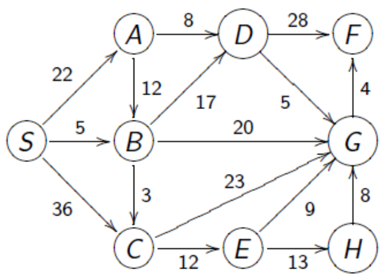
1 Problèmes du flot maximum

Exemple du réseau de transport Une usine S
Trois demandes en F (30), G (16) et H (15) (en conteneurs)
Des disponibilités d'un réseau de transport
Comment satisfaire au mieux la demande ?

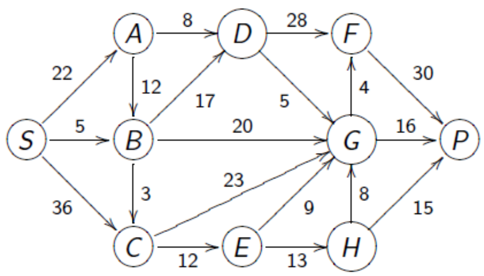


Définition d'un flot

- On appelle un réseau de transport un graphe orienté fini de sommets sans boucles avec une **source** s et une **puits** t , G=(X, U).
- Chaque arc a une capacité $c(u)$ (valeure de l'arc = débit max).
- Au plus un arc entre deux sommets.
- Un **flot** dans un réseau G est une fonction à valeur entier f: X x X — R tel que:
  - Une loi de conservation aux sommets intermédiaires x différent de s et de t.
  $$\sum_{a \in P(x)} f(a,x) = \sum_{b \in S(x)} f(b,x)$$
  - Contrainte de capacité: Le flux d'un arc u est $f(u)$ $(0 \leq f(u) \leq c(u))$
  - Symétrie : pour tout $i, j \in XxX$, on a $f(i,j) = -f(j,i)$
- La valeur du flot est la somme des flux entrant à t:

$$V(f) = \sum_{x \in P(t)} f(x,t) = \sum_{x \in S(s)} f(x,s)$$

Modélisation



Chaine améliorante

- Un arc u est sturé si $f(u) = c(u)$.
- Si l'arc $u \notin U$, $f(u) = 0$.
- Une chaine améliorante est une chaine élémentaire de la source s à la destination t (puits) telle que : aucun arc direct ne soit saturé et que les flux des arcs indirects soient strictements positifs.
- L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de trouver une chaine améliorante et d'augmenter la valeur du flot.
- La recherche d'une chaîne améliorante = phase de marquage
- Amélioration du flot = dans la phase d'augmentation

Réseaux résiduels (Graphe d'écarts)

- Capacité résiduel d'un arc = la quantité de flux supplémentaire à ajouter sans dépasser la capacité de l'arc:

$$c_f(u) = c(u) - f(u)$$

- Le réseau résiduel de G=(X, U) et un flot f, est constitué des arcs de G qui peuvent supporter un flux supplémentaire ($G_f = (X, U')$) avec pour tout $u \in U'$, $c_f(u) > 0$

Ajouter un flot au flot existant Soit un flot f de G=(X, U) et un flot f' de $G_f = (X, U')$. Alors la somme $f + f'$ est un flot de G de valeur $|f + f'|$ $=|f| + |f'|$

Chemin améliorant Définition Un chemin p améliorant du graphe G de flot f est un chemin élémentaire de s vers t dans le réseau résiduel G_f.

La cpacité résiduelle de p est la quantité maximale transportée via les arcs du chemin p :

$$c_f(p) = min\{c_f(u) : u \in p\}$$

Lemme Soit G=(X, F) un réseau de transport, soit f un flot de G et soit p un chemin améliorant de G_f. On définit un efonction f_p:

$$f_p(u) = \{c_f(p) si u \in p, -c_f(p) si u \in p(inverse), sinon 0$$

Alors f_p est un flot de G_f de valeur $|f_p| = c_f(p) > 0$

Coupe

- Soient X_1 un ensemble de sommets de G, et $X_2 = X - X_1$ son complémentaire dans G tellle que $s \in X_1$ et $t \in X_2$. La coupe de G est $C = (X_1, X_2) = \{u/u \in X_1 x X_2\}$.

- Elle sépare un sommet a d'un sommet b lorsque $a \in X_1$ et $b \in X_2$.
- Si f est un flot de G, alors le flot net à travers la coupure (X_1, X_2) est $f(X_1, X_2)$
- La capacité de la coupe est notée $c(C) = \sum_{u \in (X_1 x X_2)} c(u)$.
- Une coupe minimum d'un réseau est une coupe dont la capacité est minimale à toutes les coupes du réseau.
- La coupe inverse de C est $C' = \{u/u \in X_2 x X_1\}$
- Le flot est compatible si pour tout u , $f(u) \leq c(u)$
- Un flot est complet si tous les chemins de s à t sont saturés.

Lemme Pour tout flot f compatible et tout coupe C séparant s et t, la valeur du flot $v(f) = f(C) - f(C')$.
Aussi $v(f) \leq c(C)$
L'égalité implique la maximalité du flot et la minimalité de la coupe.

Flot maximum et coupe minimum Théorème Si f est un flot dans G d source s et de puits t alors les contitions suivantes sont équivalentes:

- f est un flot maximam de G

- G_f ne contient aucun chemin améliorant
- $|f| = c(X_1, X_2)$ pour la coupe de G.

$\boxed{\text{Algorithme Ford-Fulkerson: Phase de marquage}}$

Marquer la source s par +
Tant que cela est possible
Choisir un sommet x non marqué vérifiant l'une des deux conditions:
si il exite $y \in X$ tel que :

$$y\ est\ marqu\acute{e}\ et\ y \in P(x))et(f(y,x) < c(y,x)$$

Alors marquer + le sommet x.
S'il exsite $y \in X$ tel que :

$$y\ est\ marqu\acute{e}\ et\ y \in S(x))et(f(y,x) > 0$$

Alors marquer - le sommet x.
Noté $\Gamma_p(x) = y$: Prédécesseur de x dont le marquage est y.
Si le puits t est marqué on s'arrête et le flot actuel n'est pas maximal. La chaine améliorante est trouvée.
Si le puits t n'est pas marqué, alors la chaine n'existe pas.

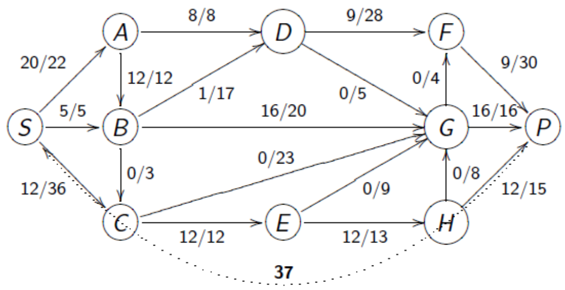
$\boxed{\text{Algorithme Ford-Fulkerson: Phase d'augmentation}}$

Tant que qu'il existe une chaîne améliorante p faire
Augmenter le flux sur la chaine améliorante comme suit:

- $\delta^+ = min\{c(u) - f(u)\}$, pour tout arc direct u de p.
- $\delta^- = min(f(u))$, pour tout arc indirect u de p.
- $\delta^- = min\{\delta^-, \delta^+\}$
- pour tout arc direct u faire : $f(u) = f(u) + \delta$
- pour tout arc indirect u faire : $f(u) = f(u) - \delta$

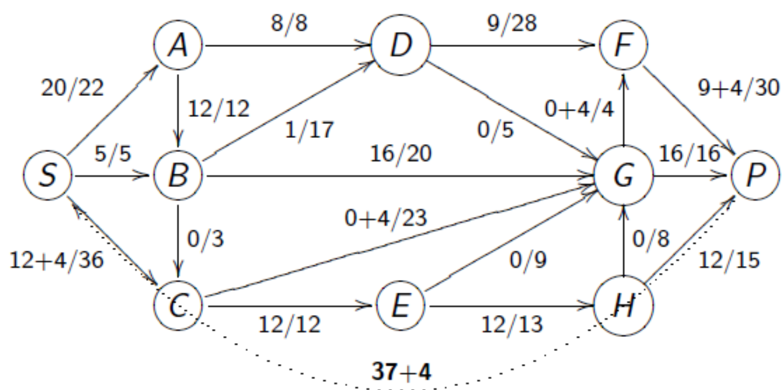
Lorsque n'existe pas de chaine améliorante, le flot est optimal.

$\boxed{\text{Flot de départ } (f_0)}$ LE flot intial est de valeur $V(f_0) = 37$.



Montrer que le chemin améliorant est p =(S, C, G, F, et P) et $c_f(p) = 4$

Augmentation du flot f_0



Montrer que le flot maximal est 57 à la fin de l'algorithme.

Flot à valeur maximal et à coût minimum

Problème

- Transporter le maximum entre s et t
- Coût de transport doit être minimal

Définition

- Réseaux de transport R=(X, U, C)
- S: Source, et t : puits
- A chaque arc $u = (i, j)$ sont associés: la capacité $c(u) > 0$ et le coût unitaire $p(i, j)$
- Le coût du flux $f(i, j)$ sur l'arc u est : $f(i, j) * p(i, j)$

Le coût d'un flot f est la somme des coûts sur tous les arcs $\sum_{(i,j)} f(i,j) * p(i,j)$

Exercice

Soient trois châteaux, *A*, *B* et *C* alimentant quatre villages *D*,*E*,*F* et *G*.

- Le château *A* bénéfice d'une alimentation et d'une réserve capables de débiter *45 l/s*.
- Le château *B* peut seulement débiter *25 l/s*.
- Le château *C* peut débiter *20 l/s*.

Plusieurs canalisations existent et leur débit maximal en l/s est mentionné, pour chacune sur le tableau ci-dessous.

- Le village *D* aurait besoin d'un débit de *30 l/s*.
- Le village *E* : *10 l/s*.
- Le village *F* : *20 l/s*.
- Le village *G* : *30 l/s*.

On demande d'établir la meilleure alimentation possible.

Canalisation	*(A,D)*	*(A,E)*	*(A,G)*	*(B,D)*	*(B,E)*	*(B,F)*	*(C,F)*	*(C,G)*
Débit maximal	10	15	20	20	5	15	10	10

1. Modéliser ce problème un flot maximal

2- Trouver le graphe d'écarts

3- Trouver la coupe minimale et sa valeur

4- Déduire la valeur du flot maximal.