9주차

2차원 횡단면의 3차원 복원

4. 최소자승법(2)

Department of Mathematics
Gyeongsang National University
Group 3

최소자승법

3. 비다항함수

주어진 데이터 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 가 다음과 같은 형태의 함수에 더 적합하다면

$$f(x) = ag_1(x) + bg_2(x) + cg_3(x)$$

오차함수는 아래와 같이 주어지고

$$\emptyset(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} [ag_1(x_k) + bg_2(x_k) + cg_3(x_k) - y_k]^2$$

최소자승법

3. 비다항함수

정규방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)^2 & \sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_2(x_k) & \sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_3(x_k) \\ \sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_2(x_k) & \sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)^2 & \sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_3(x_k) \\ \sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_3(x_k) & \sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_3(x_k) & \sum_{k=1}^{n} g_3(x_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k g_1(x_k) \\ \sum_{k=1}^{n} y_k g_2(x_k) \\ \sum_{k=1}^{n} y_k g_3(x_k) \end{pmatrix}$$

최소자승법

3. 비다항함수

예를 들어 $y = ax^2 + b\sin x + ce^x$ 일 때 오차함수는

$$\emptyset(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n}[a{x_k}^2 + b\sin x_k + ce^{x_k} - y_k]^2$$

가 되며 정규방정식은

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} {x_k}^4 & \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \sin x_k & \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 e^{x_k} \\ \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \sin x_k & \sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k & \sum_{k=1}^{n} \sin x_k e^{x_k} \\ \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 e^{x_k} & \sum_{k=1}^{n} \sin x_k e^{x_k} & \sum_{k=1}^{n} e^{2x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k {x_k}^2 \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \sin x_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k e^{x_k} \end{pmatrix}$$

가 된다.

최소자승법

4. 비선형 문제

비선형 방정식 또는 비선형 연립방정식 형태로 나타낼 수 있다.
주어진 데이터 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$가 함수 $y = e^{ax}$에 적합하다고 예상하면 가장 적절한 a의 값을 구해주면 된다. 이 경우 오차함수는

$$\emptyset(a) = \sum_{k=1}^{n} [e^{ax_k} - y_k]^2$$

가 되고 다루어야 할 방정식은

$$2\sum_{k=1}^{n} (e^{ax_k} - y_k)e^{ax_k}x_k = 0$$

가 된다. 위의 식은 a에 대하여 비선형이다.

최소자승법

4. 비선형 문제

만약 주어진 데이터가 2개의 매개변수를 갖는 함수 $y = be^{ax}$에 더욱 적합하다면 오차함수는

$$\emptyset(a, b) = \sum_{k=1}^{n} [be^{ax_k} - y_k]^2$$

가 되며 도출되는 방정식은 다음과 같이 비선형 연립방정식이 된다.

$$2\sum_{k=1}^{n} (be^{ax_k} - y_k)be^{ax_k}x_k = 0$$

$$2\sum_{k=1}^{n} (be^{ax_k} - y_k)e^{ax_k} = 0$$

위의 연립방정식을 $Newton$ 방법으로 다루면 가장 적절한 a, b의 값을 구할 수 있다.

최소자승법

연습문제 7.

아래에 주어진 자료를 가장 잘 나타내는 방정식 $y = c\,log\,x$ 를 구하여라.

x	**-1**	**0**	**1**
y	**0.5**	**1**	**3**

```
clear; clc; close all;

data=[-1 0 1
    0.5 1 3];        % data

x=data(1,:);         % split data
y=data(2,:);         % split data

a=0; error=0.0001;       % initial value & error
```

최소자승법

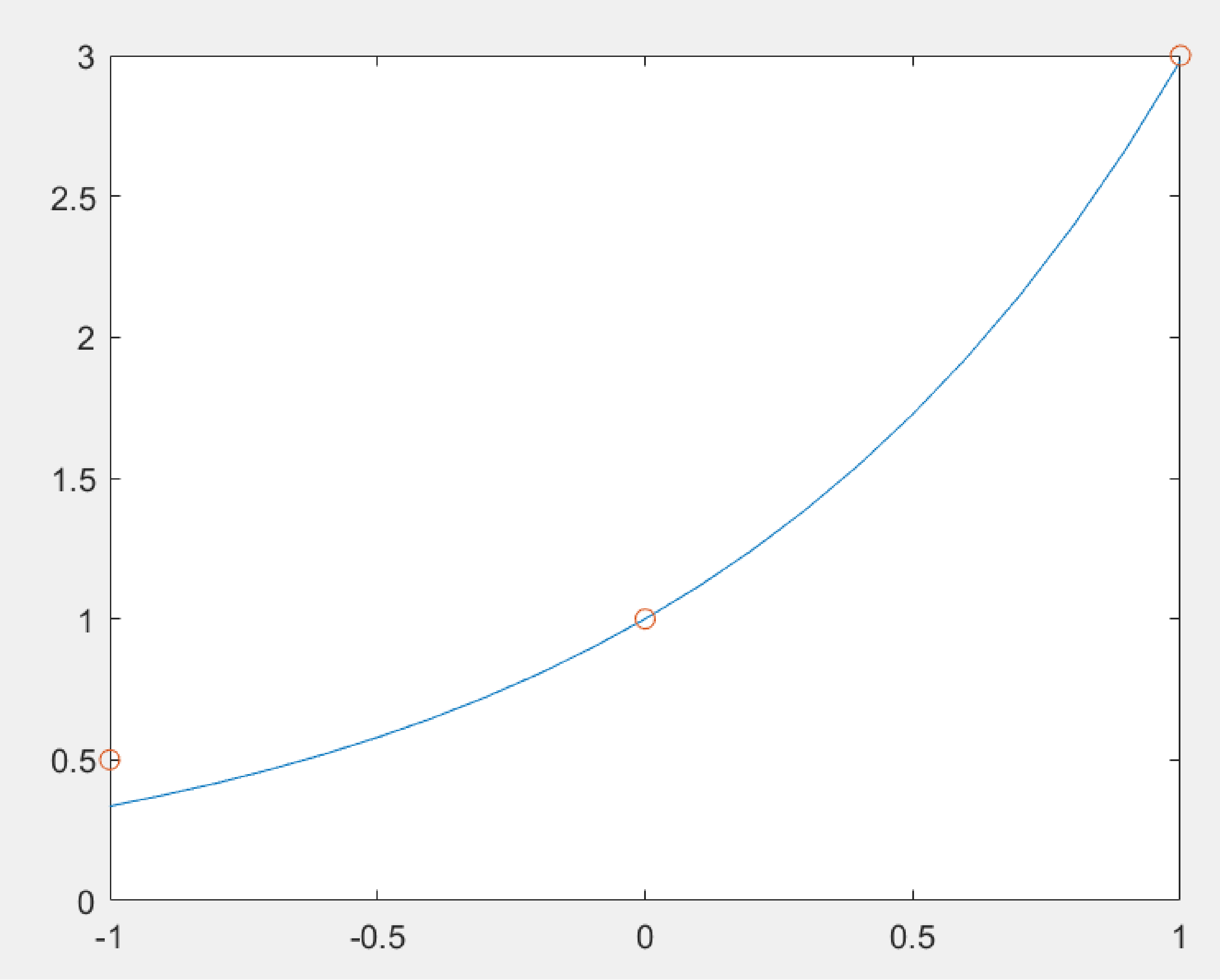
연습문제 7.

```
while 1
    sumf=0; sumfp=0;          % Initialization
    for ik=1:3
        sumf=sumf+exp(2*a*x(ik))*x(ik)-exp(a*x(ik))*x(ik)*y(ik);          % fx value
        sumfp=sumfp+2*exp(2*a*x(ik))*x(ik)^2-exp(a*x(ik))*x(ik)^2*y(ik);     % fx prime value
    end

    an=a-sumf/sumfp;          % newton method

    if abs(an-a)<error
        break          % check error
    end

    a=an;

end
```

최소자승법

연습문제 7.

```
t=-1:0.1:1;      % graph
plot(t,exp(a*t))
hold on
plot(data(1,:),data(2,:),'o')
```



최소자승법

연습문제 8.

문제 7에 주어진 자료가 방정식 $y = be^{ax}$에 더 적합하다면 계수 a, b를 구할 수 있도록 식을 세워 보아라.

```
clear; clc; close all;

data=[-1 0 1
    0.5 1 3];         % data

x=data(1,:);         % split data
y=data(2,:);         % split data

a=1; b=1; error=0.0001;        % initial value & error
```

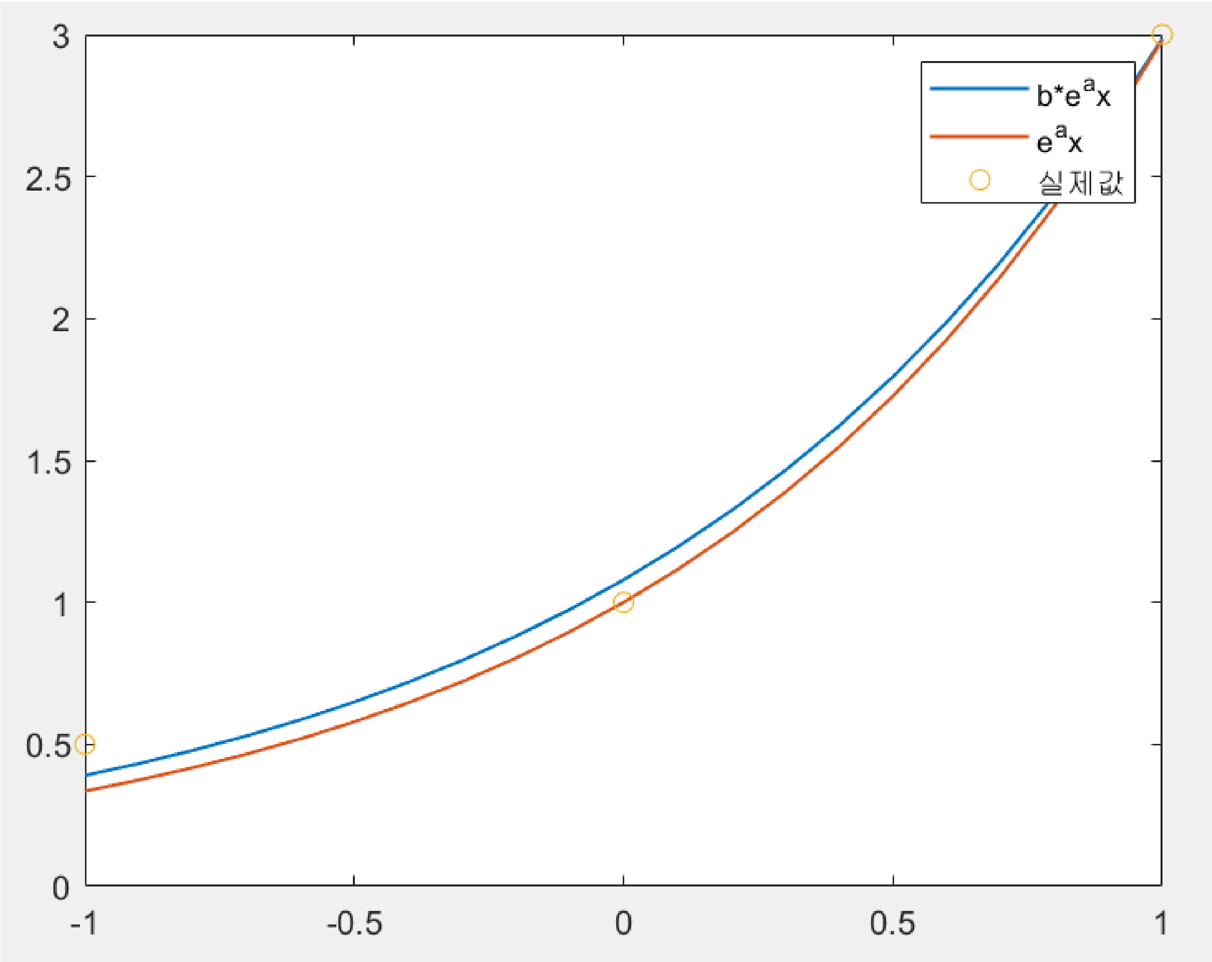
연습문제 8.

```
while 1
    fa=0; fb=0; ga=0; gb=0; f=0; g=0;        % Initialization

    for ik=1:3
        fa=fa+2*b^2*exp(2*a*x(ik))*x(ik)^2-b*exp(a*x(ik))*x(ik)^2*y(ik);
        fb=fb+2*b*exp(2*a*x(ik))*x(ik)-exp(a*x(ik))*x(ik)*y(ik);
        ga=ga+2*b*exp(2*a*x(ik))*x(ik)-exp(a*x(ik))*x(ik)*y(ik);
        gb=gb+exp(2*a*x(ik));
        f=f+b^2*exp(2*a*x(ik))*x(ik)-b*exp(a*x(ik))*x(ik)*y(ik);
        g=g+b*exp(2*a*x(ik))-exp(a*x(ik))*y(ik);
    end

    jac=[fa fb;ga gb];       % jacobian matrix

    abn=[a;b]-jac₩[f;g];          % newton method

    if abs(abn(1)-a)<error && abs(abn(2)-b)<error          % check error
         break
    end

    a=abn(1);
    b=abn(2);

end
```

최소자승법

연습문제 8.

```
t=-1:0.1:1;      % graph
plot(t,b*exp(a*t),'LineWidth',1)
hold on
w=1.0924;
plot(t,exp(w*t),'LineWidth',1)
hold on
plot(data(1,:),data(2,:),'o')

legend('b*e^ax','e^ax','실제값')
```



최소자승법

연습문제 9.

다음 데이터는 세 함수의 일차 결합인 $y = ax^2 + b\sin x + ce^x$을 따른다고 한다.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	-8	-1	2	3

a) 계수 a, b, c를 구할 수 있도록 최소자승법에 의한 식을 세워 보아라.
b) 계수 a, b, c의 값들을 구하여라.

```
clear; clc; close all;

data=[-2 -1 0 1 2
    5 -8 -1 2 3];        % data

x=data(1,:);         % split data
y=data(2,:);         % split data

g1_2=0; g2_2=0; g3_2=0; g1g2=0; g1g3=0; g2g3=0;
yg1=0; yg2=0; yg3=0;         % initialization
```

최소자승법

연습문제 9.

```
for ik=1:4
    g1_2=g1_2+x(ik)^4;
    g1g2=g1g2+x(ik)^2*sin(x(ik));
    g1g3=g1g3+x(ik)^2*exp(x(ik));
    g2_2=g2_2+(sin(x(ik)))^2;
    g2g3=g2g3+sin(x(ik))*exp(x(ik));
    g3_2=exp(x(ik)*2);

    yg1=yg1+y(ik)*x(ik)^2;
    yg2=yg2+y(ik)*sin(x(ik));
    yg3=yg3+y(ik)*exp(x(ik));

end
```

최소자승법

연습문제 9.

```
A=[g1_2 g1g2 g1g3
    g1g2 g2_2 g2g3
    g1g3 g2g3 g3_2];

B=[yg1;yg2;yg3];

v=A₩B;

a=v(1); b=v(2); c=v(3);

t=-2:0.1:2;     % graph
plot(t,a*t.^2+b*sin(t)+c*exp(t),'LineWidth',1)
hold on
plot(data(1,:),data(2,:),'o')
```