

게임 수학

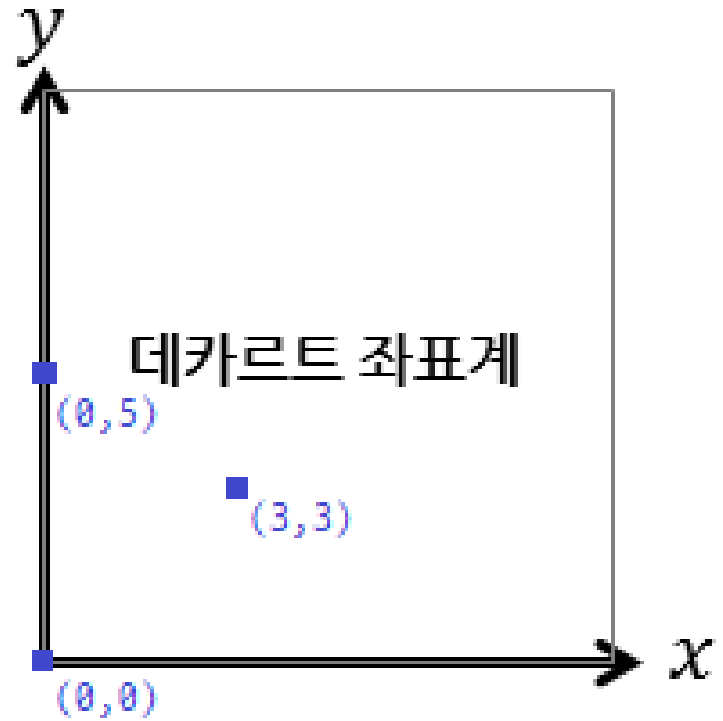
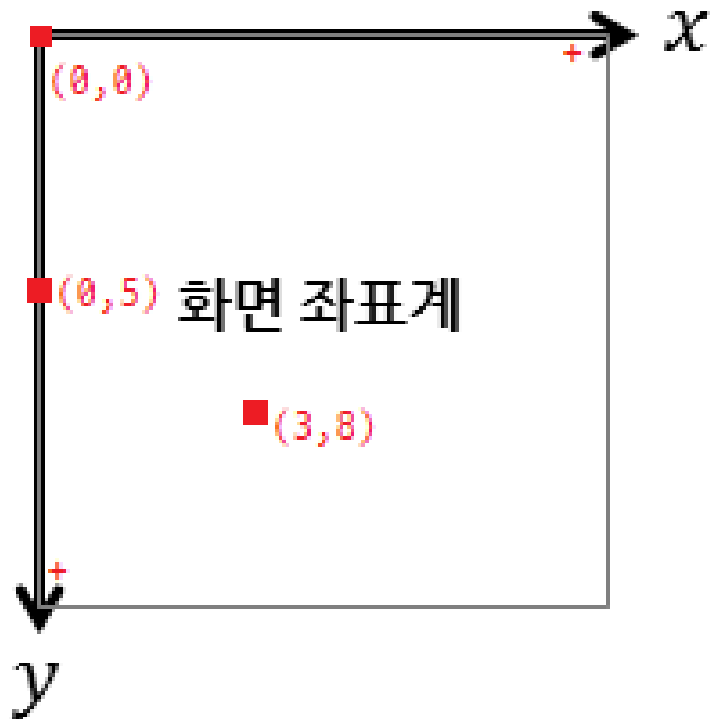
목차

1. 좌표계 . . . 4p
 2. 직선 . . . 5p
 3. 원 . . . 9p
 4. 삼각함수 . . . 10p
 5. 벡터 . . . 12p
- 

목차

- 6. 극 좌표 · · · 17p
- 7. Physics Engine · · · 18p
- 8. 연습문제 · · · 26p

좌표계



직선

▶ 직선의 방정식

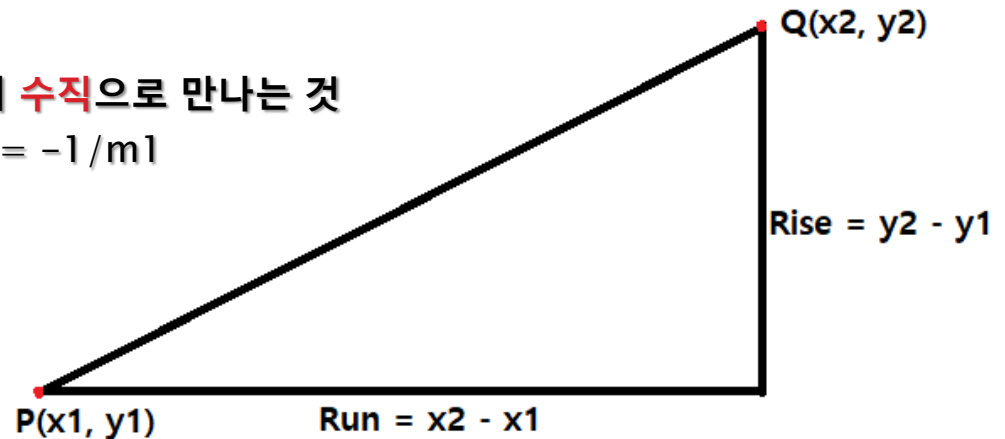
- $ax + by + c = 0$
- 직선의 가장 중요한 성질은 **기울기**(경사도)

▶ 기울기

- 수평으로 이동(Run)할 때마다 일정하게 상승(Rise)하는 경사면에서 두 점의 좌표 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 로 표현
- $m(\text{기울기}) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

▶ 직교

- 두 직선이 직각을 이룰 때, 즉 두 직선이 **수직**으로 만나는 것
- $m_1 m_2 = -1$ or $m_1 = -1/m_2$ or $m_2 = -1/m_1$



직선

▶ 충돌 검출에 응용

- 직선으로 **건물의 벽**이나 **물체의 이동경로**를 나타낼 수도 있는데, 이러한 두 직선의 교차점으로 충돌 확인 가능

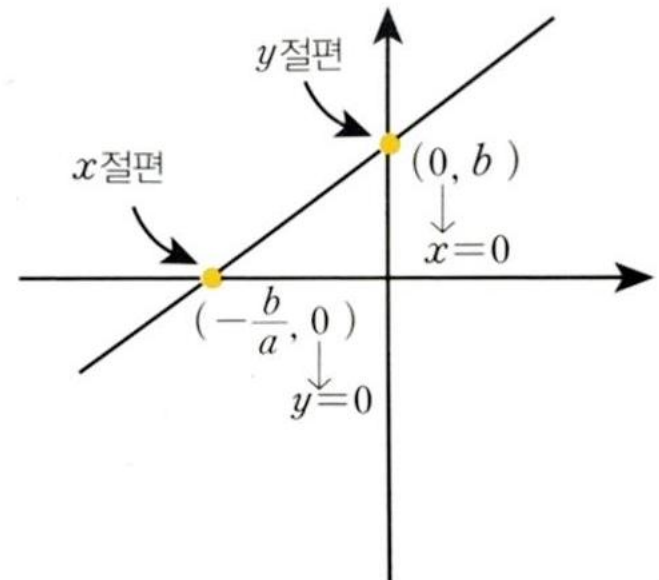
▶ 두 직선의 교차점

- 기울기 m_1 을 지나는 직선상의 점 $P(x_1, y_1)$
기울기 m_2 를 지나는 직선상의 점 $P(x_2, y_2)$
- $X = (m_1x_1 - m_2x_2 + y_2 - y_1) / (m_1 - m_2)$
- $Y = m_1(X - x_1) + y_1$ or $Y = m_2(X - x_2) + y_2$

▶ 두 직선의 기울기 m_1, m_2

- $m_1 \neq m_2$: 교차점이 한 개 존재한다
- $m_1 = m_2$ 일 경우, 두 직선의 **y절편** b_1, b_2 를 구한다
 $b_1 \neq b_2$: 두 선은 **평행**
 $b_1 = b_2$: 두 선은 **겹쳐있다**

- ◆ **x절편** : $y = 0$ 일 때의 x 의 값
- ◆ **y절편** : $x = 0$ 일 때의 y 의 값



직선

▶ 기울기를 이용한 두 직선의 교차점 구하기의 문제점

- 2개의 점을 시작과 끝을 이루는 **특정한 범위**를 가지는 두 직선 사이의 교차점 만을 구하는 것에 매우 **비효율적**이며 구하기 힘들다

▶ 범위를 가지는 두 직선의 교차점

- 하나의 직선의 시작 점 $P(x_1, y_1)$ 와 끝 점 $P(x_2, y_2)$
또 다른 직선의 시작 점 $P(x_3, y_3)$ 와 끝 점 $P(x_4, y_4)$

```
{  
    float under = (y4 - y3) * (x2 - x1) - (x4 - x3) * (y2 - y1);  
  
    if (0 == under) return;  
  
    float t = (x4 - x3) * (y1 - y3) - (y4 - y3) * (x1 - x3);  
    float s = (x2 - x1) * (y1 - y3) - (y2 - y1) * (x1 - x3);  
  
    if (0 == t && 0 == s) return;  
  
    t = t / under;  
    s = s / under;  
  
    if (0 > t || 1 < t || 0 > s || 1 < s) return;  
  
    // 교차점.  
    float crossPointX = x1 + t * (x2 - x1);  
    float crossPointY = y1 + t * (y2 - y1);  
}
```

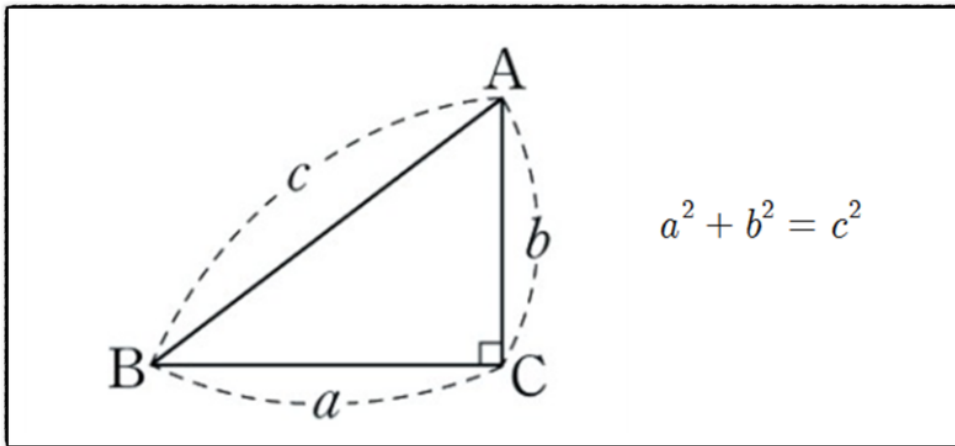
직선

▶ 피타고라스의 정리

- 화면상의 두 점 사이의 거리를 구한다

▶ $B(x_1, y_1)$, $A(x_2, y_2)$ 사이의 거리

- $BA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



원

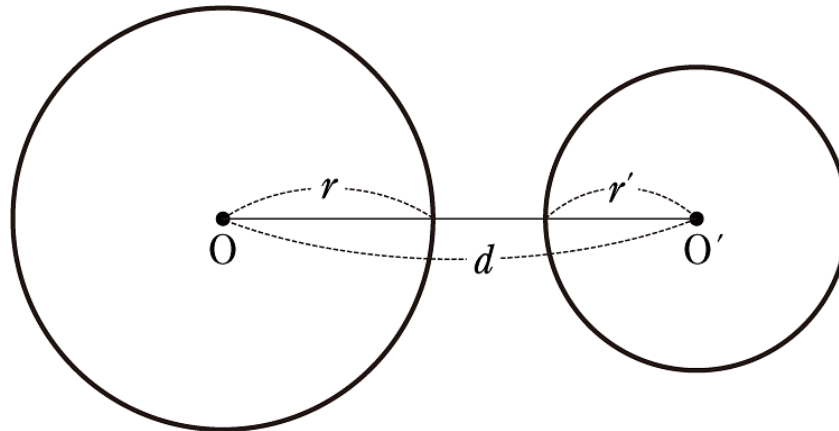
- ❖ 사각형을 이용한 충돌처리보다 **좀 더 명확한 충돌 처리**를 하기 위하여 주로 사용

- ▶ **방정식**

- $x^2 + y^2 = r^2$

- ▶ **두 원의 충돌**

- 두 원 사이의 거리(**d**)가 두 원의 반지름의 합(**r + r'**)보다 작거나 같다면 두 원은 충돌 상태이다



삼각함수

❖ 삼각함수는 벡터, 물리학을 다루는 방법으로 자주 사용

▶ 도(Degree)

- 원 한 바퀴를 360으로 표현하는 방법

▶ 라디안(Radian)

- 부채꼴의 중심각, **호의 길이**가 **원의 반지름**과 같을 때를 **1라디안**이라 정의

도	라디안	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	0.5	0.8660	0.5774
45	$\pi/4$	0.7071	0.7071	1
60	$\pi/3$	0.8660	0.5	1.7321
90	$\pi/2$	1	0	-
120	$2\pi/3$	0.8660	-0.5	-1.7321
180	π	0	-1	0
270	$3\pi/2$	-1	0	-
360	2π	0	1	0

삼각함수

▶ 단위 원

- **원의 반지름**을 1로 하여 x, y 의 값은 $-1 \sim 1$ 의 값을 가진다
- 물체가 나아갈 **방향**을 구하는데 사용

▶ 데카르트 좌표 기준

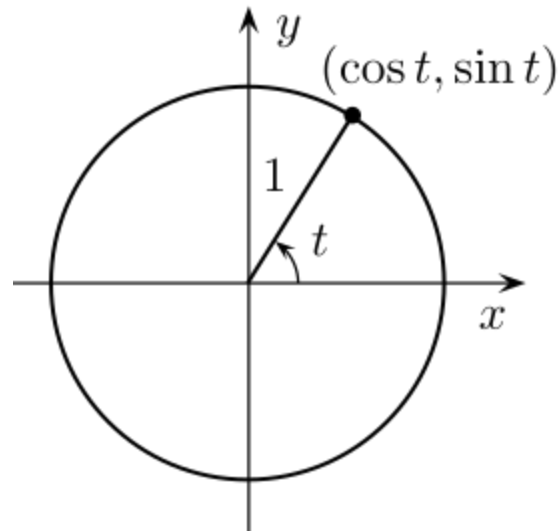
$$x = \cos(\text{radian})$$

$$y = \sin(\text{radian})$$

▶ 화면 좌표 기준

$$x = \cos(\text{radian})$$

$$y = -\sin(\text{radian})$$



```
#define Rad2Deg 57.29577951f
```

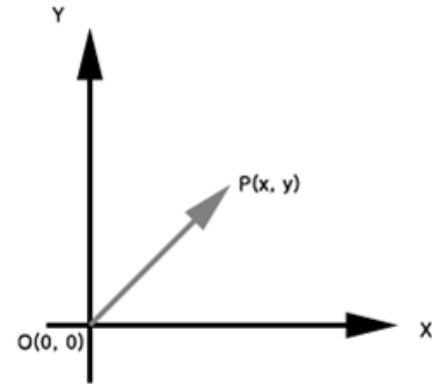
```
#define Deg2Rad 0.017453293f
```

- ◆ 라디안에서 도, 도에서 라디안 값으로 **변환**, 해당 값을 곱하여 알 수 있다

벡터

▶ 벡터와 스칼라

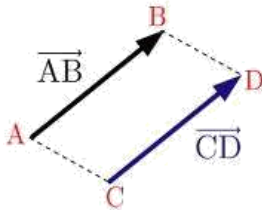
- 벡터 : 크기 + 방향
- 스칼라 : 크기만 가진다



2차원 평면상의 벡터

▶ 벡터의 상등

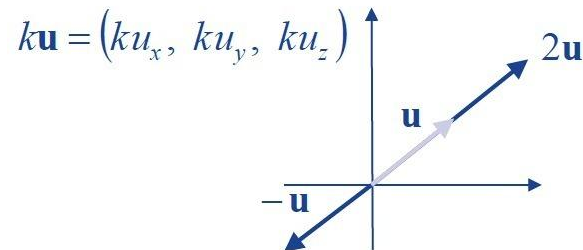
- 벡터는 위치를 나타내는 개념이 아니다



“벡터AB와 벡터CD는 **크기**와 **방향**이 같으므로 서로 상등하다”

▶ 벡터와 스칼라의 곱

- 벡터는 가려는 방향, 스칼라는 속력



벡터

▶ 벡터의 정규화

- 단위 원 값으로 변환
- 결과 값을 단위 벡터(normal vector)라 한다

```
const float epsilon = 0.000001f; // 부동소수점.
```

```
float x, y;  
float sqrMagnitude = (x * x) + (y * y);  
float magnitude = std::sqrt(sqrMagnitude);  
if (epsilon < magnitude) // if(0 < magnitude)  
{  
    float invMagnitude = 1.0f / magnitude;  
    x *= invMagnitude;  
    y *= invMagnitude;  
}
```

벡터

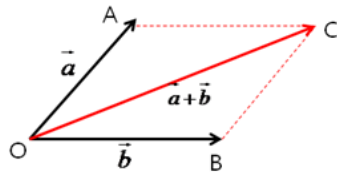
▶ 벡터의 더하기

- 오브젝트(물체)의 이동, 물리 힘 관련 처리시 사용

▶ 벡터의 빼기

- 내가 타겟을 향해 가기 위한 **방향**을 구하기 위하여 사용

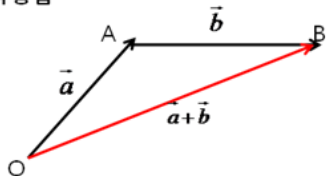
평행사변형법



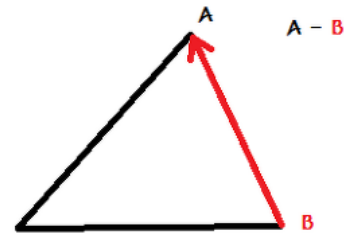
\vec{a} 와 \vec{b} 의 시점 일치시:
평행사변형의 대각선이 두 벡터의 합을 의미
 $|\vec{a}+\vec{b}|$: 두 벡터 합 크기 $\rightarrow \vec{OC}$ 대각선 길이를 의미

벡터의 더하기

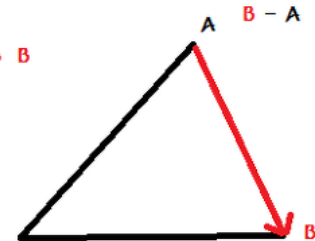
삼각형법



\vec{a} 와 \vec{b} 의 종점을 연결시:
시점과 종점을 연결한 벡터가 두 벡터의 합을 의미
 $|\vec{a}+\vec{b}|$: 두 벡터 합 크기 $\rightarrow \vec{OB}$ 길이를 의미



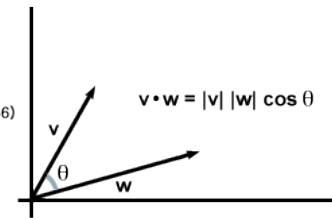
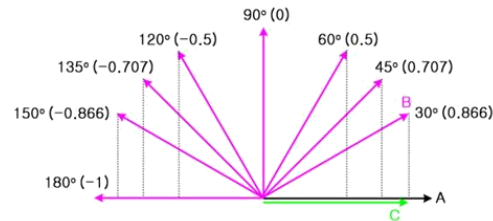
벡터의 빼기



벡터

▶ 벡터의 내적

- 두 벡터 사이의 각도로 $\cos\theta$ 값이 나온다
- $v \cdot w = 0$ 두 벡터는 직각
- $v \cdot w > 0$ 두 벡터의 내각은 90보다 작다
- $v \cdot w < 0$ 두 벡터의 내각은 90보다 크다
- 시야에 대상이 있는지 확인
- 투영 벡터를 구하여 그림자를 그릴 수 있다

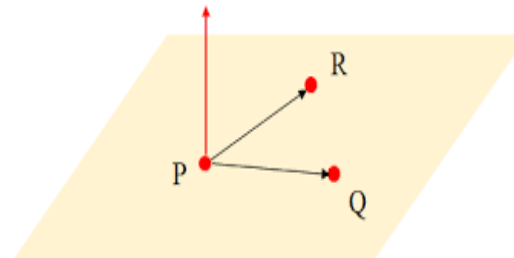


▶ 벡터의 내적에서 각도(Degree) 구하기

- $\text{angle} = \text{acos}(\text{dot}) * \text{Rad2Deg}$
- **acos** : 아크 코사인, $\cos\theta$ 값에서 라디안(θ) 값으로 역으로 구한다

▶ 벡터의 외적

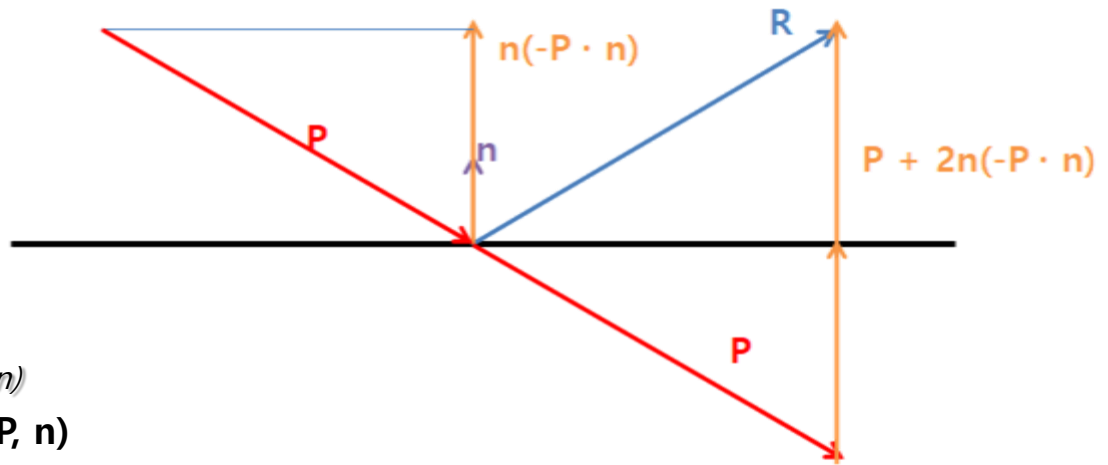
- 두 벡터의 곱
- 3차원 벡터에서 있는 개념
- 두 벡터에 수직인 벡터를 구할 수 있으며, 단위 벡터(Normal Vector) 변환하여 사용



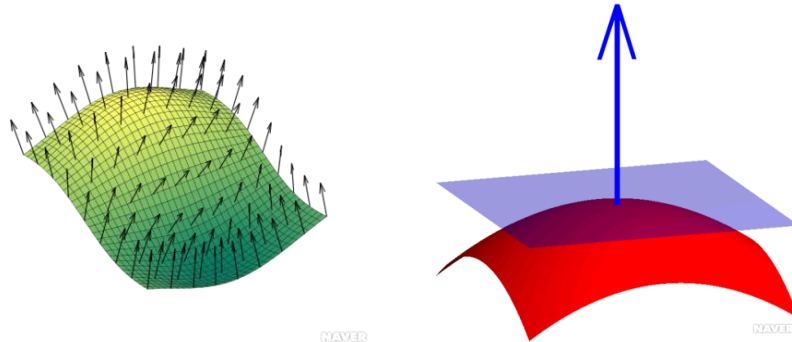
벡터

▶ 반사 벡터

- 입사 벡터 : P
- 법선 벡터 : n
- 반사 벡터 : R
- 투영 벡터 : $n * \text{DotProduct}(-P, n)$
- $R = P + 2n * \text{DotProduct}(-P, n)$



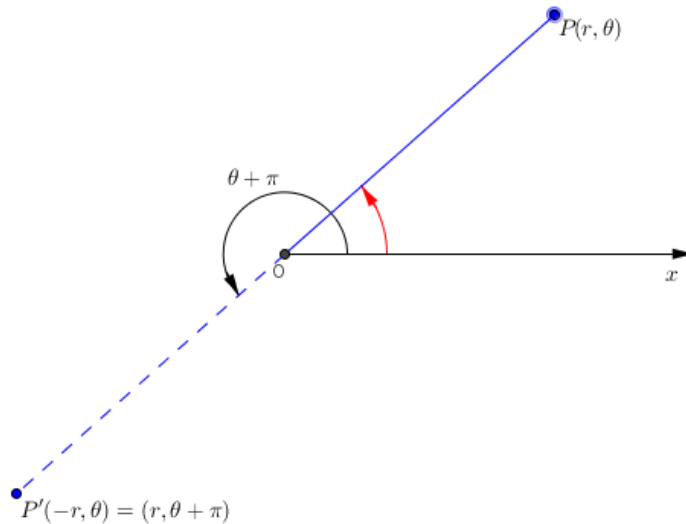
- 빛의 반사 벡터를 구하기 위해서 **반드시** 법선 벡터가 필요하다
- 법선 벡터(normal vector) : 한 면에 수직이 되는 벡터
벡터의 외적을 이용하여 구할 수 있다



극 좌표

▶ Polar(극 좌표)

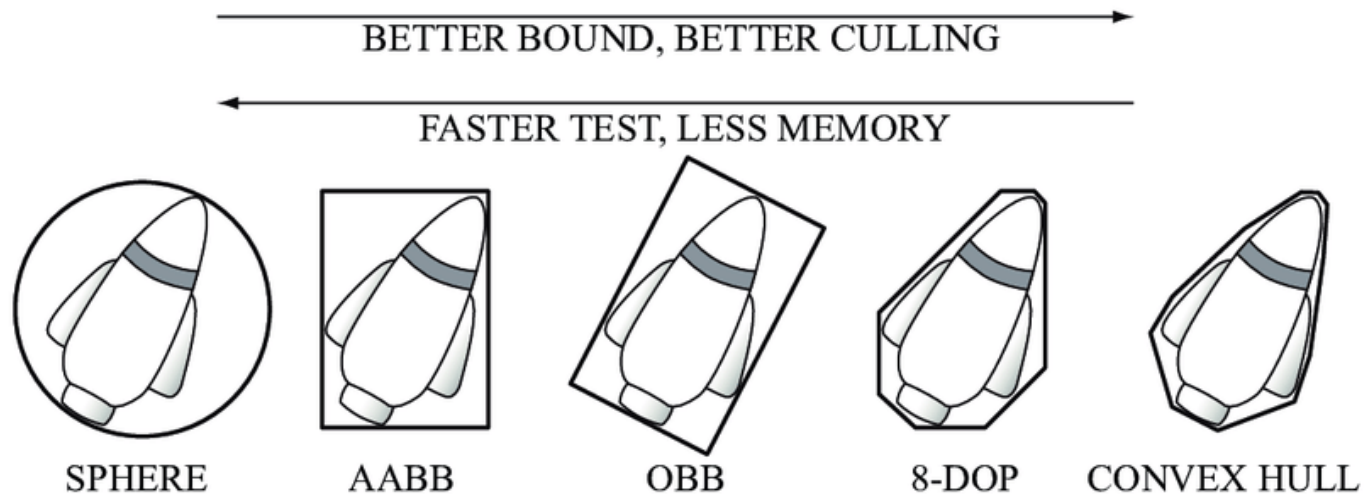
- 크기(magnitude)와 각도(angle)를 지닌다
- vector와 같은 데카르트 좌표에 비해 더 직관적이다
- 투영 벡터를 이용하여 그림자의 크기와 방향을 구하고 Polar의 magnitude를 이용하여 그림자의 길이를 구할 수도 있다



Physics Engine

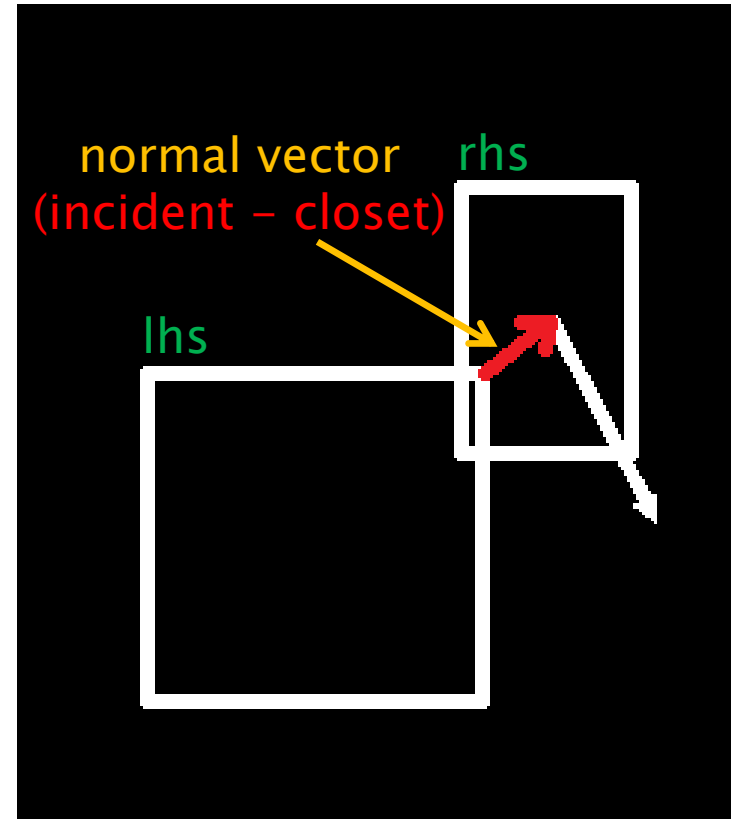
▶ Collider

- **AABB**(Axis Aligned Bounding Box) : 축이 정렬되어 있어 회전을 고려하지 않는다
- **OBB**(Oriented Bounding Box) : 박스와 함께 축이 회전한다
- **8-DOP, CONVEX HULL** : 여러 개의 정점을 지니며 OBB처럼 축이 회전한다



Physics Engine

```
Vector2 normal; // 충돌 방향 normal 벡터.  
float penetration; // 침투 깊이.  
  
bool AABBvsAABB(Box* lhs, Box* rhs)  
{  
    // 충돌 방향 벡터, 상대 위치(lhs를 원점으로 rhs의 위치)  
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position;  
    // 각 Box의 너비(width)의 반(half width)을 구한다.  
    float lhs_extent = (lhs->right - lhs->left) * 0.5f;  
    float rhs_extent = (rhs->right - rhs->left) * 0.5f;  
    float overlapX = lhs_extent + rhs_extent - std::abs(incident.x);  
    if (0 < overlapX) // x축으로 겹치는 위치에 있다.  
    {  
        Vector2 closet;  
        float offset = max(lhs_extent, rhs_extent);  
        closet.x = clamp(incident.x, -offset, offset);  
        // 각 Box의 높이(height)의 반(half height)을 구한다.  
        lhs_extent = (lhs->bottom - lhs->top) * 0.5f;  
        rhs_extent = (rhs->bottom - rhs->top) * 0.5f;  
        float overlapY = lhs_extent + rhs_extent - std::abs(incident.y);  
        if (0 < overlapY) // y축으로 겹치는 위치에 있다.  
        {  
            closet.y = clamp(incident.y, -lhs_extent, lhs_extent);  
            normal = incident - closet;  
            normal.Normalize();  
  
            penetration = (std::abs(normal.x) > std::abs(normal.y)) ? overlapX : overlapY;  
            return true;  
        }  
    }  
    return false;  
}
```



Physics Engine

```
bool AABBvsCircle(Box* lhs, Circle* rhs)
{
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position; // Box를 중심으로 하는 Circle의 상대 위치.
    // Box의 너비(width)와 높이(height)의 반(half width, half height)을 구한다.
    float extentX = (lhs->right - lhs->left) * 0.5f; // half width
    float extentY = (lhs->bottom - lhs->top) * 0.5f; // half height

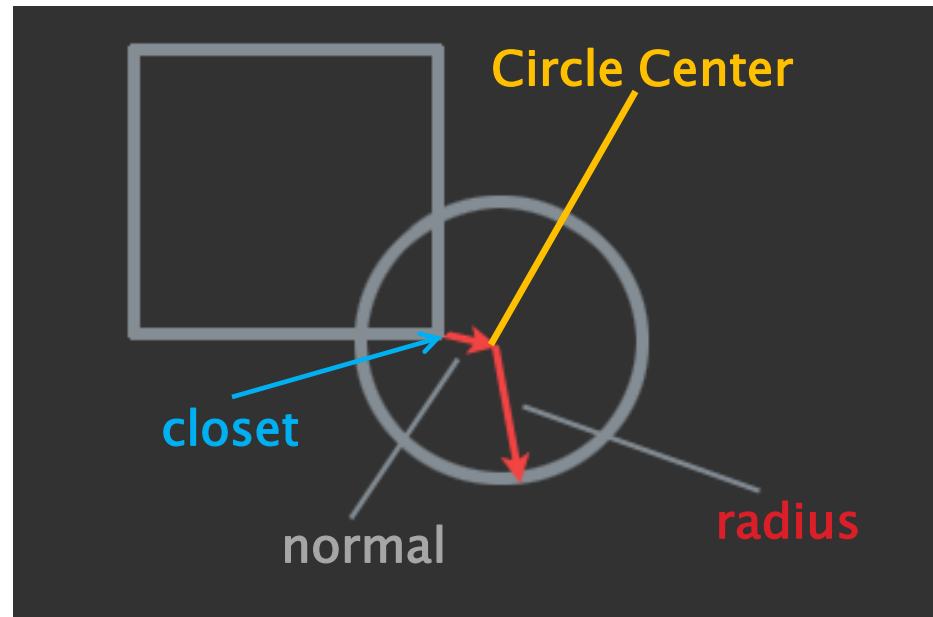
    Vector2 closet;
    closet.x = clamp(incident.x, -extentX, extentX);
    closet.y = clamp(incident.y, -extentY, extentY);

    bool inside = false;
    if (incident == closet) // Box와 Circle이 반 이상 침투했다.
    {
        inside = true;
        if (std::abs(incident.x) > std::abs(incident.y))
        {
            closet.x = (0 < closet.x) ? extentX : -extentX;
        }
        else closet.y = (0 < closet.y) ? extentY : -extentY;
    }

    normal = incident - closet;
    float dist = normal.SqrMagnitude();
    float radius = rhs->radius;
    if ((radius * radius) < dist && !inside) return false;

    penetration = radius - std::sqrt(dist);
    if (inside) normal = -normal; // 반 이상으로 침투하면 침투 방향이 뒤집히기 때문에 다시 방향을 되돌려 준다.
    normal.Normalize();

    return true;
}
```



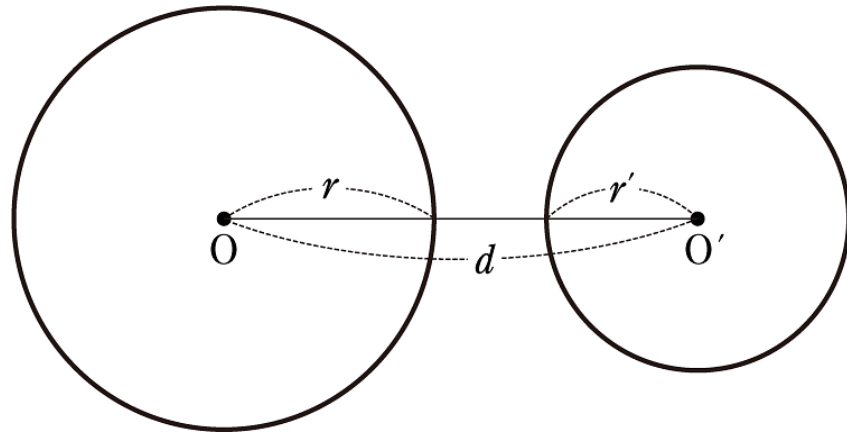
Physics Engine

```
bool CirclevsCircle(Circle* lhs, Circle* rhs)
{
    // lhs를 중심으로 하는 rhs의 상대 위치.
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position;
    float radiusSum = lhs->radius + rhs->radius;

    // 두 원의 반지름의 합보다 두원 사이의 거리가 크면 충돌하지 않은 상태.
    if (incident.SqrMagnitude() > (radiusSum * radiusSum)) return false;

    float dist = incident.Magnitude();
    if (0 != dist)
    {
        penetration = radiusSum - dist;
        normal = incident;
    }
    else
    {
        // 두 원은 같은 위치에 있다, 겹쳐있다.
        penetration = lhs->radius;
        normal = Vector2(1, 0);
    }
    normal.Normalize();

    return true;
}
```



Physics Engine

▶ 이차원 벡터의 내적

```
float Dot(const Vector2& lhs, const Vector2& rhs) { return lhs.x * rhs.x + lhs.y * rhs.y; }
```

▶ 부피

- 사각형 : 부피(volume) = 너비(w) * 높이(h)
- 원 : 부피(volume) = 반지름(r) * 반지름(r) * 원주율(PI)

```
float Volume(float w, float h) { return w * h; }
```

```
float Volume(float r) { return r * r * 3.141592f; }
```

▶ 질량

- 질량(m) = 부피(volume) * 밀도(d)

```
float Mass(float volume, float d) { return volume * d; }
```

▶ 상대속도

- A가 B로 향하는 상대속도(rv) = B의 속도(bv) - A의 속도(av)

```
Vector2 RelativeVelocity(const Vector2& av, const Vector2& bv) { return bv - av; }
```

▶ 프레임당 중력가속도

- 속도(gravity) = 중력(g) * FPS(deltaTime)

```
Vector2 GravityVelocity(const Vector2& g, float deltaTime) { return g * deltaTime }
```

Physics Engine

▶ 충돌 처리 판별하기

- $v \cdot n(\text{dot}) = (\text{상대속도}(rv) \cdot \text{충돌 방향}(n))$
- 충돌 처리 판별 : 두 물체가 접촉하고 있더라도 충돌 처리를 하지 않는 경우가 있다
 - (내적 > 0) : 두 물체가 멀어지는 중, 충돌 처리 하지 않는다
 - (내적 < 0) : 두 물체가 가까워 지는 중, 충돌 처리를 한다

```
float VelocityDotNormal(const Vector2& rv, const Vector2& normal) { return Dot(rv, normal); }
```

▶ 충돌

- 충돌(im) = $-(1 + \text{반발계수}(e)) * v \cdot n(\text{dot}) / ((1 / \text{물체1의 질량}(m1)) + (1 / \text{물체2의 질량}(m2)))$
- 반발계수(e) : [0.0f ~ 1.0f]의 값을 가진다(예제에서는 0.02f가 사용되었음)

```
float ImpulseMagnitude(float e , float dot, float m1 , float m2)
{
    return -(1.0f + e) * dot / ((1 / m1) + (1 / m2));
}
```

▶ 충돌에 의해 발생한 속도

- 속도 (impulse) = 충돌 방향(normal) * 충돌 (im)

```
Vector2 Impulse(const Vector2& normal, float im) { return (normal * im); }
```

Physics Engine

▶ 가속도

- 가속도(**a**) = 힘(f) / 질량(m)
- Ex) 힘(f) = 충돌에 의해 발생한 속도(impulse)

```
Vector2 Acceleration(const Vector2& f, float m) { return f / m; }
```

▶ 물체의 현재 프레임 속도

- 현재 프레임의 속도(**v**) += 가속도(**a**);

```
void ApplyImpulse(Vector2& v, const Vector2& a) { v += a; }
```

▶ 프레임 당 물체의 속도

- 프레임 당 속도(velocity) = 현재 프레임의 최종 속도(**v**) * FPS(deltaTime)

```
Vector2 CalculateVelocity(const Vector2& v, float deltaTime) { return v * deltaTime; }
```

▶ 물체의 이동

- 물체의 위치(position) += 프레임 당 속도(velocity)

```
void ApplyVelocity(Vector2& position, const Vector2& velocity) { position += velocity; }
```


Physics Engine

▶ 두 물체간의 침투 및 떨림 보정

- 침투 깊이의 퍼센트로 각 물체의 충돌 방향에 따라 **물체 위치(p1, p2)**를 이동
- 두 물체의 역질량의 합(**invMass**) = (1 / 물체1의 질량(m1)) + (1 / 물체2의 질량(m2))
- 보정치(**correction**) = max((침투 깊이(**penetration**) - 떨림보정(slope)), 0) / 역질량의 합(**invMass**) * 충돌 방향(n) * 침투보정(percent)
- **보정 좌표(p1, p2) ±= 보정치(correction) / 각 물체의 질량(m1, m2)**

```
void Correction(Vector2& p1, Vector2& p2, float m1, float m2, float penetration, const Vector2& normal)
{
    const float percent = 0.4f; // 0.2 ~ 0.8, 침투 보정.
    const float slope = 0.05f; // 0.01 ~ 0.1, 떨림 보정.
    float invMass = (1 / m1) + (1 / m2);
    Vector2 correction = std::fmax((penetration - slope), 0.0f) / invMass * normal * percent;

    p1 -= correction / m1;
    p2 += correction / m2;
}
```

연습문제

중력이 적용되어 BOX, Circle 오브젝트가 서로 충돌하는 SimplePhysics2D 프로젝트를 만들어 보자

▶ 실행 순서

1. 물체의 속도에 중력가속도 적용
2. 충돌 확인
3. 충돌한 물체들의 충돌 가속도 적용 (3.을 여러 번 반복할 수록 더욱 세밀한 충돌 구현이 가능)
4. 물체 이동
5. 두 물체 간의 보정 적용
6. 1.에서 5.를 반복

❖ 참고 출처 : [The Basics and Impulse Resolution](#)