Université IBN Tofail

Faculté des Sciences

Département Informatique

Recherche Opérationnelle : Programmation liniéaire

Chapitre 1

Author:
Pr. Khalil IBRAHIMI

Filière:
Licence SMI, S5

October 3, 2022

1 Introduction

Définition La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie, les réseaux, la logistique et les transports. L'objectif du cours est de donner aux étudiants qui souhaitent occuper un poste d'ingénieur technique les bases de la recherche operationnelle. La méthodologie de la recherche opérationnelle (RO) suit le schéma suivant:

- Formulation du problème à résoudre: Les objectifs, les contraintes et les variables de décision;
- Modélisation du problème (modèle mathématique);
- Solution au problème c'est de trouver la valeur optimale de l'objectif;
- Implémentation de la solution.

L'étudiant au final doit proposer une meilleure utilisation des ressources (utilisation optimale) face à un problème de recherhce opérationnelle.

Histoire

- La recherche opérationnelle est née pendant la Seconde Guerre mondiale des efforts conjugués d'éminents mathématiciens (dont von Neumann, Dantzig, Blackett) à qui il avait été demandé de fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires;
- En 1940 par le Prix Nobel de physique Patrick Blackett qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance;
- A partir des années 50, la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises;
- Au milieu des années 70, à cause d'un excès d'enthousiasme au départ et à l'inadéquation des moyens informatiques à l'application des méthodes de la RO, la discipline s'essoulle;
- A partir du milieu des années 90, on assiste à un retour en force la RO, les outils informatiques étant maintenant à la hauteur des méthodes proposées par la recherche opérationnelle (exemple IBM CPLEX Optimizer);

Exemples des domaine d'applications de la RO:

- Production : maximiser le profit selon la disponibilité de la main d'oeuvre, demande du marché, capacité de production, prix de revient du matériau brut;
- Réseaux de transports : minimiser la distance totale parcourue selon les quantités de matériaux à transporter, capacité des transporteurs;
- Réseaux de communication, systèmes d'information: conception, configuration;
- Télécomuncations : optimisation de déploillement de stations de base du réseau mobile;
- Finance;
- Economie;
- Santé;

Exemple du problème de production :

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée. Les deux produits P1 et P2 rapportent respectivement à la vente 6 dh et 4 dh par unité.

	$P1$	$P2$	$Disponibilité(contraintes)$
Équipement	3	9	81
Maind'oeuvre	4	5	55
Matière première	2	1	20
Profit unitaire	6	4	$z = 10$

Type de question: Quelles quantités de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits?

Problème de transport

Deux usines à Casa et à Tanger fabriquent des produits pour une distribution aux clients qui se trouvent à Casa, Rabat, Fès selon leurs demandent d_j. La capacité de production est C_i. Le coût c_{ij} de distribution est en fonction de la quantité transportée entre la source et la destination. La capacité maximale de production.

Usine	*Casa*	*Tanger*
Production	60	50

La demande

clients	*Casa*	*Rabat*	*Fes*
Demande	20	50	30

Le prix unitaire

Prix/unité	*Casa*	*Rabat*	*Fes*
Casa	0	100	300
Tanger	500	200	400

Quel est le plan optimal de distribution à coût minimal. La réponse est de suivre les méthodes qui vont être exposées dans les sections suivantes.

2 Programmation Linéaire

2.1 Rappel sur le calcul matriciel

Matrice Une matrice est un tableau rectangualire. Exemple
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$A = (a_{ij})$ est une matrice de taille 2*3; i=1,2; j=1,2,3. Une matrice carrée de dimension n*n. Le transposé d'une matrice est obtenu en échangeant les lignes et les colonnes.
$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
L'inverse d'une matrice A de taille nxn est noté A^{-1} telque $A * A^{-1} = I$. Une matrice A inversible est dite non sigulière. Si la matrice n'a pas d'inverse A^{-1} est dite singulière (det(A) =0) ou non inversible.

Vecteur (colonne) Un vecteur est un tableau à une dimension. Exemple

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vecteur ligne est le transposé de x teq: $x^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Le vecteur unité e_i le vecteur dont le iéme élément est égale à 1 et tous les autres égaux à 0. Vecteurs linéairement dépendants Les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ est linéairement dépendants s'il existe des cofficients $c_1, c_2, ..., c_n$ non nuls tels que $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0$. Sinon ils sont dits linéarement indépendants (cas de colonnes d'une matrice I). Exemple. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T, x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T, x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 \end{pmatrix}^T$, sont liniéarement dépendants car,$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ Rang d'une matrice Le rang d'une matrice est un entier compris entre 0 et min(m, n). Le nombre de colonnes ou de lignes de A linéairement indépendants.

2.2 Formes d'un programme linéaire (PL)

Définition : On a des problèmes qui peuvent être formulés en tant que maximisation où minimisation d'un objectif, en fonction des ressources limitées et de contraintes. Si on arrive à expimer l'objectif sous forme d'une fonction linéaire en fonction des contraintes sous la forme d'égalités ou d'inégalités sur ces variables, alors on a un problème de programmation linéaire (PL).
Fonction linéaire : On définit une fonction linéaire f pour tout variable x_i et nombre réel a_i par: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{j=1}^n a_jx_j$
Si b est un nombre réel et f est une fonction linéaire, alors l'équation $f(x_1, x_2, ..., x_n) = b$ est une égalité linéaire et les inégalités linéaires: $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b$ et $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b$.

Définition : Un problème de programmation linéaire consiste à minimiser ou maximiser une fonction liniéaire soumise à des contraintes liniéaires (fini).

Type du programme : Si l'objectif du problème est de minimiser, le programme linéaire porte le nom de programme linéaire de minimisation.
Si l'objectif du problème est de maximiser, le programme linéaire porte le nom de programme linéaire de maximisation.
La formulation et la résolution du programme linéaire nécessite de mettre le problème sous forme algébrique, canonique ou standard.

Forme canonique : Nous considérons n nombres réels c_1, c_2, ..., c_n; m nombres réels b_1, b_2, ..., b_m; et m*n nombres réels a_{ij} pour $j = 1, ..., n$ et $i = 1, ..., m$. On cherche à trouver n nombres réels x_1, x_2, ..., x_n qui maximisent la fonction objectif $\sum_{j=1}^n c_jx_j$

Sous les contraintes de positivités $x_j \geq 0 \ pour \ j = 1, ..., n$

Et contraintes d'inégalité inférieur ou égale à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \; pour \; i = 1, ..., m$

Forme canonique matriciel tuple (A, b, c) :
Soit le programme suivant:
maximiser

$$c^T x$$

T est le transposé.
Sous les contraintes

$$Ax \leq b \; et \; x \geq 0.$$

Avec $A = (a_{ij})$ est une matrice m x n, $b = (b_i)$ est un vecteur de dimension m et $c = (c_j)$ est un vecteur de dimension n et $x = (x_j)$ est un vecteur de dimension n.

2.3 Solution réalisable

Définition : Une solution réalisable est toute configuration des variables $\bar{x}$ qui satisfait à toutes les contraintes.
Une configuration de $\bar{x}$ qui ne satisfait au moins une contrainte est dite irréalisable.
Si un programme n'a aucune soltution réalisable, il est irréalisable; sinon, il est réalisable.
Si le programme a des solutions réalisables sans avoir la valeur de l'objectif optimale finie, alors il est non borné.
Valeur de l'objectif:
Nous dirons qu'une solution $\bar{x}$ a la valeur objectif $c^T\bar{x}$.
Une solution $\bar{x}$ dont la valeur objectif est suppérieure à toutes les solutions réalisables est une solution optimale. Sa valeur est appelée valeur de l'objectif optimale.

2.4 Interprétation géométrique

Si

$$K = \{x|Ax \leq b, x \geq 0\}$$

où A est une matrice carrée d'ordre m. Alors K est l'intersection de l'orthan non négatif de

$$\mathbf{R}_+^{\mathbf{n}} = \{x|x \geq 0\}$$

et de m demi-espaces ($Ax \leq b$), c'est un polyédre de $\mathbf{R}$
Les points de K satisfaisant les contraintes avec le signe d'égalité ($Ax = b$) sont situés sur des faces de K. Leur intersection définit un sommet de K (point extrême)
La maximisation de la fonction objectif sur K, permet de trouver un x^* dans K et une valeur z^* tels que l'hperplan $c^T x$ coupe le domaine K en un point extrême du polyèdre. L'algorithme du Simplex qu'on va présenter ultérieurement consistera à se déplacer entre les points extrêmes jusqu'à lorsqu'on trouve un optimum.

2.5 Exemple d'une solution géométrique

La méthode est connue sous le nome de la (méthode de droite de paralléle.
Maximiser

$$z = x_1 + x_2$$

Sous les contraintes

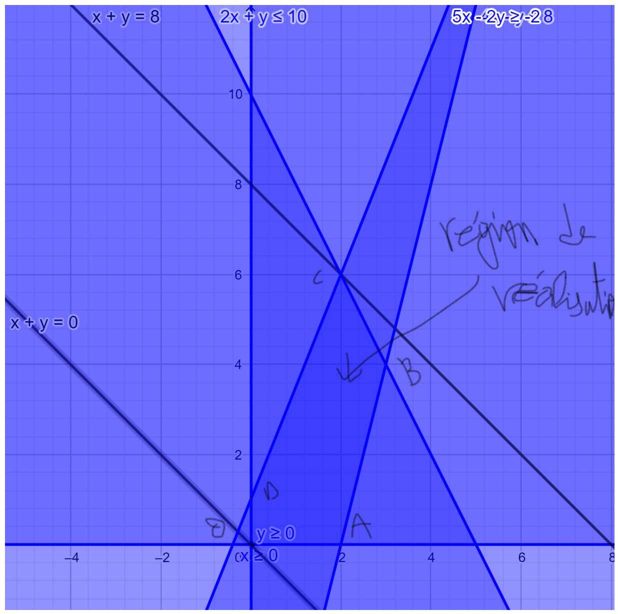
$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$5x_1 - 2x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

L'ensemble d'intersections est le polyèdre OABCD. Première méthode est le recensement des sommets. Calculer la valeur de l'objectif à chaque sommet, puis de choisir la plus grande qui est l'omptimale.
Deuxième méthode est la méthodes des droites parallèles à la droite qui passe par l'origine (bénéfice est nulle, $x_1 + x_2 = 0$). La solution optimale du PL est tout point d'intersection du polyèdre avec la droite $x_1 + x_2 = 8$ en sommet B (2, 6).



La région de réalisation est bornée, il existe une valeur maximale de z dans laquelle l'interesection de la droite $z = x_1 + x_2$ et la région est non vide.

2.6 Propriétés fondamentale de la programmation linéaire

Théorème. Soit A une matrice et b un vecteur.
1.Le système $Ax = b$ a une solution non négative si et seulement si $yb \geq 0$ pour tout vecteur y satisfaisant $yA \geq 0$.
2.Le système $Ax \leq b$ a une solution x si et seuelement si $yb \geq 0$ pour tout vecteur $y \geq 0$ satisfaisant $yA = 0$.

Propriété 1 Soit $K = \{x|Ax \leq b, x \geq 0\}$. Si K est non vide, alors K a au moins un point extrême.

Propriété 2: Si une fonction linéaire atteint son maximum (ou son minimum) sur K, alors cet optimum a lieu en un point extrême de K.

Exemple de problème de production Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée. Les deux produits P1 et P2 rapportent respectivement à la vente 6 dh et 4 dh par unité.

	$P1$	$P2$	$Disponibilité(contraintes)$
Équipement	3	9	81
Maind'oeuvre	4	5	55
Matière première	2	1	20

Q1. Quelles quantités de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits? (méthode des droites parallèles)

Q2. Utiliser la méthode du recensement des sommets du polygone pour maximiser le bénéfice total.

Modélisation

- Choix des variables: Deux variables positives :
  - quantité de P1 produite : $x_1 \geq 0$
  - quantité de P2 produite : $x_2 \geq 0$
- Objectif = Une fonction économique

$$Max\ z = 6x_1 + 4x_2$$

- Contraintes = des inégalités (trois demi-espaces)

$$3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

- Appel de la méthode des droites parallèle pour déterminer la production optimale.

2.7 Difficulté de généralisation de la mèthode géométrique

1. Il est difficile de généraliser la representation géométrique dans un espace plus de 3 dimensions.
2. Un autre problème lorsque le nombre contraintes augmente même pour deux variables.

Théoréme Si l'ensemble des contraintes d'un programme liniéaire forme un polyèdre non vide, alors il existe une solution optimale qui est le sommet de ce polyèdre.
La solution optimale du PL est alors trouvée en recensant tous les points du polyèdre, puis calculer la valeur de la fonction objectif et de choisir la plus grande valeur qui représente la solution optimale.
Une nouvelle méthode du Simplexe géométrique permet à partir d'une solution initiale (point de départ du polyèdre), lors de toute itération de passer d'un sommet à un sommet voisin en lequel la valeur de la fonction objectif est meilleure. L'algoritme s'arrête lorsqu'on ne trouve aucun sommet voisin dont la valeur de la fonction objectif est meilleure.

2.8 Interprétation économique d'un programme liniéaire

Soit un P.L suivant:
maximiser

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous les contraintes de positivités ($x_j \geq 0$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \; pour \; i = 1, ..., m$$

Cette formulation signifie qu'une entreprise exerce un ensemble d'activités j. Chaqu'une consomme une ressource a_{ij} de b_i par unité et peut être exercée avec une quantité x_j. Si enfin le c_j est le profit unitaire obtenu de l'activité j. Alors déterminer les quantités x_j de manière que: la valeur de z soit maximal en respectant les contraintes de la disponbilité des ressources.

2.9 Conversion de programmes linéaires sous forme canonique

Il existe des programmes linéaires qui ne peuvent pas être sous forme canonique. Par exemple,

- La fonction objectif peut être une minimization au lieu de maximization;

- Il peut avoir des variables sans la contrainte de positivité;
- Il peut avoir des contraintes d'égalités aulieu d'inégalité;
- Il peut avoir des contraintes d'inégalités de signe différent (suppérieur aulieu d'inférieur où égale).

Constat Lorsqu'on convertit un programme linéaire L en un programme linéaire L', on cherche que la solution optimale de L' donne une solution optimale au programme L.

Deux programmes linéaires de maximisation L et L' sont des équivalent si pour toute solution réalisable de L ayant pour valeur objectif z, il existe une solution réalisable homologue de L' ayant la même valeur objectif z et l'inverse.

Un programme de maximisation L et un programme de minimisation L' sont équivalents si pour toute solution réalisable de L ayant pour valeur objectif z, il existe une solution réalisable homologue de L' ayant la valeur objectif -z et l'inverse.

2.9.1 Exemple

Conversion d'un PL de minimisation à un PL de maximisation
Soit le programme linéaire suivant:
minimiser

$$-2x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_1$$

On inverse les coefficeints de la fonction objectif.
maximiser

$$2x_1 - 3x_2$$

sous les mêmes contraintes.

Conversion d'un PL au forme canonique On a pas le signe de la variable x_2. Dans ce cas, on remplace x_2 par $x_2' - x_2''$ avec les contraintes de

positivités $x_2' \geq 0$ $x_2'' \geq 0$
maximiser

$$2x_1 - 3(x_2' - x_2'')$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2' - x_2'' = 7$$
$$x_1 - 2(x_2' - x_2'') \leq 4$$
$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

Ensuite, nous convertissons la contrainte dégalité $x_1 + x_2' - x_2'' = 7$ en inégalités

$$x_1 + x_2' - x_2'' \geq 7$$

et

$$x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7$$

maximiser

$$2x_1 - 3(x_2' - x_2'')$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2' - x_2'' \geq 7$$
$$x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7$$
$$x_1 - 2(x_2' - x_2'') \leq 4$$
$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

En fin, nous prenons l'opposé de la contrainte $x_1 + x_2' - x_2'' \geq 7$ qui est

$$-x_1 - x_2' + x_2'' \leq -7$$

On renome les variables pour la cohérence et on trouve la forme canonique.
maximiser

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

sous les contraintes

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -7$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 7$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forme canonique mariciel
Maximiser

$$z = cx$$

sous les contraintes

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Exemple:
$x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $b = (-7, 7, 4)^T$, $c = (2, -3, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.10 Conversion d'un PL en forme standard

Un programme linéaire est sous forme standard si uniquement les contraintes de positivités sont des contraintes d'inégalités, toutes les autres contraintes étant des égalités.
La conversion de la i-éme $i = 1, ..., m$ contrainte d'inégalité à égalite.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq bi$$

La nouvelle variable d'écart est noté x_{n+i} et la contrainte devient

$$x_{n+i} = bi - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

avec la contrainte de positivité $x_{n+i} \geq 0$.

Les variables de gauche x_{n+i} sont des variables de base, alors les variables de droite x_j sont des variables hors-base qui figures seul dans la fonction objectif.

Exemple
maximiser

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

Sous les contraintes

$$x_4 = -7 + x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_5 = 7 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_6 = 4 - x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

On mettre les contraintes de positivité $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ et la forme standard est:

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$
$$x_4 = -7 + x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_5 = 7 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_6 = 4 - x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

Soit N designe l'ensemble des indices des variables hors-base et B désigne l'esemble des indices des variables de base. Une forme standard est un tuple (N, B, A, b, c, v) telque:

$$z = v + \sum_{j \in N} c_j x_j$$
$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j$$

pour $i \in B$.

La forme standard

$B = \{4, 5, 6\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ $b = (-7, 7, 4)^T$, $c = (2, -3, 3)^T$ et $v = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$