Contents

Chapter 1

정전기학

1.1 2024 문1 Electrostatic Dipole

제 1 문. 자유 공간에서 $+Q$와 $-Q$의 전하량을 갖는 전하가 각각 $(0,\ 0,\ +\frac{d}{2})$와 $(0,\ 0,\ -\frac{d}{2})$에 놓여 전기 쌍극자(electric dipole)를 이루고 있다. 이 전기 쌍극자의 중심에서 r만큼 떨어진 관측점 P에서의 전위는 $r \gg d$일 때 $V = \dfrac{\vec{p} \bullet \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ [V]로 알려져 있다. 이 식에서 $\vec{p}$는 전기 쌍극자 모멘트이고, $\vec{a}_r$은 구좌표계에서 반지름 방향의 단위벡터이다. 다음 물음에 답하시오. (총 20점)

1) 관측점 P에서의 전계 $\vec{E}$를 구좌표계에서 구하시오. (2점)

2) 관측점 P의 직각좌표가 (10, 25, 0)일 때, 점 P에서의 전위를 구하시오. (2점)

3) 구좌표계로 표현된 $\vec{E}$를 직각좌표계로 변환하여 각 성분을 r, θ, ϕ의 함수로 나타내시오. (12점)

4) $\vec{E}$의 z방향 성분이 0이 될 때의 각도를 $\theta = \theta_0$라고 하자. $\cos\theta_0$ 값을 구하시오. (4점)

Solution:

문제에 주어진 dipole 벡터는 다음과 같다.

$$\vec{p} = Q(0,0,\tfrac{d}{2}) + (-Q)(0,0,-\tfrac{d}{2}) = Q(0,0,d) = Qd\ \hat{z}$$

따라서 구면좌표계에서 $r \gg d$일 때 dipole의 전위 V는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\sin\theta\cos\phi\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}\\ \therefore V &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{(spherical coordinate, } r \gg d)\end{aligned}$$

$\vec{p}$가 z축에 놓여있으므로 z 방향 rotation symmetry에 의해 V는 ϕ에 의존하지 않고 오로지 r,θ에 의존한다.

1) $P(r,\theta,\phi)$ 에서 전기장 $\vec{E}$는 전위의 음의 gradient로 구할 수 있다. 구면좌표계에서 Lame coefficient $h_i = |\vec{e}_i|(i = r,\theta,\phi)$는 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\nabla V &= -\left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial V}{\partial u^i}\hat{e}_i\right) \quad \text{(Einstein convention, coordinate free expression of } \nabla)\\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{e}_\theta\right) \quad (\because z \text{ axis rotation symmetry}, V = V(r,\theta))\\ &= -\left\{\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\hat{e}_\theta\right\}\\ &= \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right\}\end{aligned}$$

2) $(x,y,z) = (10,25,0)$ 에서: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0 \quad \Rightarrow V = 0$

3) 구면좌표계에서 직교 좌표계로의 변환은 다음에 주어진 단위벡터 변환을 통해 이뤄진다.

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\\ \hat{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}\end{aligned}$$

위의 두 변환식을 1)에서 구한 전기장에 대입한 뒤, 직교좌표계의 각 성분 별로 정리하면

$$E_x = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\sin\theta\cos\phi + \sin\theta(\cos\theta\cos\phi)\right] = \frac{3Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$
$$E_y = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\sin\theta\sin\phi + \sin\theta(\cos\theta\sin\phi)\right] = \frac{3Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\sin\phi$$
$$E_z = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right] = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

4) 3)에서 구한 $\vec{E}$의 z 방향 성분은 다음과 같다.

$$E_z = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

따라서 $3\cos^2\theta_0 - 1 = 0$이므로

$$\cos\theta_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\ (\because 0 < \theta_0 < \pi)$$

Chapter 2

정자기학

2.1 2024 문2. The differential form of Ampere's Law

제 2 문. 자계 $\overrightarrow{H} = 6r\sin\phi\,\overrightarrow{a}_r + 4r\sin\theta\cos\phi\,\overrightarrow{a}_\phi$ [A/m]가 주어질 때 다음 물음에 답하시오. (총 24점)

1) 전류 밀도 $\overrightarrow{J}$를 구하시오. (8점)

2) 폐곡면 $r = 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$에 대하여 $\overrightarrow{J}$를 적분하고 $\overrightarrow{a}_r$ 방향으로 통과하는 총 전류를 계산하시오. (8점)

3) $r = 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$의 폐경로에 대한 자계 $\overrightarrow{H}$의 선적분을 구하고 총 전류를 계산하시오. (8점)

Solution:

1) Time-independent Ampere's law $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ 를 활용하여 전류 밀도를 직접 계산하자. 먼저 임의의 벡터 $\vec{A}$의 curl $\nabla \times \vec{A}$의 coordinate-free 표현을 Lame coefficient h_i를 활용하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 A^1 & h_2 A^2 & h_3 A^3 \end{vmatrix} \quad \text{(determinant form)} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\epsilon_{ijk}\hat{e}_i h_j \frac{\partial}{\partial u^j}(h_k A^k) \quad \text{(Levi-civita form)}\end{aligned}$$

구면 좌표계의 Lame coefficient는 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta$이므로

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{1\cdot r\cdot r\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & (r\sin\theta)\hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A^r & rA^\theta & (r\sin\theta)A^\phi \end{vmatrix} \quad \text{(determinant form)}$$

문제에서 주어진 $\vec{H} = 6r\sin\phi\,\hat{e}_r + 4r\sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_\phi \quad [A/m]$는 θ 성분이 존재하지 않는다. 이 사실과 위의 curl 표현을 활용해 전류 밀도를 계산하면

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \nabla \times \vec{H} \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & (r\sin\theta)\hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ H^r & rH^\theta & (r\sin\theta)H^\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & (r\sin\theta)\hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 6r\sin\phi & 0 & 4r^2\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= (8\cos\theta\cos\phi)\hat{e}_r + \left(\frac{6\cos\phi}{\sin\theta} - 8\sin\theta\cos\phi\right)\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

2) 폐곡면 $S : r = 1, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{6}, 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{6}$은 구면의 일부이므로 폐곡면 S의 unit normal vector $\hat{n}$는 $\hat{n} = \hat{e}_r$과 같다. 따라서 전류밀도 $\vec{J}$를 폐곡면에 대하여 적분하여 얻은 전류를 $\vec{I}$라 하면

$$\begin{aligned}\vec{I} = \int_S (\vec{J} \cdot \hat{n}) dS &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi\ J_r(r = 1, \theta, \phi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi\ (8\cos\theta\cos\phi) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 8\cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi\ \cos\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin 2\theta\ d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi\ \cos\phi = \frac{1}{2}\ [A]\end{aligned}$$

3) 2)에서 주어진 폐곡면 S의 경계 ∂S는 다음과 같이 세 개의 boundary path들로 구성된다.

$$\begin{aligned}&\text{path 1: } r = 1,\ \theta = 0 \to \frac{\pi}{6},\ \phi = 0 \\ &\text{path 2: } r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \phi = 0 \to \frac{\pi}{6} \\ &\text{path 3: } r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6} \to 0,\ \phi = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

path 1과 path 3의 경우 $\vec{H}$의 선적분을 계산하는 미소경로벡터 $\vec{dl} = d\theta\ \hat{e}_\theta$는 θ 방향이나 자계 $\vec{H}$는 θ 방향 성분을 갖지 않는다. 즉 path 1과 path 3에서는 언제나 $\vec{H} \cdot \vec{dl} = H_\theta\ d\theta = 0$이므로

$$\int_{\text{path 1}} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{path 3}} \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0$$

한편 path 2에서의 선적분은

$$\begin{aligned}\int_{\text{path 2}} \vec{H} \cdot \vec{dl} &= \int_0^{\pi/6} H_\phi(r = 1, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi)(\sin\theta\ d\phi) \\ &= \int_0^{\pi/6} \left(4\sin\frac{\pi}{6}\cos\phi\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) d\phi = 4\sin^2\frac{\pi}{6}\int_0^{\pi/6} \cos\phi\ d\phi = \frac{1}{2}\ [A]\end{aligned}$$

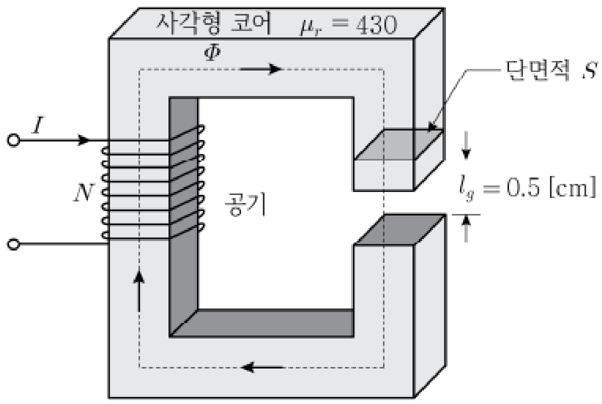
따라서 폐곡면 S의 경계 ∂S을 따라 계산한 $\vec{H}$의 선적분은

$$\int_{\partial S} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{path 1}} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{\text{path 2}} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{\text{path 3}} \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

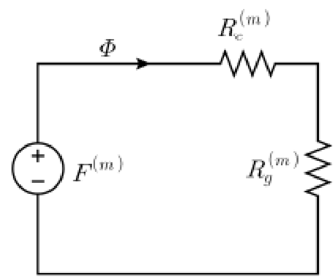
이고, 이는 2)에서 구한 r 방향의 전류값과 같다.

2.2 2024 문3. 자기회로

제 3 문. 그림 (a)와 같이 비투자율이 $\mu_r = 430$인 자성체로 만든 사각형 코어는 전 영역에 대하여 단면적 $S = 2\ [\mathrm{cm^2}]$, 평균 길이 $l_c = 43\ [\mathrm{cm}]$를 가지며, 공극의 길이 $l_g = 0.5\ [\mathrm{cm}]$, 코일의 권선수 N은 420회이다. 이 설계 조건에 대해 다음 물음에 답하시오. (단, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]이다) (총 16점)



(a)



(b)

1) 코어의 자기저항(reluctance) $R_c^{(m)}$과 공극의 자기저항 $R_g^{(m)}$을 각각 구하시오. (4점)

2) 그림 (b)의 등가 자기 회로에서 $R_g^{(m)}$에 걸리는 기자력 $F_g^{(m)}$을 구하시오. (4점)

3) 공극 사이에 균일한 자속밀도 $|\vec{B}| = \dfrac{\pi}{500}$ [Wb/m²]가 발생할 경우 $F_g^{(m)}$을 구하시오. (4점)

4) 3)의 경우에서 코일에 인가되는 전류 I [A]를 구하시오. (4점)

Solution:

주어진 조건:

$$\mu_r = 430, \quad S = 2\,\text{cm}^2, \quad l_c = 43\,\text{cm}$$

$$l_g = 0.5\,\text{cm}, \quad N = 420$$

1) 철심 자기 저항:

$$R_c^{(m)} = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0.43}{430(4\pi \times 10^{-7})(2 \times 10^{-4})} = \frac{10^7}{4\pi} \approx \frac{1}{\mu_0}$$

공극 자기 저항:

$$R_g^{(m)} = \frac{l_g}{\mu_0 A_c} = R_c^{(m)} \times \mu_r \times \frac{l_g}{l_c} = \frac{10^7}{4\pi} \times \frac{10}{430} \times \frac{0.5 \times 10^{-2}}{43 \times 10^{-2}} = \frac{5 \times 10^7}{4\pi} = 5R_c^{(m)}$$

2) 총 자기저항: $F_{tot} = NI, \quad \frac{R_g^{(m)}}{R_c^{(m)}} = 5$ 이므로

$$F_g^{(m)} = F_{tot} \times \frac{R_g^{(m)}}{R_c^{(m)} + R_g^{(m)}} = NI \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times 420I = 350I$$

3) 자속밀도 계산: $|\vec{B}_g| = \mu_0 |H_g| = \mu_0 (F_g^{(m)}/l_g)$이므로

$$F_g^{(m)} = l_g \frac{|\vec{B}_g|}{\mu_0} = (43 \times 10^{-2}) \times \frac{\pi/500}{4\pi \times 10^{-7}} = 2150\ [A \cdot t]$$

4) 전류 계산:

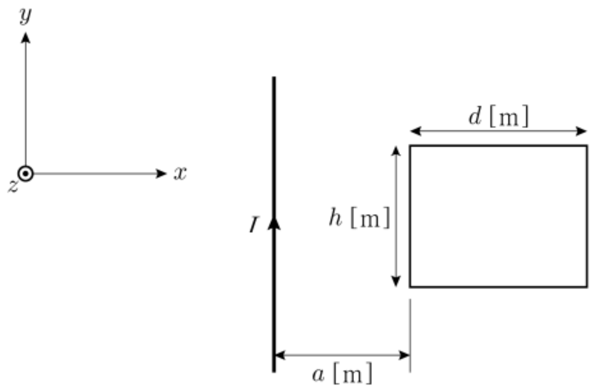
$$I = \frac{F_g^{(m)}}{350} = \frac{2150}{350} \approx 6.14\,[A]$$

Chapter 3

전자기유도

3.1 2024 문5 움직이는 도선의 유도기전력 계산

제 5 문. 다음 그림은 y축 상에 놓인 직류 전류 I [A]가 흐르는 무한히 긴 선로와 xy평면 상에 놓인 직사각형 루프 형태의 도체를 나타낸다. 시간 $t = 0$ [s]일 때 선로와 루프 사이의 거리는 a [m]이다. 다음 물음에 답하시오. (총 24점)



1) 루프가 $+x$방향으로 일정 속도 u [m/s]로 움직일 때, $t \geq 0$ [s]에서 I에 의해 루프에 쇄교하는 자속 Ψ [Wb]를 t의 함수로 구하시오. (6점)

2) 1)에서 I에 의해 루프에 유도되는 전압과 전류를 t의 함수로 구하고, 루프에 흐르는 전류의 방향과 그 근거에 대해 설명하시오. (단, 도체 루프 내부 저항의 크기는 R [Ω]이다) (12점)

3) 루프가 $+y$방향으로 일정 속도 u [m/s]로 움직일 때, $t \geq 0$ [s]에서 I에 의해 루프에 유도되는 전압을 t의 함수로 구하시오. (6점)

Solution

무한 도선으로부터 x만큼 떨어진 지점의 자기장 세기는

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi x}(-\hat{z}), \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}(-\hat{z})$$

1) 자속 계산 (자기장은 종이를 뚫고 들어가는 방향):

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = h \int_{a+ut}^{a+ut+d} |\vec{B}(x)| dx = \int_{a+ut}^{a+ut+d} \frac{\mu_0 hI}{2\pi x}\, dx = \frac{\mu_0 hI}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d}{a+ut}\right)$$

2) 유도 기전력:

$$\begin{aligned} |E_{ind}| = \frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{\mu_0 hI}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{d}{a+ut}} \cdot \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{d}{a+ut}\right) \\ &= \frac{\mu_0 hI}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{d}{a+ut}} \cdot \frac{d(-u)}{(a+ut)^2} d \\ &= \frac{\mu_0 hIdu}{2\pi(a+ut)(a+ut+d)} \end{aligned}$$

도선에서 멀어지면 종이를 뚫고 들어가는 방향 $(-z)$으로의 자속이 감소한다. 렌츠의 법칙에 따라 유도 전압은 $-z$ 방향 자속을 유지하려는 방향으로 생기므로, 시계 방향의 유도 전류가 사각 도선에 생긴다.

3) $+y$ 방향으로 움직이면 물리적 상황에 변화가 없으므로, 자속 Φ_B에도 변화가 없다.

$$t = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_B = \frac{\mu_0 hI}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d}{a}\right) \quad (\text{상수})$$

$$\Rightarrow \text{ 유도된 전압은 } 0 \text{ (always)}$$

Chapter 4

전자기파

4.1 2024 문4 균일 평면파 특성 파악

제 4 문. 무손실 매질의 비투자율이 $\mu_r = 2$이고 특성임피던스가 $\eta = 30\pi$ [Ω]이다. 이 매질 속을 전파하는 평면파의 자계 $\vec{H} = 5\cos(\omega t - 0.8z)\vec{a}_x - 2\sin(\omega t - 0.8z)\vec{a}_y$ [A/m]이다. 다음 물음에 답하시오. (단, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ [F/m]이고, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]이다)

(총 16점)

1) 이 매질의 비유전율 ϵ_r을 구하시오. (4점)

2) 각주파수 ω [rad/s]를 구하시오. (2점)

3) 전계 $\vec{E}$ [V/m]를 구하시오. (4점)

4) 이 평면파의 회전 방향과 편파 종류를 정의하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

Solution

주어진 값: $\mu_r = 2, \quad \eta = 30\pi \ [\Omega], \quad \mathbf{H} = 5\cos(\omega t - 0.8z)\,\hat{x} - 2\sin(\omega t - 0.8z)\,\hat{y} \ [\mathrm{A/m}]$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \ [\mathrm{F/m}], \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ [\mathrm{H/m}]$$

$$\phi \equiv \omega t - 0.8z.$$

(1) 비유전율 ε_r

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}, \qquad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi,$$

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ \Rightarrow \ \frac{30\pi}{120\pi} = \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_r}} \ \Rightarrow \ \boxed{\varepsilon_r = 32}.$$

(2) 각주파수 ω

$$\beta = 0.8 \ \mathrm{rad/m}, \qquad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v_p}, \quad v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\Rightarrow \ \omega = \frac{\beta c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{0.8\,(3 \times 10^8)}{\sqrt{2 \cdot 32}} = \boxed{3 \times 10^7 \ \mathrm{rad/s}}.$$

(3) 전계 E 평면파 관계식

$$\mathbf{E} = \eta\,(\mathbf{H} \times \hat{z}) = -\eta\,(\hat{z} \times \mathbf{H}), \qquad \eta = 30\pi,$$

을 사용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= 30\pi[\,5\cos\phi\,(\hat{x} \times \hat{z}) - 2\sin\phi\,(\hat{y} \times \hat{z})] \\ &= 30\pi[-5\cos\phi\,\hat{y} - 2\sin\phi\,\hat{x}] \\ &= \boxed{-60\pi\sin\phi\,\hat{x} \ - \ 150\pi\cos\phi\,\hat{y} \quad [\mathrm{V/m}]}.\end{aligned}$$

(4) 편파와 회전 방향 성분식은

$$E_x = -60\pi\sin\phi, \qquad E_y = -150\pi\cos\phi.$$

따라서

$$\left(\frac{E_x}{60\pi}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{150\pi}\right)^2 = 1,$$

즉 $\boxed{\text{타원 편파}}$이고, $+z$ 방향 진행에서 시간 증가에 따라 $E_y > 0 \to E_x > 0$ 순서로 변화하므로 $\boxed{\text{우원(RH) 타원 편파}}$이다.

검산(포인팅 벡터 방향)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \eta\big[(\mathbf{H} \times \hat{z}) \times \mathbf{H}\big] = \eta\,|\mathbf{H}|^2\,\hat{z} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{S} \parallel +\hat{z}}.$$