Contents

Chapter 1

기초

1.1 맥스웰 방정식(2021, 2020 경북대 편입학 문제 1번, 2022 2번)

네 개로 구성되는 맥스웰 방정식에 대해 아래 물음에 답하시오.

(1) 맥스웰 방정식의 미분형을 기술하고 미분 연산자의 의미와 함께 각 방정식의 의미를 설명하시오.

(2) 맥스웰 방정식의 미분형으로부터 적분형을 도출하는 과정을 기술하되, 발산정리와 스톡스정리를 적용하고 기하학적인 구조와 함께 각 방정식의 의미를 설명하시오.

Solution.

1. 미분형과 물리적 의미 (with material fields)

맥스웰 방정식의 *매질 중 일반형*은 자유전하/자유전류를 source으로 삼고, 전기변위 $\mathbf{D}$, 자기장 $\mathbf{H}$를 통해 물질의 분극/자화를 포함하여 기술한다.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{f}} \qquad \text{(Gauss's law for } \mathbf{D}\text{)} \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(No magnetic monopoles)} \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday's law)} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(Ampère–Maxwell law)} \tag{1.4}$$

여기서 ρ_{f}, $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$는 *자유(free)* 전하/전류밀도이다. 연산자 $\nabla\cdot$는 장의 *source/sink*를 나타내는 발산, $\nabla\times$는 장의 *회전성*을 나타낸다.

의미 요약 (1.1)는 닫힌 곡면을 통과하는 $\mathbf{D}$ 플럭스의 source가 *자유전하*임을, (1.2)는 자기단극자가 없음을, (1.3)는 시간변화하는 $\mathbf{B}$가 소용돌이형 $\mathbf{E}$를 유도함을, (1.4)는 *전도전류* $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$와 *변위전류* $\partial\mathbf{D}/\partial t$가 소용돌이형 $\mathbf{H}$를 만든다는 사실을 뜻한다.

또한 (1.1), (1.4)의 발산을 취하면

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} = 0$$

이 되어 *전하보존(연속방정식)*이 따라 나온다.

물질 응답(구성 방정식) 물질의 분극/자화를 $\mathbf{P}, \mathbf{M}$이라 하면

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

선형 · 등방 · 균질(LIH) 매질이면

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} \quad (\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r,\ \mu = \mu_0\mu_r),$$

또한 도체에서는 보통 $\mathbf{J}_\mathrm{f} = \sigma\mathbf{E}$ (Ohm)로 둔다. 분극이 만들어내는 bound charge는 $\rho_\mathrm{b} = -\nabla\cdot\mathbf{P}$, 자화가 만들어내는 magnetization current는 $\mathbf{J}_\mathrm{b} = \partial\mathbf{P}/\partial t + \nabla\times\mathbf{M}$로 나타나며, 이들을 $\mathbf{D},\mathbf{H}$에 포함하여 식 (1.1)–(1.4)는 *자유* 전하와 자유 전류만을 노출한다.

2. 적분형 유도, 정리의 적용, 기하학적 해석

발산정리 $\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$, 스톡스 정리 $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$를 각 미분형에 적용한다.

가우스 법칙(전기)

$$\oint_{\partial V}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,dV = \int_V \rho_\mathrm{f}\,dV = Q_{\mathrm{f},\,enc}.$$

닫힌 곡면을 지나는 $\mathbf{D}$의 총 플럭스는 내부의 *자유전하* 합과 같다.

가우스 법칙(자기)

$$\oint_{\partial V}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0,$$

어떤 닫힌 곡면도 $\mathbf{B}$의 순플럭스를 가지지 않는다(자기 단극자 부재).

패러데이 법칙

$$\oint_{\partial S}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}.$$

폐곡선을 따라 도는 기전력은 그 곡면을 지나는 자기플럭스의 시간변화율과 같다.

암페어–맥스웰 법칙

$$\oint_{\partial S}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S(\nabla\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{A} = \int_S\mathbf{J}_\mathrm{f}\cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\int_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{A}.$$

우변 첫 항은 *포함 자유전류* $I_{\mathrm{f},enc}$, 둘째 항은 *변위전류*이다.

기하학적 구조(요약) $\mathbf{E},\mathbf{H}$는 *순환(circulation)*이 본질인 1-형(field)로서 선적분 $\oint(\cdot)\cdot d\mathbf{l}$에 자연스럽고, $\mathbf{D},\mathbf{B}$는 *플럭스*가 본질인 2-형으로서 면적분 $\int(\cdot)\cdot d\mathbf{A}$에 자연스럽다. 발산정리는 “2-형의 플럭스 ↔ 체적 내 source(전하)”를, 스톡스 정리는 “1-형의 순환 ↔ 2-형의 시간/공간

변화(유도/변위)”를 연결한다. 곡면/경계의 방향(바깥 법선, 우수 규약)을 일관되게 취해야 부호가 올바르다.

경계조건(적분형의 즉각적 귀결) 두 매질 경계면의 단위 법선 $\hat{\mathbf{n}}$과 접선 $\hat{\mathbf{t}}$에 대해

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{s,\mathrm{f}}, \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

$$\hat{\mathbf{t}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \qquad \hat{\mathbf{t}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_\mathrm{f},$$

여기서 $\rho_{s,\mathrm{f}}$는 *자유* 표면전하밀도, $\mathbf{K}_\mathrm{f}$는 *자유* 표면전류밀도이다.

3. 결론(정리)

매질 내 일반형 맥스웰 방정식은

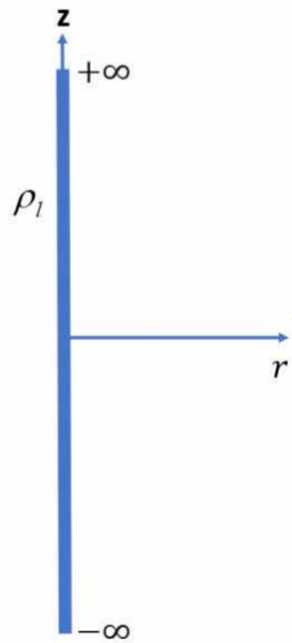
$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\mathrm{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \partial_t \mathbf{D}}$$

이며, 구성 방정식 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ (LIH 매질에서는 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) 을 통해 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$와의 구분이 명확해진다. 적분형은 발산/스톡스 정리로 곧바로 도출되며, 각 항의 기하학적 본질(선순환 vs 면플럭스)을 드러낸다.

Chapter 2

정전기학

2.1 가우스 법칙의 활용 (2025 경북대 편입학 문제 1번)



옆의 그림과 같이 공기중에 z축상으로 무한한 길이의 선 전하밀도 ρ_l이 놓여있을 때, 반경 r 만큼 떨어진 곳의 전기장의 세기 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{E}}$의 표현식을 가우스의 법칙을 이용하여 구하시오.

Solution.

- **대칭성**: 전하는 z축을 따라 무한히 길게 분포하므로 $\vec{E}$는 반지름 r만의 함수이고, 방향은 원통좌표계의 방사방향 $\hat{\mathbf{r}}$을 따른다.

  Remark. 대칭성을 활용한 전기장 방향 논증 : 선전하를 z축을 따라 translation하거나 z축에 대해 회전하여도 시스템에 물리적 변화가 없기 때문에, 전기장 역시 z축 translation이나 회전과 independent해야 한다. 즉 $\vec{E}(r, \phi, z) = \vec{E}(r)$이다.)

- **가우스 면 선택**: 반지름 r, 길이 L인 원통을 선택한다. 전기장은 측면을 통해서만 플럭스를 만든다.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)\,(2\pi r L)$$

- **포함 전하**:

$$Q_{\text{enc}} = \rho_\ell L$$

- **가우스 법칙 적용**:

$$E(r)\,(2\pi r L) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ell L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\, r}$$

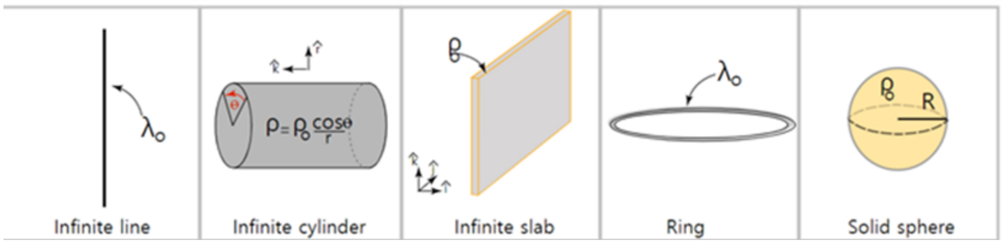
- **벡터 형태**:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\, r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

  ($\rho_\ell > 0$이면 바깥쪽, $\rho_\ell < 0$이면 안쪽 방향)

2.2 가우스 법칙 활용조건 (2023 경북대 편입학 문제 1번)

다음 주어진 전하분포에서 전계의 세기를 계산하고자 한다. 이때 가우스법칙을 활용하여 보다 쉽게 전계의 세기를 계산할 수 있는 기하학적 구조는 어떤 것인가? 해당되는 구조를 모두 선택하고 그 이유를 각각 설명하시오.



Solution. 자유공간에서 가우스 법칙의 적분형은 다음과 같다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

가우스 법칙의 적분형을 활용하여 전기장의 세기를 계산하려면, 우리가 설정한 가우스 곡면 상에서 (1) 전기장의 세기가 일정하게 분포하고, (2) 가우스 곡면의 미소면적과 전기장의 방향이 일치해야 한다. 이 경우 전기장의 면적분은 단순한 전기장의 세기와 면적의 곱으로 표현된다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint |\vec{E}|\, dS = E \oint dS = ES.$$

따라서 전기장의 대칭성을 고려하여 적절한 가우스 곡면을 설정할 수 있다. 주어진 전하분포에 대해 가우스 법칙을 쉽게 적용할 수 있는 경우는 다음과 같다.

1. **Infinite line charge**: 선대칭(line symmetry)을 가지므로, 전하선을 축으로 하는 원통형 가우스 면을 선택한다. 이때 전기장은 곡면 위에서 반지름 r에만 의존하고 일정하다.

2. **Infinite cylinder (균일 부피전하)**: 원통대칭(cylindrical symmetry)을 가지므로, 축을 중심으로 하는 원통형 가우스 면을 택한다. 전기장은 반경 r에만 의존하며 곡면 위에서 일정하다.

3. **Infinite slab**: 평면대칭(plane symmetry)에 의해 전기장은 slab의 법선 방향(z축 방향)으로만 존재한다. 따라서 slab의 양쪽을 통과하는 *pillbox 형태의 직육면체* 가우스 면을 설정하면 된다.

4. **Solid sphere (균일 구체 전하)**: 구대칭(spherical symmetry)에 의해 전기장은 구의 중심에서 방사(radial) 방향 성분만 가진다. 따라서 중심을 기준으로 한 구형 가우스 면을 설정하면 된다.

반면, **ring 전하분포**의 경우에는 회전대칭은 존재하지만, 임의의 가우스 곡면 위에서 전기장의 세기가 균일하지 않다. 따라서 가우스 법칙으로 직접 전기장을 구할 수 없으며, 쿨롱 법칙에 의한 적분을 통해 계산해야 한다.

2.3 가우스 법칙의 활용 (2024 부산대 편입학 문제 2번)

$r = 2, 4, 6$ m 구 표면에 균일한 표면전하 20 nC/m^2, -4 nC/m^2, ρ_S로 각각 대전되어 있다. $r = 7$에서 전속 밀도 $\mathbf{D} = 0$이 되도록 ρ_S를 구하여라.

Solution:

$\rho = 4\ nC/m^2$이라 정의하자. 가우스 법칙의 적분형에 의하여 $r = 7$에서의 전속 밀도의 세기 $D(r)$와 가우스 곡면 내부의 전하간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \cdot 4\pi r^2 &= Q_{enc} \\ &= 4\pi \times 2^2 \times 5\rho + 4\pi \times 4^2 \times (-\rho) + 4\pi \times 6^2 \times \rho_S \\ &= 4\pi[(20 - 16)\rho + 36\rho_S] = 16\pi(\rho + 9\rho_S)\end{aligned}$$

$r = 7\ m$에서 전속 밀도가 0, 즉 $D(r = 7) = 0$를 만족하려면 위 식으로부터 $\rho + 9\rho_S = 0$, 즉

$$\rho_S = -\frac{\rho}{9} = -\frac{4}{9}\ nC/m^2$$

2.4 구도체 충전 (2021 부산대 편입학 문제 3번)

멀리 떨어진 두 개의 금속구에 전하밀도의 비가 $4:9$ 되도록 전하를 주었을 때, 전위가 각각 $V_1 = 400$ [V], $V_2 = 600$ [V]로 되었다. 금속구의 반지름의 비 $r_1 : r_2$를 구하시오.

Solution. 두 구 모두 도체이므로 표면에만 전하가 분포한다. 두 구가 각 구의 반지름보다 훨씬 멀리 떨어져 있다고 가정하면 각 구의 전위는 다른 구의 영향을 받지 않는다. 고립된 구의 총 전하량을 Q라 하고, 무한대의 전위를 0이라 가정했을 때 반지름이 R인 구 표면에서 전위는

$$V = \frac{Q}{4\pi R}$$

로 표현된다. 구 껍질의 표면이 전하 밀도 ρ로 균일하게 대전된다면 전위를 다음과 같이 표면 전하밀도 ρ의 함수로 표현할 수 있다.

$$V = \frac{4\pi R^2 \rho}{4\pi R} = \rho R$$

따라서 두 금속구의 전위 비가 $400 : 600 = 2 : 3 = \rho_1 R_1 : \rho_2 R_2$이고 $\rho_1 : \rho_2 = 2^2 : 3^2$이므로 $R_1 : R_2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$이다.

2.5 구도체 충전 (2024 경북대 편입학 문제 1번)

도선으로 연결된 반경 b_1과 $b_2(b_2 > b_1)$인 두 구 도체를 생각하자. 도체 사이의 간격은 b_2보다 상대적으로 매우 크다고 간주하고 구 도체의 전하는 균일하게 분포되었다고 가정한다. 총 전하 Q 가 구에 분포되어 있다. 다음을 구하라.

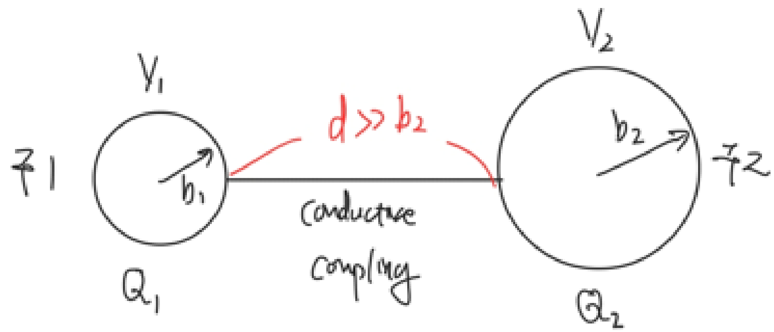
a) 두 구에서 전하

b) 구표면에서의 전계강도

Solution.

Solution.

$V(\infty) = 0$



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{b_1} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{b_2}$$

$$① \ V_1 = V_2 \rightsquigarrow \frac{Q_1}{b_1} = \frac{Q_2}{b_2} \qquad \therefore \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

$$② \ Q = Q_1 + Q_2 \qquad \therefore Q_1 = \frac{b_1}{b_1+b_2} Q, \quad Q_2 = \frac{b_2}{b_1+b_2} Q. \rightarrow (a).$$

구 표면 1의 전계 ≈ 구1에 의한 전기장 (∵ 구2에 의한 전기장 무시)

$$|\vec{E}_1| \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q_1}{b_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{b_1(b_1+b_2)}$$

Similarly. $$|\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{b_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{b_2(b_1+b_2)}$$

2.6 정전계에너지 (2021 부산대 편입학 문제 4번)

전위 $V = x + y$일 때, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$의 자유공간의 전계에 저장되는 에너지를 구하시오.

Solution: 주어진 전위로부터 전기장을 구하면

$$\vec{E}(x,y,z) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -\hat{x} - \hat{y}$$

따라서 자유공간의 정전기적 에너지밀도는

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}(x,y,z)|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}[(-1)^2 + (-1)^2] = \epsilon_0$$

최종적으로 변의 길이가 1짜리인 정육면체 공간에 저장된 에너지는

$$U_E = u_E \cdot V = \epsilon_0 \cdot (1)^3 = \epsilon_0$$

2.7 정전용량 (2020 부산대 편입학 문제 4번)

내압이 1 kV이고 용량이 각각 0.01 μF, 0.02 μF, 0.04 μF인 콘덴서를 직렬로 연결했을 때 전체 콘덴서의 내압은 몇 V인가?

Remark. 콘덴서(또는 축전기)의 **내압(voltage rating)** : 축전기가 견딜 수 있는 최대 전압 (dielectric stength). 문제에서 "내압이 1 kV"라고 했으니, 이 축전기들은 1 kV 이상 걸리면 절연 파괴가 일어나서 축전기 내부의 유전체가 손상될 수 있다는 뜻이다. 따라서 실제 회로에서 사용할 때는 보통 정격 내압보다 낮은 전압에서 안전 여유를 두고 사용한다.

Solution.

각 축전기(콘덴서)의 내압과 용량을 곱하면 최대로 충전가능한 전하량을 구할 수 있다.

$$Q_1 = C_1 V \leq (0.01\ \mu F)(1kV) = 10\ \mu C$$
$$Q_2 = C_2 V \leq (0.02\ \mu F)(1kV) = 20\ \mu C$$
$$Q_3 = C_3 V \leq (0.04\ \mu F)(1kV) = 40\ \mu C$$

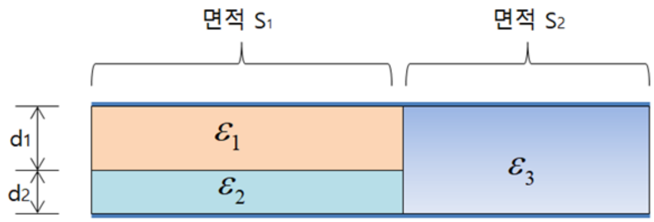
축전기를 직렬 연결한다면 각 축전기에 충전되는 전하량은 모두 동일하다. 따라서 각 축전기에 최대로 충전할 수 있는 전하량은 위에서 구한 최대 전하량 중 최솟값인 $Q_1 = 10\mu C$가 되어야 한다. 이보다 큰 전하량이 충전된다면 용량이 $0.01\ \mu F$인 충전기의 내압이 $1kV$보다 커져 내부 유전체가 손상되기 때문이다.

직렬로 연결된 축전기의 전압 V_tot은 각 축전기의 전압을 더한 것이고, 전체 축전기의 내압은 각각의 축전기에 Q_1의 전하량이 축전된 경우이다. 따라서

$$V_{tot} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) Q \leq \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) Q_1 = 1.75\ kV$$

2.8 정전용량 (2020 경북대 편입학 문제 2번)

아래와 같이 도체판 사이에 3가지의 다른 유전체가 채워져 있다. 전체 정전용량을 구하시오.



Solution.

유전체의 종류에 따라 정전용량이 서로 다른 세 축전기로 볼 수 있다.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S_1}{d_2}, \quad C_3 = \frac{\varepsilon_3 S_2}{d_1 + d_2}$$

문제에 주어진 상황은 직렬로 연결된 용량이 C_1, C_2인 축전기들과 용량이 C_3인 축전기가 병렬로 연결된 상황이다. 따라서 전체 정전용량은

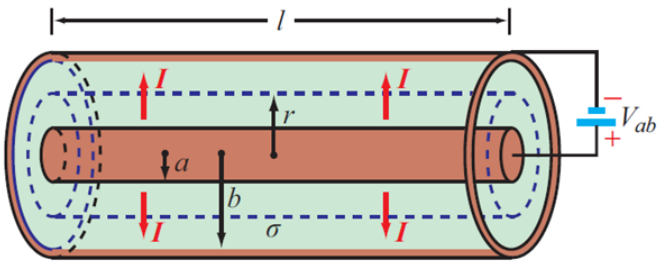
$$C_{tot} = (C_1 \parallel C_2) + C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

각 정전용량의 표현식을 위 식에 대입하면

$$\therefore C_{\text{tot}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} + \frac{\varepsilon_3 S_2}{d_1 + d_2}.$$

2.9 동축케이블 (2022 경북대 편입학 문제 1번)

다음과 같은 내부와 외부 도체의 반경이 각각 **a**와 **b**인 동축케이블이 있다. 절연체의 도전율은 **σ**이다. 내외부 도체 사이에 있는 절연층의 단위길이당 컨덕턴스 **G**`구하시오.



풀이

Background. Ulaby Example 4.12 1. 전계 도출

가우스 법칙에 의해

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q_{\text{enc}} \quad \Rightarrow \quad D(s) = \frac{Q}{2\pi s}.$$

따라서

$$\mathbf{E}(s) = \frac{Q}{2\pi\epsilon}\frac{1}{s}\hat{s} \quad (a \le s \le b).$$

2. 전위차

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

3. 전류 계산

옴의 법칙

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

이므로, 전류는

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{J}| \cdot \int dS = \sigma|\mathbf{E}(s)|(2\pi s).$$

위의 전기장 표현을 대입하면

$$I = 2\pi s \cdot \sigma \cdot \frac{Q}{2\pi\epsilon s} = \frac{\sigma Q}{\epsilon}.$$

4. 컨덕턴스

$$G = \frac{I}{V_{ab}} = \frac{\frac{\sigma Q}{\epsilon}}{\frac{Q}{2\pi\epsilon}\ln(b/a)} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}.$$

—

$$\boxed{G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}}$$

2.10 변위전류 (2021 경북대 편입학 문제 2번)

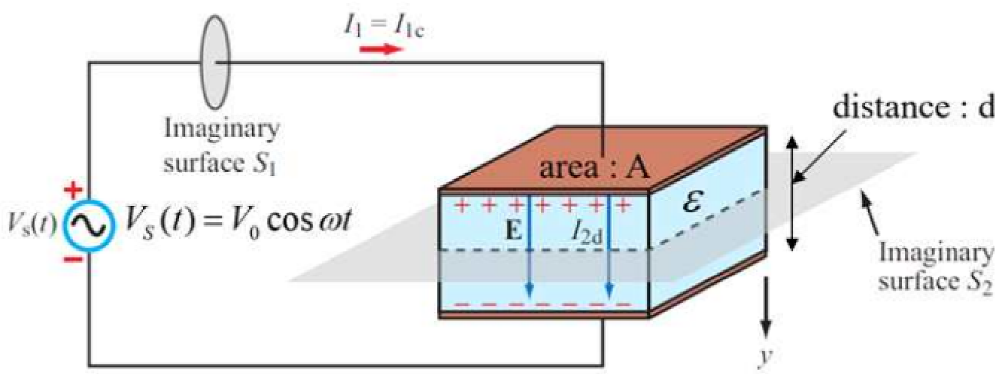
그림과 같은 평행판 커패시터가 회로로 연결되어 있을 때 아래 물음에 답하시오. 여기서 도선은 완전도체, 커패시터의 유전체는 완전유전체로 가정을 한다.

(1) 주어진 시스템에 대하여 등가 전기회로를 그림으로 그리고 집중정수회로 소자를 기호로 표시하시오.

(2) 문제 (1)에서 구한 등가회로 개념을 이용하여 단면 S_1에 흐르는 전도전류 I_{1c}와 변위전류 I_{1d}의 표현식을 구하시오.

(3) 주어진 변수를 이용하여 단면 S_2에 흐르는 전도전류 I_{2c}와 변위전류 I_{2d}의 표현식을 구하시오.

(4) 도선에 흐르는 전체 전류 표현식을 구하시오.



Solution. Background (Ulaby Chap 6.7)

Ampère's law in differential form is given by

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{6.41}$$

Integrating both sides of Eq. (6.41) over an arbitrary open surface S with contour C, we have

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.42}$$

The surface integral of $\mathbf{J}$ equals the conduction current I_c flowing through S, and the surface integral of $\nabla \times \mathbf{H}$ can be converted into a line integral of $\mathbf{H}$ over the contour C bounding S by invoking Stokes's theorem. Hence,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.43}$$

The second term on the right-hand side of Eq. (6.43) has the same unit (amperes) as the current I_c, and because it is proportional to the time derivative of the electric flux density $\mathbf{D}$ (electric displacement), it is called the *displacement current* I_d. That is,

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.44}$$

where $\mathbf{J}_d = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ represents a *displacement current density*. In view of Eq. (6.44),

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = I \tag{6.45}$$

where I is the total current. In electrostatics, $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, and therefore $I_d = 0$ and $I = I_c$.

Given: Wires are perfect conductors and capacitor insulator material is a perfect dielectric.

$$V_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

For Surface S_1:

$$I_1 = I_{1c} + I_{1d}$$

$$I_{1c} = C\frac{dV_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_0 \cos(\omega t)\right) = -CV_0\omega \sin(\omega t)$$

$$I_{1d} = 0 \quad \big(D = 0 \text{ in perfect conductor}\big)$$

For Surface S_2:

$$I_2 = I_{2c} + I_{2d}$$

$$I_{2c} = 0 \quad \text{(perfect dielectric)}$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}\frac{V_c}{d} = \hat{\mathbf{y}}\frac{V_0}{d}\cos(\omega t)$$

$$I_{2d} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \int_A \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\mathbf{y}}\,\frac{\varepsilon V_0}{d}\cos(\omega t)\right) \cdot (\hat{\mathbf{y}}\,ds)$$

$$= -\frac{\varepsilon A}{d}V_0\omega \sin(\omega t) = -CV_0\omega \sin(\omega t)$$

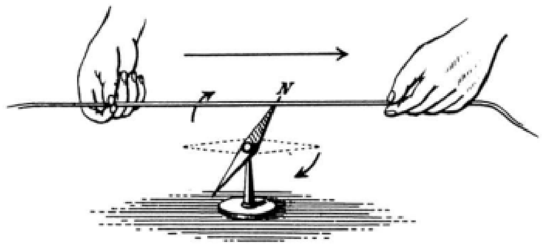
$$\therefore \quad I_1 = I_2$$

Chapter 3

정자기학

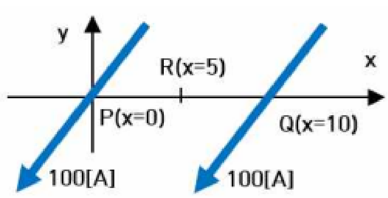
3.1 암페어 법칙 (2025 부산대 편입학 문제 1번)

문제 1(15점)



1820년 Hans C. Oersted는 위 그림과 같은 실험으로 전류가 자기장을 생성하는 것을 발견하였고, 이 현상은 Ampere에 의하여 편미분 방정식으로 표기되었다.

아래 그림과 같은 크기의 무한직선전류에 의한 자계의 세기와 자기력을 다음 순서로 계산하시오.



(1) Maxwell 방정식 중 직류전류에 의한 자계를 나타내는 Ampere의 법칙을 쓰시오.
(2) P선상의 전류에 의한 Q지점의 자계의 세기 H(Magnetic Field Intensity) Vector와 단위
(3) Q선상의 전류에 의한 P지점의 자계의 세기 H(Magnetic Field Intensity) Vector와 단위
(4) P와 Q의 중점인 R지점에서의 자계의 세기 H(Magnetic Field Intensity) Vector와 단위
(5) P선상의 전류가 받는 단위길이당 자기력 F(Magnetic Force)의 크기와 방향 및 단위
(6) Q선상의 전류가 받는 단위길이당 자기력 F(Magnetic Force)의 크기와 방향 및 단위

Solution

(1) Ampere 법칙의 미분형 : $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$,   Ampere 법칙의 적분형 : $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$

(2) P선 상의 전류가 만든 H vector는 $x = 10$의 도선 Q에 작용하며 방향은 $+\hat{y}$이고, 세기는 Ampere의 법칙에 의해

$$2\pi(10) \times |\mathbf{H_Q}| = 100\ A$$

$$\therefore \mathbf{H}_Q = \frac{5}{\pi}\hat{y}\ [A/m]$$

(3) Q선 상의 전류가 만든 H vector는 $x = 0$의 도선 P에 작용하며 방향은 $-\hat{y}$이고, 세기는 (2)번에서 구한 값과 같다.

$$\therefore \mathbf{H}_P = -\frac{5}{\pi}\hat{y}\ [A/m]$$

(4) $R(x = 5)$에서는 도선 P와 도선 Q가 만드는 자기장의 방향이 서로 반대이고 세기가 같으므로 $\mathbf{H}_R = \vec{0}$ (5) P 선상의 전류가 받는 자기력은

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_P = I\int d\vec{l} \times \vec{B} &= (100\ A)\int (dl\hat{z}) \times (\mu_0 \mathbf{H}_P) \\ &= (100\mu_0)\int dl\left(\hat{z} \times (-\frac{5}{\pi}\hat{y})\right) = \frac{500\mu_0}{\pi}\hat{x} \times \int dl = \frac{500\mu_0 l}{\pi}\hat{x}\end{aligned}$$

따라서 단위 길이당 자기력은

$$\frac{\mathbf{F}_P}{l} = \frac{500\mu_0}{\pi}\hat{x}$$

(6) (5)에서 구한 자기력의 반작용이므로 크기는 같고 방향이 반대이다. 따라서

$$\frac{\mathbf{F}_Q}{l} = -\frac{500\mu_0}{\pi}\hat{x}$$

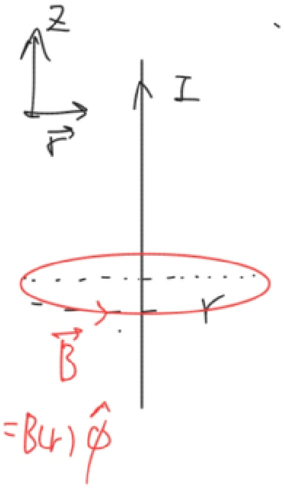
3.2 암페어 법칙 (2024 부산대 편입학 문제 1번)

1. 무한 길이의 직선형 도체에 전류 I [A]가 흐르고 있을 때 이 도선으로부터 r [m] 떨어진 점에서의 자기장을 구하시오.

2. 반경 a [m]인 무한 길이 원통형 도체에 전류 I [A]가 균일하게 흐르고 있을 때, 이 도체 내에서의 자기장을 구하시오.

Solution.

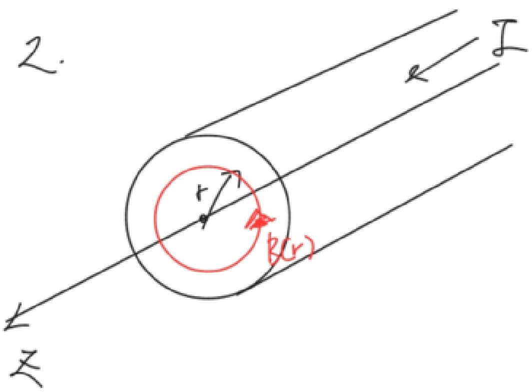
1.



$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 I$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\hat{\phi}$$

2.



- surface current density.

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\therefore 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 J \cdot (\pi r^2)$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 r}{2} J \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \cdot r \cdot \hat{\phi}$$

3.3 원통도선의 자기인덕턴스 (2022 부산대 편입학 문제 2번)

반경이 a [m]인 무한 길이 도체에 전류 I가 단면에 균일하게 분포되어 흐를 때 단위길이당 내부 인덕턴스 L를 구하시오.

문제 2. 원통 도체의 내부 인덕턴스(단위길이)

반지름 a인 긴 원통 도체에 전류 I가 단면에 *균일*하게 분포하여 흐를 때(저주파 영역), 단위길이당 내부 인덕턴스 L'_{int}를 구하라.

해설 (방법 A: 플럭스 연계—연계비율 강조)

1) 내부 자기장 $B(r)$

앰페어 법칙과 포함 전류 $I_{\text{enc}}(r) = I\,\dfrac{r^2}{a^2}$ (균일 분포)로

$$B(r)\,(2\pi r) = \mu I_{\text{enc}}(r) \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu I}{2\pi a^2}\, r \qquad (0 \le r \le a).$$

2) 연계비율의 의미

플럭스 연계량 λ는 "각 전류소자 dI가 끼는 플럭스 Φ의 합"이다:

$$\lambda = \int \Phi(dI).$$

반지름 r에서 두께 dr인 *반지름 방향 스트립*(길이 1)의 미소 자속은

$$d\Phi' = B(r)\, dr \quad \text{(단위길이당)}.$$

이 자속은 *반지름 r 이내를 흐르는 전류만*과 연계된다. 그 이유는, 반지름 r의 원형 전류고리로 경계지은 "반경 방향 면"을 생각하면 그 면을 관통하는 자속선은 r 이내의 전류가 만드는 자기장 성분만 포함하기 때문이다 (외부 전류가 만드는 자속은 그 면을 관통하지 않음).
따라서 이 자속과 실제로 연계되는 전류의 비율이 곧

$$\boxed{\frac{I_{\text{enc}}(r)}{I} = \frac{r^2}{a^2}} \quad \text{(연계비율)}.$$

3) 미소 연계량과 적분

단위길이당 미소 *플럭스 연계량*은

$$d\lambda' = \underbrace{\frac{I_{\text{enc}}(r)}{I}}_{\text{연계비율}} \underbrace{d\Phi'}_{\text{해당 스트립의 자속}} = \frac{r^2}{a^2}\, B(r)\, dr = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{\mu I}{2\pi a^2} r\right) dr = \frac{\mu I}{2\pi a^4}\, r^3\, dr.$$

따라서

$$\lambda' = \int_0^a \frac{\mu I}{2\pi a^4} r^3\,dr = \frac{\mu I}{2\pi a^4}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\mu I}{8\pi}.$$

4) 내부 인덕턴스

$$L'_{\text{int}} = \frac{\lambda'}{I} = \boxed{\frac{\mu}{8\pi}} \qquad (\text{H/m}).$$

주석: 연계비율을 빠뜨리면 $L' = \mu/(4\pi)$로 **두 배** 오답이 된다. 이는 각 스트립의 자속이 *전체 전류*가 아니라 r *이내의 전류만*과 연계됨을 반영하지 못했기 때문이다.

해설 (방법 B: 에너지 밀도법—검산)

자기 에너지 밀도 $u = B^2/(2\mu)$, 단위길이당 에너지

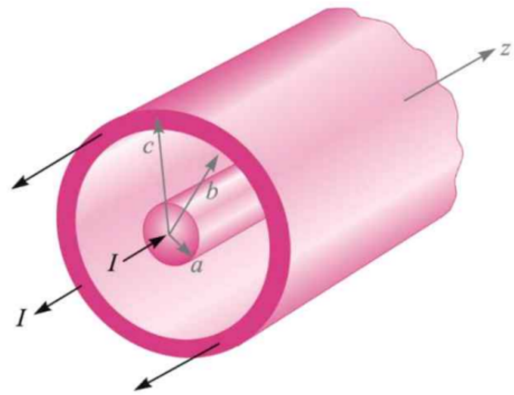
$$W' = \int_0^a u\,2\pi r\,dr = \int_0^a \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r\,dr = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I}{2\pi a^2} r\right)^2 2\pi r\,dr = \frac{\mu I^2}{16\pi}.$$

$\frac{1}{2}L'_{\text{int}}I^2 = W'$이므로

$$L'_{\text{int}} = \frac{2W'}{I^2} = \boxed{\frac{\mu}{8\pi}}$$

로 방법 A와 일치한다. □

3.4 동축 케이블 (2025 경북대 편입학 문제 2번)



옆의 그림은 원통형구조의 두께가 있는 내부도체와 외부도체로 구성된 동축선로를 나타낸다. 여기서 a,b,c는 원점을 중심으로 하는 반경을 나타내며 I 는 전류, 화살표는 전류의 방향을 나타낸다.

이때 $0 \le r < \infty$인 영역에 대해 자기장의 세기 $\overrightarrow{\mathrm{H}}$를 구하고, $r - |\overrightarrow{\mathrm{H}}|$의 그래프를 그리시오.(여기서 r은 원점을 중심으로 하는 임의의 반경이며, 도체에서 전류는 균일하게 흐름)

Solution 내부 도체(반지름 a)에는 전류 $+I$가, 외부 도체(두께 $b\to c$)에는 전류 $-I$가 단면에 균일하게 분포하여 흐른다. 축대칭이므로

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = (2\pi r)H_\phi(r) = I_{\text{enc}}(r), \quad d\boldsymbol{\ell} = (2\pi r)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{H} = H_\phi(r)\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{I_{enc}(r)}{2\pi r}\hat{\phi}$$

(i) $0 \le r < a$ 내부 도체의 체적 전류밀도는 $J_{\text{in}} = I/(\pi a^2)$. 따라서 $I_{\text{enc}}(r) = J_{\text{in}}\pi r^2 = I\,\dfrac{r^2}{a^2}$. 그러면

$$H_\phi(r) = \frac{I_{\text{enc}}}{2\pi r} = \boxed{\frac{I}{2\pi}\frac{r}{a^2}}, \qquad (0 \le r < a).$$

(ii) $a \le r < b$ 외부 도체는 포함되지 않고 내부 전체 전류만 포함되므로 $I_{\text{enc}}(r) = I$.

$$H_\phi(r) = \boxed{\frac{I}{2\pi r}}, \qquad (a \le r < b).$$

(iii) $b \le r < c$ 외부 도체의 전류밀도는 $J_{\text{out}} = -\dfrac{I}{\pi(c^2-b^2)}$. 반지름 r까지 포함되는 외부 도체의 전류는

$$I_{\text{out,enc}}(r) = J_{\text{out}}\,\pi(r^2-b^2) = -I\,\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}.$$

따라서

$$I_{\text{enc}}(r) = I + I_{\text{out,enc}}(r) = I\left[1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right] = I\,\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}.$$

암페어 법칙으로

$$H_\phi(r) = \frac{I_{\text{enc}}}{2\pi r} = \boxed{\frac{I}{2\pi r}\,\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} = \frac{I}{2\pi(c^2-b^2)}\left(\frac{c^2}{r} - r\right)}, \qquad (b \le r < c).$$

(iv) $r \ge c$ 전류 $+I$와 $-I$가 모두 포함되어 $I_{\text{enc}} = 0$. 따라서

$$\boxed{H_\phi(r) = 0}, \qquad (r \ge c).$$

연속성 검증 $r = a$에서 $H(a^-) = \dfrac{I}{2\pi a} = H(a^+)$, $r = b$에서 $H(b^-) = \dfrac{I}{2\pi b} = H(b^+)$, 그리고 $r = c$에서 $H \to 0$. 모든 경계에서 연속이다.

그래프 모양 $0\to a$: 선형 증가, $a\to b$: $1/r$ 감소, $b\to c$: $\dfrac{c^2}{r} - r$ 형태로 0까지 하강, $r \ge c$: 0 유지.

3.5 경계조건 (2023 경북대 편입학 문제 2번)

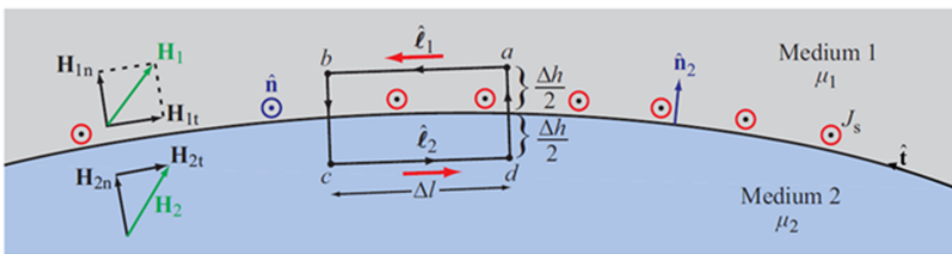
다음은 정자기장에 대한 물음이다. 해당물음에 답하시오.

1) 정자기장에 대한 미분형 맥스웰 방정식은 다음과 같다. 이 미분방정식의 의미를 설명하고, 적분형을 도출하시오.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

2) 경계면상에서는 왜 자기장에 대한 특별한 경계조건이 필요한지 설명하시오.

3) 다음 그림을 이용하여 경계면상에서 정자기장에 대한 경계조건을 도출하시오.



Solution. We now derive a similar set of boundary conditions for the magnetic flux and field **B** and **H**. By applying Gauss's law to a pillbox that straddles the boundary, we determined that the difference between the normal components of the electric flux densities in two media equals the surface charge density ρ_s. That is,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad \Rightarrow \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s.$$

By analogy, the application of Gauss's law for magnetism, as expressed by Eq. (5.44), leads to the conclusion that

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Thus the normal component of **B** is continuous across the boundary between two adjacent media.

Because $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$ and $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ for linear, isotropic media, the boundary condition for $\mathbf{H}$ corresponding to Eq. (5.79) is

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Comparison of Eqs. (5.78) and (5.79) reveals a striking difference between the behavior of the magnetic and electric fluxes across a boundary: *whereas the normal component of* $\mathbf{B}$ *is continuous across the boundary,the normal component of* $\mathbf{D}$ *is not (unless* $\rho_s = 0$*).*

The reverse applies to the tangential components of the electric and magnetic fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$: *whereas the tangential component of* $\mathbf{E}$ *is continuous across the boundary, the tangential component of* $\mathbf{H}$ *is not (unless the surface current density* $J_s = 0$*).*

To obtain the boundary condition for the tangential component of $\mathbf{H}$, with reference to figure, we apply Ampère's law to a closed rectangular path with sides of lengths Δl and Δh, and then let $\Delta h \to 0$, to obtain

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\ell}_1 \, d\ell + \int_c^d \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\ell}_2 \, d\ell = I.$$

Here I is the net current crossing the surface of the loop in the direction specified by the right-hand rule (I is in the direction of the thumb when the fingers of the right hand extend in the direction of the loop C). As we let Δh of the loop approach zero, the surface of the loop approaches a thin line of length Δl. The total current flowing through this thin line is $I = J_s \Delta l$, where J_s is the magnitude of the component of the surface current density $\mathbf{J}_s$ normal to the loop. That is,

$$J_s = \mathbf{J}_s \cdot \hat{n},$$

where $\hat{n}$ is the normal to the loop. In view of these considerations, Eq. (5.81) becomes

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \hat{\ell}_1 \, \Delta l = J_s \Delta l.$$

The vector $\hat{\ell}_1$ can be expressed as $\hat{\ell}_1 = \hat{n} \times \hat{n}_2$, where $\hat{n}$ and $\hat{n}_2$ are the normals to the loop and to the surface of medium 2, respectively. Applying the vector identity to the above relation

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}),$$

leads to

$$\hat{n} \cdot [\hat{n}_2 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = J_s \cdot \hat{n}.$$

Since Eq. (5.83) is valid for any $\hat{n}$, it follows that

$$\hat{n}_2 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s.$$

This equation implies that the tangential components of $\mathbf{H}$ parallel to $\mathbf{J}_s$ are continuous across the interface, whereas those orthogonal to $\mathbf{J}_s$ are discontinuous in the amount of $\mathbf{J}_s$.

$\boxed{\text{At the interface between media with finite conductivities, } \mathbf{J}_s = 0.}$

Hence, the tangential components of $\mathbf{H}$ are continuous:

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Chapter 4

전자기유도

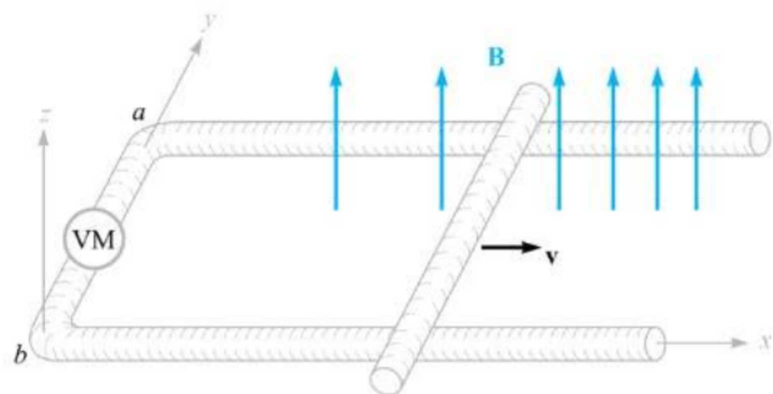
4.1 유도기전력 (2024 경북대 편입학 문제 2번)

권선수 N인 원형 도체 루프가 xy 평면상에 놓여 있고 그 중심은 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x B_0 \cos(\pi r/2b) \sin\omega t$인 자계 원점에 놓여 있다. 여기서 b는 루프의 반경이고 ω는 각주파수이다. 루프에 유도된 기전력을 구하라.

Solution.

4.2 유도기전력 (2022 부산대 편입학 문제 1번)

문제 1 미끄러지는 막대의 위치가 $x = 5t + 2t^3$[m]으로 표시되고 두 레일의 간격 $a = 0.2$ m 이다. 가해지는 자속은 $\mathbf{B} = x^2\,\boldsymbol{a}_z$ [T]이다. $t = 1$ s인 경우에 전압계의 값을 구하여라.



Solution.

4.3 유도기전력 (2020 부산대 편입학 문제 3번)

자속 밀도가 10 [Wb/m^2]인 자계 내에 길이 4 [cm]의 도체를 자계와 직각으로 놓고, 이 도체를 0.4초 동안 1 [m]씩 균일하게 이동하였을 때 발생하는 기전력은 몇 V인가?