Critères de Dantzig

A partir de la forme standard du P.L, on exprime la solution au sommet à l'origine

- **Critère 1.** Pour déterminer la colonne qui doit entrer dans la base (entrante), on choisit celle qui comporte le $c_j > 0$ le plus grand de la fonction économique.
- **Critère 2.** Pour déterminer la colonne qui doit sortir de la base, on choisit celle d'indice l tel que b_k/a_{ke} soit le plus petit$(l = k)$.

Exemple : Max

$$Z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

SC

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$e = 1, l = 6, min(30/1, 24/2 = 12, 36/4 = 9) = 9$

Mécanisme Pivot

Le PIVOT reçoit en entrée n-uplet (N, B, A, b, c, v, l, e) une forme standard et retourne n-uplet $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$ d'une nouvelle forme standard. Il utilise une variable entrante x_e d'indice e et une variable sortante x_l d'indice l.

Calcule les coefficients de nouvelle variable de base x_e

$\hat{b}_e = b_l/a_{le}$ $(a_{le} > 0)$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ej} = a_{lj}/a_{le}$
$\hat{a}_{el} = 1/a_{le}$

Calcule les coefficients des contraintes restantes (rectangle)

Pour tout $i \in B - \{l\}$ faire $\hat{b}_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ie}\hat{a}_{ej}$
$\hat{a}_{il} = -a_{ie}\hat{a}_{el}$

Mécanisme Pivot

Calcule la fonction objectif

$\hat{v} = v + c_e\hat{b}_e$
Pour tout $j \in N - \{e\}$ faire $\hat{c}_j = c_j - c_e\hat{a}_{ej}$
$\hat{c}_l = -c_e\hat{a}_{el}$

Mise à jour d'ensemble de nouvelles variables de base/hors-base

$\hat{N} = N - \{e\} \cup \{l\}$ et $\hat{B} = B - \{l\} \cup \{e\}$

Retourne la nouvelle forme standard $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$

Lemme

Considérons l'appel à $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$=PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e) dans lequel la valeur du pivot $a_{le} \neq 0$. Soit $\bar{x}$ la solution de base après l'appel, alors $\bar{x}_j = 0$ pour tout $j \in \hat{N}$, $\bar{x}_e = \hat{b}_e = b_l/a_{le}$, $\bar{x}_i = \hat{b}_i$ =b$_i - a_{ie}\hat{b}_e$ pour tout $i \in \hat{B} - \{e\}$

Algorithme simplexe

Initialisation

(N, B, A, b, c, v) = initialise-simplexe (A, b, c)

Simplexe

Tant que $j \in$ N vérifie $c_j > 0$
faire choisir un indice $e \in N$ tel que $c_e > 0$ (le plus grand)
pour tout indice $i \in B$
faire is $a_{ie} > 0$ alors $\delta_i = b_i/a_{ie}$
sinon $\delta_i = \infty$
choisir un indice $l \in B$ qui minimise δ_i
si $\delta_i = \infty$
alors retourner non borné
sinon (N, B, A, b, c, v) = PIVOT(N, B, A, b, c, v, l, e)
Fin de tant que
Pour i allant de 1 à n, faire si $i \in B$, alors $\bar{x}_i = b_i$, sinon $\bar{x}_i = 0$
retourner $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ la solution optimale.