3주차

2차원 횡단면의 3차원 복원

3. Splin 보간법(1)

Department of Mathematics
Gyeongsang National University
Group 3

Splin 보간법

- n+1개의 점들 (x_0, y_0), (x_1, y_1),⋯,(x_n, y_n)을 지나가는 n차 보간 다항식의 그래프는 n이 클 때 굴곡이 심하다는 특징이 있다. 이로 인하여 상당히 큰 오차가 발생할 수 있다. 오차를 줄일 수 있는 한 가지의 방법은 하나의 n차 다항식을 활용하는 것이 아니라 여러 개의 다항식을 사용하는것이다.

Splin 보간법

즉, x -축의 점들 P={x_0, x_1,⋯, x_n}은 전체 구간 [a, b]의 한 분할 (a=$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \mathrm{b}$)이라고 생각할 수 있다. 따라서 각 부분구간 {x_{i-1}, x_i}에 적절한 1차, 2차 또는 3차 다항식을 사용하는 것이다.

Splin 보간법

- 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\mathrm{S}(x) = \begin{cases} S_0(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}
$$

Splin 보간법

-만약 각 소구간에 1차 다항식을 사용하면 S(x)를 1차 스플라인 보간 함수라고 부른다. (S′(x)는 연속이 아니기 때문에 각 마디점이 꺾이는 상황이 일어난다.)

-각 소구간에 2차 다항식을 사용하면 S(x)를 2차 스플라인 보간 함수라고 한다. (1차보다는 매끄러운 함수가 생성 되지만 S″(x)는 연속이 되지 않는다.)

-위와 같은 상황 때문에 3차 스플라인 보간 함수를 사용한다.

-3차 스플라인 보간 함수 : $a\_i + bi(x - xi) + ci(x - xi)\hat{}2 + di(x - xi)\hat{}3, (i = 0,2, \ldots, n - 1)$

Splin 보간법

- 3차 스플라인 보간 함수 조건

Si(x)=ai+bi(x-xi)+ci(x-xi)^2+di(x-xi)^3, (i=0,2,…,n-1)

1. Si(xi)=yi, Si(xi+1)=yi+1
2. S(i-1)′(xi)=Si′(xi)
3. S(i-1)″(xi)=Si″(xi)
4. 자연경계 조건 : S0″(x0)=0, Sn-1″(xn)=0 (지금은 이 조건 사용)

+고정경계 조건 : S0′(x0)=y0′, Sn-1′(xn)=yn′

Splin 보간법

- 조건 1. $Si(xi)=yi$, $Si(x_{i+1})=y_{i+1}$

Si(x)=ai+bi(x-xi)+ci(x-xi)^2+di(x-xi)^3

Si(xi)=ai=yi ①

Si(xi+1)=ai+bi(xi+1-xi)+ci(xi+1-xi)^2+di(xi+1-xi)^3

=ai+bi*hi+ci*hi^2+di*hi^3=yi+1

yi+1-yi= bi*hi+ci*hi^2+di*hi^3 ②

Splin 보간법

- 조건 2. $S_{(i-1)}'(xi)=Si'(xi)$

$Si'(x)=bi+2ci(x-xi)+3di(x-xi)^2$

$Si'(xi)=bi$

$Si-1'(xi)=bi-1+2ci-1hi-1+3di-1hi-1^2$

$bi-bi-1=2ci-1hi-1+3di-1hi-1^2$ ③

Splin 보간법

- 조건 3. $S_{i-1}''(x_i)=S_i''(x_i)$

$S_i''(x)=2c_i+6d_i(x-x_i)$

$S_i''(x_i)=2c_i$

$S_{i-1}''(x_i)=2c_{i-1}+6d_{i-1}h_{i-1}$

$d_{i-1}=(c_i-c_{i-1})/3h_{i-1}$ ④

Splin 보간법

- ④ $(d_{i-1}=(ci-c_{i-1})/3h_{i-1})$→② $(y_{i+1}-yi=$ bi*hi+ci*hi^2+di*hi^3)

bi=(yi+1-yi)/hi-hi/3*(ci+1+2ci) ⑤

bi-1=(yi-yi-1)/hi-1-hi-1/3*(ci+2ci-1) ⑥

Splin 보간법

- ④⑤⑥→③

④ : di-1=(ci-ci-1)/3hi-1

⑤ : bi=(yi+1-yi)/hi-hi/3*(ci+1+2ci)

⑥ : bi-1=(yi-yi-1)/hi-1-hi-1/3*(ci+2ci-1)

③ : bi-bi-1=2ci-1hi-1+3di-1hi-1^2

→hi-1ci-1+2(hi+hi-1)ci+hici+1

=3((yi+1-yi)/hi-(yi-yi-1)/hi-1) ⑦

Splin 보간법

- ⑦과 자유경계조건을 이용해 c들을 구한다.

⑦ : $h_{i-1}c_{i-1}+2(hi+h_{i-1})ci+hic_{i+1}=3((y_{i+1}-yi)/hi-(yi-y_{i-1})/h_{i-1})$

자연경계 조건 : $S0''(x0)=2c0=0$, $S_{n-1}''(xn)=2cn=0$

Thank you!