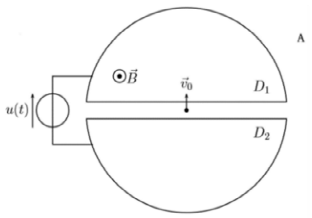
Exercice 2 : Cyclotron

Un cyclotron comporte deux demi-boîtes cylindriques métalliques creuses ou "D", séparées par intervalle, entre lesquelles on établit une tension *u(t)* sinusoïdales de fréquence convenable f.
Les "D" sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique B uniforme parallèle aux génératrices des "D".
On injecte des protons ($m = 1{,}66.10^{-27}\ kg$, $q = 1{,}6.10^{-19}\ C$) dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}$, avec une vitesse initiale négligeable. On donne $B = 0{,}5\ T$ la norme de $\vec{B}$

a) Montrer que dans les "D" (action de $\vec{B}$ seul) la vitesse numérique v des protons est constante
b) En déduire R le rayon de courbure de la trajectoire des protons ayant une vitesse v
c) Quel est le temps de passage d'un proton dans un "D".
d) En déduire la fréquence et la pulsation cyclotron
e) Quelle doit être la fréquence f de la tension u(t) pour que le proton soit accéléré de façon optimale (pendant un temps très court) à chaque passage entre les "D".

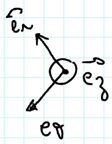


f) Calculer la vitesse maximale atteinte pour un cyclotron de diamètre $d = 2{,}1\ m$

---

a) À l'intérieur du "D", Les protons sont soumis à la seule force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
Cette force est ⊥ au déplacement (ne travaille pas) et n'agit pas sur la vitesse (elle agit seulement sur la trajectoire) donc v reste constante

b) Le PFD → $m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ex}$, dans notre cas $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N + \vec{\gamma}_T = \vec{\gamma}_N$ puisque $\vec{\gamma}_T = \vec{0}$ (voir cours)
Les projections donnent :



$\vec{\gamma}_N = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$; $\vec{F} = q v_0 \vec{e}_\theta \wedge (-B_0)\vec{e}_z = -q v_0 B_0 \vec{e}_r$

→ $\frac{v_0^2}{R} = q v_0 B_0$ → $R = \frac{m v_0}{q B_0}$

c) La trajectoire du proton est un demi cercle de longueur $l = \pi R$
le temps nécessaire pour parcourir cette distance est donné par : $l = v_0 t_0$
Soit $t_0 = \frac{l}{v_0} = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi m v_0}{q B_0 v_0}$ $t_0 = \frac{\pi . m}{q B_0}$

d) f_c ? et ω_c ?
$f_c = \frac{1}{T_c}$, $\omega_c = 2\pi f_c$; or $T_c = 2 t_0$ → $f_c = \frac{q B_0}{2\pi m}$ fréquence cyclotronique
$\omega_c = \frac{q B}{m}$ pulsation cyclotronique

e) $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$: tension appliquée pour créer $\vec{E}$ entre les "D"
On doit avoir $\omega = \omega_c$ pour une bonne synchronisation de l'accélération des protons après le passage dans les "D"

f) Le rayon de la dernière trajectoire ne peut pas dépasser $\frac{d}{2}$ (d : diamètre du cyclotron)
$v = \frac{R q B_0}{m_0}$ $R_{max} = \frac{d}{2}$ → $v_{max} = \frac{d q B_0}{2 m_0}$

la vitesse de sortie du proton dépend du diamètre du cyclotron