Simplification des fonctions logiques

Maurice Karnaugh
Inventeur du diagramme de Karnaugh en logique en 1953. Coinventeur des premiers circuits logiques .

Une fonction logique booléenne peut avoir plusieurs expressions logiques équivalentes, mais il est nécessaire de chercher l'expression la plus simple pour réaliser son logigramme de la façon la plus simple.

Simplifier une fonction booléenne revient à réduire :

- Le nombre des opérateurs ou le nombre des entrées sur les opérateurs réalisant la fonction logique ;
- Le nombre des interconnexions ;
- Le temps de propagation de l'information à travers les circuits.

Nous avons vu que les règles de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions ; cette méthode est cependant relativement lourde et ne permet jamais de savoir si l'on aboutit à une expression minimale de la fonction ou pas. La méthode graphique (la table de Karnaugh) que nous allons étudier dans ce chapitre permet de trouver des expressions logiques simple utilisant un nombre minimal d'opérateurs AND, OR et NO.

I- Table de Karnaugh

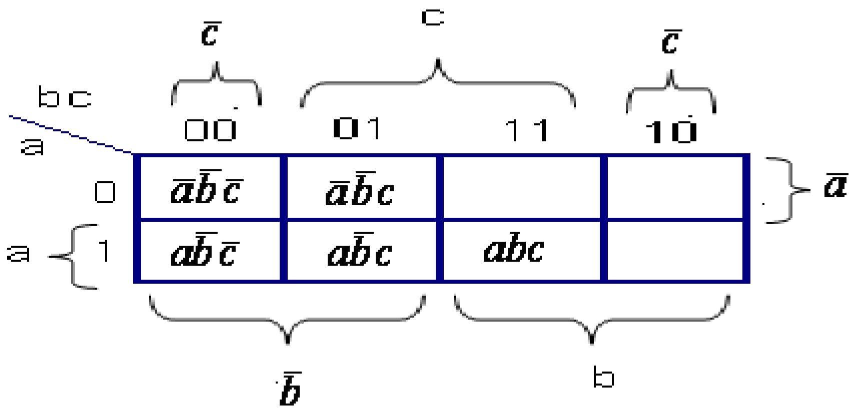
Le diagramme de karnaugh est un outil graphique qui permet de simplifier de manière méthodique des expressions booléennes.

L'utilisation, de ces diagrammes produit l'expression de somme de produit (SDP) ou de produit de somme (PDS) la plus simple possible.

I-1 Exemple de représentation graphique

Soit une fonction de trois variables : $f(a,b,c) = abc + \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c$

Construisons un rectangle comportant 2^3=8 cases (trois variables), chacune d'elles correspond à un minterme :

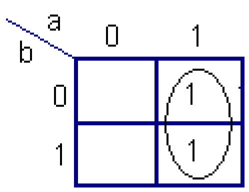


Les entrées horizontales correspondent à la variable a, et les entrées verticales correspondent aux variables b et c.

Chaque case est l'intersection d'une ligne et d'une colonne, les lignes sont numérotées 0 ou 1 (a), les colonnes sont numérotées 00, 01, 11, 10 (bc).

La fonction f(a,b,c) est représentée par les trois mintermes sur la table précédente. D'après la table, on remarque lorsqu'on passe d'une case à sa voisine, une seule variable qui change d'état. La notion essentielle pour l'utilisation de ces tables est celle d'états adjacents : Ce sont des états de mintermes qui correspondent à la variation de l'état d'une seule variable de ces mintermes :

- Soit à des cases voisines (2 cases adjacentes ont un côté commun)

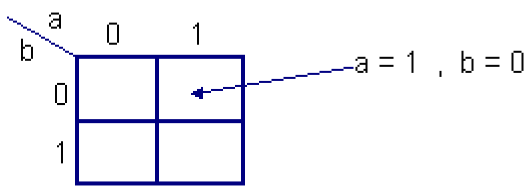


- Soit à des cases qui seraient voisines si on rapprochait les bords parallèles qui limitent le rectangle.
- Soit à des cases symètriques par rapport aux frontières qui délimitent des carrés de 4*4 cases dans le cas d'un plus grand nombre de variables.

I-2 Formes pratique des tables de Karnaugh

- **Avec deux variables**

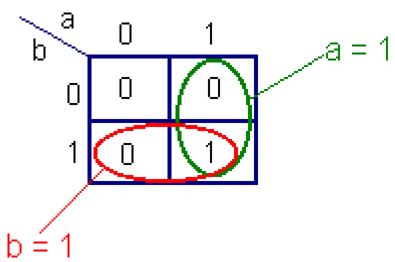
Dans ce cas, le nombre de cases est $\mathbf{2^n = 2^2 = 4}$



L'ordre des variables en abscisse ou en ordonnée n'a pas d'importance, seul est très important le fait que lorsque l'on passe d'une case à la case adjacente, une seule variable change.

Exemple :

Représentons la fonction **f (a,b) = a . b** "fonction ET" :

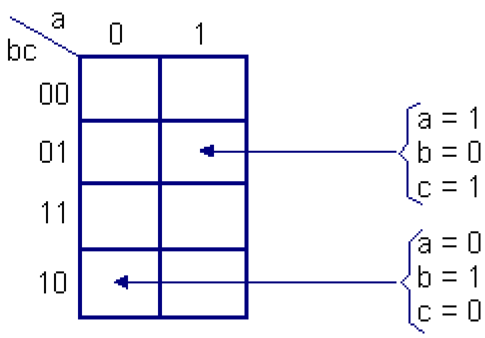


Nous voyons facilement que l'on a mis la valeur binaire que peut prendre la sortie à l'intérieur de la case pour laquelle les variables ont la valeur portée en abscisse et en ordonnée.

f vaut **1** uniquement pour **a = 1** et **b = 1**

- **Avec trois variables**

Dans ce cas, le nombre de cases est $\mathbf{2^n = 2^3 = 8}$



Alors que pour deux variables, le tableau était carré, il est maintenant rectangulaire **;** en effet, nous avons représenté les variables **bc** sur une même colonne.

On peut remarquer que l'ordre de la quatrième et de la troisième ligne paraît inversé. En réalité, il n'en est rien. On utilise seulement le **code Gray** ou **binaire réfléchi** afin de ne faire changer qu'une seule variable à la fois horizontalement ou verticalement.

- **Avec quatre variables**

On retrouve un carré qui comporte **2^4** cases soit **: 2^4 = 16 cases**

Nous voyons à nouveau, ce qui est absolument indispensable, que grâce au code Gray, en passant d'une case à l'autre horizontalement ou verticalement une seule variable change.

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

I-3 Simplification de l'écriture des fonctions logiques par la table de Karnaugh

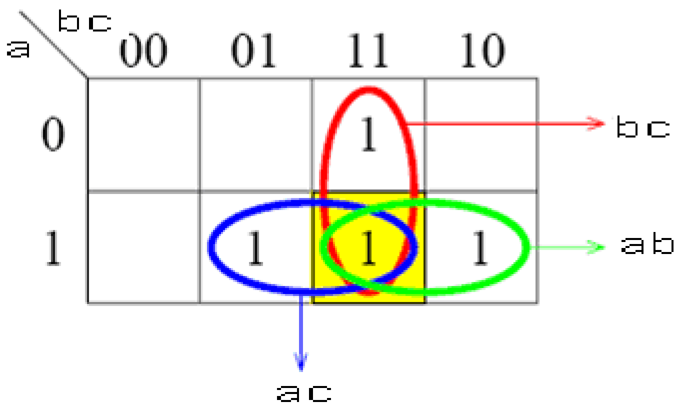
La méthode de simplification de Karnaugh repose sur l'identité :

$$ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) = a$$

Elle est basée sur l'inspection visuelle de tableaux disposés de façon telle que deux cases adjacentes en ligne et en colonne ne diffèrent que par l'état d'une variable et une seule.

- **Exemple d'une fonction à trois variables**

Elle consiste à rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupes de 2, 4 ou 8 termes. Considérons en effet le groupement vertical de deux cases :



Il correspond à la somme de deux termes : $f(a,b,c) = \bar{a}bc + abc$

Il est possible de factoriser le produit bc : $f(a,b,c) = bc(\bar{a} + a)$

La variable a qui prend les deux valeurs 0 et 1 dans le groupement disparaît. Il ne reste que le produit des variables b et c, qui gardent ici la valeur 1.

Dans un groupement de deux termes on élimine donc la variable qui change d'état et on conserve le produit des variables qui ne changent pas. Dans un groupement de quatre on élimine les deux variables qui changent d'état. Dans un groupement de huit on élimine trois variables, etc…

On cherche à avoir le minimum de groupements, chaque groupement rassemblant le maximum de termes. Une même case peut intervenir dans plusieurs groupements car A + A = A. C'est le cas de la case 111.

Pour les cases isolées on ne peut éliminer aucune variable. On conserve donc le produit caractérisant la case. L'expression logique finale est la réunion des groupements après élimination des variables qui changent d'état.

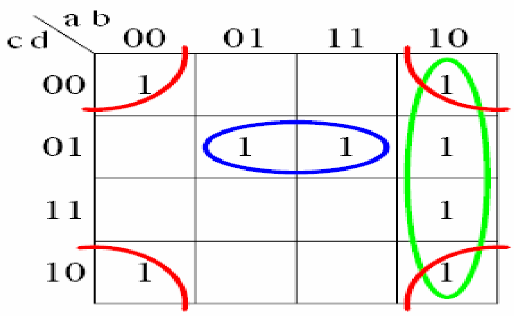
La fonction f(a,b,c) peut être écrite sous sa forme simplifier : $f(a,b,c) = bc + ab + ac$

- **Exemple d’une fonction de quatre variables**

Considérons une autre fonction f de quatre variables a, b, c et d définie par la table de vérité suivante :

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

La figure ci-dessous donne le tableau de Karnaugh équivalent :



Sur cette figure nous avons également matérialisé les trois groupements possibles : deux groupements de quatre termes, dont un contenant les quatre coins, et un groupement de deux termes. Cette méthode nous permet d'écrire : $f(a,b,c,d) = a\bar{b} + \bar{d}\bar{b} + \bar{c}db$

I-4 Fonction complètement définie et incomplètement définie

- **Fonction logique complètement définie**

Une fonction logique est complètement définie quand on connaît sa valeur (0 ou 1) pour toutes les combinaisons des variables d'entrée. Il existe 2^n combinaisons pour n variables d'entrées.

- **Fonction logique incomplètement définie**

Une fonction logique est incomplètement définie quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons des variables d'entrée. (Dans certains cas, certaines combinaisons des variables d'entrées sont impossibles).

On notera **X** la valeur de la fonction dans ce cas, et on pourra attribuer à X la valeur binaire 0 ou 1 nous convenant en vue d'une simplification de la fonction.

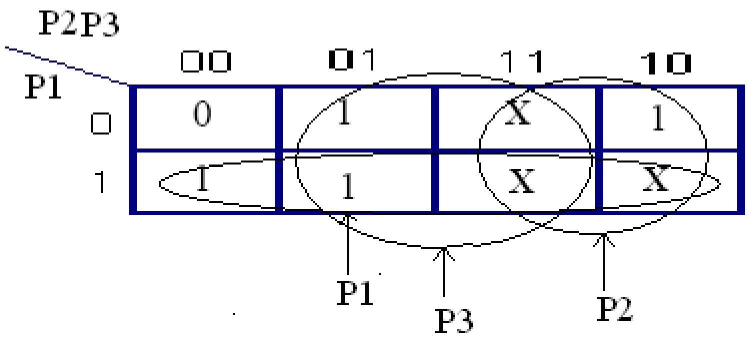
Exemple:

Soit un clavier qui comporte 3 boutons poussoirs P1, P2 et P3 qui commandent une machine et qui possèdent un verrouillage mécanique tel que 2 boutons adjacents ne peuvent pas être enfoncés simultanément.

Supposons que Pi appuyé = 1 et Pi relâché = 0, d'où la table de vérité de la fonction «Clavier» qui détecte au moins un poussoir déclenché:

P1	P2	P3	Clavier
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	X
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	X

La figure ci-dessous donne le tableau de Karnaugh équivalent :



Dans la simplification, on utilise certaines cases marquées X comme si elles contenaient des ‘‘1’’.La fonction clavier peut s’écrire : Clavier = P1+P2+P3

Si on n’utilise pas les états indéterminés, la fonction s’écrit alors :

$$Clavier = P_1\overline{P_2} + \bar{P_2}\,P_3 + \overline{P_1}P_2\overline{P_3}$$