0.0.1 Méthode des tableaux

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$ Soient $x = (x_B, x_N)$, $C = (C_B, C_N)$, x_B represente les variables de base et x_N represente les variables hors base.
$A = (A_B, A_N)$ avec A_B une matrice carrée de taille mxm, inversible, correspondant aux variables de base et A_N une matrice de taille $mx(n-m)$, correspondant aux variables hors-base. Le P.L est :
Max

$$Z = (C_B, C_N) * (x_B, x_N)^T = C_B x_B + C_N x_N$$

sc

$$Ax = (A_B, A_N) * (x_B, x_N)^T = A_B x_B + A_N x_N = b$$

avec

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

En annulant x_N, la solution de base est alors $x_B = A_B^{-1} b$. On obtient une solution de base réalisable de départ si $x_B \geq 0$ (la matrice A_B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$

$$Z = C_B(A_B^{-1} b - A_B^{-1} N x_N) + C_N x_N$$

$$Z = C_B A_B^{-1} b + (C_N - A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$C_N x_N = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$A_B^{-1} A_N = \sum_{j \in N} A_B^{-1} a_j$$

Notons

$$Z_0 = C_B A_B^{-1} b$$

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in N} c_j x_j - \sum_{j \in N} C_B A_B^{-1} a_j x_j$$

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - C_B A_B^{-1} a_j) x_j$$

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j$$

$z_j = C_B A_B^{-1} a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base. a_j est un vecteur de la variable hors base x_j.

Maximisation par la méthode des tableaux du simplex Avec

Table 1: Tableau

		$-x_j$
$z =$	z_0	... $z_j - c_j$ ....
$x_B =$	$A_B^{-1} b$	... y_j ....

$$x_B, x_N \geq 0$$

$$z_j = C_B A_B^{-1} a_j$$

$$y_j = A_B^{-1} a_j = (y_{1j}, ..., y_{mj})^T$$

Maximisation par la méthode des tableaux du simplex

On appelle élément pivot le coefficient situé à l'intersection de la colonne pivot (j) et de la ligne pivot (r) ($pivot = y_{rj}$).

Transformation du tableau : Régles I et II

1. **Régle I**: Choix de la colonne j à introduire dans la nouvelle base B telque $z_j - c_j < 0$, $(z_0 - (z_j - c_j)\frac{y_{r0}}{y_{rj}} \geq 0)$ (méthode du rectangle).

$$z_j - c_j = min\{z_k - c_k | z_k - c_k < 0\}$$

pour $a_k \in N$

2. **Régle II**: Choix de la colonne à éliminer de la base B pour obtenir une nouvelle ligne r telque

		$-x_j$	$-x_k$
$z =$	z_0	... $z_j - c_j$ ...	... $z_k - c_k$ ...
$x_B(1) =$	y_{10}	... y_{1j} ...	... y_{1k} ...
... =	....	... .	... .
$x_B(i) =$	y_{i0}	... y_{ij} ...	... y_{ik} ...
$x_p = x_B(r) =$	y_{r0}	... y_{rj} ...	... y_{rk} ...
$x_B(m) =$	y_{m0}	... y_{mj} ...	... y_{mk} ...

$$\frac{y_{r0}}{y_{rj}} = min\{\frac{y_{i0}}{y_{ij}}|y_{ij} > 0\}$$

pour tout i.

Algorithme (forme condensée des tableaux)

1. Partir d'une solution de base admissible sous forme un tableau
2. Chercher s'il y a une transformation à un tableau en mettant la solution de base voisine meilleure via les régles précedentes.
3. Respecter les règles I et II
4. Diviser tous les termes de la ligne pivot par la valeur du pivot ($p = y_{rj}$) ($\frac{y_{jk}}{y_{rj}}$) (($r \neq k$)).
5. Diviser tous les termes de la colonne pivot à diviser par la valeur du pivot en inversant le signe ($-\frac{y_{ij}}{y_{rj}}$) ($i \neq$) sauf la valeur du pivot.
6. Amener un coefficient 1 au croisement de la colonne pivot et de la ligne pivot en divisant celle-ci par le coefficient y_{rj}.
7. Appliquer les régles du rectangle (voir l'algorithme) pour tous les temres y_{ij} hor de la ligne et de la colonne pivot.

8. Aussi la valeur du cofficient de z devient $-\frac{(z_j-c_j)}{y_{rj}}$ de la colonne pivot.

9. si $z_j - c_j \geq 0$ pour toute colonne j, alors la solution actuelle est optimale.

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$ Appliquer la méthôe

		$-x_r$	$-x_k$
$z =$	z_0	... $-\frac{z_j-c_j}{y_{rj}}$ ...	... $z_k - c_k$ ...
$x_B(1) =$	y_{10}	... $-\frac{y_{1j}}{y_{rj}}$ ...	... y_{1k} ...
... =	....	... .	... .
$x_B(i) =$	y_{i0}	... $-\frac{y_{ij}}{y_{rj}}$ ...	... y_{ik} ...
$x_j = x_B(j) =$	$\frac{y_{r0}}{y_{rj}}$	... $1/y_{rj}$ ...	... $\frac{y_{rk}}{y_{rj}}$ ...
$x_B(m) =$	y_{m0}	... $-\frac{y_{mj}}{y_{rj}}$ ...	... y_{mk} ...

des rectangles pour la mise à jour des autres cofficients.

$\boxed{\text{Exemple}}$ Trouver le plan optimal par la méthode des tableaux
max
$$z = 5x_1 + 8x_2$$
sc
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$
$$-x_1 + 4x_2 \leq 1$$
$x \geq 0$

Trouver par la méthode des tableaux la solution du problème en minimisant la fonction objectif.
min
$$z = 5x_1 + 8x_2$$

		$-x_1$	$-x_2$
$z =$	0	-5	-8
$x_3 =$	2	1	1
$x_4 =$	0	1	-2
$x_5 =$	1	-1	4

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$

On a besoin de trois variables d'écarts x_3, x_4, etx_5 positives.

Appliquer les régles I et II. Variable entrante est x_2 et sortante est x_5 car min(2/1, 1/4) = 1/4

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$ Itération 1. On

		$-x_1$	$-x_5$
$z =$	2	-7	2
$x_3 =$	7/4	5/4	-1/4
$x_4 =$	1/2	1/2	1/2
$x_2 =$	1/4	-1/4	1/4

a $-7 < 0$, on peut choisir x_1 comme entrante (régle I) et x_4 sortante min((7/4)/(5/4), (1/2) / (1/2)) = 1 (régle II).

$\boxed{\text{Maximisation par la méthode des tableaux du simplex}}$ Itération 2. La solution optimale est $(x_1* = 1, x_2* = 1/2)$ et la valeur optimale est $z* = 9 = 5 * 1 + 8 * 1/2$. car les $z_j - c_j >= 0$ pour toutes colonnes du tableau.

0.1 Dualité d'un programme linéaire

Définition Un programme linéaire de maximisation, a un programme linéaire dual dans lequel l'objectif est de minimiser et dont la valeur optimale égale à celle du programme origine (primal).

		$-x_4$	$-x_5$
$z =$	9	14	9
$x_3 =$	1/2	-5/2	-3/2
$x_1 =$	1	2	1
$x_2 =$	1/2	1/2	1/2

Primal maximiser

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous les contraintes de positivités

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ pour \ i = 1, ..., m$$

$$x_j \geq 0 \ pour \ j = 1, ..., n$$

En générale, pour déterminer le dual de P.L. donné sous forme quelconque, on commence par le ramener à la forme cnonique ou standard.
Dual minimiser

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Sous les contraintes de positivités

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ pour \ j = 1, ..., n$$

$y_i \geq 0 \ pour \ i = 1, ..., m$

Lemme 3: Dualité faible Pour toute solution réalisable $\bar{x}$ du primale et toute solution réalisable $\bar{y}$ du dual, alors

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

Corollaire Pour toute solution réalisable $\bar{x}$ du primale et toute solution réalisable $\bar{y}$ du dual, alors is

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

Alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont solutions *optimales* pour les programmes linéaires primal et dual respectivement.

Solution optimale du dual Supposons que la dernière forme standard du primal par simplexe est comme suit:

$$z = v' + \sum_{j \in N} c'_j x_j$$

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in N} a'_{ij} x_j \ i \in B$$

alors, une solution optimale du duale est

$$\bar{y}_i = \{ - c'_{n+i} \ si \ n+i \in N, \ sinon \ 0$$

[Primal] Soit le primal d'un PL

$$Max \ Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$$

$$x_1 \leq 1000$$

$$x_2 \leq 500$$

$$x_3 \leq 1500$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Le primal contient 4 contraintes, donc, on utilise 4 variables y_i. [dual] Le dual du primal est

$$Min \ Z' = 1000y_1 + 500y_2 + 15000y_3 + 6750y_4$$

$$y_1 + 3y_4 \geq 4$$

$$y_2 + 6y_4 \geq 12$$
$$y_3 + 2y_4 \geq 3$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

0.1.1 Théorème des écarts complémentaires

.Théorème des écarts complémentaires
[Primal]

$$max\ z = c.x$$

s.c

$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0$$

[Dual]

$$min\ w = y.b$$

s.c

$$yA \geq c,$$
$$y \geq 0$$

Théorème/relaxation
Des solutions admissibles x (pour primal) et y (pour dual) sont optimales si et seulement si

$$y_i(b_i - \sum_j a_{ij}x_j) = 0, i = 1, ..., m$$
$$(\sum_i a_{ij}y_i - c_j)x_j = 0, j = 1, ..., n$$

Exemple

$$(y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 3)x_1 = 0$$
$$(y_1 + 2y_2 + y_3 - 1)x_2 = 0$$
$$(3y_1 + 5y_2 + 2y_3 - 2)x_3 = 0$$

$$y_1(30 - x_1 - x_2 - 3x_3) = 0$$
$$y_2(24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3) = 0$$
$$y_3(36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3) = 0$$

$\boxed{\text{Exemple}}$

$$(y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 3)8 = 0$$
$$(y_1 + 2y_2 + y_3 - 1)4 = 0$$
$$(3y_1 + 5y_2 + 2y_3 - 2)0 = 0$$

$$y_1(30 - 8 - 4 - 3 * 0) = 0$$
$$y_2(24 - 2 * 8 - 2 * 4 - 5 * 0) = 0$$
$$y_3(36 - 4 * 8 - 4 - 2 * 0) = 0$$

ce qui donne

$$y_1 = 0, y_2 = 1/6, y_3 = 2/3$$

0.1.2 Interpretation économique de la dualité

L'objectif est de minimiser le prix à payer pour racheter toutes les ressources à condition que le prix unitaire à une activité $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$ est suppérieur au profit c_j.

0.2 Programme linéaire entier

Dans un programme linéaire dont les variables $x_i \in N$, alors le programme est dit entier.