Cours d’électromagnétisme

Filière SMI S4

Jaouad DIYADI
Département de physique
Faculté des sciences
Université Ibn Tofail

Chapitre IV

Equations de Maxwell

Rappel

Nature du champ		Loi locale	Loi intégral
Électrique	**flux**	Équation de Maxwell-Gauss : $$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$	Théorème de Gauss : $$\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\Sigma} \vec{E}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\tau = \frac{Q_{\text{int à }\Sigma}}{\varepsilon_0}$$
	circulation	Le rotationnel du champ électrique permanent est nul : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \text{ partout}$$	La circulation du champ électrique permanent est conservative : $$\oint_{\Gamma} \vec{E}\,.\,\mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \text{ quel que soit } \Gamma$$
Magnétique	**flux**	Équation du flux magnétique : $$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \text{ partout}$$	Le champ magnétique a un flux conservatif : $$\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\Sigma} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \text{ quelle que soit } \Sigma \text{ fermée}$$
	circulation	Équation de Maxwell-Ampère : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\,.$$	Théorème d'Ampère : $$\oint_{\Gamma} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \mu_0\,\vec{j}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\, I_{\text{enlacé}}$$

b. Circuit fixe dans un champ magnétique variable

La loi de *Faraday* reste toujours vérifiée:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Dans ce cas, la force magnétique ne peut pas rendre compte du passage du courant, puisqu'elle est nulle. Pour justifier de l'existence d'un courant induit, il faut admettre que la variation du champ magnétique entraine l'existence d'un champ électrique agissant sur des charges initialement au repos, les déplace dans le conducteur.

2. Expression du champ électrique:

$$e = \oint \vec{E}_m \, . \, d\vec{l}$$

et

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{ds}$$

et

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot\,\vec{A}}$$

En utilisant le théorème de *Stockes*:

$$\vec{E}_m = -\frac{d\vec{A}}{dt}$$

3. Propriétés du champ électrique

Dans le cas général: $$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{d\vec{A}}{dt} \qquad (1)$$

$-\overrightarrow{grad}\, V$ $\longrightarrow$ Champ électrostatique

$-\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ $\longrightarrow$ Pptés différentes de champ électrostatique, sa circulation le long d'un contour fermé est non nulle

$\longrightarrow$ Existence d'une *f.é.m.* induite

Récrivons l'équation (1) différemment:

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\overrightarrow{rot}\, (\overrightarrow{grad}\, V) - \overrightarrow{rot}\, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \longrightarrow \overrightarrow{rot}\, \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Relation entre les champs électrique et magnétique dans les phénomènes dépendants du temps.

Il s'agit d'une relation générale et importante de l'électromagnétisme et constitue une des 4 équations de *Maxwell*.

Au milieu du $19^{ème}$ siècle le physicien James Maxwell établit les fondements de l'électromagnétisme en réunissant deux théories distinctes « *électricité* » et « *magnétisme* ».

1. Régime statique

- ✓ En électrostatique : les charges sont immobiles ; soit $\vec{j}=\vec{0}$
- ✓ En magnétostatique : les charges sont mobiles mais les courants stationnaires ; soit $div\,\vec{j}=0=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

1. $div\,\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Théorème de ***Gauss*** $\Phi_{S_{fermée}}(\vec{E})=\dfrac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

2. $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}=\vec{0}$ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$

3. $div\,\vec{B}=0$ $\vec{B}$ à flux conservatif $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$

4. $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ $\vec{E}$ théorème ***d'Ampère*** $\oint_C \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0\sum I_{\text{int}}$

1. Régime statique

Autres relations:

- ✓ S'il n'y a pas de charges à l'infini : $V(\infty) = 0$ $\quad V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{\rho . d\tau}{r}$

- ✓ S'il n'y a pas de charges à l'infini : $\quad \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint \dfrac{\vec{j}.d\tau}{r}$

Comme on peut le constater ; en régime statique on peut traiter $\vec{E}$ et $\vec{B}$ séparément

2. Régime dépendant du temps

✓ La loi de ***Faraday*** reste toujours vérifiée

A partir des phénomènes d'inductions nous avons établi la loi de *Faraday*:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Forme Intégrale :

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\oiint_S \vec{B}.\vec{dS}$$

Forme locale :

$$\overrightarrow{rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et

$$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

2. Régime dépendant du temps

✓ Théorème d'***Ampère*** en régime variable

L'équation de continuité ou de conservation de la charge s'écrit: $div\,\vec{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$

De même l'équation de ***Gauss*** donne:

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La combinaison de ces 2 équations donne: $div\,\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 div\vec{E})=0$

$$div(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E})=0$$

En régime variable $\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ est à flux conservatif.

$\vec{j}(M,t)$ densité de courant de conduction

$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(M,t)$ densité de courant de déplacement

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l}=\iint_S \overrightarrow{rot\vec{B}}.d\vec{S}=\mu_0\iint_S \vec{j}.d\vec{S}+\mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$

2. Régime dépendant du temps

La relation

$$\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \vec{j}$$

n'est valable qu'en régime statique. Le théorème ***d'Ampère*** s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Equation de ***Maxwell-Ampère*** :

2. Régime dépendant du temps

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

1. $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ théorème de ***Gauss***

2. $\overrightarrow{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ $(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

3. $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$)

4. $div\vec{B} = 0$ $(\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A})$