UNIVERSITE IBN TOFAIL
Faculté des sciences
Département d'Informatique
Kenitra

Année: 2014/2015
Filières : SMI
Semestre : 3

Algorithmique II

Rattrapage

Corrigé

Exercice 1 : (Sur 4 points)

- **Concernant le nombre d'opérations d'affectation, l'algorithme Calcul2 a une seule opération d'affectation de plus que l'algorithme Calcul1.**
- **Concernant le nombre d'opérations de soustraction, l'algorithme Calcul1 a (n-3) opérations de soustraction de plus que l'algorithme Calcul2.**
- **Les deux algorithmes ont les mêmes nombres d'opérations de lecture, de comparaison et d'addition.**

Exercice 2 : (Sur 8 points)

Considérons la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par :

$U_0=1$, $U_1=2$ et $U_n=U_{n-1} * U_{n-2}$ pour n>1

1. ***Fonction récursive pour déterminer le $n^{ième}$ élément de la suite (U_n)***

```
Fonction Calcul_Récursif(n : Entier) : Entier
Début
        Si n<0 Alors
                Sortir
        Finsi
        Si n<=1 Alors
                Si n=0 Alors
                        Retourner 1
                Sinon
                        Retourner 2
                Finsi
        Sinon
                Retourner Calcul_Récursif(n-1) * Calcul_Récursif(n-2)
        Finsi
Fin
```

La complexité temporelle $C_1(n)$ de la fonction *Calcul_Récursif* est donnée par :

$C_1(n)$=3tcomp + tretour = cte si n=0 ou n=1

$C_1(n)$= 2tcomp + tretour + tmult + $C_1(n-1)$ + $C_1(n-2)$ = cte + $C_1(n-1)$ + $C_1(n-2)$ si n>1

2. *Fonction itérative pour déterminer le $n^{ième}$ élément de la suite (U_n)*

```
Fonction Calcul_itératif(n  Entier) : Entier
Var     U0, U1, U2 : Entier
```

Début

```
Début
        Si n<0 Alors
                Sortir
        Sinon
                Si n=0 Alors
                        Retourner 1
                FinSi
        FinSi
        U0 ← 1
        U1 ← 2
        m←1
        Tant que (m<n)  Faire
                U2←U0 * U1
                U0 ← U1
                U1 ← U2
                m ← m+1
        Fin Tant que
        Retourner U1
Fin
```

La complexité temporelle $C_2(n)$ de la fonction *Calcul_Itératif* est donnée par :

$C_2(0)$=2tcomp + tretour = cte

$C_2(n)$=2tcomp + 3taffect + (n-1)*(tcomp + 4taffect + tmult + taddit) + tcomp + tretour

Donc $C_2(n)$=Cte si n=0 et $C_2(n)$ = Cte + Cte*(n-1)

D'où $C_2(n)=\theta(n)$

Exercice 3 : (Sur 8 points)

1. **La fonction Mystère retourne 0 si tous les éléments de T sont supérieurs ou égaux à x, sinon elle retourne le plus grand indice i appartenant à {1, .., n} tel que T[i] < x.**

   Par exemple si T est égal à :

3	8	12	12	13	14	14	20

   Mystère(T, 21) retourne 8, Mystère(T, 14) retourne 5 et Mystère(T, 2) retourne 0.

2. **La complexité temporelle dans les deux cas est la même, puisque le nombre d'itérations ne dépend pas des valeurs des éléments de T.**

   Soit C(n) la complexité temporelle dans le pire des cas, on a :

   C(n)=2taffect + niter(tcomp + taffect + taddit + tdiv + tcomp + taffect + taddit) + tcomp + tretour

   Où niter est le nombre d'itérations. Il est égal au nombre k tel que :

   $2^k=n$, soit donc $k=\log_2 n$

   D'où $C(n)=C_0 + C_1\log_2 n$ où C_0 et C_1 sont des constantes.

   Donc $C(n)=\theta(\log_2 n)$

3. **On montre que la propriété suivante :**

   $\forall i \in \{1, .., D\}; \forall j \in \{F, .., n\}; T[i] < x < T[j]$

constitue un invariant de boucle pour Mystère(T, x).
La propriété est vraie avant la $1^{ère}$ itération. Supposons qu'elle est vraie avant la $i^{ème}$ itération et montrons qu'elle est vraie après cette itération.
Après la $i^{ème}$ itérations on a deux cas possibles :

<u>1^{er} cas</u> : T[Mil] < x   où Mil=(D+F) div 2
Dans ce cas D est remplacé par (Mil +1) et F garde la même valeur
Comme la propriété est vraie avant la $i^{ème}$ itération alors $\forall i \in \{1, .., D\}$; $\forall j \in \{F, .., n\}$; $T[i] < x < T[j]$ et comme de plus T[Mil] < x   alors $\forall i \in \{1, .., D\}$; $\forall j \in \{F, .., n\}$; $T[i] < x < T[j]$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : T[Mil] ≥ x
Dans ce cas D garde la même valeur et F prend la valeur (Mil – 1)
Comme la propriété est vraie avant la $i^{ème}$ itération alors $\forall i \in \{1, .., D\}$; $\forall j \in \{F, .., n\}$; $T[i] < x < T[j]$ et comme de plus x<= T[Mil] alors $\forall i \in \{1, .., D\}$; $\forall j \in \{F, .., n\}$; $T[i] < x < T[j]$

Donc, dans tous les cas la propriété est vraie après la $i^{ème}$ itération.
De plus, la fonction s'arrête après $\lceil \log_2 n \rceil$ itérations.