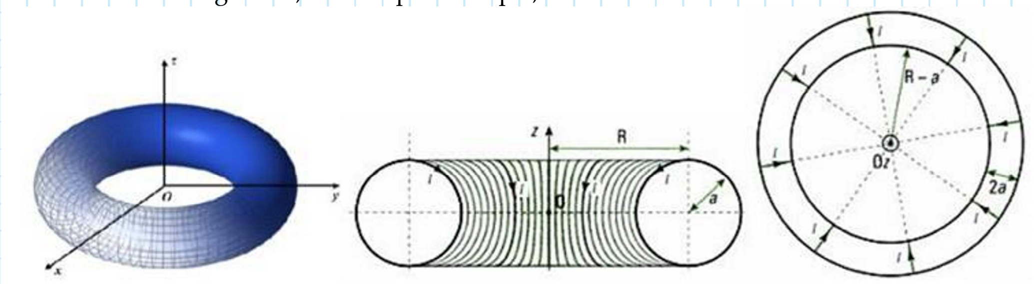
Exercice 9 corrigé

Exercice 9

On veut étudier le champ magnétique crée par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon $\boldsymbol{R}$ à section circulaire de rayon $\boldsymbol{a}$. On note $\boldsymbol{O}$ le centre du tore et ($\boldsymbol{Oz}$) son axe de révolution. Une chambre à air gonflée, de vélo par exemple, constitue un tel tore.



La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de $\boldsymbol{N}$ spires jointives circulaires de rayon $\boldsymbol{a}$ enroulées sur toute la surface du tore, dans lesquelles circule un courant $\boldsymbol{I}$. Soit $\boldsymbol{M}$ un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{M})$ crée par cette distribution

Expliquer le choix du système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Quelle est la direction de $\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{M})$? Justifier la réponse.

a) De quelles coordonnées dépend le module $\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{M})$ du champ?
b) Montrer qu'au centre O, le champ magnétique est nul.
c) Montrer qu'à extérieur du tore, le champ magnétique est nul.
a) Quel est le champ magnétique à l'intérieur du tore ?

Corrigé

a) On répond à cette question par l'étude de la symétrie et des invariances

En coordonnées cylindriques

$$\vec{B}(M) = B_\rho(\rho,\theta,z)\,\vec{e}_\rho + B_\theta(\rho,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + B_z(\rho,\theta,z)\,\vec{e}_z$$

• symétrie : tout plan contenant l'axe Oz est un axe de symétrie pour le tore, $\vec{B}(M)$ $\forall M$ sera $\perp$ plan contenant M et l'axe Oz

$\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e}_\theta$

$$\vec{B}(M) = \cancel{B_\rho(\rho,\theta,z)}\,\vec{e}_\rho + B_\theta(\rho,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + \cancel{B_z(\rho,\theta,z)}\,\vec{e}_z$$

• invariances : le système est invariant par rotation de θ

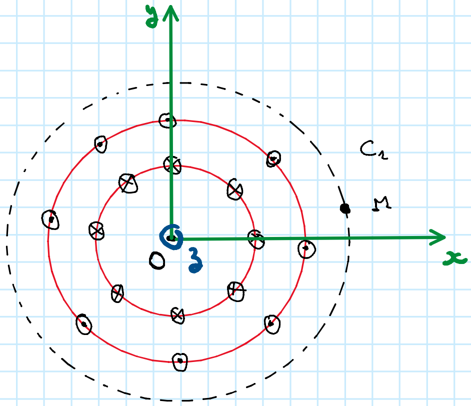
$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(\rho,z)\,\vec{e}_\theta}$$

Le champ $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e}_\theta$ et dépendrait de ρ et z.

b) Tous les plans de symétrie contiennent le point O, $\vec{B}(O)$ doit être $\perp$ à tous ces plans, donc $\vec{B}(O) = \vec{0}$

c) Appliquons le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{enlacés}$$



$\forall M(\rho,\theta,z) \in$ à l'exterieur du tore, et M

les caractéristiques de $\vec{B}_{ext}(M) = B_\theta(\rho,z)\vec{e_\theta}$

On choisit un contour circulaire C_1 d'axe Oz

et de rayon ρ

- $$\oint_{C_1} \vec{B}_{ex}\,\vec{dl} = B(\rho,z).\,2\pi\rho$$

- $\sum I_{enlacés}$

Pour les courants enlacés, on doit distinguer 2 cas :

→ la surface du contour coupe horizontalement le tore, une partie du tore se trouve au dessus de la surface de C1 et l'autre partie au dessous

dans ce cas il y a autant de courants qui pénètrent dans la surface que de courants qui en sortent

$$\longrightarrow \sum I_{enlacés} = +NI - NI = 0$$

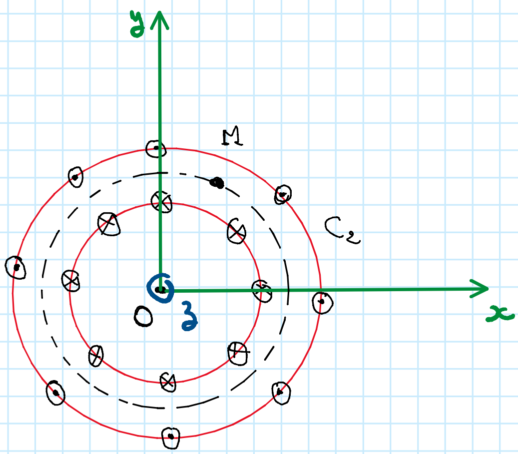
→ la surface horizontale du contour est au dessus ou en dessous du tore

dans ce cas, la surface n'est traversée par aucun courant

$$\sum I_{enlacés} = 0$$

dans les 2 cas $\sum I_{enlacés} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_{ex}(M) = \vec{0}}$ $\forall M \in$ l'exterieur du tore

d) On choisit un contour circulaire d'axe Oz à l'interieur du tore



- $$\oint_{C_2} \vec{B}_{int}\cdot\vec{dl} = B_{in}(\rho,z).\,2\pi\rho$$

- $\sum I_{enlacés} = -NI$

le signe du courant est donné par la règle du tire bouchon ou la règle de la main droite

$$B_{int}(\rho,z).\,2\pi\rho = -\mu_0 NI$$

on remarque B_{in} ne dépend pas de z.

$$\boxed{\vec{B}_{int} = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}\,\vec{e_\theta}}$$