1 Algorithme Simplexe

Une nouvelle méthode du Simplexe géométrique permet à partir d'une solution initiale (point de départ du polyèdre), lors de toute itération de passer d'un sommet à un sommet voisin en lequel la valeur de la fonction objectif est meilleure. L'algoritme s'arrête lorsqu'on ne trouve aucun sommet voisin dont la valeur de la fonction objectif est meilleure.

1.1 Condition d'utilisation

- Toutes les contraintes du PL doivent être en égalités (forme standard);
- Tous les secondes membres sont positifs;
- Si une contrainte i contient le second membre négatif $b_i < 0$, on mutliplie la conttrainte par -1.
- Si le signe d'une variable est inconnu à l'avance par exemple $x_i \geq -2$, on peut la remplacer par $x_i' = x_i + 2 \geq 0$. Si on pas la borne inférieur, on la ramplce par $x_i = x_i' - x_i"$ avec $x_i", x_i' \geq 0$.
- La fonction objectif est à maximiser;
- Introduire les variables d'écarts;
- Solution initiale réalisable en origine comme point de départ, sinon méthode à deux phases pour trouver une solution admissible comme nouveau point.

1.2 Exemple

1.2.1 La forme standard d'un PL

maximiser

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

Sous les contraintes

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Les variables d'écarts x_4, x_5, x_6

Une solution intitiale à ce sytème correspond au sommet $O(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$. La fabrication est nulle donne un bénifice Z =0 (nul). Il s'agit d'une solution admissible au sens mathématique des contraintes.

1.2.2 Base en sommet origine O

Les variables de base en fonction des variables hors - base sont :

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$Z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

Augmenter la valeur de la fonction objectif Z revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénifice, donc c'est la variable x_1 et les autres variables hors base sont nulles.

1.2.3 La forme standard d'un PL

La variable x_1 est augmenté d'une valeur θ et $(x_2 = 0, x_3 = 0)$

$$x_4 = 30 - \theta$$

$$x_5 = 24 - 2\theta$$

$$x_6 = 36 - 4\theta$$

$$Z = 0 + 3\theta$$

Il faut augmenter la valeur du θ en respectant les contraintes de positivités des variables. Donc, $30 - \theta \geq 0$, $24 - 2\theta \geq 0$ et $36 - 4\theta \geq 0$, ce qui donne la maximum possible est $\theta = 9$. On trouve un nouveau sommet $C = (0+9, 0, 0)$, c'est un programme qui génére un bénifice de 27.

Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_1 en fonction de x_6 et on obtient $x_1 = 1/4(36 - x_2 - 2x_3 - x_6)^*$. En remplace x_1 par sa valeur dans les variables de base x_4 et x_5, le nouveau système est :

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

$$x_4 = 21 - 3/4x_2 - 5/2x_3 + 1/4x_6$$
$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$
$$Z = 27 + 1/4x_2 + 1/2x_3 - 3/4x_6$$

Cette opération porte le nom de PIVOT. Un pivot choisit une variable hors-base x_e (entrante, e=1), et une variable x_l de base dite sortante (l=6) de la base.
On augmente la valeur de la fonction objectif. On exprime les variables de base en C en fonction des variables hors base en C.

Exemple [Base en sommet voisin de C] Augmenter la valeur de la fonction objectif Z = 27 revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénifice, donc c'est la variable x_3 et les autres variables hors base sont nulles. Donc $x_3 = \theta, x_2 = 0, x_6 = 0$

$$x_1 = 9 - 1/2\theta$$
$$x_4 = 21 - 5/2\theta$$
$$x_5 = 6 - 4\theta$$
$$Z = 27 + 1/2\theta$$

En respectant les contraintes non négativités, la valeur maximal d'augmentation est de 3/2. Donc,

$$x_3 = 1/4(6 - 3/2x_2 + 1/2x_6 - x_5)$$

.

Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_3 en fonction de x_5 et on obtient $x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$. En remplace x_2 par sa valeur dans les variables de base x_1 et x_4, le nouveau système est :

$$x_1 = 33/4 - 1/16x_2 + 1/8x_5 - 5/16x_6$$
$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$
$$x_4 = 69/4 + 3/16x_2 + 5/8x_5 - 1/16x_6$$

$$Z = 111/4 + 1/16x_2 - 1/8x_5 - 11/16x_6$$

Remarque: x_3 est la varirable entrante dans la base et x_5 est la variable sortante de la base. On augmente la valeur de la fonction objectif. On exprime les variables de base en C en fonction des variables hors base en vosin de C, D.

.Exemple [Base en sommet voisin de D] Augmenter la valeur de la fonction objectif Z = 111/4 revient à augmenter la valeur de l'une des variables hors base. On cherche la variable qui augmente de plus grande marge de bénéfice, donc c'est la seule variable x_2 et les autres variables hors base sont nulles. Donc $x_2 = \theta, x_5 = 0, x_6 = 0$

$$x_1 = 33/4 - 1/16\theta$$

$$x_4 = 69/4 + 3/16\theta$$

$$x_3 = 3/2 - 3/8\theta$$

$$Z = 111/4 + 1/16\theta$$

En respectant les contraintes non négativités, la valeur maximal d'augmentation est de 4.

$$x_2 = 8/3(3/2 - x_3 - 1/4x_5 + 1/8x_6)$$

.Exemple [Base en sommet C] On cherhce x_2 en fonction de x_3 et on obtient $x_2 = 8/3(-3/2 - x_3 + 1/4x_5 - 1/8x_6)$. En remplace x_2 par sa valeur dans les variables de base, le nouveau système est :

$$x_1 = 8 + x_3/6 + x_5/6 - x_6/3$$

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

$$x_4 = 18 - x_3/2 + x_5/2$$

$$Z = 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6$$

Remarque: x_2 est la varirable entrante dans la base et x_3 est la variable sortante de la base. Toutes les coefficients de la fonction Z sont négatifs et donc pas d'augmentation possible et la solution optimale est $x^* = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$ qui donne la valeur maximal de $Z = 3 * 8 + 4 + 0 = 28$. $B = \{1, 2, 4\}$, $N = \{3, 5, 6\}$

1.3 Mise à jour générale des contraintes par PIVOT

La variable entrante est de la forme :

$$x_e = \hat{b}_e - \sum_{j \in N-\{e\}} \hat{a}_{ej} x_j - \hat{a}_{el} x_l$$

Mise à jour des autres variables de bases $i \in B - \{l\}$:

$$x_i = \hat{b}_i - \sum_{j \in N-\{e\}} \hat{a}_{ij} x_j - \hat{a}_{il} x_l$$

Mise à jour de la fonction objectif:

$$z = \hat{v} + \sum_{j \in N-\{e\}} \hat{c}_j x_j + \hat{c}_l x_l$$

Le mécanisme PIVOT suivant permet de calculer les coefficients de chaque variable à chaque itération.

2 Méthode algorithmique du Simplex

$\boxed{\text{Critères de Dantzig}}$

A partir de la forme standard du P.L, on exprime la solution au sommet à l'origine

- **Critère 1**. Pour déterminer la colonne qui doit entrer dans la base (entrante), on choisit celle qui comporte le $c_j > 0$ le plus grand de la fonction économique.

- **Critère 2**. Pour déterminer la colonne qui doit sortir de la base, on choisit celle d'indice l tel que b_k/a_{ke} soit le plus petit ($l = k$).

Exemple : Max

$$Z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

SC

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$e = 1, l = 6, min(30/1, 24/2 = 12, 36/4 = 9) = 9$

2.1 Mécanisme PIVOT

Le PIVOT reçoit en entrée n-uplet (N, B, A, b, c, v, l, e) une forme standard et retourne n-uplet $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$ d'une nouvelle forme standard. Il utilise une variable entrante x_e d'indice e et une variable sortante x_l d'indice l à chaque appel du procédure.

1. Calcule des coefficients de nouvelle variable de base x_e.
$\hat{b}_e = b_l/a_{le}$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ej} = a_{lj}/a_{le}$
$\hat{a}_{el} = 1/a_{le}$
2. Calcule des coefficients des contraintes restantes.
Pour tout $i \in B - \{l\}$ faire $\hat{b}_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ie}\hat{a}_{ej}$
$\hat{a}_{il} = -a_{ie}\hat{a}_{el}$
3. Calcule de la fonction objectif:
$\hat{v} = v + c_e\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{c}_j = c_j - c_e\hat{a}_{ej}$
$\hat{c}_l = -c_e\hat{a}_{el}$
4. Mise à jour d'ensemble de nouvelles varirables de base/hors-base.
$\hat{N} = N - \{e\} \cup \{l\}$ et $\hat{B} = B - \{l\} \cup \{e\}$
5. Retourne la nouvelle forme standard $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$ =Mécanisme PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e) du simplexe.

La variable entrante est de la forme :

$$x_e = \hat{b}_e - \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{a}_{ej}x_j - \hat{a}_{el}x_l$$

Mise à jour des autres variables de bases $i \in B - \{l\}$:

$$x_i = \hat{b}_i - \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{a}_{ij}x_j - \hat{a}_{il}x_l$$

Mise à jour de la fonction objectif:

$$z = \hat{v} + \sum_{j \in N - \{e\}} \hat{c}_j x_j + \hat{c}_l x_l$$

Théorème.
Considérons l'appel à $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$=PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e) dans lequel la valeur du pivot $a_{le} \neq 0$. Soit $\bar{x}$ la solution de base après l'appel, alors $\bar{x}_j = 0$ pour tout $j \in \hat{N}$, $\bar{x}_e = \frac{b_l}{a_{le}}$, $\bar{x}_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$ pour tout $i \in \hat{B} - \{e\}$

2.2 Formalisme de l'algorithme simplexe

1. Initialisation.

$$(N, B, A, b, c, v) = initialise - simplexe(A, b, c)$$

2. Simplexe.
Tant que $j \in$ N vérifie $c_j > 0$
faire choisir un indice $e \in N$ tel que $c_e > 0$
pour tout indice $i \in B$
faire is $a_{ie} > 0$ alors $\delta_i = b_i/a_{ie}$
sinon $\delta_i = \infty$
choisir un indice $l \in B$ qui minimise δ_i
si $\delta_i = \infty$
alors retourner non borné
sinon (N, B, A, b, c, v) = PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e)
Fin de tant que

3. Pour i allant de 1 à n, faire si $i \in B$, alors $\bar{x}_i = b_i$, sinon $\bar{x}_i = 0$
retourner $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ la solution optimale.

L'algorithme résume la méthode de maximisation par les tableaux directement.

Lemme 1 Etand donné un programme linéaire (A, b, c), supposez l'initialisation retourne une forme standard pour laquelle la solution est réalisable. Si simplexe retourne une solution optimale, cette solution est réalisable pour PL. Si simplexe retourne non borné, alors le programme PL est non borné.

Lemme 2 Soit (A, b, c) un programme linéaire sous forme canonique. Etant donné un ensemble de variable de base B, il y a unicité de la forme standard associée.

Lemme 3 Soit I un ensemble d'indices. Pour tout $i \in I$, soeint α_i et β_i des réels, et soit x_i une variable à valeur réelle. Soit γ un réel quelconque. Supposons pour toute configuration des x_i, l'on ait

$$\sum_i \alpha_i x_i = \gamma + \sum_i \beta_i x_i$$

alors $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in I$, et $\gamma = 0$.

2.3 Terminaison de l'algorithme Simplexe

Chaque itération de l'algorithme simplexe augmentait la valeur de la fonction objectif associée àla solution de base. Il se peut qu'une itération laisse la valeur de la fonction objectif inchangée. Ce phénomène porte le nom de dégénérescence, donc $b_l = 0$.
Lemme 1 Si SIMPLEXE n'arrive pas à se terminer en au plus C_{n+m}^{m} itérations, alors il boucle.
Lemme 2 Si Initialisation-SIMPLEXE retourne une forme standard pour laquelle la solution de base est réalisable, alors soit SIMPLEXE signale qu'un PL est non borné, soit il se termine avec une solution réalisable en au plus C_{n+m}^{m} itérations.

2.4 Problème de la soultion de base initiale

Situation

- Initialisation: toujours on a une solution réalisable? si non, comment construire une solution?
  L'objectif est de trouver une solution de base admissible qui servira de point de départ pour l'algorithme du simplexe.
  L'idée est de résoudre un problème intermédiaire de minimisation dont la solution fournira le point de départ de la méthode du simplexe. Ce problème intermédiaire porte le nom de Phase I du simplexe. Puis de suivre la méthode standard du simplexe (Phase II).

- A chaque itération de trouver une variable entrante et une sortante.

- Terminaison: en un nombre fini d'itérations, la solution optimale est trouvée (convergence) ou non.

Méthode de deux phases La méthode des Deux Phases est utilisée lorsque les variables artificielles apparaissent dans la forme standard ou canonique du problème linéaire.
Phase 1. Résolution du problème auxiliaire avec une nouvelle fonction objectif $w = -x_0$.
Phase 2. On appel à l'algorithme simplexe à partir de la forme standard de la phase 1 avec la fonction objectif originale.

Exemple.
Maximiser

$$z = 2x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_i \geq 0$$

Trouver la solution de base initiale en utilisant les deux phases.

Problème de la soultion de base initiale

Lemme : Prgramme auxiliéaire Soit L un programme linaéaire sous forme canonique.
Soit L_{laux} le programme linéaire à $n+1$ variables :
maximiser

$$w = -x_0$$

sous les contriantes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i$$

pour $i = 1, 2, ..., m$ et

$$x_j \geq 0$$

pour $j = 0, 1, ..., n$.
Alors L est réalisable si est seulement si la valeur de l'objectif optimale de L_{aux} est 0.

INITALISE-SIMPLEXE (A, b, c) Programme auxiliéaire Soit l l'indice du b_i minimal. Alors si $b_l \geq 0$, la solution de base initiale est réalisable, retourne (N, B, A, b, c, 0)
Sinon, former un programme linéaire auxiliéaire L_{aux} (voir le lemme précident)
On appel le PIVOT sur la forme standard finale de L_{aux} $(N, B, A, b, c, v) = PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, 0)$ (entrant = x0, sortant =x_l, sans que b_l >0)

Solution au programme auxiliéaire On a maintenant la solution réalisable pour L_{aux}.
Répéter le simplexe sauf l'initialisation, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale pour L_{aux}.
Si la solution de base $\bar{x}_0 = 0$ alors retourne la forme standard finale en supprimant x_0 et en restaurant la fonction objectif originale.
Sinon retourne irréalisable.

$\boxed{\text{Exemple du problème de phase I}}$ max

$$z = 2x_1 - x_2$$

sc

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. La solution de base (0, 0) est iréalisable, car la contrainte 2 est violée. Donc, la phase initiale du simplex ne retourne pas la forme standard évidente.
2. Trouver la forme standard
3. Formuler le programme linéaire auxiliaire.

4. Trouver la solution optimale du problème originale.

$\boxed{\text{Exemple du problème de phase I}}$

2. La forme standard du programme auxiliaire

max

$$z = -x_0$$

sc

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_0 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_4 - x_0 = -4$$

Ou bien sous la forme

$$x_3 = 2 + x_0 - 2x_1 + x_2$$

$$x_4 = -4 + x_0 - x_1 + x_2$$

$$x_i \geq 0$$

Après appel au PIVOT, on convertit ce programme à un autre programme linéaire dont la solution est réalisable (e=0, l=4 (la plus négative (-4))).
La solution de base de Laux est $x_1 = 0, x_2 = 4/5, x_3 = 14/5$ et $z = 0$ (2 PIVOT) On supprime x_0, puis on utlise la fonction z originale à ce stade, puis on continue le simplex (Phase II).

Lemme 1 Etand donné un programme linéaire (A, b, c), supposez l'initialisation retourne une forme standard pour laquelle la solution est réalisable. Si simplexe retourne une solution optimale, cette solution est réalisable pour PL. Si simplexe retourne non borné, alors le programme PL est non borné.

Lemme 2 Soit (A, b, c) un programme linéaire sous forme canonique. Etant donné un ensemble de variable de base B, il y a unicité de la forme standard associée.

Lemme 3 Soit I un ensemble d'indices. Pour tout $i \in I$, soeint α_i et β_i des réels, et soit x_i une variable à valeur réelle. Soit γ un réel quelconque. Supposons pour toute configuration des x_i, l'on ait $\sum_i \alpha_i x_i = \gamma + \sum_i \beta_i x_i$ alors $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in I$, et $\gamma = 0$.

Terminaison de l'algorithme Simplexe Chaque itération de l'algorithme simplexe augmentait la valeur de la fonction objectif associée à la solution de base. Il se peut qu'une itération laisse la valeur de la fonction objectif inchangée. Ce phénomène porte le nom de dégénérescence, donc $b_l = 0$. Lemme 1 Si SIMPLEXE n'arrive pas à se terminer en au plus C_{n+m}^m itérations, alors il boucle.

Lemme 2 Si Initialisation-SIMPLEXE retourne une forme standard pour laquelle la solution de base est réalisable, alors soit SIMPLEXE signale qu'un PL est non borné, soit il se termine avec une solution réalisable en au plus C_{n+m}^m itérations.