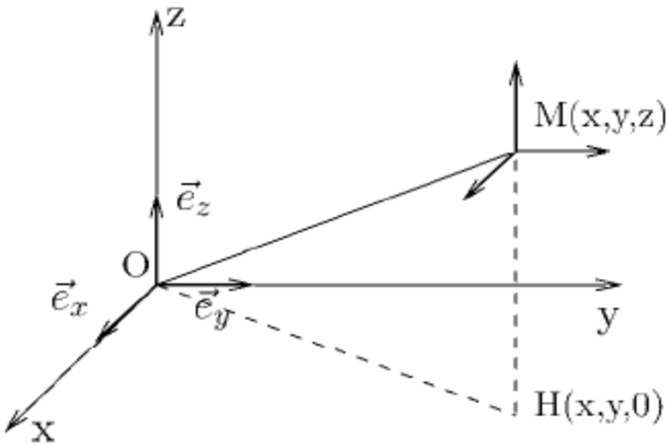
Outils mathématiques

➢Coordonnées cartésiennes



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

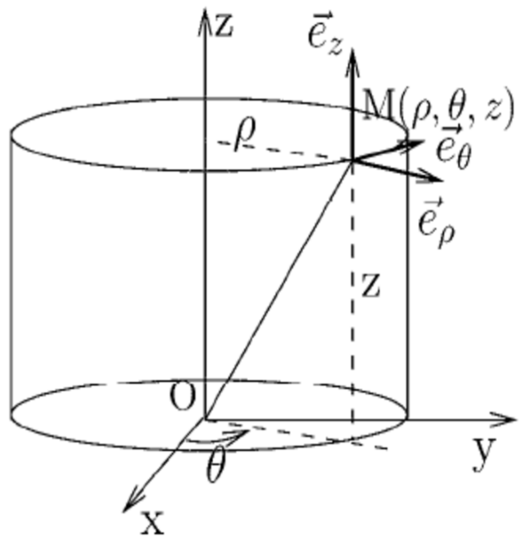
déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

volume élémentaire

$$dV = dxdydz$$

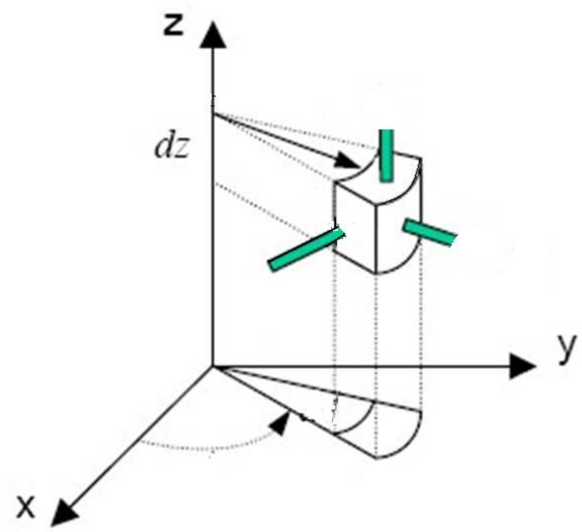
➢ Coordonnées cylindriques



vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_z + z\vec{e}_z \; avec \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

déplacement élémentaire



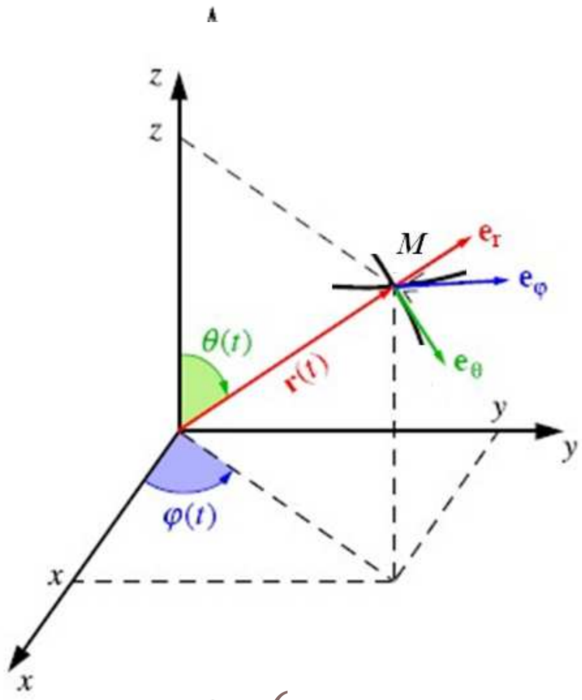
volume élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$dV = \rho d\rho \, d\theta \, dz$$

➢ Coordonnées sphériques

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$



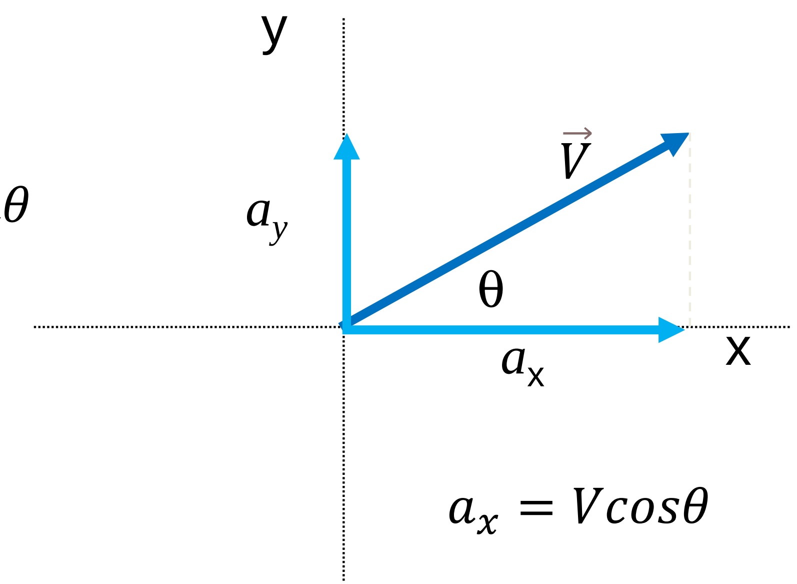
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \ avec \begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$dV = r^2 \ sin\theta d\theta \ d\varphi \ dr$$

Somme de deux vecteurs

$$a_y = V sin\theta$$



$$a_x = V cos\theta$$

$$\overrightarrow{V_1} = a_1\vec{e}_x + b_1\vec{e}_y + c_1\vec{e}_z$$

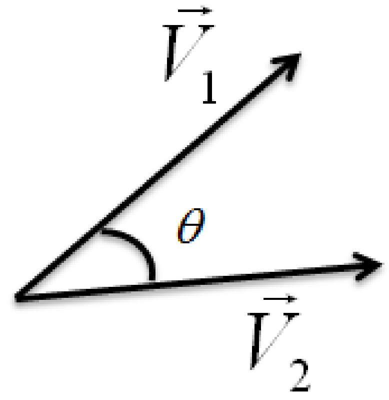
$$\overrightarrow{V_2} = a_2\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + c_2\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = (a_1 + a_2)\vec{e}_x + (b_1 + b_2)\vec{e}_y + (c_1 + c_2)\vec{e}_z$$

Expression cartésienne du produit scalaire

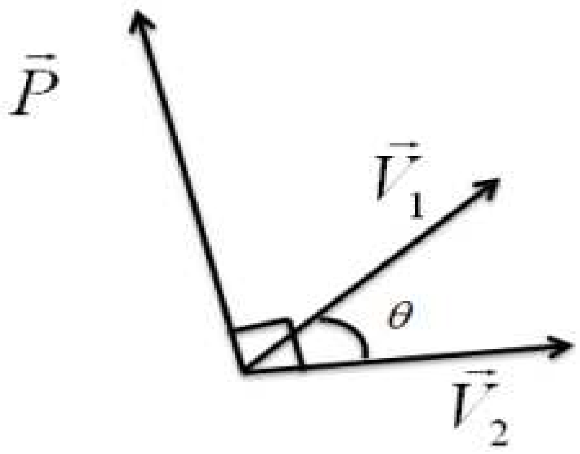
$$S = \vec{V}_1 . \vec{V}_2$$

$$S = V_1 V_2 cos\theta$$



$$S = (a_1\vec{e}_x + b_1\vec{e}_y + c_1\vec{e}_z)(a_2\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + c_2\vec{e}_z)$$
$$= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

Produit vectoriel



$$\vec{P} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$\left|\vec{P}\right| = V_1 V_2 |sin\theta|$$

CIRCULATION D’UN VECTEUR

Circulation élémentaire

$\vec{V}(M)$ champ de vecteurs

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dl}$ déplacement élémentaire

La circulation élémentaire est:

$$d\ C = \vec{V}.\overrightarrow{dM}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{V} = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$$

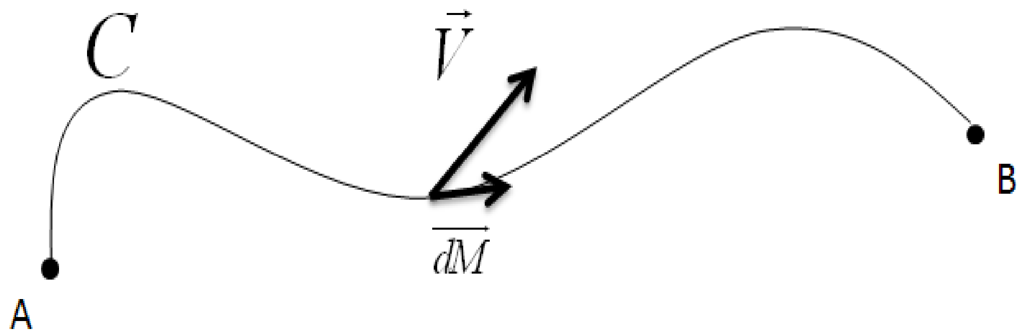
$$\overrightarrow{dM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$d\ C = \vec{V}.\overrightarrow{dM}$$

$$d\ C = V_x dx + V_y dy + V_z dz$$

Circulation sur un chemin

AB : trajet sur une courbe *(C)*



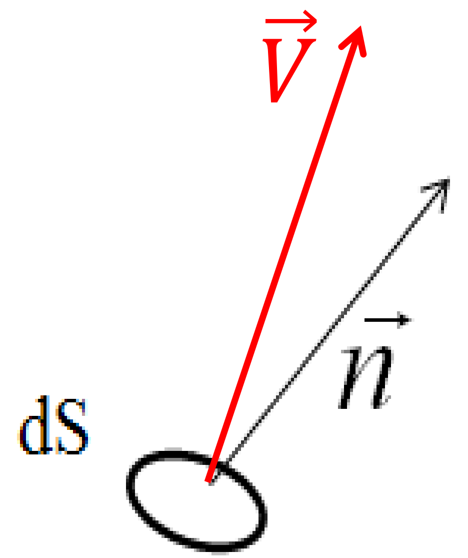
$$C_{AB} = \int_{\widehat{AB}} dC = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dM}$$

Si le chemin est fermé :

$$C = \oint \overrightarrow{V}.\ \overrightarrow{dM}$$

FLUX D'UN VECTEUR

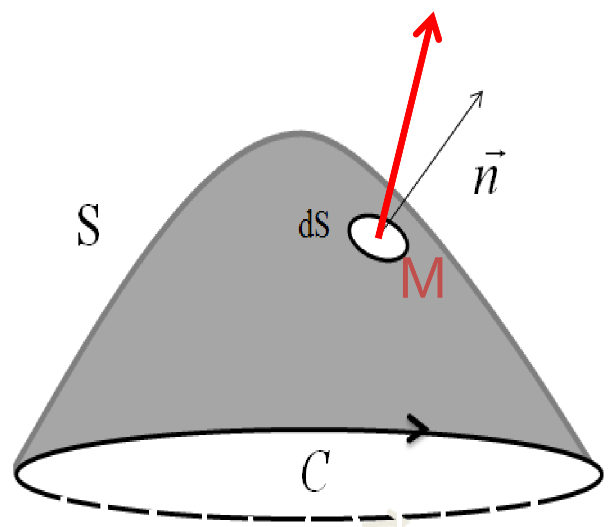
$\vec{V}(M)$ champ de vecteurs



Flux élémentaire

$$d\phi = \vec{V}.\overrightarrow{dS} = \vec{V}.\vec{n}dS$$

Flux à travers une surface ouverte

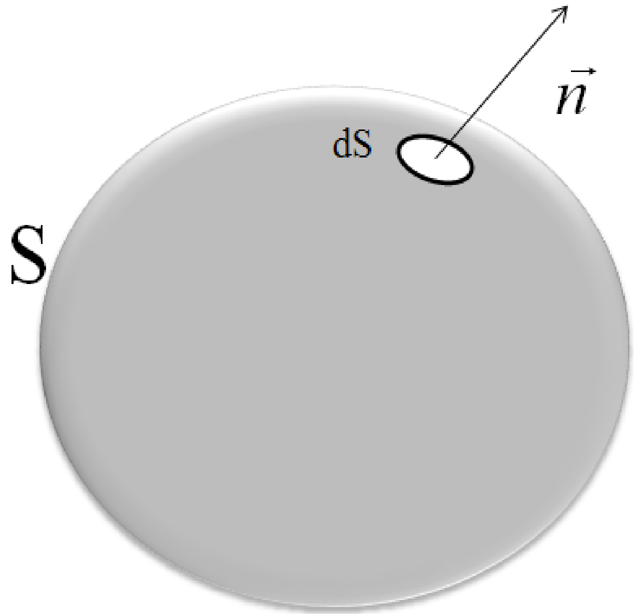


Soit *(C)* le contour sur lequel s'appuie la surface *(S)*.

- On oriente *(C)*
- On définit le sens du vecteur unitaire par la règle de la main droite

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{V}.\vec{n}dS$$

Si la surface est fermée, on ne peut pas définir le contour *(C)*.



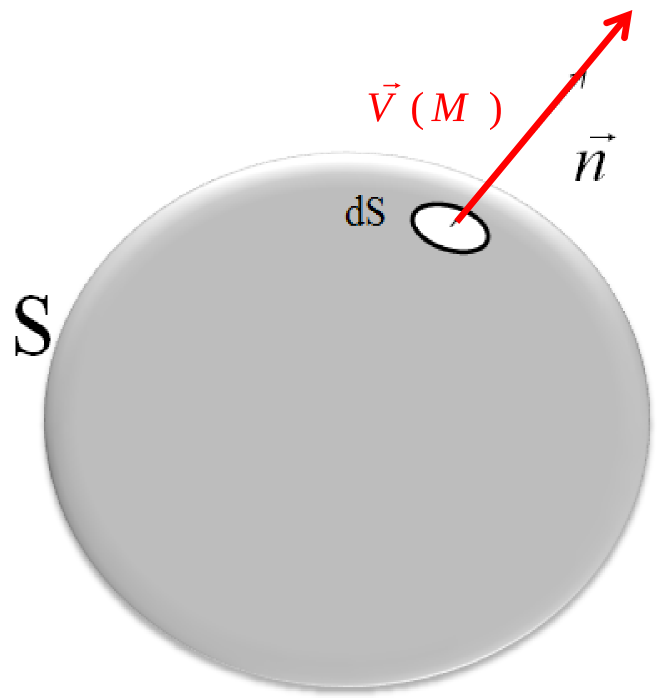
Par convention $\vec{n}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

Exemple : champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur

$$\vec{V}(M) = 2r^2\,\vec{e}_r$$

à travers une sphère de centre O et de rayon r.



On a tout simplement

$$\phi = \oiint_S \vec{V}.\vec{n}dS = \oiint_S 2r^2 dS$$
$$= 4\pi r^2\, 2r^2$$
$$= 8\pi r^4$$

OPÉRATEURS VECTORIELS

Gradient

L'opérateur vectoriel $\overrightarrow{grad}$ (*ou encore l'opérateur polaire nabla*)

associe à une fonction scalaire *f (x, y, z)* un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\overrightarrow{grad} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{dM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

Comme :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

alors

$$df = \overrightarrow{grad}f \, . \overrightarrow{dM}$$

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad}f \, . \overrightarrow{dM}$$

➢ *Circulation d'un gradient :*

$$C_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{gradf}.\overrightarrow{dM} = \int_{B}^{A} df$$

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{gradf}.\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$$

La circulation du $\overrightarrow{gradf}$ *est égale à la variation de la fonction* f *et ne dépend pas du chemin parcouru.*

La divergence

L'opérateur *div* est le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par le vecteur $\vec{V}$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$$ c'est un scalaire

En coordonnées cartésiennes :

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Le rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$ C'est un vecteur

TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

- Théorème de Stokes (ou du rotationnel) :

$$C = \oint_{(C)} \vec{A}\,\overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right).\overrightarrow{dS}$$

S est une surface qui s'appuie sur le contour (C)

- Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) :

$$\oiint_{S} \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau} div\,\vec{A}\,d\tau$$

τ *est le volume englobé par S*