1 Introduction à la théorie des graphes

1.1 Concepts généraux

Définition Un graphe G =(X, U) est constitué de deux éléments X et U. X est l'ensemble de ses sommets et U est l'ensemble de ses arcs.

- Graphe est orienté si ses arces sont constitués des couples de sommets ordonnés.
- Graphe est non orienté si ses arêtes sont constitués des couples de sommets non ordonnés.
- Chaine est un ensemble d'arcs de longueur q reliant deux sommets x et y $(u_1, u_2, ..., u_q)$ tel que u_1 est incident par ses extrémités à à x et u_q est incident à y par l'un de ses extremités. Pour tout arc u_r avec $1 \leq r \leq q-1$ est incident à son précedent et son suivant.
- Chaine est simple si tous ses arcs sont distincts.
- Chaine est élémentaire si tous ses sommets sont distincts.
- cycle est une chaine dont les extrémités sont confondues (x=y).
- Un graphe est connexe s'il existe une une chaine entre toutes paire de sommets.
- Un graphe sans cycle est une forêt.

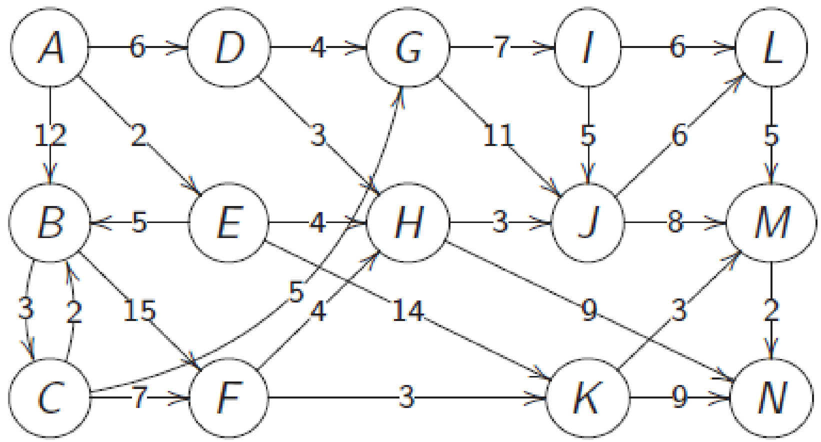
Définition

- Dans un graphe orienté, chaque arc u=(i,j) est ordonné
- i est appelé l'initial de l'arc u, i=I(u)
- j est appelé le terminal de l'arc u, j=T(u).
- Un chemin est une chaine orienté dans le même sens
- Un circuit est un chemin dont ses extrémités sont confondues.
- l'arc u=(i,j) estincident à i et à j.
- cycle est une chaine dont les extrémités sont confondues (x=y).

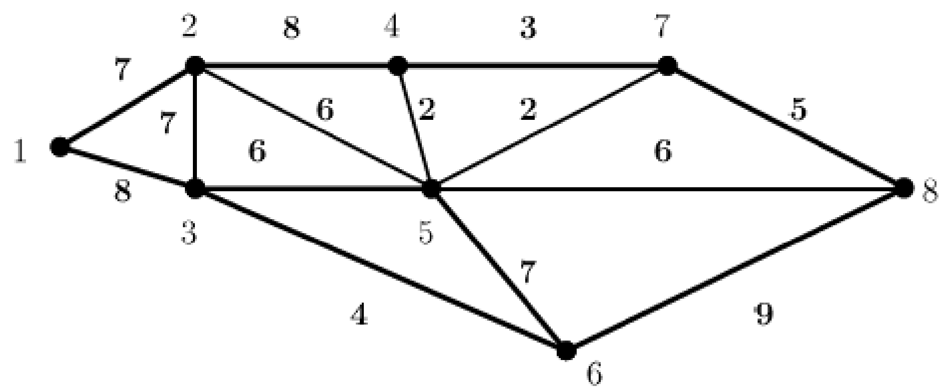
- Un graphe est connexe s'il ne contient aucun cycle (il existe au moins une chaine entre toute paire de sommets).
- Un graphe sans cycle est une forêt.
- On appel un sous graphe G'=(X', U') du graphe G =(X, U) tel que $X' \in XetU' \in U$ ayant des extrémités dans X.
- Graphe partiel engendré par U' ayant les mêmes sommets que G.

Définition

- Le degré d'un sommet x dans un graphe G =(X, U) est noté $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$
- $d_G^+(x) = |\{u \in U | x = I(u)\}|$: degré sortant de x (nombre d'arcs sortants de x)
- $d_G^-(x) = |\{u \in U | x = T(u)\}|$: degré entrant de x (nombre d'arcs entrant au sommet x)
- si $d_G^-(x) \neq 0$ et $d_G^+(x)$=0, le sommet x est un puits
- si $d_G^+(x) \neq 0$ et $d_G^-(x)$=0, le sommet x est une source
- Un circuit est un chemin dont ses extrémités sont confondues.
- L'ensemble des prédesseurs d'un sommet i est noté P(i).
- L'ensemble des successeurs d'un sommet i est noté S(i).
- Deux arcs sont adjacents s'ils sont incidents à un même sommet.
- Deux sommets x et y sont adjacents s'il existe (x,y) ou (y,x) dans U.
- l'arc u=(i, j) est une boucle si i=j.
- Le nombre de sommets est appelé l'ordre du graphe G.



Graphe orienté



Graphe non orienté

1.2 Modélisation d'un graphe

Modélisation d'un graphe

Le dessin d'un graphe ne suffit pas pour des graphes de grande dimension, il faut recourir à un ordinateur selon le type de problème.

- Matrice d'adjacence
- Matrice d'incidence
- Liste d'adjacence

Matrice d'adjacence sommets-sommets Un graphe G =(X, U) est constitué de deux éléments X et U. X est l'ensemble de ses sommets et U est l'ensemble de ses arcs.

- Le graphe G est modélisé par une matrice d'ajacence $A = (a_{i,j})$ carrée d'ordre n (nombre de sommets) dont les éléments sont les relations entre ses sommets.

- si le graphe est non orienté, alros
$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \textit{il existe une arete entre i et j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- La présence de 1 en diagonale signifie qu'il y a des boucles.

- La matrice est sysmétrique $(a_{ij} = a_{ji})$

- si le graphe est orienté
$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \textit{il existe un arc entre i et j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- La matrice est non sysmétrique

Matrice d'incidence sommets - arcs Un graphe G =(X, U) est constitué de deux éléments X et U sans boucle. X est l'ensemble de ses sommets et U est l'ensemble de ses arcs.

- Soient n le nombre de sommets de G et m le nombre d'arcs de G. Le graphe est représenté par une matrice $A = (a_{i,j})$ de la forme suivante: n lignes et m colonnes tel que, si le graphe est orienté:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = T(u_j) \\ -1 & \text{si } i = I(u_j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $i \in X$, $j \in U$

Matrice d'incidence sommets - arcs Un graphe G =(X, U) est constitué de deux éléments X et U sans boucle. X est l'ensemble de ses sommets et U est l'ensemble de ses arcs.

- si le graphe est non orienté:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si i est une extrémité de l'arc } u_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $i \in X$, $j \in U$

$\boxed{\text{Liste d'adjacence}}$ Une autre manière de représenter un graphe est d'utiliser les listes d'adjacence de chacun des sommets. Un graphe G =(X, U) est constitué de deux éléments X et U. X est l'ensemble de ses sommets et U est l'ensemble de ses arcs.

- Chaque sommet i a une liste de ses successuers S(i)
- Chaque sommet i a une liste de ses prédesseurs P(i)
- Cas d'un graphe orienté

$\boxed{\text{Liste d'adjacence}}$

- Cas d'un graphe non orienté. On donne pour chaque sommet i la liste de ses voisins $(S(i) \cup P(i))$

$\boxed{\text{Connexité et graphe réduit}}$

- Un graphe est connexe s'il existe au moins une chaîne entre toute paire de ses sommets
- Un graphe est fortement connexe s'il existe au moins un chemin entre toute paire de ses sommets.
- Un graphe G=U', X') est un graphe réduit de G =(X, U) si
  - Les éléments de X' sont des composantes fortement connexe de G.
  - Un arc $(C_i, C_j) \in U'$ s'il existe au moins dans le graphe G un arc en tre un sommet de C_i et un sommet de C_j.
- Recherche d'une composante fortement connexe : Soit $S \in X$, la composante fortement connexe de G contenant S est déterminée comme suit:
  - déterminer l'ensemble des sommets accessibles à partir de S noté (X_1)
  - déterminer l'ensemble des sommets qui peuvent atteindre S (X_2)
  $CFC(S) = X_1 \cap X_2$

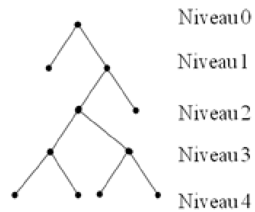
$\boxed{\text{Coloriage d'un graphe}}$ Il y a plusieurs problèmes qui peuvent modélisés par la coloration des graphes.

- Affectation des fréquences aux cellules d'un opérateur de télécoms.
- Organisation des examens

- Cohabiter des personnes incompatible
- Coloration des sommets:affecter une couleur à tous les sommets sans que deux sommets ajacents ont la même couleur
- Coloration des arrêtes: affecter une couleur à tous les arrêtes telle que les arrêts ayant des sommets en commun sont de couleurs différentes.
- Indice chromatique : nombre minimum de couleurs pour colorier le graphe $\xi(G)$.

Généralité sur les arbre

- Un arbre T=(X, U) est un graphe connexe sans cycle.
- L'orientation des arcs est sans importance pour l'arbre.
- Un arbre de $n \geq 2$ sommets comporte n-1 arcs.
- Tout graphe connexe possède un graphe partiel qui est un arbre.
- Feuille d'un arbre est un sommet de degré 1.
- Un arbre T d'ordre n suppérieur à 2 comportes au moins deux fauilles.
- Forêt est tout graphe sans cycle.
- Les composantes fortement connexes d'une forêt sont des arbres
- Exemple d'arbre:



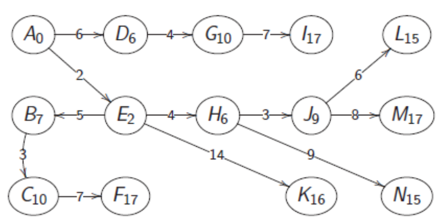
Arbre binaire

- Un arbre binaire T est un arbre de n sommets comportant un seul sommet de dégré 2 et dont tous les autres sommets sont de degré 1 ou 3 (voir l'exemple précédent avec n=11).

- Le sommet de degré 2 est appelé racine de T.
- Le sommet de degré 3 est appelé un sommet interne de T.
- La racine a deux fils, chaque sommet interne a un père et deux fils et chaque feuille a un père.
- La distance entre deux sommets est la longueur de l'unique chaîne entre eux.
- Un sommet x est dit de niveau i si x à une distance i de la racine de T.
- La racine de T est au niveau 0
- La profondeur d'un arbre binaire T est le niveau maximum associé à ces sommets.

Arborescence

- Racine d'un graphe: un sommet a d'un graphe est une racine s'il existe dans G un chemin joignant a à tout autre sommet du G.
- Un graphe G est une arborescence de racine a si :
  - Le sommet a est une racine de G
  - G est un arbre
- L'arborescence est un arbre mais l'inverse est fausse.
- Le concept d'arborescence est orienté
- Exemple d'arborescence de racine A_0:



2 Arbre de couvrant de poids minimum

Arbre couvrant de poids minimum

- Un arbre couvrant est un graphe partiel d'un graphe connexe.
- Chaque arc u est associé à une longueur ou un poids $l(u)$ ou pondération.
- Soit G=(X, U) un graphe connexe. L'abre couvrant de poids minimum est un graphe partiel dont la somme des poids des arcs est minimum.
- Soit $\Gamma = (X, T)$ un arbre couvrant de G, alors

$$l(\Gamma) = \sum_{u} l(u)$$

  est la longueur de Γ

- Soit E l'ensemble des arbres couvrant de G. Alors l'abre couvrant à poids minimum est l'arbre dont

$$l(\gamma) = \min_{\Gamma \in E} \quad l(\Gamma) \tag{1}$$

2.1 Algorithme KRUSKAL

Algorithmes de recherche d'un arbe couvrant - 1 On distingue deux algorithmes de recherche dans un graphe G=(X, U) connexe.

- Algorithme KRUSKAL: Permet de construire un arbre couvrant de poids minimums en commençant par construire les arcs de poids minimums de telle sorte que les cycles soient interdits.

T **:=** $\varnothing$
i := 1
Tant que $(i < n)$ **Faire**
- *Choisir un arc* e_i *de poids minimum dans U-T ne déterminant aucun cycle avec des arcs de T.*
- $T := T \cup \{e_i\}$
- $i := i + 1$

Fin Tant que

2.2 Algorithme PRIM

Algorithmes de recherche d'un arbe couvrant - 2

- Algorithme PRIM: Soit un arc v=(x, y) d'un graphe G=(X, U). Le graphe $C_v(G)$ résultant de la conraction de l'arc v est obtenu à partir de G :
  -En remplaçant les sommets x et y par un seul sommet xy.
  - L'extrémité I(u) (resp. T(u)) de l'arc $u \in C_v(G)$ est xy si et seulement si l'extrémité initiale (resp. terminale) de l'arc correspondant dans G est x ou y.

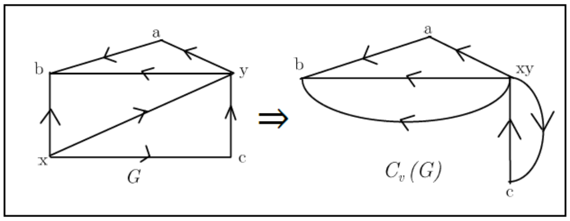
T **:=** $\varnothing$
Tant que *(G comporte plus qu'un sommet)* **Faire**
- *Choisir un sommet x de G.*
- *Déterminer un arc v incident à x tel que :*

$$l(v) = \min_{\begin{cases} u \in U \\ x \in \{I(u), T(u)\} \\ u \neq boucle \end{cases}} (l(u))$$

- $T := T \cup \{v\}$
- $G := C_v(G)$

Fin Tant que

Exemple de conraction de l'arc (x, y).


a
b
y
x
c
G
⇒
a
b
xy
c
$C_v(G)$