3주차

2차원 횡단면의 3차원 복원

2. Lagrange 보간법

Department of Mathematics
Gyeongsang National University
Group 3

Lagrange 보간법

- 보간법이란?

  불연속적인 데이터를 이용하여 사이 구간의 값을 추정하는 방법

Lagrange 보간법

- 두 점 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 가 주어졌을 때,

$$P_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0}$$

위 식은 $P_1(x_0) = y_0$, $P_1(X_1) = y_1$을 만족하므로 $P_1(x)$는 두 점을 모두 지난다는 것을 알 수 있고, 1차 다항식임이 명백하다. 따라서 $P_1(x)$는 주어진 두 점을 지나가는 1차(선형) 다항식이다.

Lagrange 보간법

- 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

여기서

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, L_1(\mathrm{x}) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

이며 $L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_1) = 1$ 의 값을 가진다.

Lagrange 보간법

예제2.1

다음 자료를 사용 하여 두 점 (0.6, 1.822119), (0.7,2.013753)을 지나가는 1차 보간다항식을 구하고, $x = 0.63$에서 함수의 근사값을 계산해 보자.

x	$y = f(x)$
0	1.0
0.4	1.491825
0.5	1.638721
0.6	1.822119
0.7	2.013753
0.8	2.225541
1	2.718282

점 (0.6, 1.822119)를 첫 점 (x_0, y_0)로,

점 (0.7, 2.013753)를 두 번째 점 (x_1, y_1)로 간주하고

$P_1(x)$에 대입하면

Lagrange 보간법

$$P_1(x) = \frac{(x_1-x)y_0+(x-x_0)y_1}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{(0.7-x)1.822119+(x-0.6)2.013753}{0.7-0.6}$$

$$=1.916340x + 0.672315$$

x	$y = f(x)$
0	1.0
0.4	1.491825
0.5	1.638721
0.6	1.822119
0.7	2.013753
0.8	2.225541
1	2.718282

이다. 그러면 $P_1(0.63) = 1.879609$ 가 된다.

오른쪽 표는 정확하게 $f(x) = e^x$ 이고 점 $x = 0.63$ 의 실제 값은 $f(0.63) = e^{0.63} = 1.877611$ 이고 이 값에 근사한 값이 나온다.

Lagrange 보간법

예제2.1

매트랩으로 간단히 실습해 보면,

example_2_1.m

```
% 예제 2.1 간단한 실습

clear; clc; close all;

x=0.63;              % 근사할 값

x0=0.6; x1=0.7; y0=1.822119; y1=2.013753;       % 초기 값 설정

p=(x-x1)/(x0-x1)*y0+(x-x0)/(x1-x0)*y1;          % 보간 다항식

ap=p;
real=exp(0.63);     % 실제 데이터
error=abs(ap-real)  %에러
```

명령 창

MATLAB을 처음 사용한다면 시작하기를 참조하십시오.

```
error =

   0.001998620735657

>>
```

Lagrange 보간법

- <u>2차 보간다항식</u>

세 점 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 2차 보간다항식의 형태는

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

이다. 여기서

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

으로 정의된다.

Lagrange 보간법

예제 2.2

1차 식에서의 예시를 세 점 $(0.5, 1.648721), (0.6, 1.822119), (0.7, 2.013753)$ 세 점과 2차 보간다항식을 사용하여 구해보자.

x	$y = f(x)$
0	1.0
0.4	1.491825
0.5	1.638721
0.6	1.822119
0.7	2.013753
0.8	2.225541
1	2.718282

$$L_0(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)} = 50(\mathrm{x}^2 - 1.3\mathrm{x} + 0.42)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0.5)(x-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)} = -100(x^2 - 1.2x + 0.35)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0.5)(x-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)} = 50(x^2 - 1.1x + 0.3)$$

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= 1.648721L_0(x) + 1.822119L_1(x) + 2.013753L_2(x)$$

가 된다.

Lagrange 보간법

- 1차 식에서의 예시를 세 점 $(0.5, 1.648721), (0.6, 1.822119), (0.7, 2.013753)$ 세 점과 2차 보간다항식을 사용하여 구해보자.

$P_2(x)$를 정리하면 $P_2(x) = ax^2 + bx + c$의 형태로 나타낼 수 있다.

여기에 0.63을 대입하면 $P_2(0.63) = 1.877694$가 된다.

이것은 두 점을 이용한 1차 보간다항식에 의한 근사값보다 실제 값에 더 가깝다는 것을 알 수 있다.

x	$y = f(x)$
0	1.0
0.4	1.491825
0.5	1.638721
0.6	1.822119
0.7	2.013753
0.8	2.225541
1	2.718282

Lagrange 보간법

예제2.2

매트랩으로 간단히 실습해 보면,

example_2_1.m | example_2_3.m | prac_2_1.m | prac_2_2.m | example_2_2.m

```
% 예제 2.1 간단한 실습

clear; clc; close all;

x=0.63;              % 근사할 값

x0=0.5; x1=0.6; x2=0.7; y0=1.648721; y1=1.822119; y2=2.013753;       % 초기 값 설정


p1=(x-x1)/(x0-x1)*y0+(x-x0)/(x1-x0)*y1;          % 보간 다항식
p2=(x-x1)*(x-x2)/((x0-x1)*(x0-x2))*y0+(x-x0)*(x-x2)/((x1-x0)*(x1-x2))*y1+...
    (x-x0)*(x-x1)/((x2-x0)*(x2-x1))*y2;
error_1=abs(p1-exp(0.63))
error_2=abs(p2-exp(0.63))
```

명령 창

MATLAB을 처음 사용한다면 시작하기를 참조하십시오.

```
error_1 =

    0.0035


error_2 =

   8.3841e-05

>>
```

Lagrange 보간법

- <u>고차 보간다항식</u>

n+1개의 점들 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$을 지나가는 n차 보간다항식은 다음과 같이 주어진다.

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

이고

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Lagrange 보간법

<u>예제2.3</u>

다음 4개의 점들을 지나가는 3차 Lagrange 보간다항식 $P_3(x)$를 구하고 그래프를 그려보자

x	0	2	3	4
$y = f(x)$	7	11	28	63

$$P_3(x) = 7L_0(x) + 11L_1(x) + 28L_2(x) + 63L_3(x)$$

여기서

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-2)(0-3)(0-4)} \quad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-3)(2-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-2)(3-4)} \quad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-2)(4-3)}$$

따라서 $P_3(x) = x^3 - 2x + 7$ 이 된다.

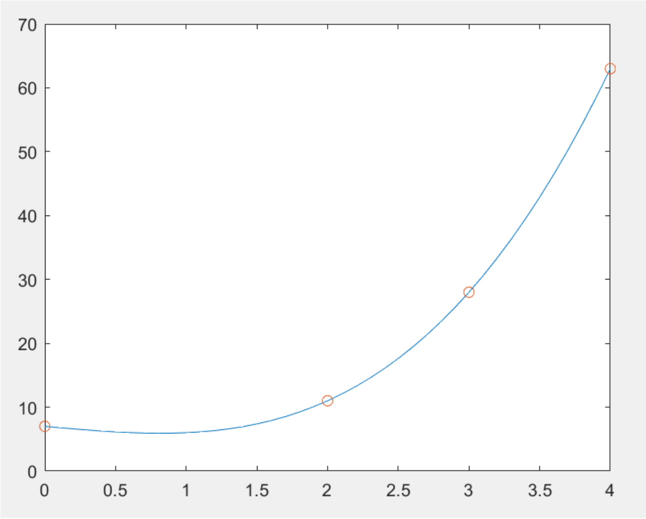
Lagrange 보간법

예제2.3

매트랩으로 간단히 실습해 보면,

example_2_1.m   example_2_3.m

```
% 예제 2.1 간단한 실습

clear; clc; close all;

x=[0 2 3 4];          % 초기값 설정
y=[7 11 28 63];

x_p=0:0.1:4;          % 그래프를 위한 x

syms xx               % 함수를 위한 변수 설정

l0(xx)=(xx-x(2))*(xx-x(3))*(xx-x(4))/((x(1)-x(2))*(x(1)-x(3))*(x(1)-x(4)));    % l0 구하기
l1(xx)=(xx-x(1))*(xx-x(3))*(xx-x(4))/((x(2)-x(1))*(x(2)-x(3))*(x(2)-x(4)));    % l1 구하기
l2(xx)=(xx-x(1))*(xx-x(2))*(xx-x(4))/((x(3)-x(1))*(x(3)-x(2))*(x(3)-x(4)));    % l2 구하기
l3(xx)=(xx-x(1))*(xx-x(2))*(xx-x(3))/((x(4)-x(1))*(x(4)-x(2))*(x(4)-x(3)));    % l3 구하기

p(xx)=l0(xx)*y(1)+l1(xx)*y(2)+l2(xx)*y(3)+l3(xx)*y(4);     % 보간 다항식
p(xx)=simplify(p(xx))        % 보간 다항식 정리 해주는 함수
plot(x_p,p(x_p))             % 보간 다항식 그리기
hold on
plot(x,p(x),'o')             % 실제 값도 같이 그려서 비교
```



명령 창

MATLAB을 처음 사용한다면 시작하기를 참조하십시오.

```
p(xx) =

xx^3 - 2*xx + 7

>>
```

Lagrange 보간법

연습문제 2.1

Lagrange 방법으로 다음 세 점을 지나는 2차 보간 다항식 $P_2(x)$를 구하고 $ax^2 + bx + c$의 형태로 나타내어라

x	0	1	2
$y = f(x)$	1	3	2

Lagrange 보간법

연습문제 2.1

example_2_1.m | example_2_3.m | prac_2_1.m

```matlab
% 연습문제 2.1

clear; clc; close all;

x=[0 1 2];          % 초기값 설정
y=[1 3 2];

syms xx             % 함수를 위한 변수 설정

l0(xx)=(xx-x(2))*(xx-x(3))/((x(1)-x(2))*(x(1)-x(3)));     % l0 구하기
l1(xx)=(xx-x(1))*(xx-x(3))/((x(2)-x(1))*(x(2)-x(3)));     % l1 구하기
l2(xx)=(xx-x(1))*(xx-x(2))/((x(3)-x(1))*(x(3)-x(2)));     % l2 구하기

p(xx)=l0(xx)*y(1)+l1(xx)*y(2)+l2(xx)*y(3);      % 보간 다항식
p(xx)=simplify(p(xx))       % 보간 다항식 정리 해주는 함수
```

명령 창

MATLAB을 처음 사용한다면 시작하기를 참조하십시오.

```
p(xx) =

(7*xx)/2 - (3*xx^2)/2 + 1

fx >>
```

Lagrange 보간법

<u>연습문제 2.1</u>

대한민국 정부 수립 후 연도별로 조사한 총 인구 수는 아래와 같다.
4차 보간 다항식을 구하여 1972년도의 우리나라 인구를 추정해 보아라.

조사 년도	인구(단위:천명)
1944	16,565
1949	20,189
1955	21,526
1960	24,989
1966	29,193
1970	31,466
1975	34,707
1980	37,436
1985	40,448
1990	43,411
1995	44,609
2000	46,136
2005	47,279

Lagrange 보간법

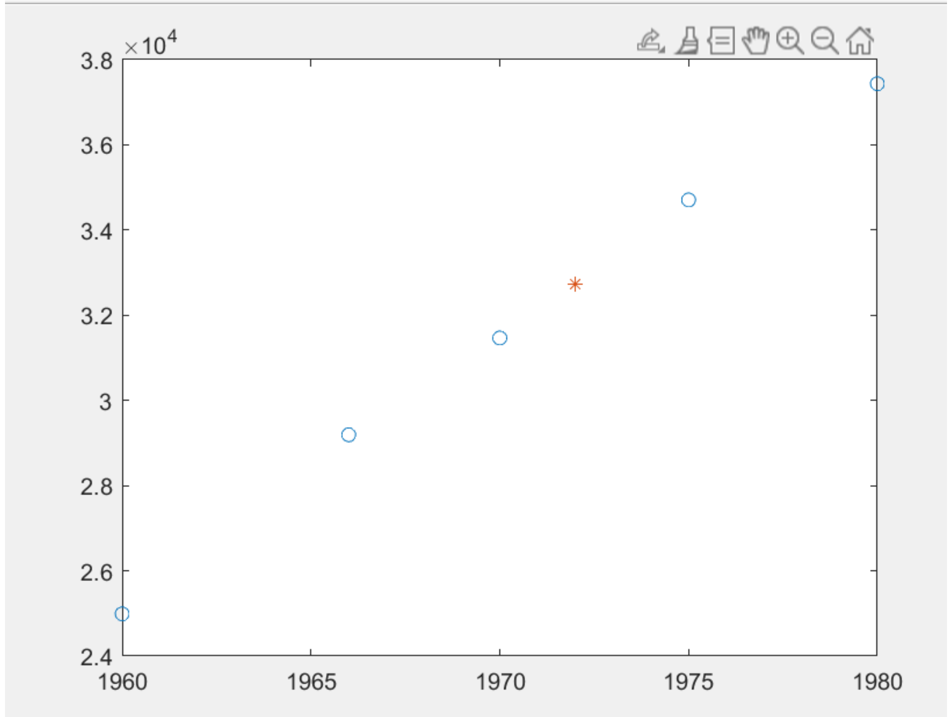
연습문제 2.1

example_2_1.m   example_2_3.m   prac_2_1.m   prac_2_2.m

```matlab

clear; clc; close all;

year=[1960 1966 1970 1975 1980];          % 년도
num=[24989 29193 31466 34707 37436];       % 인구 수

x=1972;     % 구하고 싶은 년도

l0=(x-year(2))*(x-year(3))*(x-year(4))*(x-year(5))...
/((year(1)-year(2))*(year(1)-year(3))*(year(1)-year(4))*(year(1)-year(5)));     % l0 구하기

l1=(x-year(1))*(x-year(3))*(x-year(4))*(x-year(5))...
    /((year(2)-year(1))*(year(2)-year(3))*(year(2)-year(4))*(year(2)-year(5)));     % l1 구하기
```

example_2_1.m   example_2_3.m   prac_2_1.m   prac_2_2.m

```matlab
    /((year(2)-year(1))*(year(2)-year(3))*(year(2)-year(4))*(year(2)-year(5)));     % l1 구하기

l2=(x-year(1))*(x-year(2))*(x-year(4))*(x-year(5))...
    /((year(3)-year(1))*(year(3)-year(2))*(year(3)-year(4))*(year(3)-year(5)));     % l2 구하기

l3=(x-year(1))*(x-year(2))*(x-year(3))*(x-year(5))...
    /((year(4)-year(1))*(year(4)-year(2))*(year(4)-year(3))*(year(4)-year(5)));     % l3 구하기

l4=(x-year(1))*(x-year(2))*(x-year(3))*(x-year(4))...
    /((year(5)-year(1))*(year(5)-year(2))*(year(5)-year(3))*(year(5)-year(4)));     % l4 구하기

p=l0*num(1)+l1*num(2)+l2*num(3)+l3*num(4)+l4*num(5);          % 1972년도 인구 수

```



Thank you!