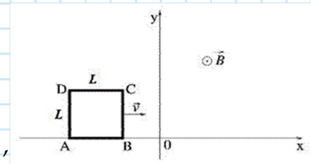
Exercice 11 corrigé

Un carré conducteur indéformable, de coté L, de résistance R, se déplace à vitesse, $\vec{v}\,(t) = v(t)\vec{e}_x$, le long de l'axe (Ox). Le carré reste dans le plan (O,x,y). Dans l'exercice, on ne cherchera pas à calculer $\vec{v}\,(t)$ mais on supposera $\vec{v}\,(t) = \vec{0}$ à chaque instant.

Un champ magnétique $\vec{B}$ règne dans l'espace comme suit :

- $B = 0$ dans le demi-espace $x < 0$,
- $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ dans le demi-espace $x > 0$, avec B_0 une constante.



On considère les trois situations suivantes :

(i) le carré conducteur est entièrement dans le demi-espace x< 0 ,

(ii) le carré conducteur en train de passer du demi-espace x>0 au demi-espace x<0

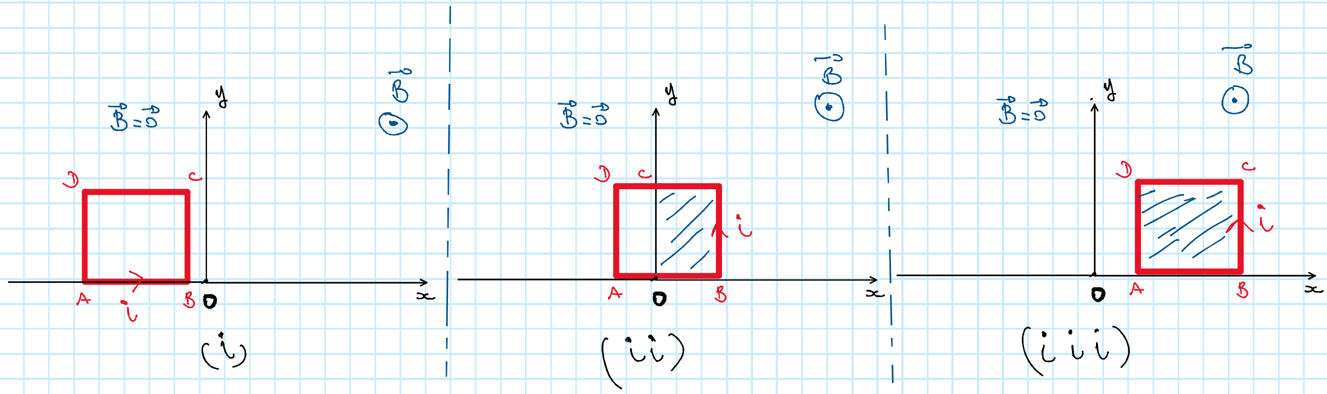
(iii) le carré conducteur est entièrement dans le demi-espace x>0.

Dans les trois situations (i), (ii) et (iii), répondre aux questions suivantes (on ne cherche pas à calculer v(t)) :

a) Écrire le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit en fonction de l'abscisse $x_B(t)$ du point B.

b) Déterminer le courant induit $I(t)$ dans le carré conducteur en fonction de $v(t)$, B_0 et la résistance R du conducteur. Faire un schéma indiquant le sens de I.

c) Calculer la force magnétique sur chaque coté du conducteur. Représenter ces forces sur le schéma. Quelle est la force totale sur le conducteur ? Cette force est-elle motrice ou de freinage ?



Dans les 3 cas on cherchera :

a) $\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}$; b) $i = \dfrac{e}{R}$ avec $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$; c) $\vec{dF_L} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$ $\quad F_L = \int dF_L$

On traitera d'abord les cas (i) et (iii)

- Cas (i) : le carré est plongé dans une région où $\vec{B} = \vec{0}$

a) $\boxed{\phi_{\vec{B}/S} = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0}$; b) $\boxed{e = -\dfrac{d\phi}{dt} = 0}$; $\boxed{i = 0}$ c) $\boxed{\vec{F_L} = \vec{0}}$

le champ $\vec{B}$ est nul, le flux est nul il n'y aura ni force électromotrice ni courant induit et donc absence de forces magnétiques agissant sur le cadre

• Cas (iii) : Le carré est plongé entièrement dans une région où $\vec{B} \neq \vec{0}$ avec $\vec{B}$ uniforme

(a) $\Phi_{\vec{B}/S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$ $\quad \vec{B} = B_0 \vec{e_z}$ $\quad \vec{dS} = dS\,\vec{e_z}$. S = surface du carré

$\Phi_{\vec{B}/S} = B_0 \iint_S dS = B_0 S$

$\boxed{\Phi_{\vec{B}/S} = B_0 L^2 = cte}$ Le flux qui traverse la surface du cadre est constant

(b) $\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0}$ la force électromotrice n'existe pas, on n'aura pas de courant induit dans le circuit

$\boxed{i = 0}$

(c) $\boxed{\vec{dF_L} = \vec{0}}$ l'absence du courant dans le cadre ⇒ l'absence de la force de Laplace sur les branches du carré

• Cas (ii) : une partie du carré est plongée dans $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$

(a) $\Phi_{\vec{B}/S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$, on répartit la surface S en 2 zones

$x < 0 \rightarrow$ la surface $S' = A0 \cdot L$ $\quad \Phi_{\vec{B}/S'} = 0$ car dans cette zone $\vec{B} = \vec{0}$

$x > 0 \rightarrow$ la surface $S'' = 0B \cdot L$ $\quad \Phi_{\vec{B}/S''} = B_0 \cdot S'' = B_0 x L$ avec $x = 0B$

donc $\boxed{\Phi_{\vec{B}/S} = B_0 L \cdot x}$

(b) $e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow e = -B \cdot L \frac{dx}{dt}$ $\quad \frac{dx}{dt} = v$

vitesse de déplacement du cadre

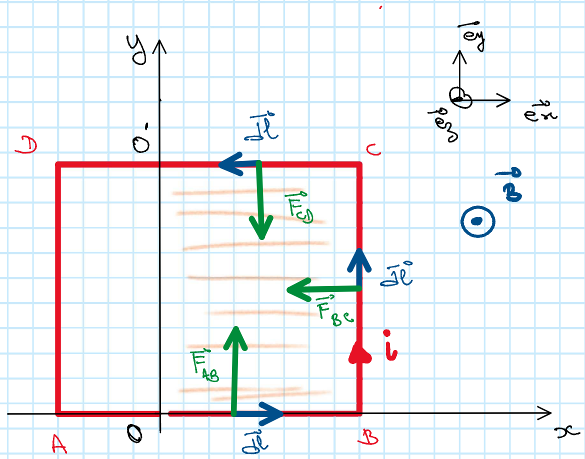
La loi d'Ohm $U = e = Ri$ $\quad \boxed{i = -\frac{BLv}{R}}$

Le signe (-) indique que le sens réel du courant est opposé au sens choisi par convention, en effet, le sens du courant peut être vérifié par la loi de Lentz :

• si le flux $\Phi \searrow$ le courant i induit crée un champ magnétique $\vec{b}$ façons à augmenter le flux $\iint (\vec{B_0} + \vec{b})\,\vec{dS}$
$\vec{b}$ doit être du m̂ sens $\vec{B_0}$

• si le flux $\Phi \nearrow$ $\vec{b}$ est de sens opposé à $\vec{B_0}$ $\iint (\vec{B_0} - \vec{b})\,\vec{dS}$
de façon à diminuer le flux.

ⓒ Seules les branches plongées dans la zone $x \geq 0$ subissent la force de Laplace.



$x < 0$ $\qquad \vec{B} = \vec{0}$

- Branches OA ; AD ; DO'

$$\vec{F_{AD}} = \vec{F_{AD}} = \vec{F_{DO'}} = \vec{0}$$

$x \geq 0$

- Branche OB $\qquad \vec{dl} = dx\,\vec{e_x}$; $\qquad B = B_0 \vec{e_z}$

$$\vec{dF} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= -\frac{BLv}{R} \cdot dx\,\vec{e_x} \wedge B_0 \vec{e_z}$$

$$\vec{dF} = -\frac{B_0^2 L v}{R} dx(-\vec{e_y}) \quad , \quad \vec{F_{AB}} = \frac{B_0^2 L v}{R} \int_0^x dx'\,\vec{e_x}$$

$$\boxed{\vec{F_{OB}} = \frac{B_0^2 L v}{R} . x\,\vec{e_y}} \qquad x = OB$$

- Branche CO'

$$\vec{dl} = -dx\,\vec{e_x}$$

$$\vec{dF} = -\frac{B_0^2 L v}{R} (-dx)(-\vec{e_y})$$

$$\vec{F_{CO}} = -\frac{B_0^2 L v}{R} \int_0^x dx'\,\vec{e_x} \qquad \boxed{\vec{F_{CO}} = -\frac{B_0^2 L v}{R}\, x\,\vec{e_y}}$$

- Branche BC $\qquad \vec{dl} = dy\,\vec{e_y}$

$$\vec{dF} = -\frac{B_0 L v}{R} dy\,\vec{e_y} \wedge B_0 \vec{e_z}$$

$$= -\frac{B_0^2 L v}{R} dy\,\vec{e_x} \longrightarrow \boxed{\vec{F_{BC}} = -\frac{B_0^2 L^2 v}{R}\,\vec{e_x}}$$

La force qui s'exerce sur le cadre $\quad \vec{F_L} = \vec{F_{OB}} + \vec{F_{CO}} + \vec{F_{BC}}$

$$\vec{F_L} = \underbrace{\frac{B_0 L v}{R} x\,\vec{e_y} - \frac{B_0 L v}{R} x\,\vec{e_y}}_{= \vec{0}} - \frac{B_0 L^2 v}{R}\,\vec{e_x}$$

$$\boxed{\vec{F_L} = -\frac{B_0^2 L^2 v}{R}\,\vec{e_x}}$$

c'est une force qui s'oppose au mvt donc une force de freinage