Nr 1 p 83

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

VA : polen van f : $x = 2 \lor x = -2$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$\Rightarrow$ VA : $x = 2$ en $x = -2$

HA $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ HA : $y = 0$

SA : kan niet want er al een HA

b) zie inleidend voorbeeld bij uitleg

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

VA : geen, want f heeft geen polen

HA : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$

$\Rightarrow$ HA : $y = 0$

SA : kan niet want er is al een HA

d) $f(x) = \frac{2-x-x^2}{x+1}$

VA : pool : $x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{2-x-x^2}{x+1} = \frac{2+1-1}{0} = \frac{2}{0} = -\infty$

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{2-x-x^2}{x+1} = \frac{2}{0} = +\infty$

$\Rightarrow$ VA : $x = -1$

HA : $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{2-x-x^2}{x+1} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} (-x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ HA : geen

SA : $m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{2-x-x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{2-x-x^2}{x^2+x}$

$= \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} (-1) = -1$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2-x-x^2}{x+1} - (-x) \right) \qquad \frac{x\,(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-x-x^2 + x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-\cancel{x}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}+\cancel{x}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ SA : $y = -x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

VA : polen van f : $x^2+2x-3=0$ $\quad D = 4-4\cdot1\cdot(-3)=16$

$x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \qquad x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{4}{0} = +\infty$

x		-3		1	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{4}{0} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+3)}$

T:

	1	1	−2
1		1	2
	1	2	0

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{3}{4}$

opm : f heeft een perforatie voor $x=1$

$\Rightarrow$ VA : $x=-3$

HA $\quad \lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to \mp\infty} 1 = 1$

$\Rightarrow$ HA : $y=1$

SA : kan niet want er is al een HA

f) $f(x) = \dfrac{x^3+4x-5}{x^2-1}$

VA : polen van f : $x = 1 \vee x = -1$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} \frac{x^3+4x-5}{x^2-1} = \frac{-10}{0} = -\infty$$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{x^3+4x-5}{x^2-1} = \frac{-10}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+4x-5}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

T:

	1	0	4	-5
1		1	1	5
	1	1	5	0

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{7}{2}$$

→ dus f heeft perforatie bij $x = 1$

$\Rightarrow$ VA : $x = -1$

HA : $\displaystyle\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} x = \mp\infty$

$\Rightarrow$ HA : geen

SA : $\displaystyle m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3+4x-5}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

$$q = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{x^3+4x-5}{x^2-1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3+4x-5-x(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\cancel{x^3}+4x-5-\cancel{x^3}+x}{x^2-1} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{5x-5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{5}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ SA : $y = x$