R*, *C* et ω dans le cas où le circuit est équivalent à une résistance pure $R_{éq}$. Donner l'expression de *L*.

$$\bar{Z}_{AD} = R_{éq} = \frac{R}{1+(RC\omega)^2}$$

la partie imaginaire est nulle : $L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2} = 0$ d'où $L = \frac{R^2C}{1+(RC\omega)^2}$

3. Donner l'expression complexe du courant *i* qui circule dans le circuit.

$$\bar{U}_{AD} = \bar{Z}_{AD}\bar{I} = R_{éq}\bar{I} \quad \text{d'où} \quad \bar{I} = \frac{E}{R_{éq}} = \frac{E}{R}\{1+(RC\omega)^2\}$$

4. En déduire les tensions individuelles (expressions complexes).

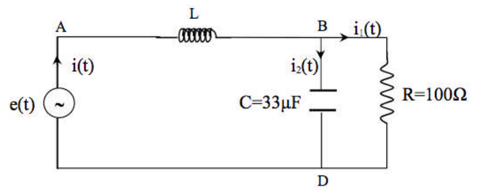
$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{AB}\bar{I} = jL\omega\bar{I} \quad \text{d'où} \quad \bar{U}_{AB} = j\frac{L\omega E}{R}\{1+(RC\omega)^2\}$$

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_{BD}\bar{I} \quad \text{et} \quad \bar{U}_{BD} = E(1-jRC\omega)$$

5. Exprimer les courants i_2 et i_1 qui circulent respectivement dans le condensateur *C* et dans la résistance *R*.

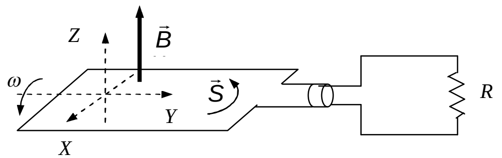
$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_C\bar{I}_2 \quad \text{et} \quad \bar{I}_2 = EC\omega(RC\omega - j)$$

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_R\bar{I}_1 \quad \text{et} \quad \bar{I}_1 = \frac{E}{R}(1-jRC\omega)$$



Exercice III

Un générateur électrique simple, tourne autour de l'axe *Oy* (voir figure ci-après) avec la vitesse angulaire □. Il est placé dans une région où règne un champ d'induction magnétique uniforme $\vec{B}$ dirigé suivant *Oz*. Le rotor est constitué d'une bobine de *n* spires de surface *S* chacune. A travers des contacts glissants, le générateur alimente une ampoule de résistance *R*. La résistance de la bobine étant négligeable, comparée à celle de l'ampoule.



1. Rappeler la loi de FARADAY et donner l'expression de la f.é.m. induite

$e = -\frac{d\varphi}{dt}$ et $\varphi = n\phi$ (φ étant le flux de $\vec{B}$ à travers une spire)

$$\varphi = n\cdot\vec{B}\cdot\vec{S} = n\cdot B\cdot\vec{e}_z\cdot S\cdot\vec{e}_n = nBS\cdot Cos\theta$$

$$\varphi = nBS\cdot Cos(\omega t)$$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = nBS\omega\cdot Sin(\omega t)$$

2. En déduire l'expression de l'intensité du courant induit dans ce circuit

$e = Ri \Rightarrow i = \frac{e}{R} = n\frac{BS\omega}{R}Sin(\omega t)$

3. En déduire l'expression de l'intensité maximale (I_{max}) du courant induit.

I_{max} est obtenu pour $Sin\omega t = 1$

et donc $I_{max} = \frac{nBS\omega}{R}$

4. Quelle position devrait alors prendre le solénoïde (illustrer éventuellement par un schéma).

I sera max lorsque la bobine est dans le plan *XOY*