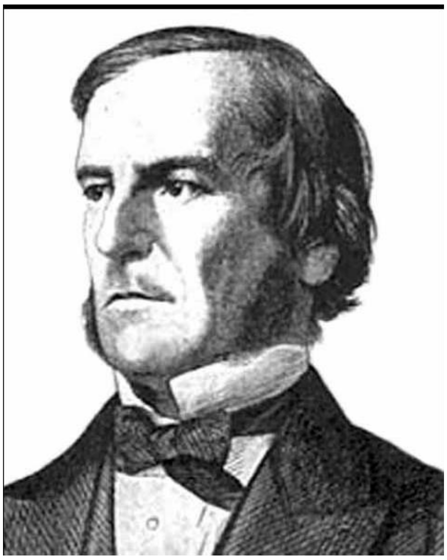
Algèbre de Boole & fonctions logiques

George Boole 2 nov. 1815, Lincoln, R.-U.

Une proposition peut être vraie ou fausse, mais ne peut pas être vraie et fausse.
(AriEote 384, 322 av. J.-C.)



Introduction

Historique : George Boole, Philosophe et mathématicien Anglais, publia en 1847 un essai sur les raisonnements logiques portant sur les propositions aux quelles les seules réponses possibles sont 0 ou 1 : c'est l'algèbre de Boole.

L'ensemble des opérations découlant des ces propositions forme une structure mathématique, donc une algèbre, appelée ''Algèbre de Boole''.

Ainsi on définit par variables logiques, un système simple dont le comportement peut être caractérisé par deux états stables différents qui s'excluent mutuellement.

Exemple :

- Etat passant ou bloqué d'une diode ou d'un transistor
- Etat ouvert ou fermé d'un interrupteur

En électronique numérique, les états 0 et 1 seront les états de la tension en sortie des circuits spécialement conçus pour ne fournir que deux états bien différenciés.

I. Lois et règles de l'algèbre de Boole

I-1. Postulats de l'algèbre de Boole

Une algèbre de Boole est un ensemble quelconque d'éléments à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, sur lequel on définit :

- Une égalité
- L'addition ou somme logique (+, ou)
- La multiplication ou produit logique (*, ET)
- Une loi de complémentation : $\overline{1} = 0$; $\overline{0} = 1$

I-2 Lois de l'algèbre de Boole

- Commutativité des deux opérations :

$$\forall\, a,b \qquad a+b=b+a \qquad (1)$$
$$a.b=b.a \qquad (1')$$

- Associativité des deux opérations :

$$\forall\, a,b,c \qquad (a+b)+c=b+(a+c) \qquad (2)$$
$$(a.b).c=b.(a.c) \qquad (2')$$

- Double distributivité :

$$\forall\, a,b,c \qquad a.(b+c)=a.b+a.c \qquad (3)$$
$$a+(b.c)=(a+b).(a+c) \qquad (3')$$

I-3 Règles de l'algèbre de Boole

Il existe des règles de base utilisées pour la manipulation et la simplification des expressions Booléennes.

- Un élément neutre pour chacune des deux opérations :

$$\forall\, \mathrm{a} \qquad a+0=a \qquad (4)$$
$$a.1=a \qquad (4')$$

- Chaque élément admet un inverse ou complémentaire

$$\forall\, a \qquad a+\overline{a}=1 \qquad (5)$$
$$a.\overline{a}=0 \qquad (5')$$

- Idempotence

$$\forall\, a \qquad a+a=a$$
$$a.a=a$$

En effet :

$$\begin{aligned} a+a &= (a+a).1 \\ &= (a+a)(a+\overline{a}) \\ &= a+a\overline{a} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a.a &= a.a+0 \\ &= a.a+a.\overline{a} \\ &= a.(a+\overline{a}) \\ &= a.1 \\ &= a \end{aligned}$$

- a+1=1 ; a.0=0

En effet :

$$
\begin{aligned}
a+1 &= (a+1).1 \\
&= (a+1)(a+\overline{a}) \\
&= a+1.\overline{a} \\
&= a+\overline{a} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a.0 &= a.0+0 \\
&= a.0+a.\overline{a} \\
&= a.(0+\overline{a}) \\
&= a.\overline{a} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Adsorption :
  - ✓ Dans une somme booléenne, un terme absorbe ses multiples
  - ✓ Dans un produit booléen, un facteur absorbe tous les facteurs composés de sommes qui le contiennent.

$$
\forall \text{ a} \qquad a+ba = a
$$

$$
a.(a+b) = a
$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
a+a.b &= a.1+ab \\
&= a.(1+b) \\
&= a.1 \\
&= a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a.(a+b) &= (a+0)(a+b) \\
&= a+0b \\
&= a+0 \\
&= a
\end{aligned}
$$

II- Les fonctions logiques

II-1 Définition

Les fonctions logiques sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables binaires, ne pouvant prendre elles même que deux valeurs : 1 ou 0.

Pour réaliser toutes les fonctions logiques, on a besoin de trois fonctions logiques de base : Négation, Intersection et Réunion. Ces fonctions sont représentées par des Schémas appelés logigrammes.

Le nombre de fonctions simples de n variables est 2^{2^n} , puisque à chacune des deux combinaisons des n variables on peut correspondre l'une des deux variables 0 ou 1.

Nous allons étudier toutes les fonctions booléennes de 1 puis de 2 variables, nous dégagerons de cet ensemble de fonctions celles qui présentent un intérêt pratique, nous en donnerons la table de vérité et nous décrirons le rôle pratique de la fonction logique correspondante.

II-2 Tables de vérité

Une table de vérité est un tableau qui représente des entrées (en colonne) et des états binaire (0 /1, faux / Vrai, éteint / allumé, etc.). Une sortie, également représentée sous forme de colonne, est la résultante des états d'entrée, elle-même exprimée sous forme d'état binaire.

Soit une fonction logique f des trois variables a, b et c :

Les huit combinaisons possibles			La valeur de la fonctyion
a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

0n en déduit une expression possible pour cette fonction f :

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c + abc$$

II-3 Les fonctions logiques à une seule variable binaire (une seule entrée)

Elles matérialisent les fonctions booléennes à une seule variable. Il y a $2^{2^1} = 4$ fonctions.

f(a) \ a	0	1	
f(a)=0	0	0	Fonction constante
f(a)=a	0	1	Fonction identité
f(a)=$\overline{a}$	1	0	Fonction complémentaire
f(a)=a	1	1	Fonction constante

Les expressions algébriques correspondantes aux ‘ fonctions sont :

$$f_0 = 0 \quad , \quad f_1 = \overline{a} \quad , \quad f_2 = a \quad , \quad f_3 = 1$$

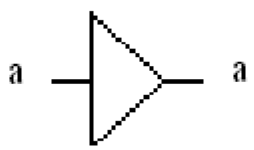
Si on exclut les deux fonctions constantes $f(a) = 0$, $f(a) = 1$, il en reste deux qui présentent un intérêt particulier :

$f(a) = a$: *c'est le buffer ou amplificateur*
$f(a) = \overline{a}$: *c'est l'inverseur*

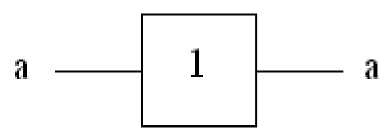
- **Le buffer** :
  - ✓ Fonction booléenne : $a \longrightarrow f(a) = a$
  - ✓ Table de vérité :

a	f(a)
0	0
1	1

  - ✓ Logigrammes :



M.I.L

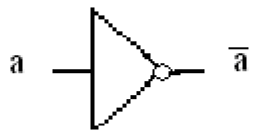


C.E.I

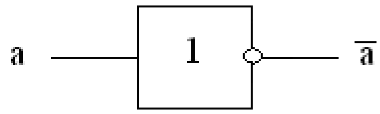
- **Inverseur : Circuit Non (NO)**
  - ✓ Fonction booléenne : $a \longrightarrow f(a) = \overline{a}$
  - ✓ Table de vérité :

a	f(a)
0	1
1	0

  - ✓ Logigrammes :



M.I.L



C.E.I

II-4 Les fonctions logiques à deux entrées

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes simples à deux variables. Le tableau suivant regroupe d'une manière condensée les 16 tables de vérité qu'il est possible d'écrire avec deux variables :

X	Y	f_0	F_1	F_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Parmi toutes ces fonctions, 6 présentent un intérêt évident. Nous allons donner pour chacune de ces fonctions la table de vérité, les logigrammes et les propriétés essentielles justifiant leur intérêt.

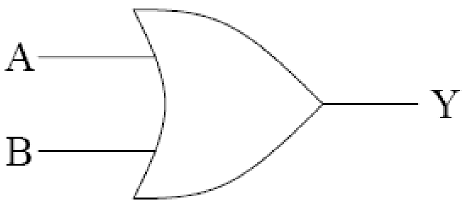
- **La somme logique f_{14}**

Elle s'appelle aussi fonction OU, OR, réunion.

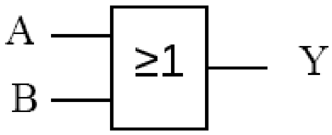
  - ✓ Fonction booléenne : $(a,b) \longrightarrow y = a + b$
  - ✓ Table de vérité :

A	B	Y = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ✓ Logigrammes :



M.I.L



C.E.I

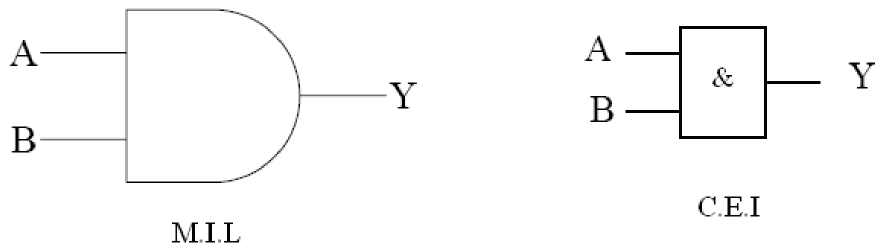
- **Le produit logique f_8**

Elle s'appelle aussi fonction ET, ²AND, Intersection

- ✓ Fonction booléenne : $(a,b) \longrightarrow y = a.b$
- ✓ Table de vérité :

A	B	Y = A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- ✓ Logigrammes



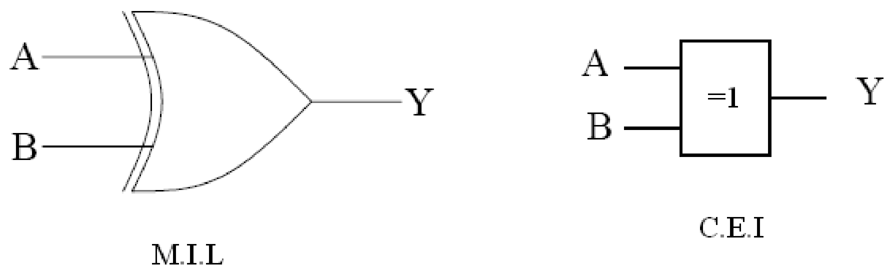
- **La fonction OU-exclusif f_6**

La sortie d'une fonction OU exclusif (XOR) à deux entrées est dans l'état 1 si une entrée et seulement une est dans l'état 1.

- ✓ Fonction booléenne : $(a,b) \longrightarrow y = a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$
- ✓ Table de vérité :

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- ✓ Logigrammes :



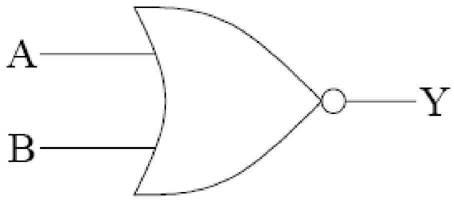
- **La fonction somme logique complémentée (f_1)**

Elle s'appelle aussi fonction NON-OU, NOR et se note : $Y = \overline{a+b}$

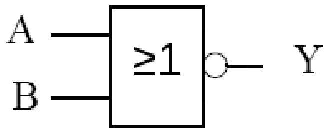
- ✓ Table de vérité :

A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- ✓ Logigrammes :



M.I.L



C.E.I

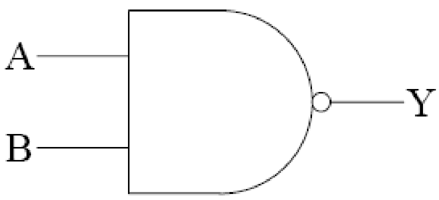
- ➢ **La fonction logique complémentée f7**

Elle s'appelle aussi fonction NON-ET ou NAND et se note : $Y = \overline{a.b}$

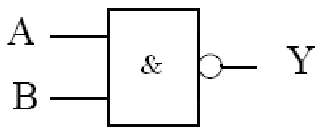
- ✓ Table de vérité :

A	B	$Y = \overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- ✓ Logigrammes :



M.I.L



C.E.I

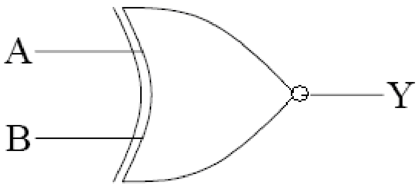
- ➢ **La fonction coïncidence f9**

La fonction coïncidence (fonction XOR complémentée) à deux entrées est dans l'état 1 si les deux entrées sont égaux (1 ou 0). Elle se note : $Y = A \odot B$

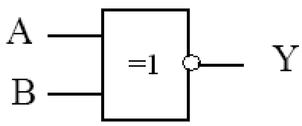
✓ Table de vérité :

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

✓ Logigrammes :



M.I.L



C.E.I

II-5 Les fonctions logiques ont plus de deux entrées

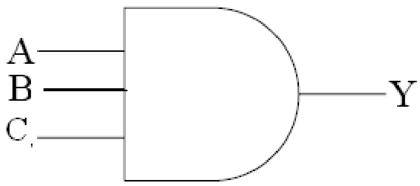
Les fonctions logiques sont étudiées de la même façon lorsqu'elles impliquent plus de deux entrées. Les technologies utilisées en électronique permettent de réaliser des fonctions AND, OR, NAND, NOR….à 2, 3, 4…..8 entrées.

Exemple : La fonction logique AND à 3 entrées

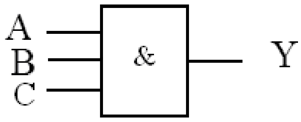
✓ Table de vérité :

A	B	C	$Y = A \bullet B \bullet C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Logigrammes :



M.I.L

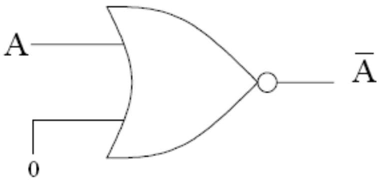


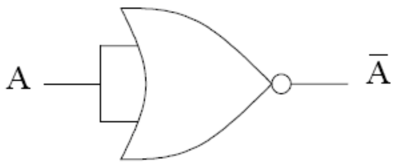
C.E.I

II-6 Réalisation de fonctions avec d'autres fonctions

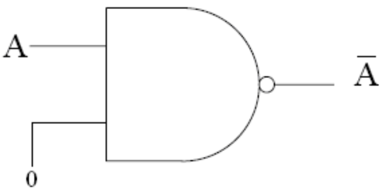
Les combinaisons possibles sont très nombreuses nous n'envisagerons que quelques exemples :

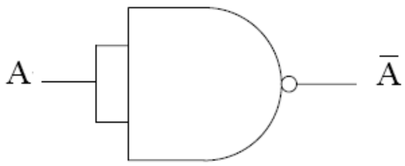
- **Réalisation de l'inverseur**
  - **Avec un NOR à deux entrées :**



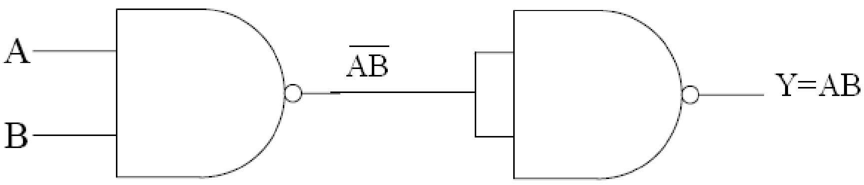


  - **Avec un NAND à deux entrées :**



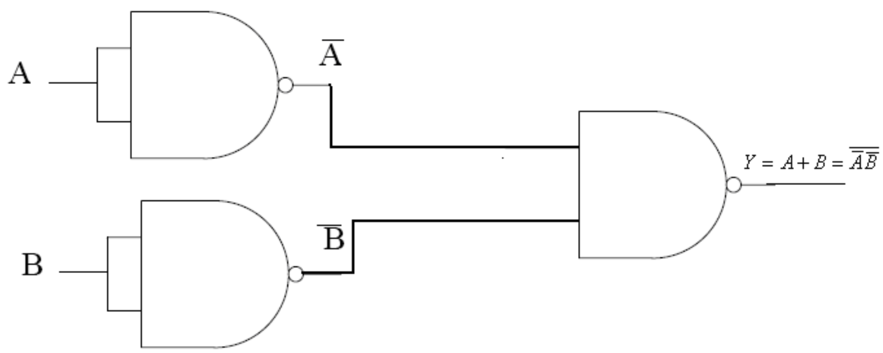


- **Réalisation de la fonction AND avec NAND**



- **Réalisation de la fonction OR avec NAND**

$$Y = A + B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$$



III- Système logique complet

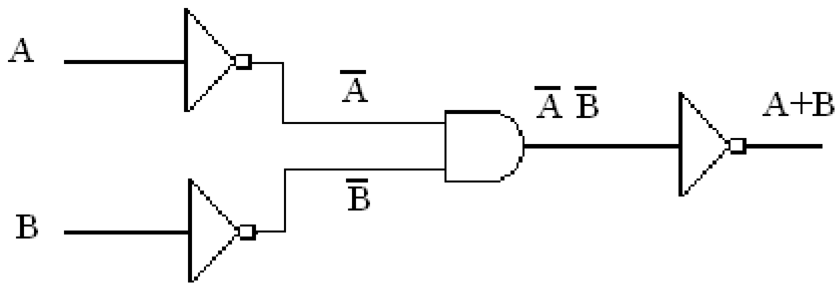
Nous avons vu qu'une fonction logique quelconque d'un nombre quelconque de variables s'écrit avec les seuls opérateurs OR, AND, No. Ce groupe de trois opérateurs constitue ce que l'on appelle un système ou groupe complet d'opérateurs.

Il existe on outre un certain nombre de système logiques complet minimisés, comportant deux opérateurs ou même un seul opérateur.

Exemples :

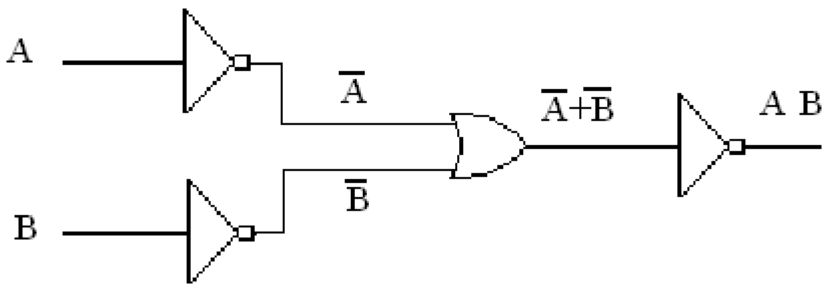
- **Groupe AND, No**

On peut en effet réaliser la fonction OR à partir de ces deux opérateurs :



- **Groupe OR, NO**

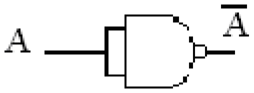
L'opérateur qui manque AND, peut être obtenu de la façon suivante :



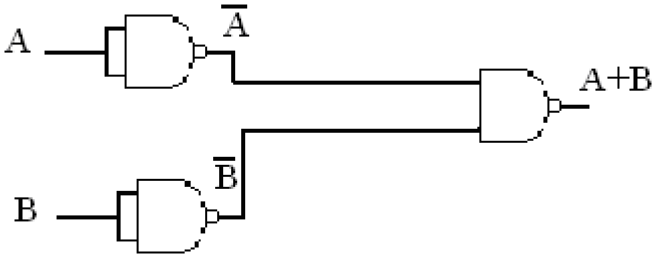
- **L'opérateur NAND**

L'opérateur NAND constitue à lui seul un système logique complet car il permet de réaliser les opérateurs fondamentaux : AND, OR, NO.

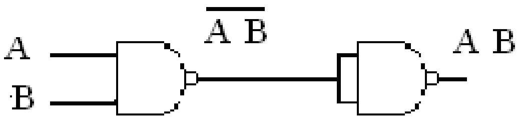
NO



OR



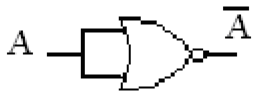
AND



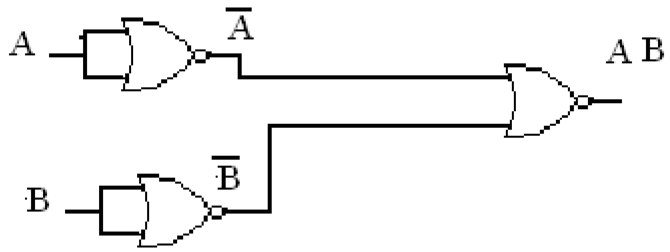
- **L'opérateur NOR**

L'opérateur constitue lui aussi un système logique complet car il permet de réaliser les opérateurs fondamentaux : AND, OR, NO.

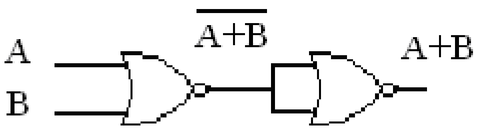
NO



AND



OR



IV- Formes canoniques de Shannon : Mintermes et Maxtermes

Une fonction booléenne peut être écrite sous la forme d'une somme ou sous forme d'un produit.

Exemples:

$F_1 = (b + c + d) + a\overline{b} + b(c + d)$ Somme

$F_2 = (b + \overline{c})(b + c + \overline{d})(a + b)$ Produit

Une expression est dite canonique lorsque dans ses termes, toutes les variables existent soit sous forme directe, soit sous forme complémentée.

Le théorème de Shannon établit que toute fonction booléenne de n variables peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes canoniques dites respectivement première et deuxième forme canonique de Shannon.

IV-1 Première forme canonique de Shannon

Raisonnons avec deux variables binaires ; avec ces deux variables, on peut obtenir quatre ''Monomes'' appelés mintermes qui s'écrivent : $\overline{a}\overline{b},\ \overline{a}b,\ a\overline{b},\ ab$.

La fonction peut s'écrire :

$$f(a,b) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}b + a\overline{b} + ab$$

Cette première forme canonique est aussi appelée forme $\sum\prod$.Elle permet la décomposition d'une fonction en somme de produits.

IV-2 Deuxième forme canonique de Shannon

La seconde forme canonique de Shannon concerne la décomposition d'une fonction booléenne en produit de sommes.

En raisonnant encore avec deux variables, on obtient : $a + b,\quad \overline{a} + b,\quad a + \overline{b},\quad \overline{a} + \overline{b}$.

La fonction peut s'écrire :

$$f(a,b) = (a + b)(\overline{a} + b)(a + \overline{b})(\overline{a} + \overline{b})$$

Cette expression est aussi appelée $\prod\sum$.

Ces deux expressions d'une fonction sont uniques ; la première est appelée quelques fois forme canonique disjonctives, la seconde, forme canonique conjonctive.

V- Expression d'une fonction logique déduite de sa table de vérité.

Lorsqu'une fonction est définie par sa table de vérité, la lecture de cette table donne immédiatement l'expression de la fonction sous la première forme canonique.

Exemple :

Trois interrupteurs A, B, C commandent l'allumage d'une lampe L suivant la condition suivante :

La lampe L s'allume si au moins deux interrupteurs sont activés.

Ligne	A	B	C	L
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Il suffit de lire chaque ligne où la fonction vaut 1 et de déterminer quel est, dans chacune de ces lignes, le minterme correspondant : il suffit en suite de faire la somme des mintermes ainsi déterminés :

$$L = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

VI- Théorème de DE MORGAN

Le théorème de DE MORGAN permet d'obtenir l'inverse d'une fonction booléenne.

VI-1 Inverse d'une somme logique

Le complémentaire d'une somme logique est égal au produit logique des complémentaires des termes de la somme.

Exemple :

Soient trois variables binaires A, B, C, on peut écrire : $\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$.

A	B	C	$Y = \overline{A+B+C}$	$Y = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

La table de vérité montre que $\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$.

D'une manière générale : $\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

VI-2 Inverse d'un produit logique

Le complémentaire d'un produit logique est égal à la somme logique des complémentaires des termes du produit :

Pour trois variables on peut écrire : $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

A	B	C	$Y = \overline{A.B.C}$	$Y = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

D'une manière générale : $\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$