

Contents

1	정전기학	3
1.1	2024 문1 Electrostatic Dipole	4
2	정자기학	7
2.1	2024 문2. The differential form of Ampere's Law	8
2.2	2024 문3. 자기회로	11
3	전자기유도	13
3.1	2024 문5 움직이는 도선의 유도기전력 계산	14
4	전자기파	17
4.1	2024 문4 균일 평면파 특성 파악	18

Chapter 1

정전기학

1.1 2024 문1 Electrostatic Dipole

제 1 문. 자유 공간에서 $+Q$ 와 $-Q$ 의 전하량을 갖는 전하가 각각 $(0, 0, +\frac{d}{2})$ 와 $(0, 0, -\frac{d}{2})$ 에 놓여 전기 쌍극자(electric dipole)를 이루고 있다. 이 전기 쌍극자의 중심에서 r 만큼 떨어진 관측점 P 에서의 전위는 $r \gg d$ 일 때 $V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ [V]로 알려져 있다. 이 식에서 \vec{p} 는 전기 쌍극자 모멘트이고, \vec{a}_r 은 구좌표계에서 반지름 방향의 단위벡터이다. 다음 물음에 답하시오. (총 20점)

- 1) 관측점 P 에서의 전기 \vec{E} 를 구좌표계에서 구하시오. (2점)
- 2) 관측점 P 의 직각좌표가 $(10, 25, 0)$ 일 때, 점 P 에서의 전위를 구하시오. (2점)
- 3) 구좌표계로 표현된 \vec{E} 를 직각좌표계로 변환하여 각 성분을 r, θ, ϕ 의 함수로 나타내시오. (12점)
- 4) \vec{E} 의 z 방향 성분이 0이 될 때의 각도를 $\theta = \theta_0$ 라고 하자. $\cos\theta_0$ 값을 구하시오. (4점)

Solution:

문제에 주어진 dipole 벡터는 다음과 같다.

$$\vec{p} = Q(0, 0, \frac{d}{2}) + (-Q)(0, 0, -\frac{d}{2}) = Q(0, 0, d) = Qd \hat{z}$$

따라서 구면좌표계에서 $r \gg d$ 일 때 dipole의 전위 V 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z} \\ \therefore V &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{spherical coordinate, } r \gg d) \end{aligned}$$

\vec{p} 가 z 축에 놓여있으므로 z 방향 rotation symmetry에 의해 V 는 ϕ 에 의존하지 않고 오로지 r, θ 에 의존한다.

1) $P(r, \theta, \phi)$ 에서 전기장 \vec{E} 는 전위의 음의 gradient로 구할 수 있다. 구면좌표계에서 Lamé coefficient $h_i = |\vec{e}_i|$ ($i = r, \theta, \phi$)는 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial u^i} \hat{e}_i \right) \quad (\text{Einstein convention, coordinate free expression of } \nabla) \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right) \quad (\because z \text{ axis rotation symmetry, } V = V(r, \theta)) \\ &= -\left\{ \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{e}_\theta \right\} \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta \right\} \end{aligned}$$

$$2) (x, y, z) = (10, 25, 0) \text{ 에서: } \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0 \Rightarrow V = 0$$

3) 구면좌표계에서 직교 좌표계로의 변환은 다음에 주어진 단위벡터 변환을 통해 이뤄진다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \end{aligned}$$

위의 두 변환식을 1)에서 구한 전기장에 대입한 뒤, 직교좌표계의 각 성분 별로 정리하면

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi + \sin \theta (\cos \theta \cos \phi)] = \frac{3Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\
E_y &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \sin \theta (\cos \theta \sin \phi)] = \frac{3Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\
E_z &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)
\end{aligned}$$

4) 3)에서 구한 \vec{E} 의 z 방향 성분은 다음과 같다.

$$E_z = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

따라서 $3 \cos^2 \theta_0 - 1 = 0$ 이므로

$$\cos \theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because 0 < \theta_0 < \pi)$$

Chapter 2

정자기학

2.1 2024 문2. The differential form of Ampere's Law

제 2 문. 자기 $\vec{H} = 6r \sin\phi \vec{a}_r + 4r \sin\theta \cos\phi \vec{a}_\phi$ [A/m]가 주어질 때 다음 물음에 답하시오.

(총 24점)

- 1) 전류 밀도 \vec{J} 를 구하시오. (8점)
- 2) 폐곡면 $r = 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$ 에 대하여 \vec{J} 를 적분하고 \vec{a}_r 방향으로 통과하는 총 전류를 계산하시오. (8점)
- 3) $r = 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$ 의 폐경로에 대한 자기 \vec{H} 의 선적분을 구하고 총 전류를 계산하시오. (8점)

Solution:

1) Time-independent Ampere's law $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ 를 활용하여 전류 밀도를 직접 계산하자. 먼저 임의의 벡터 \vec{A} 의 curl $\nabla \times \vec{A}$ 의 coordinate-free 표현을 Lamé coefficient h_i 를 활용하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 A^1 & h_2 A^2 & h_3 A^3 \end{vmatrix} \quad (\text{determinant form}) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i h_j \frac{\partial}{\partial u^k} (h_k A^k) \quad (\text{Levi-civita form})\end{aligned}$$

구면 좌표계의 Lamé coefficient는 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$ 이므로

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{1 \cdot r \cdot r \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & (r \sin \theta) \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A^r & r A^\theta & (r \sin \theta) A^\phi \end{vmatrix} \quad (\text{determinant form})$$

문제에서 주어진 $\vec{H} = 6r \sin \phi \hat{e}_r + 4r \sin \theta \cos \phi \hat{e}_\phi$ [A/m]는 θ 성분이 존재하지 않는다. 이 사실과 위의 curl 표현을 활용해 전류 밀도를 계산하면

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \nabla \times \vec{H} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & (r \sin \theta) \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ H^r & r H^\theta & (r \sin \theta) H^\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & (r \sin \theta) \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 6r \sin \phi & 0 & 4r^2 \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= (8 \cos \theta \cos \phi) \hat{e}_r + \left(\frac{6 \cos \phi}{\sin \theta} - 8 \sin \theta \cos \phi \right) \hat{e}_\theta\end{aligned}$$

2) 폐곡면 $S : r = 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$ 은 구면의 일부이므로 폐곡면 S 의 unit normal vector \hat{n} 는 $\hat{n} = \hat{e}_r$ 과 같다. 따라서 전류밀도 \vec{J} 를 폐곡면에 대하여 적분하여 얻은 전류를 \vec{I} 라 하면

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \int_S (\vec{J} \cdot \hat{n}) dS = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi J_r(r=1, \theta, \phi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi (8 \cos \theta \cos \phi) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 8 \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi \cos \phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin 2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi \cos \phi = \frac{1}{2} [A]\end{aligned}$$

3) 2)에서 주어진 폐곡면 S 의 경계 ∂S 는 다음과 같이 세 개의 boundary path들로 구성된다.

$$\text{path 1: } r = 1, \theta = 0 \rightarrow \frac{\pi}{6}, \phi = 0$$

$$\text{path 2: } r = 1, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = 0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$\text{path 3: } r = 1, \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow 0, \phi = \frac{\pi}{6}$$

path 1과 path 3의 경우 \vec{H} 의 선적분을 계산하는 미소경로벡터 $d\vec{l} = d\theta \hat{e}_\theta$ 는 θ 방향이나 자체 \vec{H} 는 θ 방향 성분을 갖지 않는다. 즉 path 1과 path 3에서는 언제나 $\vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\theta d\theta = 0$ 이므로

$$\int_{\text{path 1}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{path 3}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

한편 path 2에서의 선적분은

$$\begin{aligned}\int_{\text{path 2}} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{\pi/6} H_\phi(r=1, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi)(\sin \theta d\phi) \\ &= \int_0^{\pi/6} \left(4 \sin \frac{\pi}{6} \cos \phi\right) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right) d\phi = 4 \sin^2 \frac{\pi}{6} \int_0^{\pi/6} \cos \phi d\phi = \frac{1}{2} [A]\end{aligned}$$

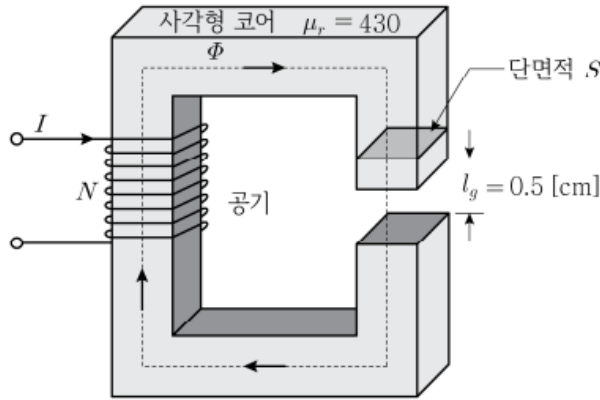
따라서 폐곡면 S 의 경계 ∂S 를 따라 계산한 \vec{H} 의 선적분은

$$\int_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{path 1}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{path 2}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{path 3}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

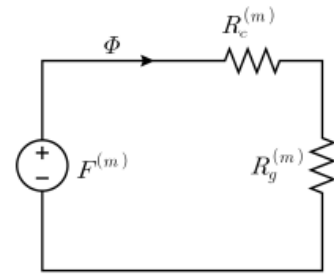
이고, 이는 2)에서 구한 r 방향의 전류값과 같다.

2.2 2024 문3. 자기회로

제 3 문. 그림 (a)와 같이 비투자율이 $\mu_r = 430$ 인 자성체로 만든 사각형 코어는 전 영역에 대하여 단면적 $S = 2 [\text{cm}^2]$, 평균 길이 $l_c = 43 [\text{cm}]$ 를 가지며, 공극의 길이 $l_g = 0.5 [\text{cm}]$, 코일의 권선수 N 은 420회이다. 이 설계 조건에 대해 다음 물음에 답하시오. (단, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$ 이다) (총 16점)



(a)



(b)

- 1) 코어의 자기저항(reluctance) $R_c^{(m)}$ 과 공극의 자기저항 $R_g^{(m)}$ 을 각각 구하시오. (4점)
- 2) 그림 (b)의 등가 자기 회로에서 $R_g^{(m)}$ 에 걸리는 기자력 $F_g^{(m)}$ 을 구하시오. (4점)
- 3) 공극 사이에 균일한 자속밀도 $|\vec{B}| = \frac{\pi}{500} [\text{Wb/m}^2]$ 가 발생할 경우 $F_g^{(m)}$ 을 구하시오. (4점)
- 4) 3)의 경우에서 코일에 인가되는 전류 $I [\text{A}]$ 를 구하시오. (4점)

Solution:

주어진 조건:

$$\mu_r = 430, \quad S = 2 \text{ cm}^2, \quad l_c = 43 \text{ cm}$$

$$l_g = 0.5 \text{ cm}, \quad N = 420$$

1) 철심 자기 저항:

$$R_c^{(m)} = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0.43}{430(4\pi \times 10^{-7})(2 \times 10^{-4})} = \frac{10^7}{4\pi} \approx \frac{1}{\mu_0}$$

공극 자기 저항:

$$R_g^{(m)} = \frac{l_g}{\mu_0 A_c} = R_c^{(m)} \times \mu_r \times \frac{l_g}{l_c} = \frac{10^7}{4\pi} \times \frac{10}{430} \times \frac{0.5 \times 10^{-2}}{43 \times 10^{-2}} = \frac{5 \times 10^7}{4\pi} = 5R_c^{(m)}$$

2) 총 자기저항: $F_{tot} = NI$, $\frac{R_g^{(m)}}{R_c^{(m)}} = 5$ 이므로

$$F_g^{(m)} = F_{tot} \times \frac{R_g^{(m)}}{R_c^{(m)} + R_g^{(m)}} = NI \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times 420I = 350I$$

3) 자속밀도 계산: $|\vec{B}_g| = \mu_0 |H_g| = \mu_0 (F_g^{(m)} / l_g)$ 이므로

$$F_g^{(m)} = l_g \frac{|\vec{B}_g|}{\mu_0} = (43 \times 10^{-2}) \times \frac{\pi/500}{4\pi \times 10^{-7}} = 2150 [A \cdot t]$$

4) 전류 계산:

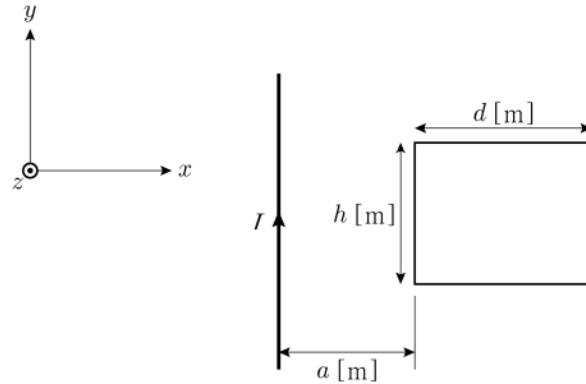
$$I = \frac{F_g^{(m)}}{350} = \frac{2150}{350} \approx 6.14 [A]$$

Chapter 3

전자기유도

3.1 2024 문5 움직이는 도선의 유도기전력 계산

제 5 문. 다음 그림은 y 축 상에 놓인 직류 전류 I [A]가 흐르는 무한히 긴 선로와 xy 평면에 놓인 직사각형 루프 형태의 도체를 나타낸다. 시간 $t = 0$ [s]일 때 선로와 루프 사이의 거리는 a [m]이다. 다음 물음에 답하시오. (총 24점)



- 1) 루프가 $+x$ 방향으로 일정 속도 u [m/s]로 움직일 때, $t \geq 0$ [s]에서 I 에 의해 루프에 쇄교하는 자속 Ψ [Wb]를 t 의 함수로 구하시오. (6점)
- 2) 1)에서 I 에 의해 루프에 유도되는 전압과 전류를 t 의 함수로 구하고, 루프에 흐르는 전류의 방향과 그 근거에 대해 설명하시오. (단, 도체 루프 내부 저항의 크기는 R [Ω]이다) (12점)
- 3) 루프가 $+y$ 방향으로 일정 속도 u [m/s]로 움직일 때, $t \geq 0$ [s]에서 I 에 의해 루프에 유도되는 전압을 t 의 함수로 구하시오. (6점)

Solution

무한 도선으로부터 x 만큼 떨어진 지점의 자기장 세기는

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi x}(-\hat{z}), \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}(-\hat{z})$$

1) 자속 계산 (자기장은 종이를 뚫고 들어가는 방향):

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = h \int_{a+ut}^{a+ut+d} |\vec{B}(x)| dx = \int_{a+ut}^{a+ut+d} \frac{\mu_0 h I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d}{a+ut}\right)$$

2) 유도 기전력:

$$\begin{aligned} |E_{ind}| &= \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d}{a+ut}} \cdot \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{d}{a+ut}\right) \\ &= \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d}{a+ut}} \cdot \frac{d(-u)}{(a+ut)^2} d \\ &= \frac{\mu_0 h I du}{2\pi(a+ut)(a+ut+d)} \end{aligned}$$

도선에서 멀어지면 종이를 뚫고 들어가는 방향 ($-z$)으로의 자속이 감소한다. 렌츠의 법칙에 따라 유도 전압은 $-z$ 방향 자속을 유지하려는 방향으로 생기므로, 시계 방향의 유도 전류가 사각 도선에 생긴다.

3) $+y$ 방향으로 움직이면 물리적 상황에 변화가 없으므로, 자속 Φ_B 에도 변화가 없다.

$$t = 0 \Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d}{a}\right) \quad (\text{상수})$$

\Rightarrow 유도된 전압은 0 (always)

Chapter 4

전자기파

4.1 2024 문4 균일 평면파 특성 파악

제 4 문. 무손실 매질의 비투자율이 $\mu_r = 2$ 이고 특성임피던스가 $\eta = 30\pi$ [Ω]이다. 이 매질 속을 전파하는 평면파의 자계 $\vec{H} = 5\cos(\omega t - 0.8z)\vec{a}_x - 2\sin(\omega t - 0.8z)\vec{a}_y$ [A/m]이다.

다음 물음에 답하시오. (단, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ [F/m]이고, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]이다)

(총 16점)

- 1) 이 매질의 비유전율 ϵ_r 을 구하시오. (4점)
- 2) 각주파수 ω [rad/s]를 구하시오. (2점)
- 3) 전기계 \vec{E} [V/m]를 구하시오. (4점)
- 4) 이 평면파의 회전 방향과 편파 종류를 정의하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

Solution

주어진 값: $\mu_r = 2$, $\eta = 30\pi$ [Ω], $\mathbf{H} = 5 \cos(\omega t - 0.8z) \hat{x} - 2 \sin(\omega t - 0.8z) \hat{y}$ [A/m]

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ [F/m]}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$$

$$\phi \equiv \omega t - 0.8z.$$

(1) 비유전율 ϵ_r

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}, & \eta_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi, \\ \frac{\eta}{\eta_0} &= \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \Rightarrow \frac{30\pi}{120\pi} = \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_r}} \Rightarrow \boxed{\epsilon_r = 32}. \end{aligned}$$

(2) 각주파수 ω

$$\begin{aligned} \beta &= 0.8 \text{ rad/m}, & \beta &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v_p}, & v_p &= \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \\ \Rightarrow \omega &= \frac{\beta c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{0.8 (3 \times 10^8)}{\sqrt{2 \cdot 32}} = \boxed{3 \times 10^7 \text{ rad/s}}. \end{aligned}$$

(3) 전계 \mathbf{E} 평면파 관계식

$$\mathbf{E} = \eta (\mathbf{H} \times \hat{z}) = -\eta (\hat{z} \times \mathbf{H}), \quad \eta = 30\pi,$$

을 사용하면

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 30\pi [5 \cos \phi (\hat{x} \times \hat{z}) - 2 \sin \phi (\hat{y} \times \hat{z})] \\ &= 30\pi [-5 \cos \phi \hat{y} - 2 \sin \phi \hat{x}] \\ &= \boxed{-60\pi \sin \phi \hat{x} - 150\pi \cos \phi \hat{y} \text{ [V/m]}}. \end{aligned}$$

(4) 편파와 회전 방향 성분식은

$$E_x = -60\pi \sin \phi, \quad E_y = -150\pi \cos \phi.$$

따라서

$$\left(\frac{E_x}{60\pi}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{150\pi}\right)^2 = 1,$$

즉 타원 편파이고, $+z$ 방향 진행에서 시간 증가에 따라 $E_y > 0 \rightarrow E_x > 0$ 순서로 변화하므로 우원(RH) 타원 편파이다.

검산(포인팅 벡터 방향)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \eta [(\mathbf{H} \times \hat{z}) \times \mathbf{H}] = \eta |\mathbf{H}|^2 \hat{z} \Rightarrow \boxed{\mathbf{S} \parallel +\hat{z}}.$$