Apprendre à raisonner par la géométrie plane

Apprendre à raisonner par la géométrie plane

Géométrie d'Euclide

Préface

Dans l'antiquité, on entrait dans les mathématiques « de grands » par la porte de la géométrie, et l'œuvre magistrale d'Euclide a été, pendant des siècles, « le programme de mathématiques » pour commencer ce travail.

De nos jours, on ne fait plus des « mathématiques professionnelles » comme Euclide le faisait. On ne fait pas de la géométrie comme ça non plus. Sauf pour quelques résultats dans des applications élémentaires de géométrie, tout ce qui demande un traitement « géométrique » est fait par la voie de l'algèbre et le calcul numérique. *Alors, on peut se poser la question à quoi peut bien servir d'étudier, autre que pour des raisons historiques (ou nostalgiques), « la voie d'Euclide ».* Et effectivement, il y a eu une mouvance mondiale pour élider cette « antiquité » de l'enseignement.

Je pense, cependant, que c'est une erreur sur le plan pédagogique de ne plus étudier la géométrie d'Euclide, car elle permet d'introduire « du raisonnement mathématique » avec des « objets très intuitifs », à savoir, des dessins. C'est d'ailleurs exactement la raison pour laquelle on ne fait plus des mathématiques d'aujourd'hui comme ça, car *le raisonnement chez Euclide est « nourri » du dessin, et n'est pas encore « purement formel » comme il se doit en mathématiques.* Euclide n'est pas assez « formel et rigoureux » pour les standards de raisonnement mathématique d'aujourd'hui. Mais c'est exactement la raison pourquoi c'est une introduction « douce » vers le raisonnement purement formel qui est sans doute difficilement accessible « tout de suite » quand on vient d'une conception purement intuitive. En tout cas, c'est par ce chemin que l'humanité à appris à faire des mathématiques.

Un autre avantage d'Euclide est qu'il donne relativement vite des « résultats intéressants » sur des objets géométriques qu'on rencontre dans la vie « non-académique », comme l'artisanat. Il y a donc un coté pratique à certains résultats.

Finalement, comme Euclide commet des « erreurs de raisonnement formel » qui sont parfois subtiles, leur analyse même est une bonne école pour voir ce qui ne va pas : on apprend plus d'erreurs que de choses toutes lisses.

Tout cela fait que je suis de l'opinion que l'étude d'Euclide est bénéfique à un certain moment dans son parcours d'apprentissage des mathématiques, pour faire le pont entre la réflexion purement intuitive et les mathématiques formelles contemporaines.

A un certain moment, il faut quitter Euclide, et faire de la géométrie Cartésienne (donc avec des nombres, des équations, et de l'algèbre). Mais là aussi, c'est plus facile quand on a un souvenir d'Euclide.

Nous allons « suivre Euclide » mais nous n'allons pas suivre le texte à la lettre en traduction d'Euclide, qui est parfois un peu obscur. Je me permets des reformulations.

Patrick Van Esch

Table des matières

Cadre historique

La place d'Euclide

On ne sait pas qui était Euclide. On ne sait pas si c'était une personne ou un groupe de personnes qui avaient publié sous un pseudonyme commun. Ce qu'on sait, c'est qu'il y a quelques œuvres Grecques qui datent d'autour de 300 avant JC, dont l'auteur est nommé Euclide. Une telle œuvre est faite de 13 livres et s'intitule « **Les éléments** ».

C'est la première œuvre connue qui essaie d'appliquer une « méthode globale » pour construire un système mathématique : *la méthode axiomatique.* Cette méthode est toujours celle utilisée par les mathématiques contemporaines, et avant la publication des « Éléments », cette façon de faire était inconnue[1]. Cependant, *la méthode axiomatique qui est inventée par Euclide, n'est pas réellement scrupuleusement et formellement appliquée dans l'œuvre*. Pour les mathématiciens contemporains, ce genre de légèretés n'est plus acceptable. Euclide a été, cependant, un pas très important sur le chemin des mathématiques du raisonnement « non-structuré » vers la formalisation totale des mathématiques.

Nous pensons aux Éléments comme une œuvre de géométrie, mais en réalité, c'était, à l'époque, « l'encyclopédie des connaissances Grecques des mathématiques ». Il y a aussi dans cet ouvrage, ce que deviendra plus tard « l'algèbre » et même

1 Il y a des indications qu'il y ait eu quelques ouvrages qui ont tenté de le faire aussi, mais ces textes ne nous sont pas parvenus.

la théorie des nombres. Les Éléments avaient l'idée de cadrer tout ce qu'il y avait comme mathématiques, mais le pilier pour les Grecs, c'était la géométrie. Leur « algèbre » se dérivait de la géométrie.

L'ironie sera que maintenant, c'est l'algèbre qui remplace la géométrie dans les mathématiques contemporaines, mais dans le cadre d'Euclide, « au départ, il y a la géométrie, et tout le reste des mathématiques en découle ».

Avant Euclide

Les civilisations avant les Grecs avaient des connaissances géométriques « empiriques ». **La géométrie était une sorte de technologie, un savoir qui s'occupait des mesures de longueurs, angles, surfaces physiques d'objets concrets dans le monde physique.** Mine de rien, certaines civilisations avaient collecté des savoirs géométriques relativement sophistiquées, d'autres avaient des « approximations » qu'ils prenaient pour juste. Par exemple, vers 1550 avant JC, les Égyptiens avaient une formule pour la surface d'un disque :

$S=(D\times 8/9)^2$ avec D le diamètre du disque.

Cela revient à supposer que π = 3.16…

Ce n'est pas mal pour une formule pratique, mais cela indique qu'on est vraiment dans une « technologie » et non dans des mathématiques abstraites.

Cela changera totalement avec les anciens Grecs, à commencer par Thalès (du 6ième siècle avant JC) : on introduit bien des

« idéalisations abstraites » en géométrie : une droite n'est pas une corde tendue, elle est infiniment fine, parfaitement droite, indéfiniment prolongeable etc. C'est, ce que les philosophes Grecs appellent « une forme éternelle », pour distinguer des formes concrètes des objets physiques du monde réel. Ces objets abstraits se « manipulent » par la pensée, et non par les mains. **Ces objets mathématiques sont donc l'objet de raisonnements.**

On est entré dans les mathématiques : on traite des objets abstraits et idéalisés par des raisonnements. **Ce ne sont pas des objets matériels**.

Seulement, avant Euclide, ces raisonnements étaient un peu comme les raisonnements de philosophes, ou de juristes : pour démontrer quelque chose, ils partent de ce dont ils pensent que l'interlocuteur va accepter, et puis ils argumentent jusqu'au moment d'arriver au résultat voulu en utilisant des « transitions » qui semblent être acceptables par tout le monde, ou au moins, par l'interlocuteur.

S'il faut démontrer autre chose, on se sentira libre de partir d'autres bases, avec la seule condition que l'interlocuteur veuille bien les accepter. C'était la façon de laquelle les Grecs faisaient de la géométrie de Thalès (6ieme siècle) jusqu'à Euclide. De nos jours, on ne considère cette façon de faire plus comme acceptable en mathématiques, mais en réalité, en géométrie, cela convient en fait très bien. Ça convient très bien, parce que la géométrie, bien qu'on y utilise des « objets abstraits », est **quand-même très proche de notre intuition visuelle et d'objets matériels (un dessin est bien un objet**

matériel). Alors il n'y a pas facilement une possibilité de faire « fausse route » en géométrie, sans qu'un dessin matériel nous rappelle qu'on est en train de raconter une bêtise : un raisonnement bien fait de ce genre peut parfaitement convaincre qu'une propriété énoncée est vraie en géométrie, quand le dessin n'est pas trop compliqué. Attention, un dessin en lui-même n'est jamais une démonstration d'une propriété qui prétend des choses sur une infinité de dessins. Mais il inspire fortement le raisonnement et les vérités « évidentes ».

Ce genre de raisonnement est souvent suffisant *pour se convaincre soi-même* que la propriété en question sera toujours valide pour toutes les situations semblables, et donc, si la seule et unique raison d'existence de la géométrie serait de pouvoir se convaincre que certaines propriétés sont sans doute toujours valables, on pourrait s'arrêter là. On applique ce genre d'arguments convaincants dans beaucoup de domaines de notre existence, alors pourquoi cela ne conviendrait pas en géométrie ?

Les Grecs aimaient bien la philosophie, le jeu avec la pensée, et ils étaient fascinés par ce qu'on appelle des **paradoxes** : un paradoxe est un raisonnement qui peut convaincre, et qui mène à une conclusion absurde. Un paradoxe bien connu est celui de **Zénon**[2]. C'est un raisonnement qui semble convaincant, et qui dit qu'un lièvre ne peut jamais rattraper une tortue dans une course où on a donné un léger avantage à la tortue, ce qui est bien sûr absurde. Il va ainsi : Supposons que le lièvre se trouve

2 Zénon a inventé plusieurs paradoxes, celui-ci est le plus connu. Parfois le lièvre est remplacé par Achille, le héro Grec.

sur la ligne de départ, alors qu'on a permis à la tortue de partir déjà. Au moment où on permet au lièvre de partir, la tortue a déjà parcouru une distance D. Tout le monde peut convenir de cela. Le lièvre court vite, mais quand-même pas infiniment vite, donc le lièvre aura besoin d'un temps T pour courir cette distance D. Tout le monde en convient. Seulement, pendant ce temps-là, la tortue avance aussi, d'une distance D'. Alors que, un temps T plus tard, le lièvre se trouve à la distance D, la tortue n'y est plus. Le lièvre n'a donc pas rattrapé la tortue, elle se trouve maintenant une distance D' devant lui. Tout le monde en convient, n'est-ce pas ? Mais on peut répéter cette histoire à l'infini : pour essayer de rattraper la tortue, le lièvre doit maintenant courir la distance D'. Ça lui prendra un temps T'. Entre-temps, la tortue avancera d'une distance D''. Donc le lièvre n'a toujours pas rattrapé la tortue. Et ainsi de suite : quoi que fasse le lièvre, avant de rattraper la tortue, il doit d'abord parcourir la distance jusqu'à l'endroit où elle se trouve maintenant, et la tortue utilisera ce temps pour avancer. Donc chaque fois, le lièvre est dans l'incapacité de rattraper la tortue, et ça ne finit jamais. On ne voit pas où se trouve le pas dans le raisonnement qui ne serait pas acceptable. Et pourtant, la conclusion est absurde. Un lièvre rattrape une tortue en 10 secondes. Ça faisait peur aux Grecs : on pouvait donc se laisser convaincre par un raisonnement et arriver à des absurdités. Il faudra faire attention.

La méthode axiomatique

Alors les Grecs se sont penchés sur les types de raisonnement qui sont acceptables, et les types de raisonnement qui pourraient convaincre mais qui peuvent mener à des absurdités. Ils ont développé ce qu'on appelle « la logique ». La logique est l'art ou la science, comme on veut, du raisonnement « irréfutable ». Mais la logique ne suffit pas pour arriver à des conclusions vraies : il faut encore partir sur de bonnes bases. C'est cet exercice que Euclide à essayé de mener à bien pour les mathématiques de son temps, et donc, en particulier, pour la géométrie. En faisant cela, il a mis la base conceptuelle des mathématiques contemporaines, qui est « la méthode axiomatique ».

La méthode axiomatique est la suivante :

1. on introduit des « notions primitives »
2. on peut définir de nouvelles notions à base des notions primitives si on veut
3. on décrète des vérités élémentaires concernant ces notions primitives et concepts définis (les axiomes)
4. on décrète les types d'arguments logiques acceptables
5. on applique tout cela dans toutes les combinaisons possibles et imaginables pour déduire par raisonnement logique, d'autres vérités qu'on appelle théorèmes

Cette méthode est toujours d'actualité en mathématiques contemporaines. Euclide voulait bien l'appliquer pour la géométrie, *mais il n'y est pas totalement arrivé.* Dans l'ère moderne, les mathématiciens ont repris le travail d'Euclide pour rendre cet édifice « axiomatiquement correct ».

Seulement voilà, c’est bien plus compliqué que la démarche d’Euclide. Ils n’ont découvert aucun « paradoxe » dans Euclide. Tous les théorèmes qu’Euclide avait déduit, étaient vrais. *C’est juste que certaines démonstrations d’Euclide avaient encore un peu « l’aspect à l’ancienne » et sortaient du cadre très stricte axiomatique.* Mais, comme les théorèmes « à l’ancienne », le raisonnement était convaincant et le résultat, juste. En plus, ce n’est plus du tout par cette voie-là qu’on fait de la géométrie « avancée ».

Un prix à payer pour avoir un système « axiomatiquement pur », c’est souvent qu’il faut faire beaucoup de travail pour arriver à des résultats qui ont l’air trivial. On doit « raisonner beaucoup » pour peu de résultats intéressants. C’est déjà un peu le cas chez Euclide, c’est beaucoup plus le cas pour les « systèmes corrigés » par les mathématiciens de l’époque moderne. Le système d’Euclide est bien plus facile à comprendre, bien plus léger que les systèmes « modernes », et quand il faudra vraiment faire de la géométrie difficile, on passera sur la géométrie cartésienne (algébrique).

En gros, Euclide faisait déjà du zèle et les mathématiciens modernes en rajoutent une grosse couche.

Induction et déduction

L’être humain est un être qui a des capacités d’imagination, il peut observer le monde autour de lui, mais *il peut aussi s’imaginer autre chose que l’observation directe,* et utiliser cette imagination pour projeter ce qui pourrait se passer si jamais ce monde imaginé correspondait à son observation « un autre jour ». Cette capacité lui permet donc de se projeter, d’inventer des choses, de reconstituer un passé qu’il n’a pas vécu directement etc.

Mais bien sûr, l’imagination libre ne correspond pas du tout à ce qui se passera, ou ce qui s’est passé, et si on suit cette imagination, les choses ne se passeront pas comme on s’était imaginé. *Il y a donc des imaginations « qui correspondent au monde » et des imaginations « qui ne peuvent pas correspondre au monde ».* Les premières seulement sont utiles pour « faire des choses », alors que les dernières se trouvent plutôt du coté de l’amusement, des histoires qu’on raconte pour se divertir ou embobiner quelqu’un.

La question qui se pose, est alors : comment savoir quelles sont les imaginations qui correspondent au monde ? Comment savoir quelles sont **les « vérités » de ce monde** ? Comment les distinguer de la fantaisie pure ?

Bien sûr, l’observation directe nous apprend « une vérité », mais elle ne sert à rien pour savoir si, quand on s’imagine justement autre chose que l’observation directe, cette imagination soit vraie aussi. En d’autres termes, il faut avoir une méthode pour savoir si, ce qu’on n’observe pas directement, peut quand-même être vrai ou pas. Savoir si une projection imaginée du monde qu’on n’observe pas directement, sera ou était vraie ou pourrait être vraie ou pas. La capacité à faire cette distinction est la **rationalité**.

Nous avons tous une méthode « innée » pour essayer d’apprendre des vérités imaginées : **la méthode inductive**. Essentiellement, **elle est basée sur l’observation répétée et la ressemblance**.

Si on a observé plusieurs fois un phénomène dans des cas différents mais semblables, on va prendre comme « vérité » que ce phénomène se reproduit dans d’autres cas suffisamment semblables à ceux qu’on a observés.

Exemple : si je mets un morceau de bois sur l’eau, ce morceau flotte, alors que quand je mets un caillou sur l’eau, il coule. Si je fais cela avec des petits et des grands morceaux de bois, et des petits cailloux et des grosses pierres, je vais commencer à « voir une généralité » : le bois flotte, la pierre coule.

Si je tape sur mon petit doigt gauche avec un marteau, ça fait mal. Si je tape sur mon pouce droit avec un marteau, ça fait mal. Je vais en conclure que si je tape avec un marteau sur tous mes autres doigts, ça fera mal aussi.

La structure même de notre cerveau est faite pour faire de l’induction : pour « faire penser, quand on a une idée ou on fait une observation, à une conséquence déjà observée d’un cas qui se ressemble. Les hommes ne sont pas les seuls à faire cela : les animaux font aussi de l’induction. Quand on donne un coup de bâton à un chat quand il vient dans votre jardin plusieurs fois, le chat va induire que, quand il entre dans votre jardin, et vous êtes là, il recevra un coup de bâton, même avant de le recevoir.

Beaucoup de choses qu’on apprend, comme humain, sont basées sur la méthode inductive. Elle est très naturelle. C’est aussi comme cela que les premières civilisations ont découvert certaines vérités mathématiques et géométriques, en constatant que cette régularité était vraie dans plusieurs cas particuliers, et en induisant alors que pour tous les cas semblables, cela serait vrai aussi. Notre cerveau « est construit » pour faire de l’apprentissage inductif. On le fait naturellement.

Cependant, cette façon de faire a ses limites : d’abord on présume parfois trop vite qu’une situation observée est la cause d’un résultat observé. Si je vois passer cinq fois une voiture rouge, et cinq fois j’oublie mes clés, la méthode inductive me ferait peut-être penser que chaque fois qu’il y ait une voiture rouge dans ma rue, je vais oublier mes clés.

En suite, cette méthode ne permet pas de conclure sur des choses nouvelles, dans des situations pas encore observées : il faut rester dans des situations semblables à celles qu’on a observées, et tirer des conclusions qu’on a déjà observées. On ne peut rien savoir de totalement nouveau.

Autant que les animaux ont sans doute aussi une capacité d’induction et donc de s’imaginer des causes déjà observées quand ils sont confrontés à des situations déjà rencontrées, l’Homme est le seul à pouvoir **raisonner**. Ce n’est, cependant, pas quelque chose qui est très naturel. Il faut l’apprendre. C’est une activité qui ne vient pas automatiquement, mais qu’on développe. C’est une façon **d’aligner des idées qui ont un lien logique, et qui nous mènent d’idées connues et vraies dans le monde, vers des nouvelles idées qui sont alors aussi vraies dans le monde.** Cette façon de faire s’appelle la méthode **déductive**.

La méthode déductive est basée sur « un discours » qui essaie de convaincre par sa pure force d'argument. Un tel discours est appelé ***une démonstration***. Ce sont les Grecs qui ont étudié largement cette façon de faire. Ils ont bien distingué les discours qui peuvent convaincre en jouant sur les émotions et les sentiments et les discours qui peuvent convaincre par la pure force de leur logique. Il va de soi qu'on ne s'intéresse qu'au deuxième type de discours.

Alors, les avantages de la méthode déductive sont énormes : on peut utiliser tout ce qu'on sait (par exemple, par la méthode inductive) et en déduire des nouvelles idées vraies, *idées qu'on n'avait jamais constatées encore par observation*. On utilise la base de nos connaissances pour en générer des nouvelles qu'on avait jamais vues. Ça a l'air très puissant. *Mais le danger de la méthode déductive, c'est qu'on se laisse convaincre par un argument qui ne tient pas la route.* Alors on va déduire des fausses choses, et on va prendre nos fantaisies pour la réalité. Le risque de partir sur un délire sont réels, et les paradoxes montrent qu'il faut faire très attention quand on se met à utiliser une méthode déductive. *Il faut bien cadrer la suite des idées car on n'a pas l'observation pour nous guider*.

La grande difficulté de l'apprentissage du raisonnement, c'est de pouvoir marier en même temps suffisamment de rigueur pour ne pas partir dans un délire, et en même temps ne pas être paralysé par la peur de se tromper, et ne rien faire du tout.

Nous allons illustrer la différence entre la méthode déductive et la méthode inductive quand on considère une propriété numérique : la commutativité de la multiplication des entiers naturels. On veut dire par cela, que si A et B sont deux nombres entiers naturels, alors A × B = B × A.

La méthode inductive consiste à calculer 5 × 7 = 35, et 7 × 5 = 35 ; puis 329 × 142 = 46718 et 142 × 329 = 46718 et encore une dizaine de ces multiplications, constater que chaque fois, on pouvait interchanger l’ordre des facteurs, et qu’on obtenait le même résultat, et conclure que d’autres multiplications « semblables » feront sans doute la même chose. *Par observation répétée, on constate une régularité*, et on en induit une « généralité ».

La méthode déductive consiste à *trouver un argument qui peut convaincre que cette propriété doit être vraie*. Par exemple, on peut dire : imaginez un rectangle fait de petits carrés. Il y a A colonnes de carrés, et B rangées de carrés. Alors, le rectangle aura A × B carrés en tout. Maintenant, imaginons que nous tournons ce rectangle d’un quart de tour. Les rangées d’avant sont maintenant les colonnes, et les colonnes sont devenues les rangées. Si on va calculer le nombre de carrés, on trouvera B × A. Mais le nombre de carrés n’a pas changé en le tournant. Donc A × B = B × A.

Mais que veulent dire ces lettres A et B ? Ce ne sont pas des nombres ? Souvent, un raisonnement déductif est *un modèle de raisonnement*, dont on voit qu’on pourra « l’exécuter » chaque fois qu’on voudrait l’utiliser dans un cas concret. Le raisonnement sur A et B nous dit que chaque fois que concrètement, on voudrait démontrer la propriété pour deux nombres, par exemple, 329 et 142, on peut « refaire le raisonnement avec 329 à la place de A, et 142 à la place de B ».

Ici donc, on peut dire : dans le rectangle, il y a 329 colonnes et 142 rangées. Le nombre de carrés dans le rectangle sera donc 329 × 142. Quand on tourne ce rectangle d'un quart de tour, il y aura 142 colonnes et 329 rangées et le nombre de carrés sera 142 × 329. Mais c'est le même rectangle, donc 142 × 329 = 329 × 142.

On voit que *le modèle de raisonnement* avec un A et un B dedans, « va marcher chaque fois dans chaque cas concret ».

Quand on y réfléchit, on sera convaincu. *Ça marchera à coup sûr pour toutes les multiplications d'entiers naturels.* C'est beaucoup moins le cas pour la méthode inductive. Il se pourrait qu'il y ait des rares cas où la commutativité n'est pas réalisée, mais qui sont tellement rares qu'on n'est pas encore tombé dessus. Peut-être que ça ne marche pas pour des multiplications de nombres qui ont plus que 3000 chiffres, qui sait. La méthode déductive, par contre, nous fait comprendre que ce risque n'existe pas. Le raisonnement marche aussi bien pour des nombres à 3000 chiffres que pour 7 et 8.

Dans la démarche, on a utilisé beaucoup de vérités acceptées : le fait que, quand on a un rectangle, le nombre de carrés est bien le produit du nombre de colonnes et du nombre de rangées, par exemple. Le fait qu'un rectangle qu'on tourne, garde le même nombre de carrés. Et finalement, la suite « logique » des propositions.

La méthode déductive est utilisée ici de façon informelle, mais convaincante. Mais la méthode déductive semblait aussi être utilisée de façon convaincante dans le paradoxe de Zénon.

Il faut donc apprendre ce que sont les « bons raisonnements » et que sont les « mauvais raisonnements ».

On pourrait faire cela aussi par méthode déductive, mais ça se mord la queue. Pour amorcer la pompe, il faut « intuitivement » commencer à apprendre ce que c'est, un raisonnement correct.

En étudiant Euclide, nous allons apprendre « par la voie inductive », donc avec beaucoup d'exemples, à quoi ressemble un raisonnement déductif…et surtout, quand le raisonnement n'est pas purement déductif !

Et comme bonus, on saura quelques vérités géométriques utiles…

Dans ce qui suit, il faut donc se concentrer sur les raisonnements qui seront présentés. *Le sujet est la géométrie, mais ce n'est pas l'objet principal de notre attention* : ça doit être les raisonnements. Les propositions d'Euclide seront à voir comme des exemples de raisonnements, et il faut en étudier la façon dont ils sont construits. On prend donc essentiellement ces propositions comme un « tas d'exemples de raisonnements » tout fait.

L’introduction à Euclide

Structure de l’œuvre

Les Éléments consistent de 13 livres. Nous n’allons pas tous les étudier, mais en voici la liste :

1. Les fondements de la géométrie plane : triangles, droites parallèles, et surfaces
2. L’algèbre géométrique
3. Les cercles
4. Figures inscrites et circonscrites (polygones réguliers)
5. La théorie des proportions
6. Similarité et proportion en géométrie
7. Introduction à la théorie des nombres
8. Théorie des nombres et proportions
9. Théorie des nombres
10. Les incommensurables (nombres irrationnels)
11. La géométrie dans l’espace
12. La mesure des figures (surtout les volumes)
13. Les solides réguliers

Nous allons nous intéresser surtout au livre I. Dans le livre I, Euclide commence par donner des définitions, des « notions communes », et des postulats.

Commencer

Tout début est difficile. Quand on veut être « précis et rigoureux », on a un problème : on n'a rien, aucun concept, aucune idée, aucun mot défini pour commencer à dire quelque chose. Il n'y a aucun mot dont on a donné une définition précise dans la première phrase.

Alors il y a deux solutions : on introduit des mots « qui ne veulent rien dire », ou bien on introduit des mots dont il faut bien accepter que la signification en est « intuitive » et non précise, car on n'a pas pu, justement, préciser ce qu'on voulait dire.

Euclide avait du mal avec cela, et il a essayé d'être précis dès le départ ; cela fait des phrases bizarres.

Nous allons accepter que nous avons quelques intuitions géométriques et je ne vais pas essayer d'être précis, comme Euclide a essayé (et n'a pas vraiment réussi). Je vais donc introduire les mêmes termes qu'Euclide, mais en supposant qu'on sait intuitivement ce que cela veut dire. Euclide commence par définir 23 termes.

Les définitions

1. Le **point**. C'est l'idéalisation du point fait avec un crayon.
2. Une **ligne**. C'est l'idéalisation d'une ligne tracée avec

un crayon. Pour Euclide, une ligne est droite ou courbe, et est de taille finie ou infinie.

3. Les **extrémités d'une ligne** sont des points.
4. Une **ligne droite**. C'est ce qu'on appelle plus communément un **segment**. Mais ça peut aussi être une **droite** ou une **demi-droite**.
5. Une **surface**. Ça peut être une surface courbe dans l'espace.
6. Les **bords d'une surface** sont des lignes.
7. Une **surface plane**. Un plan, donc.
8. Un **angle plat** est la façon dont deux lignes, qui ne sont pas sur une seule droite, mais dans une seule surface, se rencontrent dans un point.
9. Un **angle linéaire** est un angle fait de deux lignes droites.
10. Un **angle linéaire droit** est formé par un ligne droite qui se termine sur une autre ligne droite et qui forment deux angles *de même magnitude*. On dit que les deux lignes droites sont **perpendiculaires**.
11. Un angle **obtus**.
12. Un angle **pointu**.
13. Le **bord** d'un objet.
14. Une **figure** limitée par des bords.

15. Un **cercle** (ou disque) est une figure plane, contenue par une seule ligne (le cercle), qui est telle, que toutes les lignes droites qui vont de cette ligne vers un point spécifique à l'intérieur de cercle ont la même longueur. Une telle ligne droite est appelée un **rayon** du cercle.
16. Le **centre d'un cercle** est le point spécifique dont on parle dans la définition 15.
17. Un **diamètre** d'un cercle est une ligne droite dont les extrémités sont sur le cercle et qui passe par le centre.
18. Un **demi-cercle** : une figure limitée par la moitié d'un cercle et un diamètre.
19. Un **polygone**, une figure dont le bord est fait de segments. Les polygones à 3 segments sont des **triangles**, les polygones à 4 segments sont des **quadrilatères**.
20. Un triangle avec 3 segments de même longueur est un **triangle équilatéral** ; un triangle avec 2 segments de même longueur est un **triangle isocèle**.
21. Un **triangle rectangle** a un angle droit intérieur.
22. Les quadrilatères : **carré** (4 cotés égaux et 4 angles droits) ; **rectangle** (4 angles droits) ; **parallélogramme** (cotés 2 à 2 égaux, et angles 2 à 2 égaux) ; **losange** (4 cotés égaux).
23. Des **droites parallèles** sont des droites qui, même si on les prolonge sans fin, ne se croisent jamais.

Ce sont des notions qu'on connaît intuitivement. Il n'y a pas plus à dire.

Les notions communes

Nous n'allons pas les aborder. Euclide énumère quelques propriétés numériques de grandeurs, qui sont évidentes quand on travaille avec des nombres. Il le fait parce que les Grecs définissaient des nombres comme des rapports de magnitudes géométriques, et ces propriétés ne semblaient donc pas si évidentes que cela.

Comme nous avons une intuition bien plus développée concernant les nombres et que nous ne pensons pas tout de suite à leur « signification géométrique » ces notions communes semblent banales ou bizarres. Par exemple, une des notions est : quand le double d'une magnitude A est égale au double d'une magnitude B, alors la magnitude A est égale à la magnitude B. Donc si $2 x = 2 y$, alors $x = y$.

Il parle de **magnitudes** liées à des objets géométriques. On va juste dire qu'un segment a une **longueur**, un angle a une **mesure**, une figure à une **surface**, et ce sont des nombres (réels).

Dans le texte d'Euclide, il n'est pas toujours clair si Euclide parle de l'objet géométrique, ou de sa magnitude. Il va parler d'un segment, et puis dire que ce segment « est égal » à un autre segment ; il faut comprendre alors qu'il parle des longueurs des deux segments.

Les postulats

Euclide va essayer de donner, avec les termes qu'il a définis, les quelques « vérités » qu'il faut accepter sans démonstration, pour qu'on en déduise tout le reste de leurs propriétés. En réalité, dans le parcours qu'on fera, il faudra « en ajouter ». Mais on commence donc déjà avec cette liste.

Postulat 1

Entre deux points, on peut toujours avoir un segment.

Postulat 2

Tout segment peut être prolongé infiniment pour former une droite.

Postulat 3

Tout point peut être le centre d'un cercle, et tout segment partant de ce point peut en être un rayon.

Postulat 4

Tous les angles droits sont les mêmes (ont les mêmes mesures).

Postulat 5

Si une droite en coupe deux autres, et si la somme des angles intérieurs du même coté de cette droite, est plus petite que deux angles droits, alors les deux droites coupées vont se couper du même coté de la droite coupante.

Propositions du Livre I

Proposition 1

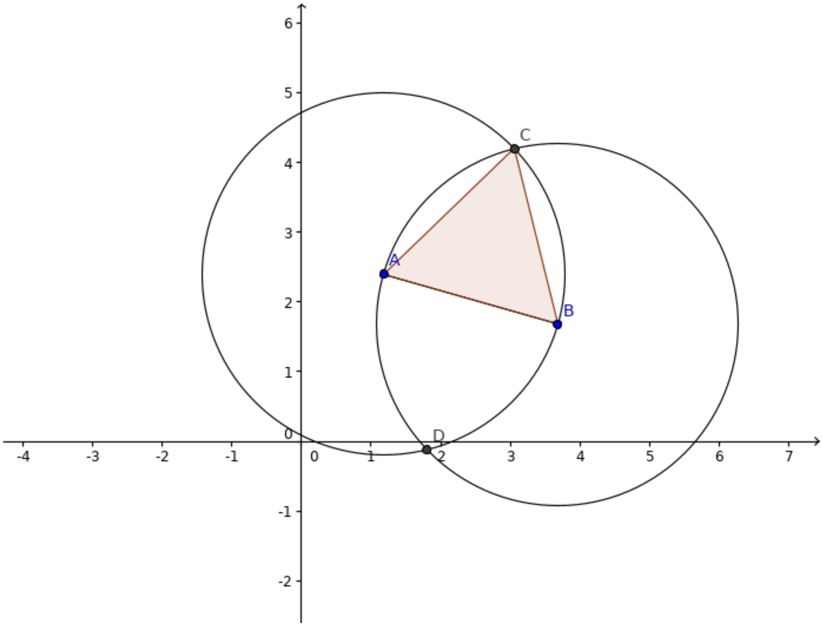

Illustration 1: Proposition 1

Sur tout segment, on peut construire un triangle équilatéral.

Démonstration

Considérons le segment AB quelconque. On utilise postulat 3 pour dire qu'il existe un cercle de centre A, et de rayon AB. Appelons ce cercle X. On utilise postulat 3 pour dire qu'il existe en cercle de centre B, et de rayon AB. Appelons ce cercle Y. Il y a un point C, qui est l'intersection des cercles X et Y. On prétend que le triangle ABC est équilatéral. Effectivement, AB et AC sont deux rayons du cercle X. Ils sont donc de même longueur. BC et AB sont deux rayons du cercle Y. Ils sont donc de même longueur. Il en suit que les 3 cotés du triangle ABC sont de même longueur. QED.

Commentaire

Alors que la démonstration va convaincre, Euclide ne déduit pas tout de ces postulats. Il y a deux « erreurs » formelles dans sa démonstration.

La première est qu'il présume que les cercles X et Y ont au moins un point d'intersection C. Sur la figure, c'est évident, mais il ne peut pas déduire cela de ces axiomes, c'est donc un nouvel axiome.

La deuxième est que ce n'est pas parce que AC et BC se coupent en C, que ces deux segments forment en totalité le coté d'un triangle. Il se pourrait que ces deux segments se coupent en plusieurs points. Il faudrait donc qu'Euclide ajoute un axiome que quand deux droites se coupent et ne sont pas identiques, elles se coupent en exactement un seul point. Mais on l'accepte volontiers.

Cette démonstration est donc formellement insuffisante, mais elle est, avec la figure, parfaitement convaincante. Personne ne doutera réellement qu'on puisse construire un triangle équilatéral sur tout segment. L'argument marche. C'est typique pour Euclide.

Proposition 2

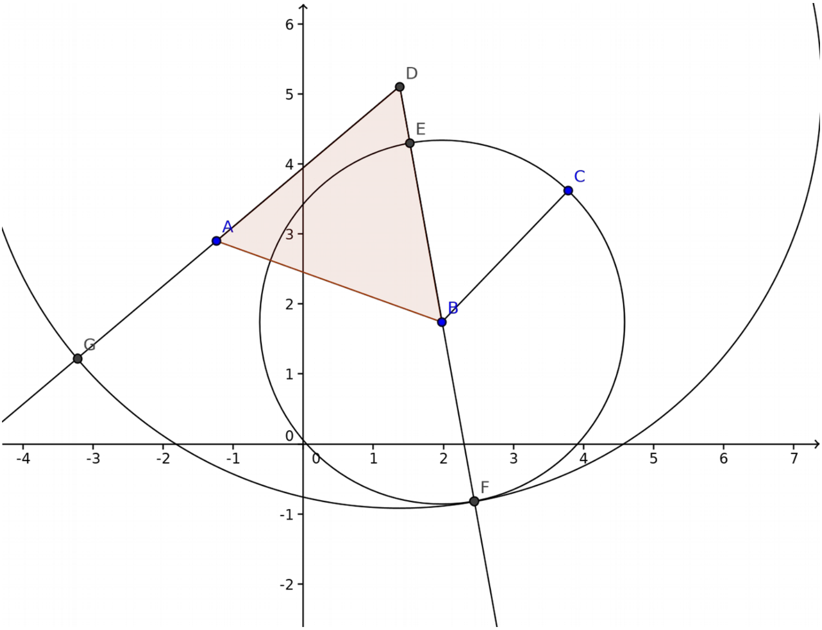

Illustration 2: Proposition 2.

Quand on a un segment donné, et un point donné, on peut toujours construire un nouveau segment, de même longueur du segment donné, et qui a comme une des extrémités, le point donné.

En d’autres termes, on peut « déplacer » un segment donné pour qu’il parte d’un point donné en gardant sa longueur.

Démonstration

On a un segment donné BC, et un point donné, A. Par le postulat 1, on peut considérer le segment AB. Par la proposition 1, on peut construire un triangle équilatéral sur le segment AB (le triangle ABD). Par le postulat 2 on peut prolonger le segment DB. Par le postulat 3, on peut construire le cercle de rayon BC et de centre B. Le cercle coupera la demi-droite DB dans le point F (il faut bien le choisir, du bon coté). Alors BF est aussi un rayon du cercle et la longueur de BF est la même que la longueur de BC.

On peut, par le postulat 2, prolonger le segment DA. On peut construire le cercle de centre D, et de rayon DF. Ce cercle coupera la demi-droite DA dans le point G. DG est donc aussi un rayon de ce cercle. Alors, la longueur de DG est la longueur de DF.

Dans ce qui suit, on considère les longueurs de segments :

DF = DB + BF ; puisque BF = BC, on peut donc dire :

DF = DB + BC.

D’un autre coté, DG = DA + AG. DG = DF

Alors on a : DA + AG = DB + BC.

Le triangle ABD est équilatéral, donc DA = DB. On peut soustraire cette longueur des deux cotés donc, et il reste :

AG = BC

Le segment AG est donc de même longueur que le segment BC, et a le point A comme extrémité. QED.

Commentaire

Dans cette démonstration aussi, il y a plusieurs choses qui ne sont pas démontrées formellement, mais qui sont déduites du dessin. Le premier point est que le cercle qu’on a construit sur le segment BC va couper la demi-droite DB dans un point F qui se trouve « plus loin » que B. Nous voyons sur la figure, qu’il y ait un autre point, E, qui coupe cette demi-droite « avant B » ; mais parfois, ce point n’existe pas. Le fait qu’il y ait ce point F, et qu’il se trouve « plus loin » que B, est évident sur le dessin, mais n’est pas prouvé par un raisonnement.

On peut faire une remarque similaire pour le point G. Il faut que ce point existe, et qu’il soit « plus loin » sur la demi droite DA, que A. Ce n’a pas été démontré par raisonnement, mais sur le dessin, c’est évident.

C’est donc le fait, non démontré par raisonnement, que F est « plus loin » que B sur la demi-droite DF, et que G est « plus loin » sur la demi droite DA, que A, qui fait qu’il faut faire les différences comme on l’a fait pour obtenir les longueurs des segments AG et BF, sinon on aurais dû faire un autre calcul et la démonstration ne marche plus.

Proposition 3

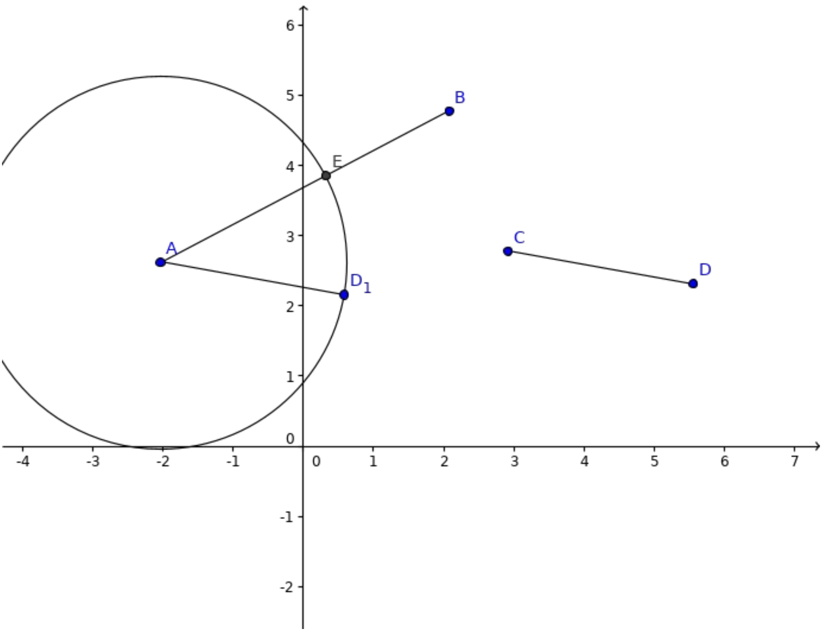

Illustration 3: Proposition 3

On peut prélever, d'un segment plus long, la longueur d'un autre segment plus court.

Démonstration

Le segment long est le segment AB, le segment court, CD. Par la proposition 2, on peut construire, dans le point A, un segment (ici, le segment AD1) de même longueur que le segment CD. Puis, par le postulat 3, on peut construire un cercle de centre A, avec rayon AD1. Ce cercle coupera le segment AB dans un point E. Le segment AE est alors la partie du segment AB, prélevée, de longueur égale au segment plus court CD. QED.

Commentaire

Cette proposition 3 est la « culmination » des trois premières propositions, et dit essentiellement que, quand on a un segment avec une longueur donnée (ici CD), on peut fabriquer un segment de la même longueur sur toute droite, commençant en tout point choisi. On aurait pu prendre cela aussi comme axiome.

Proposition 4

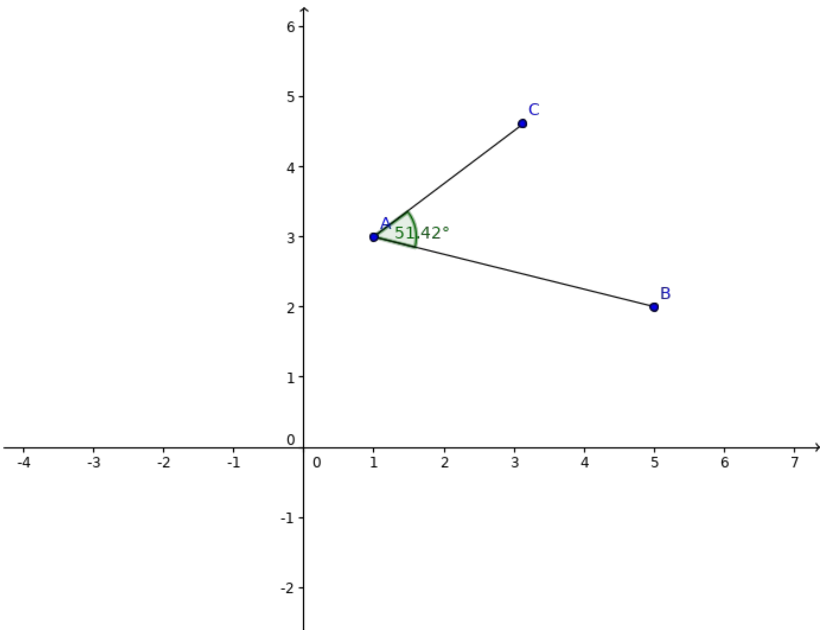

Illustration 4: Proposition 4

La proposition 4 est tellement mal démontrée par Euclide, qu'on ne va même pas en donner la démonstration. On va dire qu'il faudra accepter ce que Euclide appelle « une proposition avec démonstration », comme un nouvel axiome.

Si deux triangles ont deux cotés de même longueur, et ont aussi l'angle entre ces deux cotés de même magnitude, alors le troisième coté des deux triangles, ainsi que les deux autres angles des deux triangles, ont aussi les mêmes magnitudes.

Essentiellement, la « démonstration » dit simplement que, quand on « glisse » un triangle sur l'autre, on voit bien qu'ils coïncident…

Proposition 5

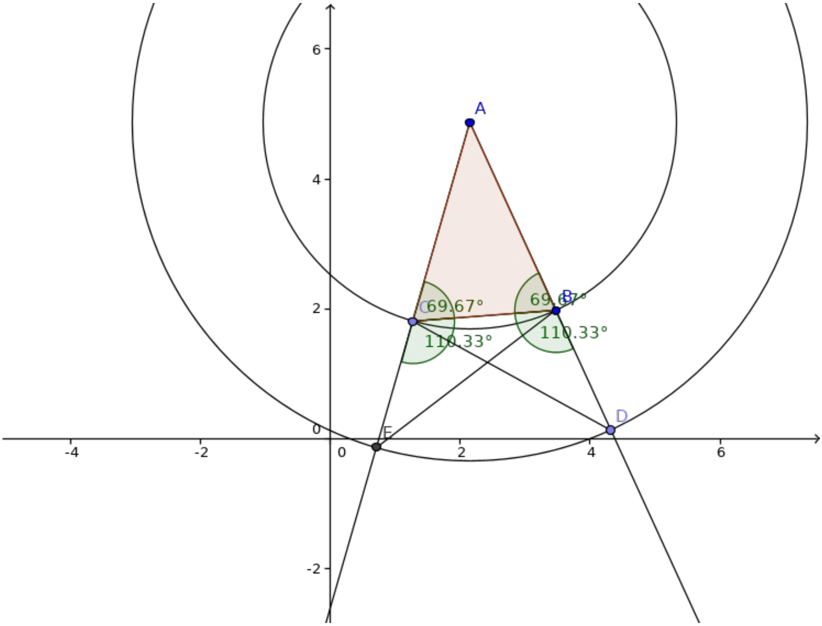

Illustration 5: Proposition 5

Dans un triangle isocèle, les deux angles internes de la base sont de même magnitude. Les deux angles externes, formés quand on prolonge les deux cotés, et la base, sont aussi de même magnitude.

Démonstration

Le triangle BAC est isocèle, donc AB et AC sont de même longueur. Si nous prolongeons en demi droite AB et AC, on choisit un point arbitraire D sur la prolongation de AB, et on construit le cercle de centre A, et de rayon AD, (postulat 3) qui coupe la demi-droite AC dans un point E, alors AE est un rayon, et donc AE est de même longueur que AD.

On enlève de la longueur de AE, la longueur de AC, qui donne la longueur de CE. De la même façon on enlève de la longueur de AD la longueur de AB, qui donne la longueur de BD.

En longueurs, nous avons donc :

CE = AE – AC et BD = AD – AB. Comme AD = AE et AC = AB, nous avons que CE = BD.

Quand on compare le triangle ACD et le triangle ABE, on voit qu'ils ont AD = AE, AC = AB, et l'angle CAD = BAE car c'est le même angle. Nous sommes dans le cas de deux triangles avec deux cotés égaux, et l'angle des deux cotés aussi égal. Ainsi, on peut utiliser proposition 4 pour conclure :

- l'angle ACD = l'angle ABE
- CD = BE
- l'angle AEB = l'angle ADC

Quand on compare le triangle BCD et le triangle CBE, on sait que BD = CE, que CD = BE et que l'angle CEB qui est l'angle AEB, est égal à l'angle BDC qui est l'angle ADC. Nous pouvons donc à nouveau faire appel à la proposition 4, pour conclure :

- L'angle BCE = l'angle CBD
- l'angle CBE = l'angle BCD

La première affirmation est ce qu'on dit dans l'énoncé, que les angles externes sont les mêmes (le 110.33 degrés sur la figure).

Finalement, l'angle ABC est l'angle ABE, diminué de l'angle CBE. L'angle ACB est l'angle ACD, diminué de l'angle BCD.

ABC = ABE – CBE et ACB = ACD – BCD.

Mais nous savons que ABE = ACD (du premier triangle), et que CBE = BCD (du deuxième triangle). Alors, il en suit que ABC = ACB, ce qui est l'autre partie de l'énoncé, qui dit que les angles internes sont les mêmes. QED.

Proposition 6

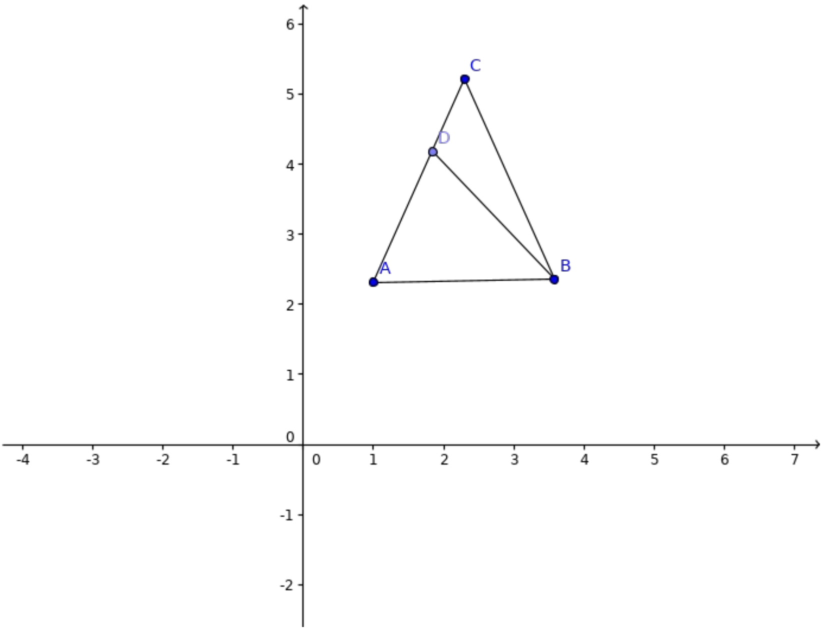

Illustration 6: Proposition 6

La proposition 6 est le converse de la proposition 5.

Si un triangle ABC de base AB est tel que l'angle interne CAB et de même mesure que l'angle interne CBA, alors ce triangle est isocèle, c.à.d. AC et BC sont de même longueur.

La démonstration va utiliser une logique nouvelle : **la réduction à l'absurde.** Euclide va supposer qu'on admette que la proposition serait fausse, et en déduire une absurdité. Cela prouve alors que cette proposition ne peut pas être fausse, et est donc vraie.

Démonstration

Admettons que AC ne soit pas de même longueur que BC. Alors cela veut dire que AC est plus grand que BC, ou que BC est plus grand que AC (c'est une notion commune). Admettons que ce soit AC qui est plus grand. Par la proposition 3, on peut alors trouver un segment AD de même longueur que BC, qui est plus petit que AC, et D se trouve bien « à l'intérieur » de AC, puisque AD = BC est bien plus petit que AC.

On va comparer le triangle DAB et le triangle ABC. Ce sont deux triangles avec deux cotés égaux, et l'angle entre les deux cotés aussi égaux : AD = BC, AB = AB et l'angle DAB est l'angle ABC par hypothèse de la proposition. Alors, par la proposition 4, on doit alors avoir que AC = AD, ce qu'on avait supposé, qui n'était pas le cas. Absurdité, donc AC = BC. QED.

Proposition 7

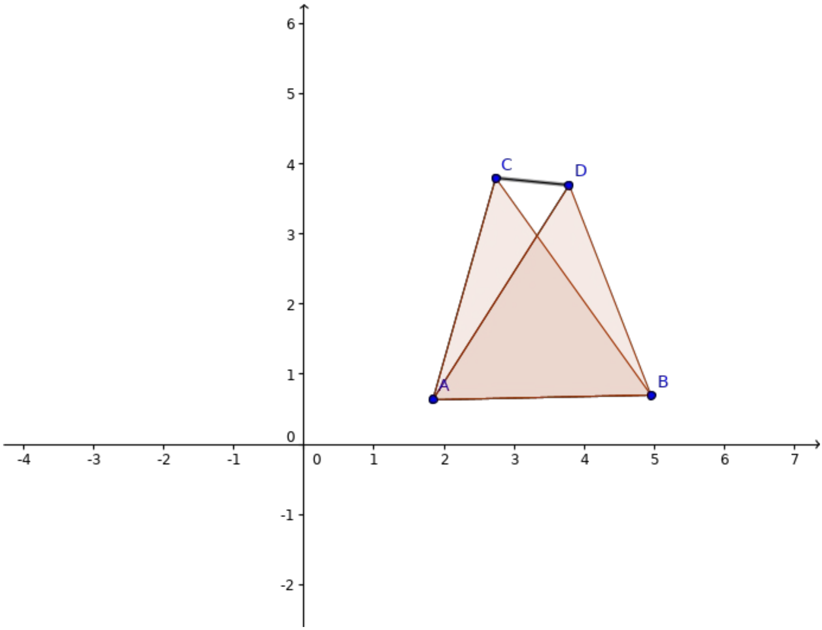

Illustration 7: Proposition 7

Si, à partir d'un segment, deux segments partent de chaque bout pour se joindre dans un point, on ne peut pas avoir deux autres segments qui partent des mêmes bouts, qui sont de mêmes longueurs et qui partent dans le même coté que les deux premiers segments, et qui se joignent dans un autre point.

La démonstration sera aussi basé sur la réduction à l'absurde.

Démonstration

Considérons le segment de base AB, et les segments AC et BC qui se joignent donc, dans le point C. Supposons qu'il y ait effectivement ces deux autres segments, qui se joignent dans un autre point D. On aurait donc un segment AD, de longueur égale à AC, et BD, de longueur égale à BC, mais D différent de C. Connections CD par un segment (postulat 1). Le triangle ACD est un triangle isocèles par hypothèse que AC et AD sont de même longueur.

On considère le cas où D est « en dehors » du triangle ABC, « à droite de BC. Euclide ne traite que ce cas, on peut s'amuser à traiter les autres.

Alors on voit sur la figure que l'angle BCD est plus petit que l'angle ACD. Puisque le triangle ACD est isocèle, de la proposition 5 on tient que l'angle ACD est égal à l'angle ADC. Alors on peut en conclure que l'angle ADC est plus grand que l'angle BCD.

De la même façon, le triangle BCD est isocèle, l'angle BDC est plus grand que l'angle ADC. L'angle BDC est égal à l'angle BCD par la proposition 5 et le fait que BCD est un triangle isocèle. On a donc que l'angle BCD est plus grand que l'angle ADC.

Nous avons donc qu'en même temps, l'angle ADC est plus grand et plus petit que l'angle BCD. Contradiction. QED.

Commentaire

D'abord, il faudrait considérer tous les cas du positionnement de D, donc aussi à l'intérieur du triangle ABC. On peut le faire, mais Euclide ne l'a pas fait.

Mais le problème formel est qu'il faut se reporter à la figure pour constater que l'angle BCD est plus grand que ACD. Par contre, la figure est convaincante : on doit « refermer » l'angle pour aller de B vers A. Mais on ne l'a pas déduit d'aucune propriété, sauf le dessin même. On rencontrera souvent ce genre d'argument qui est évident sur le dessin, où on « voit » qu'on est d'un coté ou d'un autre d'un objet (ici, que la demi-droite DA est à l'intérieur de l'angle BDC), mais c'est rarement justifié par un raisonnement.

Cette démonstration n'est pas « fausse », dans le sens où elle ne serait pas logique, ou qu'elle partirait de choses non valides. C'est un discours qui est parfaitement convaincant, mais qui n'est pas formel : on a besoin du dessin pour accepter une vérité qui est ensuite correctement utilisée dans un raisonnement. Elle n'est donc pas valide dans un cadre formel et axiomatique, mais elle est acceptable quand on se base sur un dessin.

Proposition 8

Si les trois cotés d'un triangle sont égaux respectivement aux trois cotés d'un autre triangle, alors les angles intérieurs respectifs sont de même magnitude.

Comme la proposition 4, Euclide donne une « démonstration » en argument qu'on peut glisser un triangle sur l'autre et constater qu'ils coïncident, ce qui n'est ni une évidence sur le dessin, ni, certainement, un argument formel des axiomes.

Il faut donc prendre cette proposition comme un axiome supplémentaire.

Proposition 9

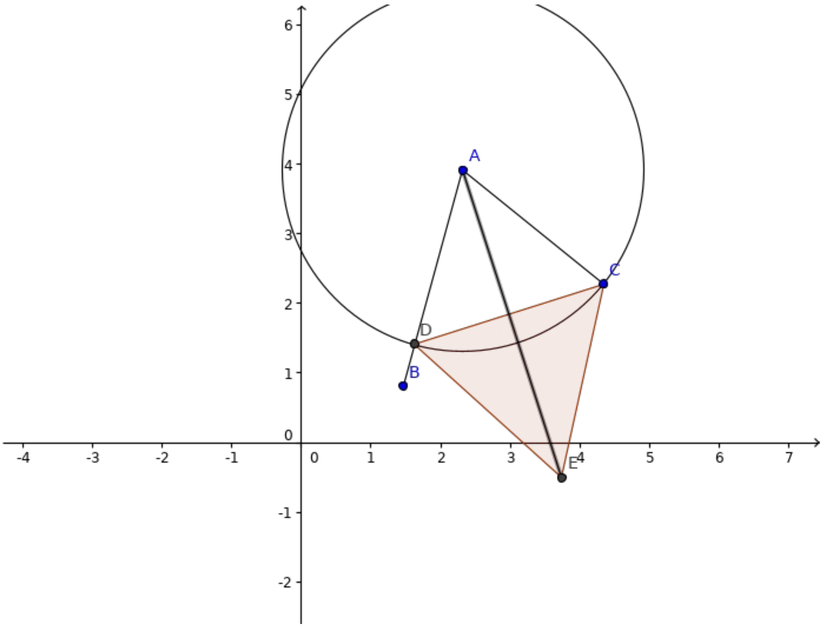

Illustration 8: Proposition 9

Un angle linéaire peut être divisé en deux par la construction suivante : sur les deux AB et AC formant l'angle BAC, on choisit le plus court (ici AC) et on reporte cette longueur sur l'autre segment, ce qui nous donne le segment AD. Sur le segment DC on construit un triangle équilatéral DCE. Le segment AE coupe l'angle BAC en deux.

Démonstration

Par la proposition 3, on peut effectivement déterminer le point D, qui est le segment AB, raccourci à la longueur de AC. Par le postulat 1, on peut donc avoir le segment DC. Par la proposition 1, on peut y construire un triangle équilatéral DCE. Par le postulat 1, on peut donc avoir le segment AE.

Le triangle AED et le triangle AEC ont des cotés respectivement de même longueur : AE est commun, AC = AD par construction, et DE = CE parce DCE est un triangle équilatéral.

Par la proposition 8, les angles internes de ces triangles sont alors respectivement égaux. Ainsi, l'angle DAE est égal à l'angle EAC. La somme de ces deux angles égaux est l'angle DAC : ils en sont donc la moitié. QED.

Commentaire

Dans la construction, il faut s'assurer que le point E n'est pas le point A. On pourrait avoir de la malchance. Comme la proposition 1 ne dit pas qu'on peut toujours construire deux triangles équilatéraux (un de chaque coté), on n'a pas prouvé que le point E peut toujours être choisi différent de A. Mais sur le dessin, on voit qu'on peut toujours choisir le triangle équilatéral « du bon coté ».

En suite, il faut aussi s'assurer que le segment AE se trouve à l'intérieur, et pas à l'extérieur de l'angle DAC pour en faire la moitié. Comme déjà répété plusieurs fois, ce genre de considération (intérieur ou extérieur, le bon sens, du bon coté…) est, chez Euclide, rarement prouvé formellement, et doit, dans la plupart des cas, être déduit d'un dessin.

Proposition 10

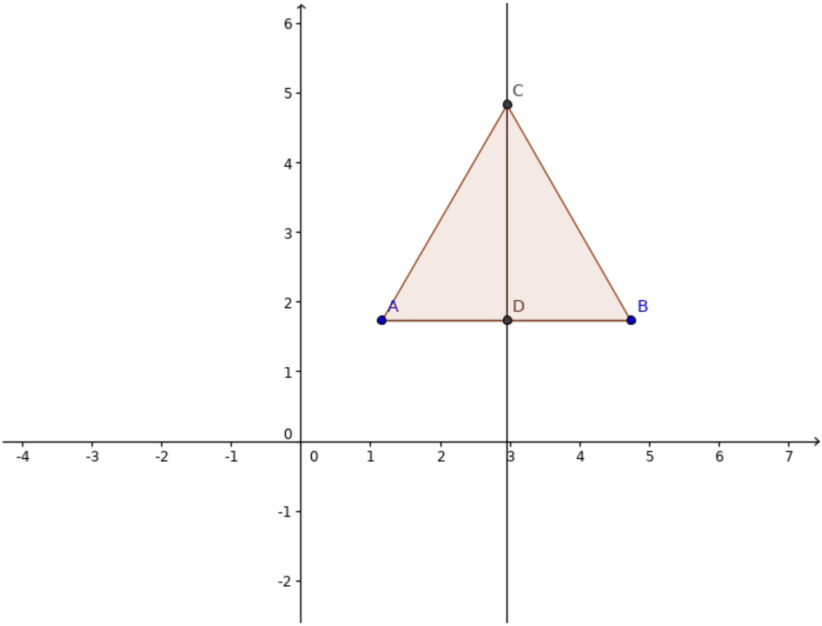

Illustration 9: Proposition 10

On peut trouver le milieu d'un segment par la construction suivante : on construit, sur le segment AB, un triangle équilatéral. On divise l'angle interne ACB en deux. La bissectrice coupe alors le segment AB en D, qui est son milieu. AD = DB.

Démonstration

La construction est possible : par la proposition 1, on peut construire un triangle équilatéral sur le segment AB, et par la proposition 9, on peut construire la bissectrice de l'angle ACB.

Considérons le triangle ACD et le triangle BCD. CD est commun aux deux, et, comme ABC est un triangle équilatéral, AC et BC sont de même longueur. La bissectrice fait en sorte que l’angle ACD est de même magnitude que l’angle DCB (la moitié de l’angle ACB justement). Alors les triangles ACD et DCB sont des triangles avec deux mêmes cotés et le même angle entre les deux. Par la proposition 4, les trois angles, et les trois cotés sont alors respectivement égaux. Il en suit que AD = DB. Donc D est bien le milieu de AB. QED.

Proposition 11

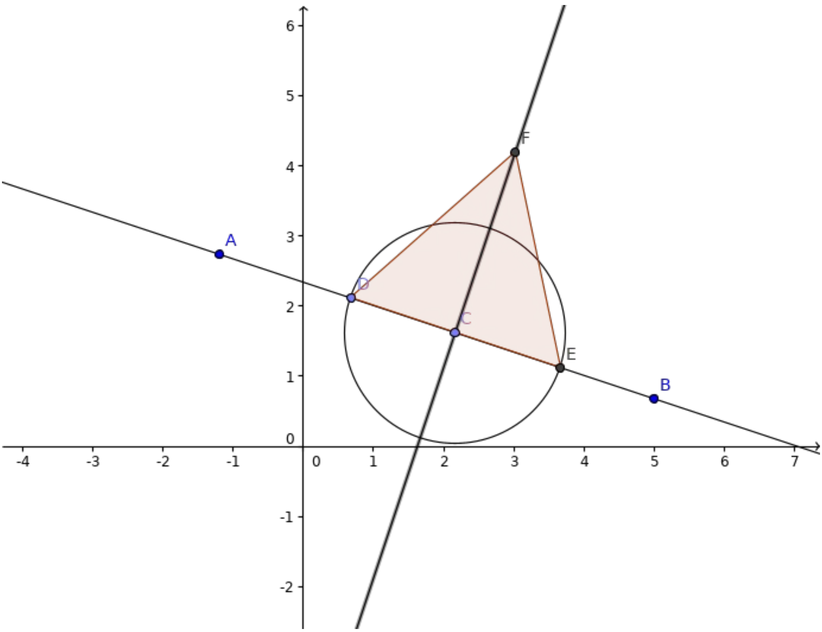

Illustration 10: Proposition 11

On peut construire une droite, perpendiculaire a une ligne droite AB, dans un point C de cette droite, de la manière suivante : On choisit arbitrairement un point D sur la droite AB. On trouve le point E de l'autre coté du point C, tel que CD = CE. On construit un triangle équilatéral sur DE, le triangle DEF. On construit la droite FC. Cette droite est perpendiculaire sur AB (et passe dans le point C).

Démonstration

La construction est possible, car on peut toujours construire un segment de longueur égale à un autre segment, sur une droite donnée par la proposition 3. On peut donc construire le point E. On peut construire le triangle équilatéral sur DE (proposition 1). On peut construire la droite FC (par postulat 1).

Considérons les triangles DCF et ECF. Ces triangles ont respectivement les mêmes cotés : CF est commun, DC est égal à CE par construction, et DF et EF sont des cotés d'un triangle équilatéral. Par la proposition 8, on peut donc dire que leurs angles sont respectivement égaux. Alors les angles DCF et ECF sont égaux. Mais ce sont des angles adjacents qui sont formés par la droite FC et la droite CD : par définition ce sont des angles droits. Et donc, par définition, FC et CD sont perpendiculaires. CD et AB sont la même droite, donc FC et AB sont bien perpendiculaires. QED.

Proposition 12

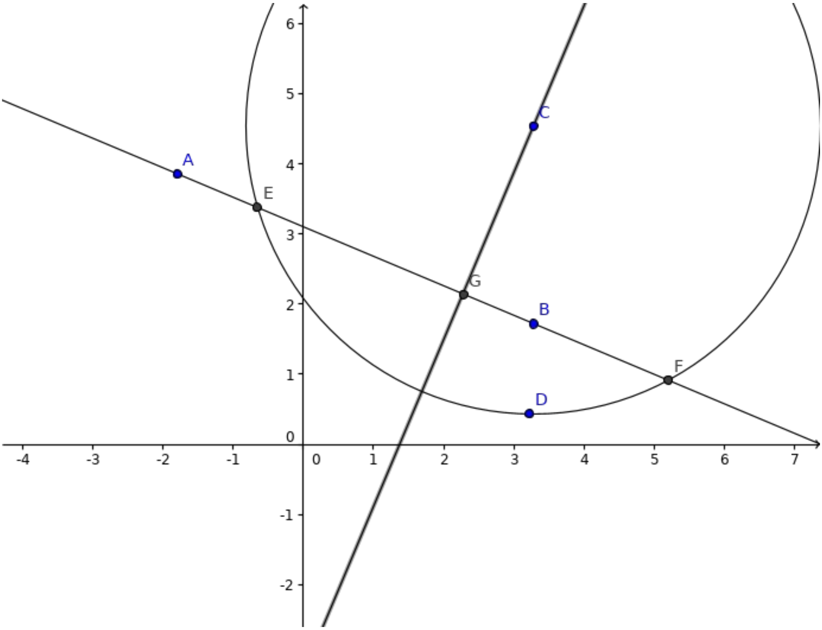

Illustration 11: Proposition 12

On peut construire une droite, perpendiculaire à une ligne droite AB, dans un point C, hors de cette droite, de la manière suivante : On choisit arbitrairement un point D, de l'autre coté de la droite AB que le point C. On construit un cercle de centre C, et de rayon CD. Ce cercle coupe alors la droite AB en deux points, qu'on nommera E et F. Dans le segment EF, on prend le milieu G. La droite CG est alors perpendiculaire à AB.

Démonstration

La construction du cercle peut se faire, par le postulat 3. Le dessin nous montre que ce cercle, qui doit « traverser » la droite AB, doit la couper en deux points, E et F. La proposition 10 nous permet de construire le milieu G du segment EF. La droite CG existe grâce au postulat 1.

Il faut maintenant montrer que cette droite CG est perpendiculaire à AB. On considère le triangle EGC et le triangle FGC. Ce sont des triangles avec les trois cotés respectivement égaux : GC est commun, EC et FC sont deux rayons du même cercle, et comme G est le milieu de EF, EG = GF. Par la proposition 8, on a donc que les 3 angles sont aussi respectivement égaux. L'angle EGC est donc égal à l'angle FGC. Ce sont deux angles égaux qui sont adjacents de la coupure de la droite GC et la droite EF, ce qui fait que ces angles sont des angles droits et que GC est perpendiculaire à EF par définition. Comme EF et AB sont les mêmes droites, on a donc que la droite GC est perpendiculaire à AB. QED.

Commentaire

Il faut utiliser le dessin pour argumenter que le cercle va bien couper la droite en deux points, on ne peut pas le déduire d'un axiome. Mais c'est parfaitement convaincant. C'est classique chez Euclide.

Proposition 13

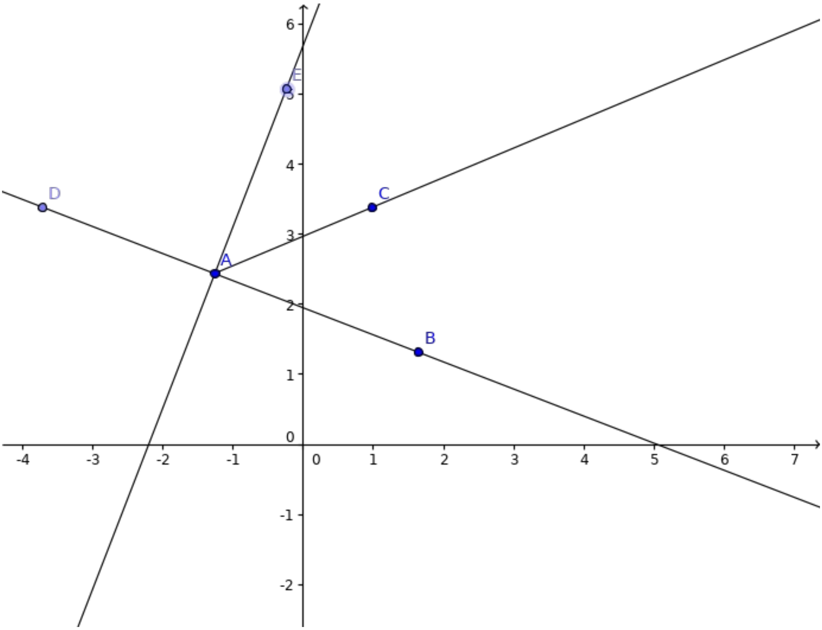

Illustration 12: Proposition 13

Quand une ligne droite part d'un point d'une droite, alors elle forme deux angles droits avec cette droite, ou bien deux angles dont la somme est deux angles droits.

Comme Euclide ne considère pas l'angle de 180 degrés comme un angle (pour lui, un angle est toujours inférieur à 180 degrés), il doit donc faire référence à un angle de 180 degrés comme « deux angles droits ». Essentiellement, il dit que la somme des deux angles que fait une demi-droite avec une droite dont elle est issue, fait 180 degrés.

Démonstration

On considère la demi-droite AC issue de la droite AB en A. Il faut démontrer que la somme des magnitudes de l'angle BAC et l'angle DAC fait deux angles droits.

Deux cas sont possibles : l'angle BAC est égal à l'angle DAC, ou ils sont différents. S'ils sont égaux, par définition, ce sont des angles droits, et donc, leur somme est bien deux angles droits.

S'ils sont différents, par la proposition 11, il est possible de construire une droite, perpendiculaire à la droite AB, dans un point A appartenant à cette droite. On l'appelle la droite AE. AE fait donc de chaque coté, un angle droit avec AB : l'angle BAE et l'angle DAE sont donc deux angles droits. L'angle BAE est égal à l'angle BAC plus l'angle CAE.

Nous avons donc que BAE + DAE = 2 angles droits, et donc BAC + CAE + DAE = 2 angles droits.

Mais CAE + DAE est l'angle DAC.

Alors BAC + DAE est bien 2 angles droits. QED

Commentaire

Il faut à nouveau se reporter au dessin pour voir quand il faut ajouter des angles pour former un angle qui est leur composition.

Proposition 14

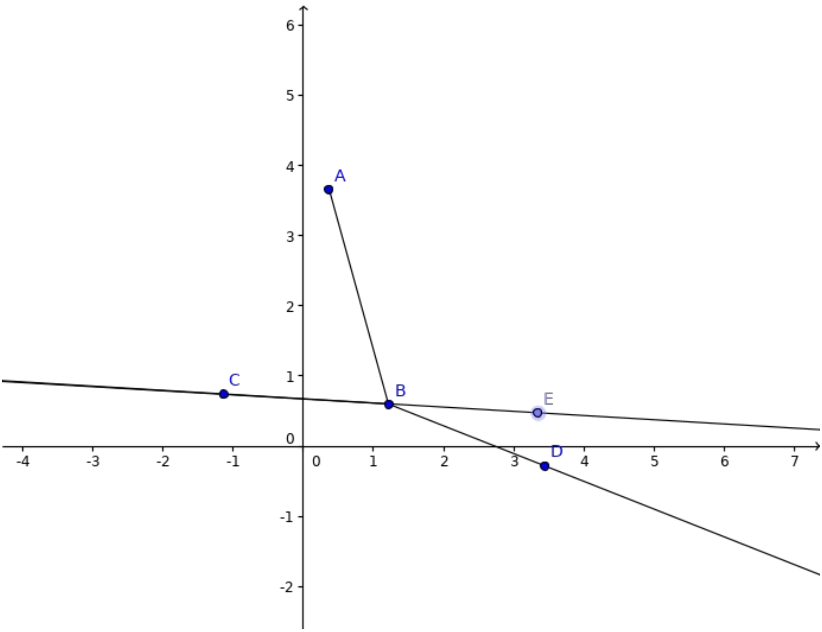

Illustration 13: Proposition 14

Si deux demi-droites, issues du même point d'une droite, et de cotés opposés de cette droite, forment des angles respectivement adjacents avec cette droite qui ont comme somme, deux angles droits, alors les deux demi-droites forment une droite.

Cette proposition est le converse de la proposition 13.

Démonstration

On considère la droite AB, et deux demi-droites issues du point B : la demi-droite BC et la demi-droite BD, de cotés opposés de la droite AB. Il est donc donné que l'angle CBA et l'angle adjacent DBA ont une somme de deux angles droits. Il faut démontrer que les deux demi-droites BC et BD forment une droite.

Démonstration par l'absurde : supposons que cela n'est pas le cas. Alors on peut prolonger la demi-droite CB en BE. On choisit donc un point E sur cette prolongation.

La demi-droite BA est donc issue de la droite CBE, et par la proposition 13, l'angle CBA plus l'angle EBA fait deux angles droits. Mais il était donné que l'angle CBA plus l'angle DBA fait aussi deux angles droits et par postulat 4, « deux angles droits » est toujours la même chose. Il en suit que l'angle DBA et l'angle EBA est le même. Mais l'angle DBA doit être l'angle EBA plus l'angle EBD, donc DBA doit être plus grand que EBA. D'où contradiction. QED.

Euclide fait la remarque qu'il faudrait aussi démontrer le cas où E se trouve de l'autre coté de BD.

Commentaire

Euclide utilise implicitement que l'angle entre deux demi-droites différentes (ici EBD) ne peut pas être zéro.

Proposition 15

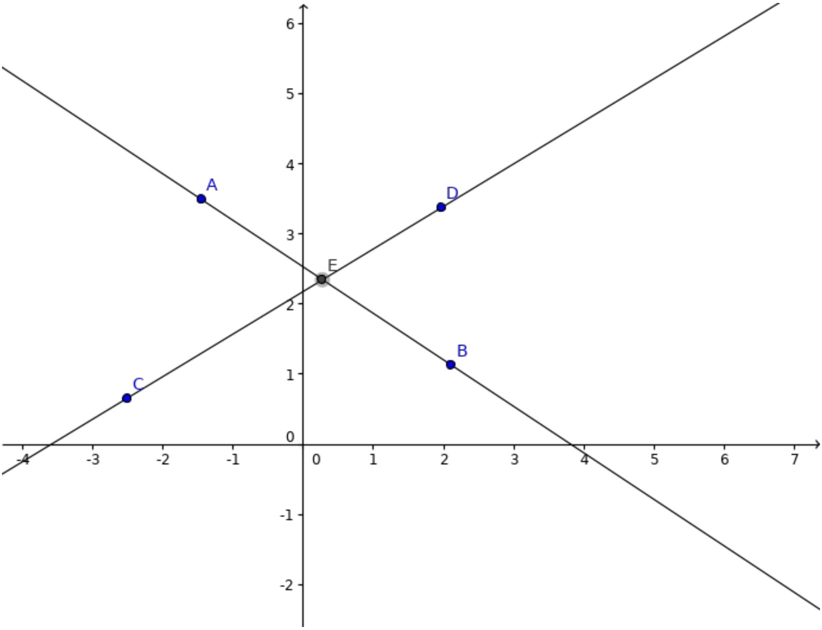

Illustration 14: Proposition 15

Quand deux droites se coupent en un point, les angles opposés sont égaux.

Démonstration

On suppose que la droite AB et la droite CD se coupent dans un point E, qu’on prend entre A et B et entre C et D (sinon on choisit d’autres points A et B et C et D sur les droites, pour qu’il y en ait un de chaque coté du point d’intersection).

Il faut démontrer que l’angle CEA est égal à l’angle BED.

Puisque la demi-droite EA émerge du point E de la droite CD, par la proposition 13 nous avons que l’angle CEA plus l’angle DEA forment deux angles droits.

De la même façon, comme la demi-droite ED émerge du point E de la droite AB, l’angle AED plus l’angle BED forment deux angles droits.

Nous avons donc :

2 angles droits = CEA + DEA = AED + BED

En enlevant DEA (= AED) des deux cotés, nous obtenons bien que CEA = BED. QED.

Corollaire 1

(un corollaire est une proposition qui suit quasi-immédiatement d’une autre proposition)

La somme des 4 angles formés par deux droites qui se coupent, est égale à 4 angles droits.

Exercice : démontrez ceci.

Corollaire 2 (corollaire de Proclus)

Si plusieurs droites se coupent dans un même point, la somme de tous les angles est égale à 4 angles droits.

Exercice : démontrez le corollaire de Proclus.

Proposition 16

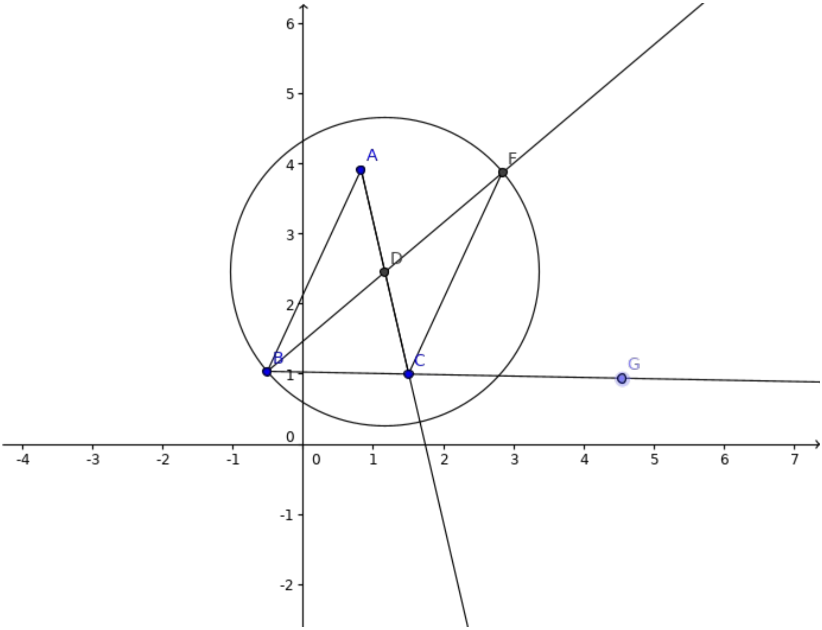

Illustration 15: Proposition 16

Quand on prolonge un coté d'un triangle, l'angle extérieur formé ainsi est plus grand que chacun des angles internes opposés du triangle.

Ici donc, on a le triangle ABC. On a prolongé BC, et l'angle extérieur formé est l'angle ACG. La proposition dit que cet angle est plus grand que l'angle BAC et que l'angle CBA.

Démonstration

On prend le milieu du segment AC, on le nomme le point D. On construit la demi-droite BD (postulat 1). On construit le segment DF sur cette demi-droite, de même longueur que BD. (proposition 3).

Comme AD = DC (D est le milieu), BD = DF par construction, et que l'angle ADB est égal à l'angle FDC par la proposition 15 (ce sont des angles opposés de deux droites qui se croisent dans le point D), le triangle ADB et le triangle FDC sont des triangles avec deux cotés et l'angle entre ces ceux cotés respectivement égaux, alors par la proposition 4, les 3 cotés et les 3 angles sont respectivement égaux. L'angle BAD est donc égal à l'angle DCF. AB est égal (en longueur) à CF.

L'angle DCF est plus petit que l'angle DCG (comme on voit sur la figure). Il en suit que l'angle BAD, qui est l'angle BAC, est plus petit que l'angle DCG, ce qui était la première affirmation de la proposition.

De la même façon, on peut faire cette construction par construire D1, le milieu de BC et refaire tout de ce coté là. Il en suivra que l'angle CBA sera aussi plus petit que l'angle externe de BC et la prolongation de AC. Mais cet angle, par la proposition 15, est égal à l'angle ACG. Cela prouvera la deuxième affirmation de la proposition.

Exercice : faites cela explicitement.

Ainsi, la proposition est prouvée. QED.

Proposition 17

La somme de deux des trois angles internes d'un triangle est toujours plus petite que deux angles droits.

Démonstration

On se réfère à la figure de la proposition 16.

D’un triangle ABC, de la proposition 16 suit que l’angle ABC est plus petit que l’angle externe ACG.

ABC < ACG.

Ajoutons aux deux angles, l’angle BCA :

ABC + BCA < ACG + BCA

L’angle ACG et l’angle BCA sont les deux angles adjacents que la demi-droite CA forme avec la droite BG dans le point C. La proposition 13 dit que leur somme est alors deux angles droits.

Nous avons donc : ABC + BCA < deux angles droits.

Comme nous pouvons faire ce raisonnement pour n’importe quel agencement du triangle, cette proposition est donc vrai pour chaque couple d’angles internes d’un triangle. QED.

Proposition 18

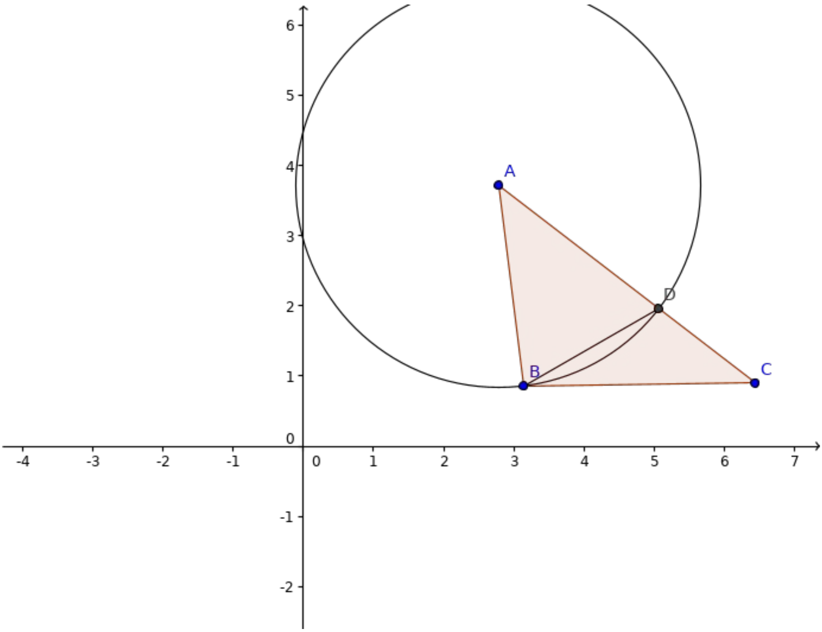

Illustration 16: Proposition 18

Dans un triangle, si un coté est plus long qu'un autre coté, alors l'angle interne en face du plus long coté est plus grand que l'angle interne face à l'autre.

Démonstration

On considère le triangle ABC dont AC est plus grand que AB. Il faut prouver que l'angle ABC est plus grand que l'angle BCA.

Puisque AC est plus long que AB, on peut donc considérer le point D, à l'intérieur du segment AC, tel que AD = AB.

L’angle BDA est l’angle extérieur dans le point B, du triangle BDC. On sait, par la proposition 16, que cet angle extérieur BDA est plus grand que BCD. Comme le triangle ABD est isocèle, l’angle BDA est égal à l’angle ABD. Donc l’angle ABD est plus grand que l’angle BCD. Mais l’angle ABC est encore plus grand que l’angle ABD. Donc l’angle ABC est plus grand que BCD (qui est l’angle BCA).

Proposition 19

Dans un triangle, en face du plus grand angle interne, se trouve le plus long coté.

C’est le converse de la proposition 18.

Démonstration

Supposons que ce ne soit pas vrai. Qu’en face de l’angle ABC, qui est plus grand que l’angle BAC, se trouve un coté qui n’est pas plus grand que le coté BC. On suppose donc que le coté BC est plus grand que le coté AC. La proposition 18 dit alors, que l’angle BAC est plus grand que l’angle ABC. Mais nous avions dit que c’est l’angle ABC. Contradiction. QED.

Proposition 20

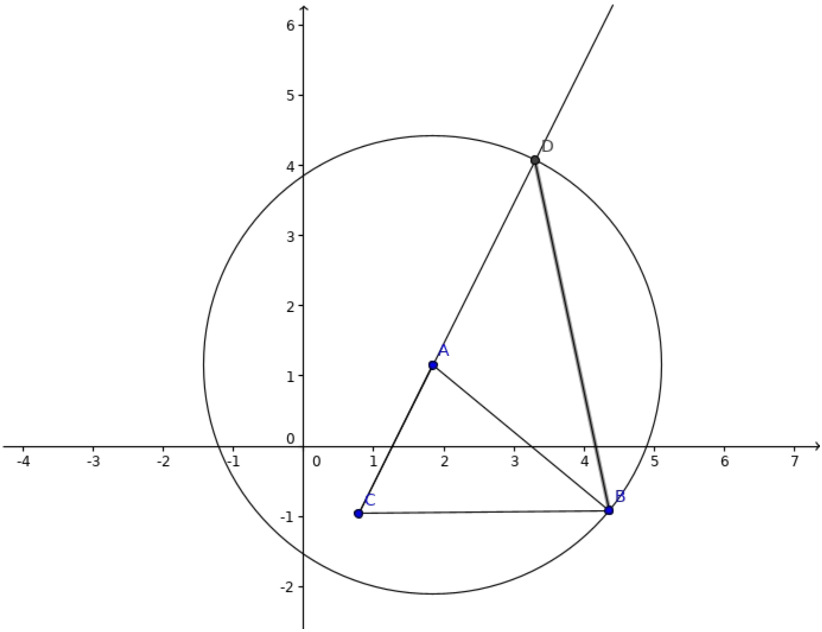

Illustration 17: Proposition 20

Dans un triangle, la somme de deux cotés est toujours plus grande que le coté opposé.

Démonstration

Nous allons démontrer que dans le triangle ABC, le coté BC est plus court que la somme de AC et de AB.

Prolongeons le coté CA et prenons-y le segment AD, de même longueur que AB (postulat 2, et proposition 3). Le triangle ABD est isocèle. L'angle ADB est égal à l'angle ABD, qui lui, est plus petit que l'angle CBD. Dans le triangle CBD, l'angle

CDB est l'angle ADB, qui est donc plus petit que l'angle CBD. Alors, selon la proposition 19, le coté en face de CBD est plus grand que le coté en face de l'angle CDB. Donc CD est plus grand que CB. Mais CD, c'est CA + AD, et AD c'est AB. Alors CD est donc CA + AB. Nous avons donc établi que CA + AB est plus grand que CB. QED.

Proposition 21

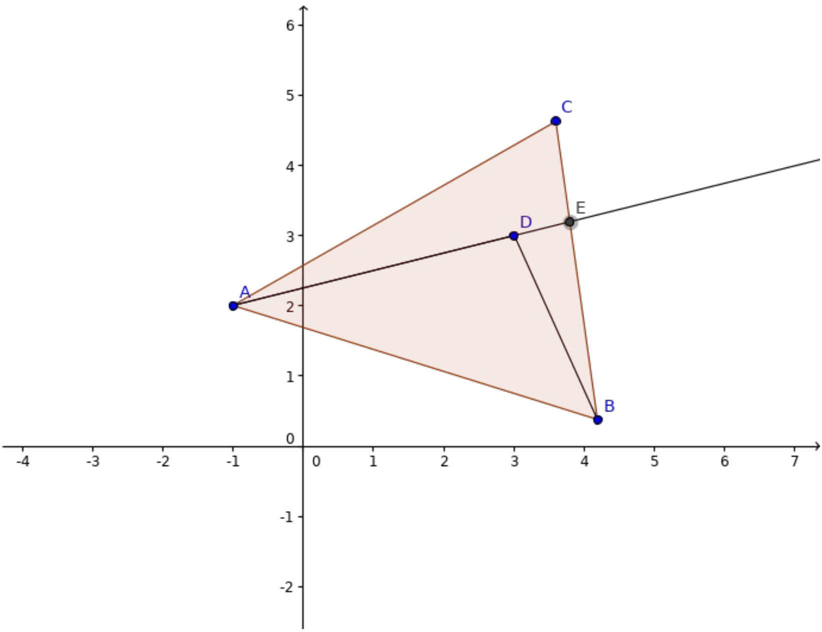

Illustration 18: Proposition 21

Si on construit, à l'intérieur d'un triangle, un autre triangle de même base (et donc dont le sommet se trouve à l'intérieur du premier triangle), alors la somme des deux cotés de ce triangle *est plus petite que la somme des cotés du premier triangle, et l'angle interne en face de la base de ce triangle est plus grand que celui du premier triangle.*

Démonstration

On prend un triangle ABC (base AB). On prend un point D à l'intérieur de ce triangle, et on construit le triangle ABD. La proposition prétend que AD + BD est plus petit que AC + BC, et que l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB.

Prolongez AD (postulat 2) jusqu'à couper CB dans le point E. Dans le triangle CAE, CE + AC est plus grand que AE par la proposition 20. Quand on ajoute de chaque coté, EB. On a alors que CE + AC + EB est plus grand que AE + EB. CE + EB est CB. Nous avons donc que CB + AC est plus grand que AE + EB.

Dans le triangle BDE, BE + ED est plus grand que BD par la proposition 20. En ajoutant AD de chaque coté, on obtient : BE + AD + ED est plus grand que BD + AD. Mais AD + ED est AE. Nous avons donc que AE + EB est plus grand que BD + AD.

Si CB + AC est plus grand que AE + EB, et AE + EB est plus grand que BD + AD, nous avons donc que CB + AC est plus grand que BD + AD. QED.

Commentaire

L'existence du point E sur le segment BC n'est pas déduit des axiomes, mais sur le dessin, il est évident qu'il ne peut pas en être autrement.

Proposition 22

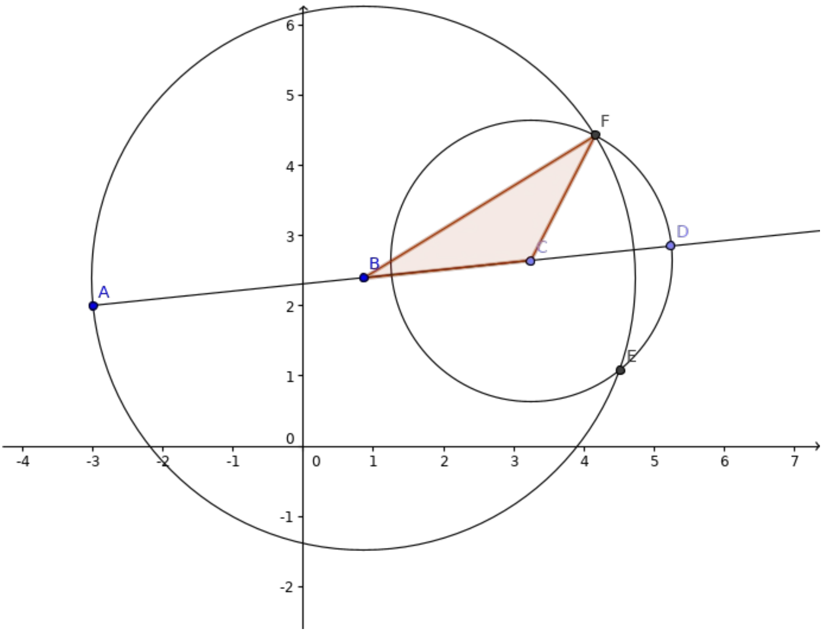

Illustration 19: Proposition 22

Étant donné trois segments, il est possible de construire un triangle ayant des cotés de longueurs égales aux trois segments données, à condition que pour les trois segments donnés, la somme de deux longueurs soit toujours plus grande que le segment restant.

Démonstration

Construisons une demi-droite quelconque, sur le premier segment AB. En suite, on y ajoute le deuxième segment BC. Finalement on ajoute le troisième segment CD. Ceci est toujours possible grâce à la proposition 3.

On construit le cercle de centre B et de rayon AB. C'est possible grâce au postulat 3. On construit le cercle de centre C et de rayon CD. C'est possible grâce au postulat 3.

Les deux cercles se coupent en deux points E et F, si la condition donnée est satisfaite, on choisit F. Alors, on prétend que le triangle BCF est le triangle recherché.

Il a comme coté BC, le segment BC. Il a comme coté BF un coté de longueur AB, puisque AB et BF sont deux rayons du premier cercle. Et il a comme coté CF, un coté de longueur CD, puisque CD et CF sont deux rayons du deuxième cercle.

Ainsi, le triangle BCF possède bien trois cotés de longueurs égales aux trois segments donnés. QED.

Commentaire

On voit sur le dessin que ces deux cercles se coupent quand C est à l'intérieur, et D à l'extérieur du premier cercle, ce qui veut dire que BC est plus petit que AB, et que BD qui est la somme de BC et de CD, est plus grand que AB, ce qui est la condition donnée. L'autre cas, où C et D se trouvent à l'extérieur du premier cercle, est laissé comme exercice.

Comme pour la première proposition, il faut un postulat pour cela.

Proposition 23

Étant donné un angle linéaire, on peut construire un angle *linéaire de même magnitude sur une demi-droite donnée, dans un point donné.*

Cette proposition nous permet de « déplacer » un angle, un peu comme la proposition 3 nous permettait de « déplacer » un segment.

Démonstration

Soit l’angle linéaire donné dans un point A. On choisit deux points quelconques sur les deux segments qui forment cet angle donné, qu’on nomme B et C. On a le triangle ABC.

Soit la demi-droite DE donnée où il faut construire le nouvel angle dans le point D. On prolonge DE dans une droite. De l’autre coté de D que E, on construit le segment DF, de longueur égale à AB. Du même coté de D que E, on construit DG, de longueur égale à AC, suivi de GH, de longueur égale à BC. On construit le triangle DGI comme dans la proposition 22. Ce triangle a les mêmes cotés que le triangle ABC, et donc les mêmes angles (proposition 8). L’angle IDG est donc égal à l’angle BAC, et la demi-droite DG est bien la demi-droite DE. QED.

Proposition 24

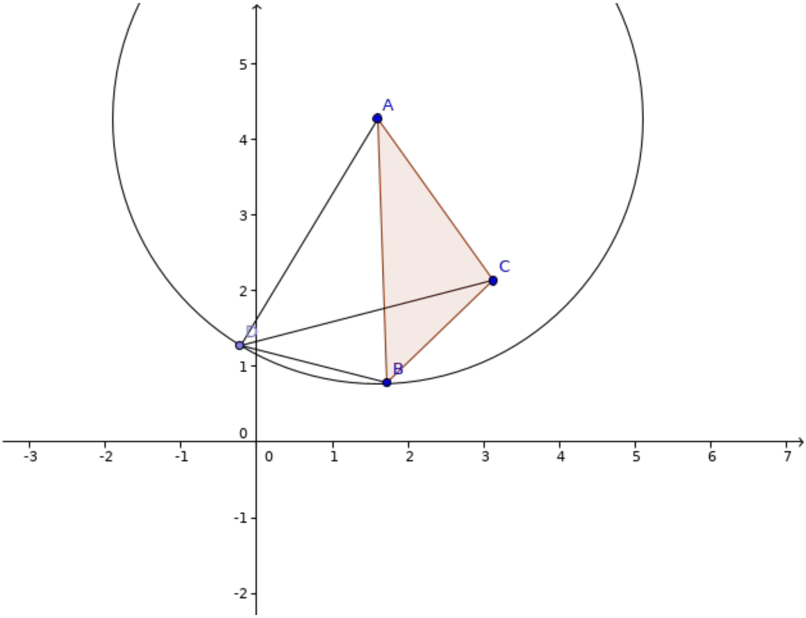

Illustration 20: Proposition 24

Si nous avons deux triangles, avec deux cotés respectivement égaux, mais dont le premier triangle a un angle interne entre ces deux cotés plus grand que le deuxième triangle, alors la base du premier triangle est plus grande que la base du deuxième triangle.

Démonstration

Supposons que nous avons le triangle avec le petit angle ABC, et le triangle avec le grand angle EFG, tel que AB est égal à EF, AC est égal à EG et l'angle FEG est donc plus grand que l'angle BAC.

Par la proposition 23, on peut « transporter » l’angle FEG sur la demi-droite AC (du coté de B). Nous avons donc la demi-droite AH, et l’angle DAC est égal à l’angle FEG. Nous choisissons alors le segment AD sur la demi-droite AH, tel qu’il est de longueur EF, ce qu’on peut faire par la proposition 3.

Nous avons ainsi reproduit le triangle EFG par le triangle DAC : deux cotés égaux, et l’angle FEG est égal à l’angle DAC.

Considérons le triangle ABD. AB = EF = AD. C’est un triangle isocèle. Alors l’angle ADB est égal à l’angle ABD.

L’angle ADB est (voir la figure) plus grand que l’angle CDB. Donc, puisque l’angle ADB est l’angle ABD, on peut dire que l’angle ABD est plus grand que l’angle CDB.

Mais l’angle CBD est encore plus grand que l’angle ABD (voir figure). Il en suit que l’angle CBD est plus grand que l’angle CDB.

On utilise maintenant la proposition 19 dans le triangle CBD : le coté en face du grand angle CBD (donc le coté CD) est plus grand que le coté en face du petit angle CDB (donc le coté CB). Le segment CD est donc plus grand que le segment BC.

Mais le segment CD correspondait au coté FG du « triangle avec le grand angle » dont il fallait prouver qu’il était plus grand que le coté BC du triangle avec le petit angle. QED.

Commentaire

Cette démonstration dépend totalement du fait que le point B est en-dehors du triangle ADC. On se base là-dessus pour dire que l'angle ADB est plus grand que l'angle CDB, puisque ce dernier est une partie du premier, selon le dessin.

Mais il est parfaitement possible que ce point B se trouve à l'intérieur, et les inégalités des angles dans la démonstration ne sont plus valables :

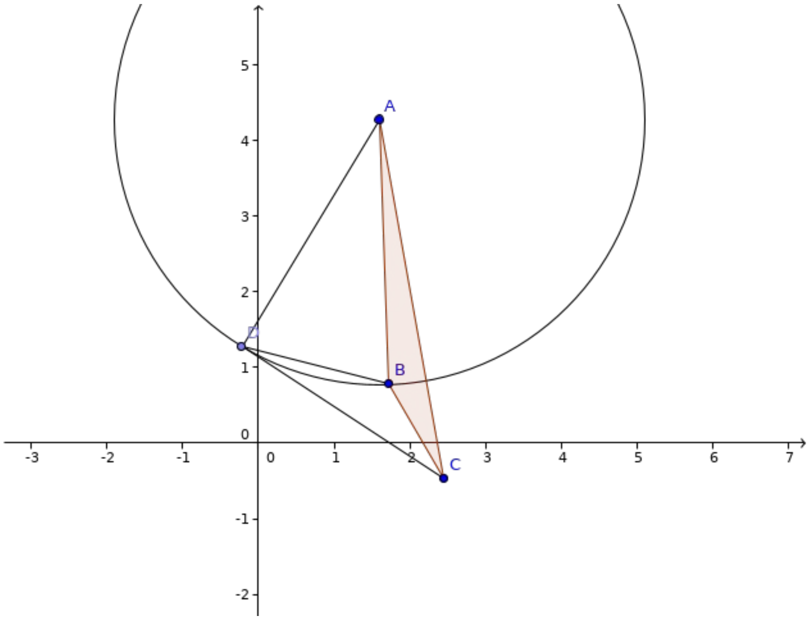

Illustration 21: Proposition 24 alternative

C'est un des rares cas chez Euclide où on utilise une « vérité évidente » du dessin, qui n'est pas évidente, car parfois fausse. Dans certains cas, la démonstration marche, dans d'autres, non.

Proposition 25

Quand deux triangles ont respectivement deux cotés égaux, mais le premier a une plus grande base que le deuxième, alors le premier triangle aura un angle interne, en face de la base, plus grand que le deuxième triangle.

Démonstration

Comme cette proposition est la converse de la proposition 24, on va utiliser la réduction à l'absurde pour la prouver.

Admettons que la proposition ne soit pas vraie. Alors le premier triangle a une plus grande base que le deuxième, mais un plus petit angle. On utilise maintenant la proposition 24, qui dit que le deuxième triangle, qui a donc le plus grand angle, doit avoir la plus grande base. Mais nous venons de dire que c'est le premier triangle qui a cette plus grande base. Contradiction. QED.

Proposition 26

En réalité, il y a deux propositions 26 séparées. La première est :

1) Si deux triangles qui ont respectivement deux angles égaux, ont aussi le coté entre ces deux angles respectivement égal, alors les autres cotés et angles sont aussi respectivement égaux.

2) Si deux triangles qui ont respectivement deux angles égaux, et ont aussi un coté en face d'un de ces angles respectivement égal, alors les autres cotés et angles sont aussi respectivement *égaux.*

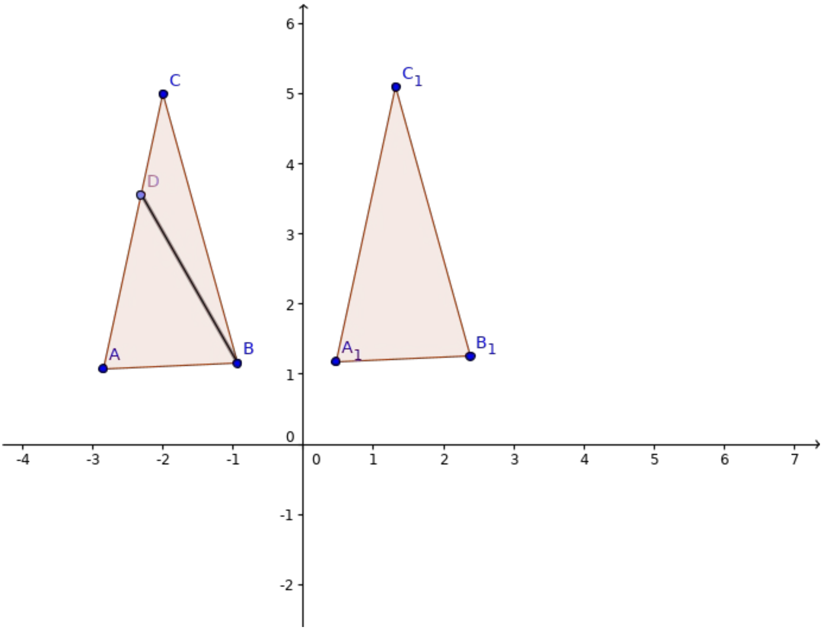

Illustration 22: Proposition 26 - 1

Démonstration 1

On suppose que le triangle ABC et le triangle A1B1C1 ont le coté AB et A1B1 et les angles internes CAB et C1A1B1 ainsi que CBA et C1B1A1 égaux.

On va démontrer que AC est alors A1C1. Supposons que cela ne soit pas le cas, et que AC est plus petit que A1C1 (on interchange les triangles sinon). On peut donc, par la proposition 3, construire AD, égal à A1C1. Construisons le segment DB.

Dans le triangle BDA, nous avons que l'angle DBA (qui est CBA) est égal à l'angle C1B1A1, que AB est égal à A1B1 et que AD est égal à A1C1. Par la proposition 4, nous avons alors que le triangle BDA et le triangle A1B1C1 ont les mêmes angles et les mêmes cotes respectivement.

Cela veut dire que l'angle A1B1C1 est égal à l'angle ABD. Mais par hypothèse, il était aussi égal à l'angle ABC. Alors que l'angle ABD est plus petit que l'angle ABC (voir figure). Contradiction. Donc AC est bien égal à A1C1.

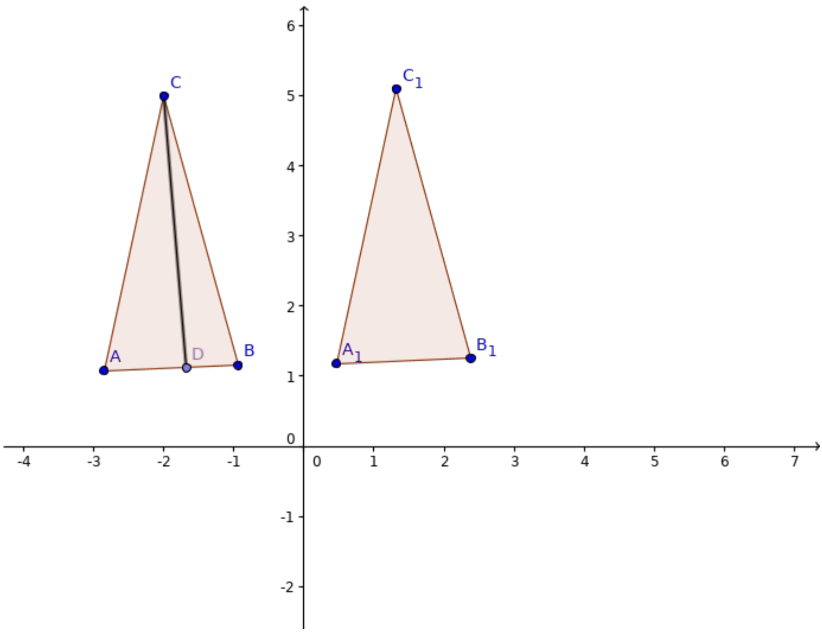

Illustration 23: Proposition 26 - 2

Mais alors, le triangle ABC possède deux cotés (AB et AC) égaux aux cotés A1B1 et A1C1, et l'angle entre les deux cotés est aussi le même : CAB est l'angle C1A1B1. De la proposition 4 suit alors que les autres angles et cotés sont les mêmes dans ces deux triangles. QED.

Démonstration 2

Cette fois, nous supposons que l’angle CAB est l’angle C1A1B1, que l’angle CBA est l’angle C1B1A1, et cette fois, que AC est égal à A1C1.

Nous prétendons que AB est égal à A1B1. Supposons que cela n’est pas le cas, et que AB est plus grand que A1B1. (sinon, on interchange les triangles)

Alors, on peut construire le segment AD de même longueur que A1B1 par la proposition 3, et former, par le postulat 1, le segment CD. De façon similaire à la démonstration 1, on peut montrer que le triangle CAD aura les mêmes angles et les mêmes cotés que le triangle A1B1C1. En particulier, l’angle ADC est égal à l’angle A1B1C1.

Mais dans le triangle CDB, l’angle DBC est égal à l’angle A1B1C1 aussi. Ce triangle aurait donc, comme angle intérieur en B, le même angle, que l’angle extérieur en D. Cela est contredit par la proposition 16. Contradiction donc. Il en suit que AB est bien égal à A1B1.

Il en suit alors, comme dans la démonstration 1, que tous les angles et cotés de ABC sont égaux aux angles et cotés respectifs de A1B1C1. QED.

Proposition 27

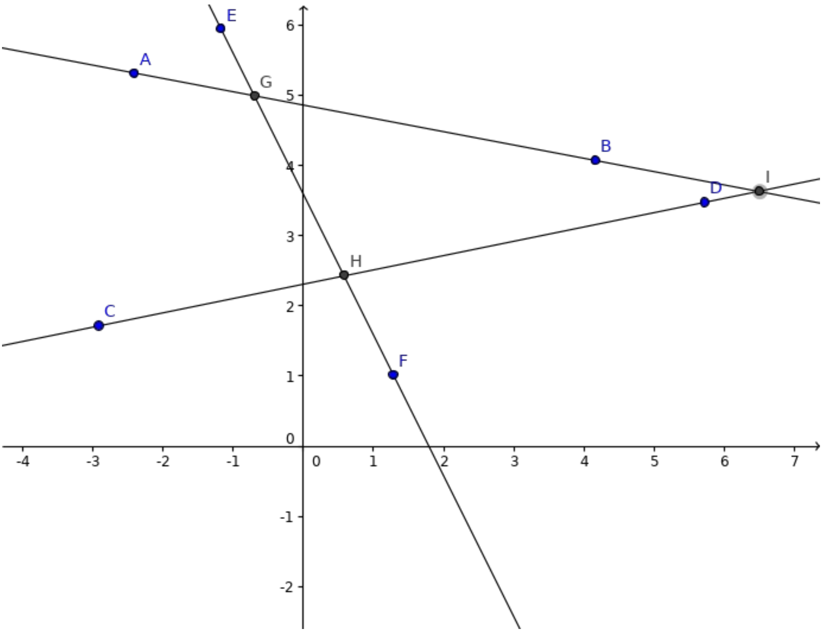

Illustration 24: Proposition 27

Si une droite coupe deux autres droites, tel que les angles internes alternes sont égaux, alors ces deux autres droites sont parallèles.

Démonstration

Dans la figure, la droite EF coupe les droites AB et CD dans les points G et H respectivement, et on affirme que l'angle AGF est égal à l'angle EHD.

On suppose que la proposition est fausse, et que les deux droites AB et CD se coupent dans un point I. On considère alors le triangle GHI. L'angle AGF est l'angle externe en G. L'angle EHD est l'angle interne en H. Selon la proposition 16, l'angle externe en G doit être plus grand que l'angle interne en H. Alors qu'ils sont égaux. Contradiction. Les deux droites AB et CD ne peuvent donc pas se couper, ce qui veut dire qu'elles sont bien parallèles. QED.

Proposition 28

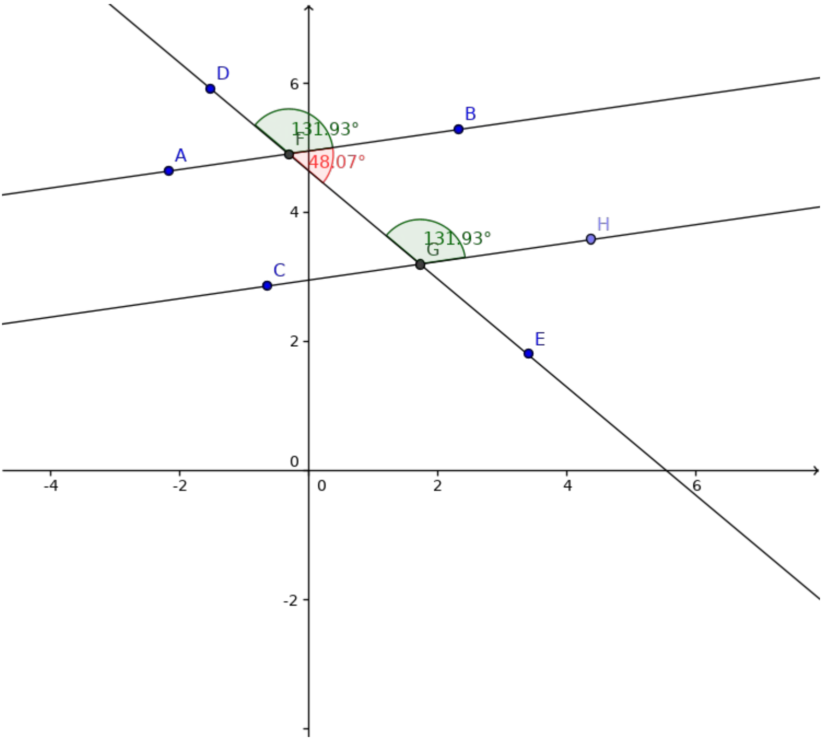

Illustration 25: Proposition 28

Si une droite DE coupe deux autres droites, et ou bien l'angle

DFB est égal à l'angle FGH, ou bien l'angle BFG plus l'angle FGH est égal à deux angles droits, alors les deux droites coupées sont parallèles.

Démonstration 1

Pour le cas que l'angle DFB soit égal à l'angle FGH : par la proposition 15, l'angle DFB est égal à l'angle AFG. Nous nous trouvons maintenant dans le cas de la proposition 27, et donc, les deux droites coupées sont bien parallèles.

Démonstration 2

Pour le cas que l'angle BFG plus l'angle HGF sont égaux à deux angles droits :

AFG + BFG = deux angles droits par la proposition 13.

Ainsi, nous avons AFG + BFG = BFG + HGF. En enlevant BFG, nous trouvons que AFG = HGF.

Par la proposition 27, les deux droites sont alors parallèles.

Proposition 29

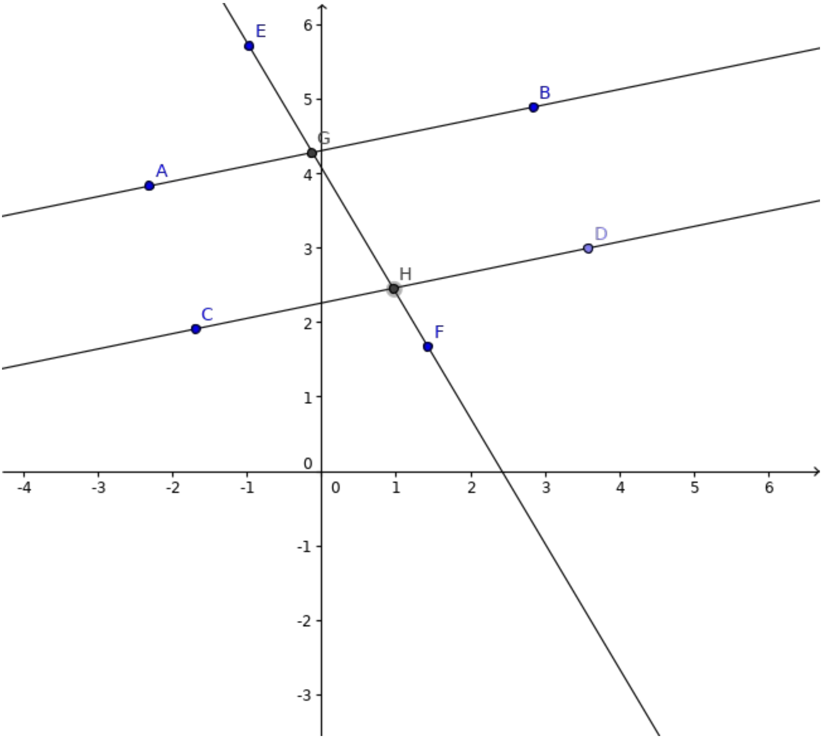

Illustration 26: Proposition 29

Quand une droite coupe deux autres droites, parallèles entre elles, alors :

- *les angles alternes internes sont égaux (AGH = GHD)*
- *l'angle externe est égal à l'angle interne du même coté de l'autre droite (EGB = GHD)*
- *la somme des deux angles internes du même coté est égale à deux angles droits (BGH + DHG)*

Démonstration 1

Suppose que l'angle AGH n'est pas égal à l'angle GHD. Cela veut donc dire qu'un est plus grand que l'autre. Disons que AGH est plus grand que GHD (exercice pour l'autre cas).

On ajoute l'angle BGH. Cela veut donc dire que AGH + BGH est plus grand que GHD + BGH. Par la proposition 13, AGH + BGH, angles adjacent d'une demi-droite GH sur la droite AB, est égal à deux angles droits. Donc GHD + BGH est plus petit que deux angles droits.

Ce sont les angles internes du même coté de deux droites qui sont coupées par une troisième droite EF. Par le postulat 5, ces deux droites se coupent alors de ce coté-là. Mais par hypothèse, c'étaient des droites parallèles qui ne se coupent donc pas. Contradiction. L'angle AGH est donc bien égal à l'angle GHD. QED.

Démonstration 2

Par la proposition 15, l'angle EGB est égal à l'angle AGH, qui lui, par la première démonstration, est égal à GHD. Nous avons donc que l'angle EGB est égal à l'angle GHD. QED.

Démonstration 3

Par la démonstration 2, l'angle EGB est égal à l'angle GHD. On ajoute l'angle BGH à chaque coté. Alors nous avons que EGB + BGH est égal à GHD + BGH. Par la proposition 13, EGB + BGH, les angles adjacents d'une demi-droite GB sur une droite EF, sont deux angles droits. Il en suit que GHD + BGH est deux angles droits. QED.

Proposition 30

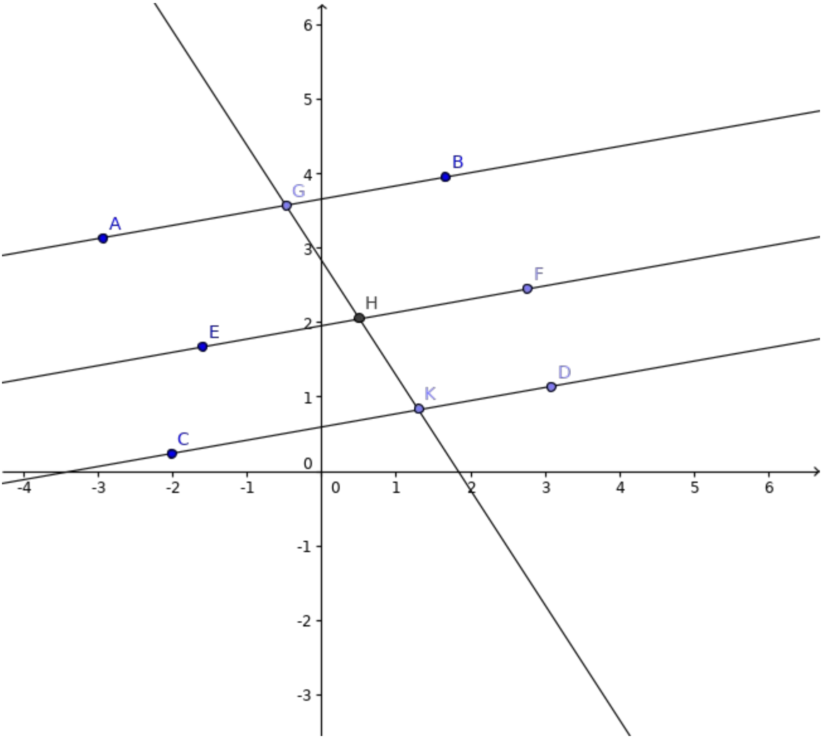

Illustration 27: Proposition 30

Si deux droites sont chacune parallèle à une troisième droite, elles sont parallèles entre elles.

Démonstration

On suppose que AB // EF et CD // EF. Il faut prouver que AB // CD.

Coupons les droites avec une nouvelle droite GK.

Par la proposition 29, l’angle AGH est égal à l’angle GHF (internes alternes).

Aussi par la proposition 29, GHF est égal à GHK (externe et interne du même coté).

Il en suit que l’angle AGH est égal à GHK. Mais par la proposition 27, les droites AB et CD sont alors parallèles. QED.

Proposition 31

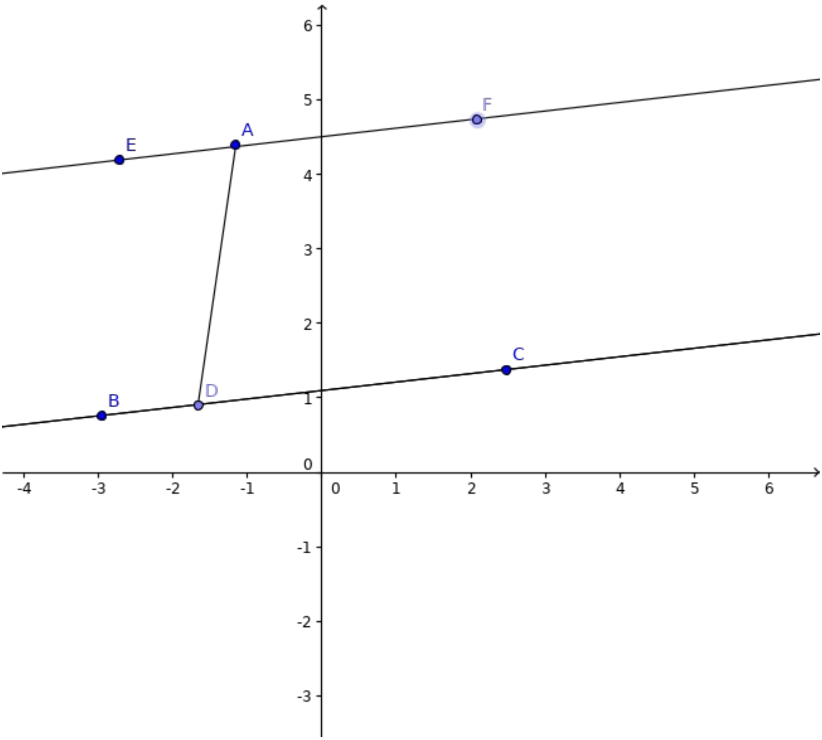

Illustration 28: Proposition 31

On peut construire une droite, parallèle à une droite donnée BC, et passant par un point donné A :

Choisissez un point D au hasard sur la droite BC, et construisez AD. Construisez l'angle DAE égal à l'angle ADC. Prolongez le segment AE des deux cotés. Voilà la droite parallèle à BC, passant par le point A.

Démonstration

Par le postulat 1 on peut toujours construire AD. Par la proposition 23, on peut construire un angle de magnitude donnée (ici donc l'angle ADC) sur un segment donné dans un point donné (donc sur AD en A). On appelle l'autre segment construit ainsi, le segment AE. On peut en suite, par le postulat 2, prolonger tout segment.

La droite ainsi construite est parallèle à BC, parce que, par la proposition 27, elle à les mêmes angles alternes internes. QED.

Commentaire

On peut démontrer qu'on peut prendre la proposition 31 comme un axiome, et alors on peut en déduire le postulat 5. On dit que les deux énoncés sont logiquement équivalents dans Euclide. Souvent, on préfère suivre cette voie (qui n'est pas le choix d'Euclide) : la proposition 31 semble effectivement « plus simple » et « plus évidente » que le postulat 5.

Proposition 32

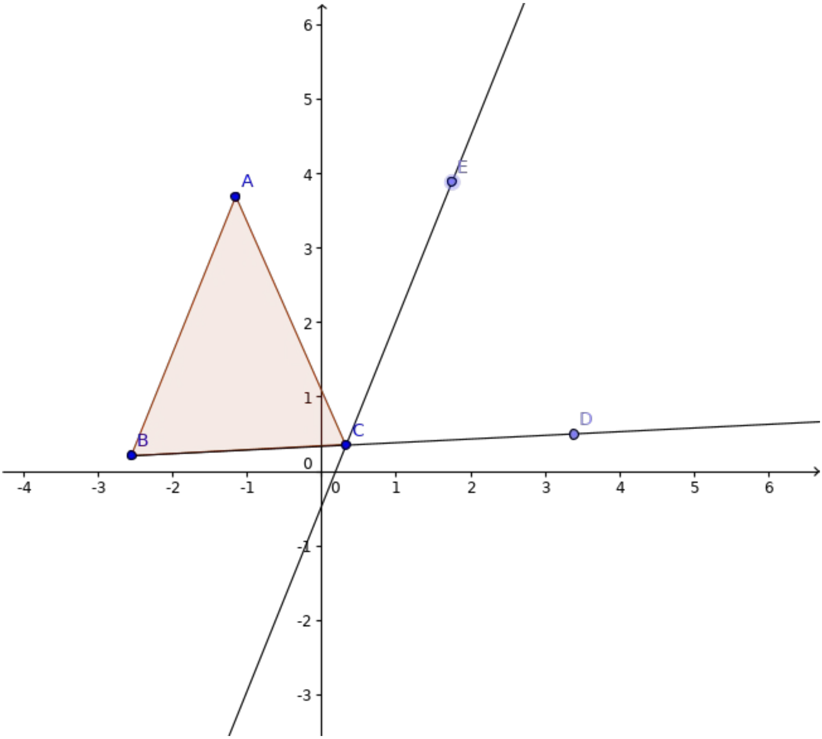

Illustration 29: Proposition 32

Dans un triangle, si on prolonge un des cotés, alors l’angle externe ainsi formé est égal à la somme des deux autres angles internes. La somme des 3 angles internes est égal à deux angles droits.

Démonstration 1

Dans le triangle ABC on prolonge la base BC en BD (postulat 2). On construit une demi-droite, parallèle à AB, dans le point

C (par la proposition 31).

Puisque AB est parallèle à CE, et AC les coupe, les angles alternes internes BAC et ACE sont les mêmes par la proposition 29.

Puisque AB est parallèle à CE, et BD les coupe, l’angle externe ECD et l’angle interne du même coté, ABC, sont égaux.

L’angle ACD est l’angle ACE plus l’angle ECD et donc l’angle ACD est l’angle BAC plus l’angle ABC.

L’angle externe du triangle en C est donc bien la somme des angles internes en A et en B. QED

Démonstration 2

AC est une ligne droite émergeante du point C de la droite BD. Par la proposition 13, la somme des deux angles adjacents ACB et ACD et alors égale à deux angles droits. Mais, par la démonstration 1, ACD est BAC plus ABC.

Nous avons donc que ACB plus BAC plus ABC sont deux angles droits. QED.

Proposition 33

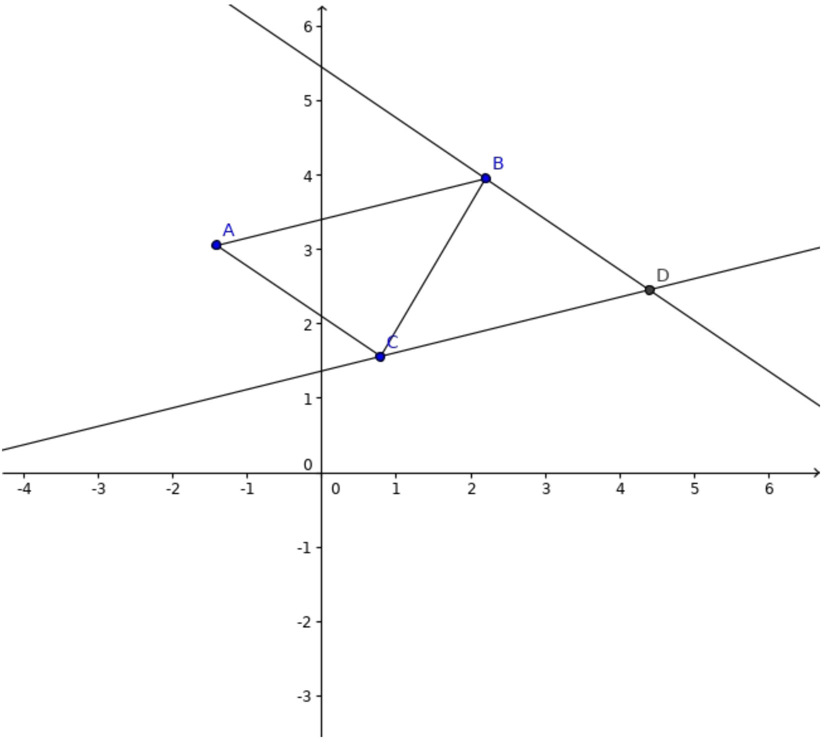

Illustration 30: Proposition 33

Si AB et CD sont des segments égaux et parallèles et dans le même sens, alors AC et BD sont aussi égaux et parallèles.

Démonstration

Reliez BC (postulat 1). La droite BC coupe deux lignes parallèles AB et CD. Par la proposition 29, les angles internes alternes ABC et BCD sont égaux.

Comparons le triangle ABC et le triangle BCD. Ils ont deux cotés respectivement égaux AB = CD et BC est commun. L'angle entre ces deux cotés égaux est le même aussi (ABC = BCD). Il en suit, par la proposition 4, que AC = BD et les autres angles sont alors aussi les mêmes. Par exemple, l'angle ACB est égal à l'angle CBD.

Mais alors, la droite CB qui coupe deux autres droites AC et BD avec des angles alternes internes égaux. Par la proposition 27, AC et BD sont alors parallèles. On avait déjà démontré qu'ils étaient égaux. QED.

Commentaire

Le « dans le même sens » n'a pas de base formelle chez Euclide, et souvent on ne le démontre pas, mais la figure nous indique sans ambiguïté ce qu'il en est.

Proposition 34

On utilise la figure de la proposition 33.

Dans un parallélogramme, les cotés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux, et la diagonale coupe la surface en deux parties égales.

Démonstration

ABDC est un parallélogramme. Par cela, Euclide entend que AB // CD et AC // BD.

BC coupe les droites parallèles AB et CD. Alors les angles alternes internes ABC et BCD sont égaux par la proposition 29.

BC coupe les droites parallèles AC et BD. Alors les angles alternes internes ACB et CBD sont égaux par proposition 29.

Quand on fait la somme, on a que l'angle ABC plus CBD est égal à l'angle ACB plus l'angle BCD. Ce qui n'est rien d'autre que l'angle ABD qui est l'angle ACD. Les deux angles opposés en B et C sont donc les mêmes.

Quand on compare les triangles ABC et BCD, on avait établi que : l'angle ABC est égal à l'angle BCD ; l'angle ACB est égal à l'angle CBD, et le coté entre les deux angles, BC, est commun. Par la proposition 26, ces deux triangles ont alors les autres cotés et angles égaux. Les deux angles opposés en A et D sont donc aussi les mêmes. Et il en suit aussi que AB = CD et AC = BD.

Finalement, le triangle ABC et le triangle BDC ont les mêmes cotés, donc les mêmes angles, et donc la même surface. La diagonale BC coupe donc bien la surface du parallélogramme en deux parties égales : ces deux triangles.

Nous avons donc établi que :

- Les angles opposés en A et D, ainsi qu'en C et B, sont les mêmes.
- Les cotés opposés, AB = CD et AC = BD
- La surface totale est coupé en deux parties égales par la diagonale BC

QED.

Commentaire

Bien qu'il soit évident que deux triangles qui ont les mêmes angles et cotés ont les mêmes surfaces, il n’y a aucun axiome qui nous permet de le dire. Mais, comme d’habitude chez Euclide, ce n’est pas formellement correct, mais parfaitement convaincant.

Proposition 35

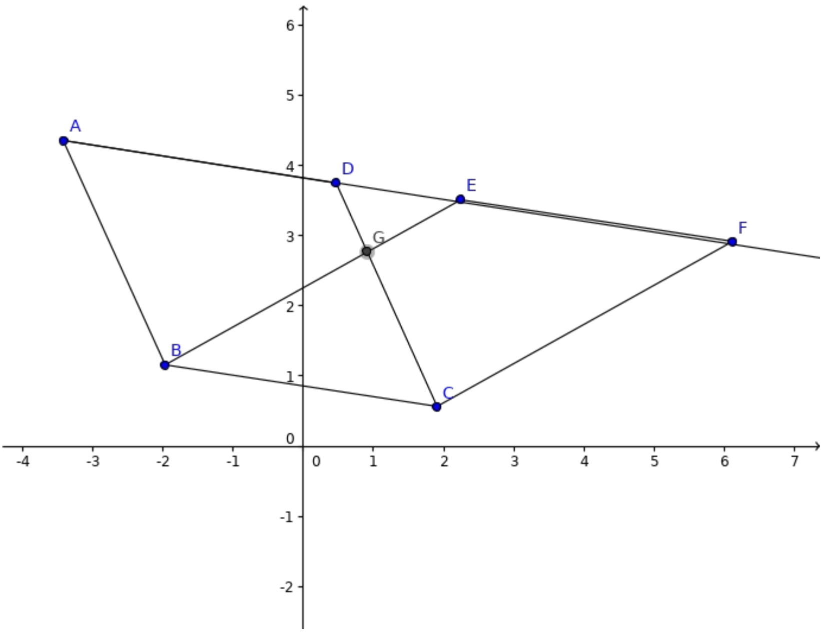

Illustration 31: Proposition 35

Deux parallélogrammes sur la même base, et entre les deux mêmes parallèles de la base, sont de même surface (Euclide dit « sont les mêmes » comme il dit que deux segments de même longueur sont les mêmes).

Démonstration

Puisque ABDC est un parallélogramme, par la proposition 34, AD = BC. Puisque EFDC est un parallélogramme, EF = BC. Alors AD = BC = EF.

Quand on ajoute DE à AD et à EF, on a donc que AE = DF.

Puisque ABDC est un parallélogramme, par la proposition 34, AB = DC.

La droite AD coupe deux droites parallèles AB et DC, par la proposition 26 (angle interne et externe du même coté), l'angle FDC est égal à l'angle EAB.

Alors quand on compare les triangles EAB et FDC, ils ont deux cotés (AB = DC et AE = DF) et l'angle entre ces deux cotés égaux.

Les surfaces de EAB et FDC sont les mêmes. On va soustraire des deux, le triangle DEG, et ajouter aux deux, le triangle BCG. Alors nous obtenons l'égalité des surfaces des parallélogrammes ABDC et BCFE.

QED.

Dans la démonstration, Euclide a traité le cas « difficile ». Comme exercice, il faudrait faire le cas où AD et EF se chevauchent (donc l'ordre est AEDF au lieu du cas ADEF qu'on vient de traiter).

Commentaire

Il est évident que le « puzzle » de surfaces en morceaux qu'on ajoute ou qu'on soustrait, vient totalement du dessin. Il n'y a pas d'axiomes qui disent ce qui est à l'intérieur de quoi, mais sur le dessin, comme d'habitude, c'est évident.

Proposition 36

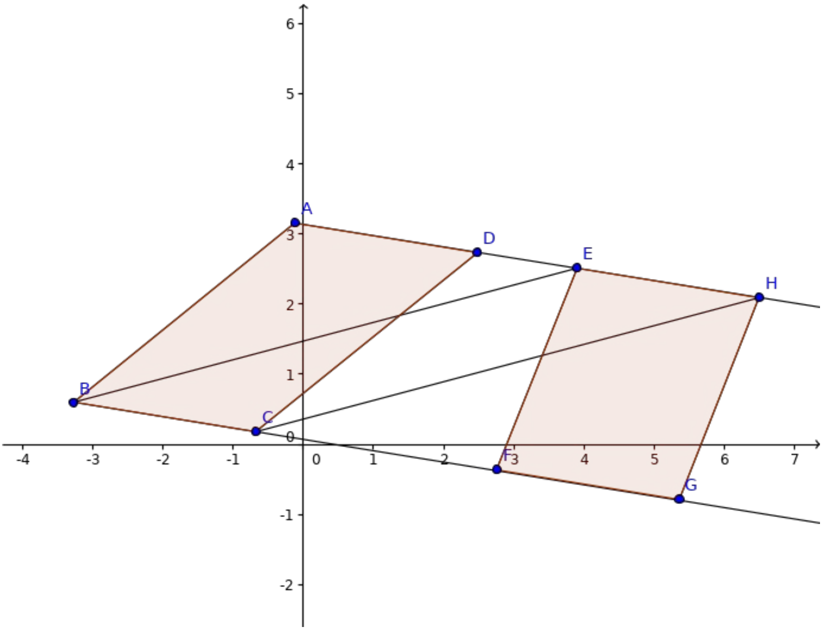

Illustration 32: Proposition 36

Deux parallélogrammes entre les mêmes parallèles, et avec des bases égales, sont de même surface.

Ceci est une généralisation de la proposition 35, où la base était le même segment : ici, il faut juste que ce soient deux segments de même longueur.

Démonstration

Nous avons le parallélogramme ABDC et le parallélogramme EFGH, et AD et EH sont sur la même droite, ainsi que BC et FG. BC et FG sont de même longueur.

Par la proposition 34, FG et EH sont de même longueur. Puisque par hypothèse, BC et FG sont de même longueur, alors BC et EH sont aussi de même longueur.

On construit le segment BE et CH par le postulat 1. Alors dans la figure BEHC, nous avons que BC et EH sont parallèles, et de même longueur. Par la proposition 33, BE et CH sont alors parallèles et de même longueur, en d'autres termes, BEHC est un parallélogramme.

Il en suit que le parallélogramme BEHC et ABDC sont des parallélogrammes de même base et entre deux mêmes droites parallèles ; par la proposition 35, ils ont la même surface.

Le parallélogramme BEHC et le parallélogramme FGHE sont aussi des parallélogrammes de même base et entre deux mêmes droites parallèles. Par la proposition 35, ils ont la même surface.

Ainsi, ABDC et FGHE ont la même surface. QED.

Proposition 37

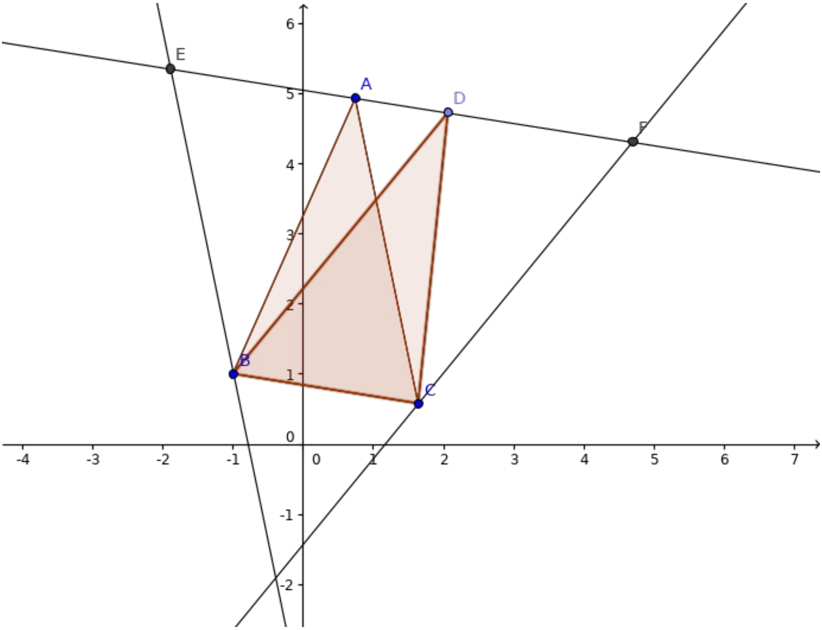

Illustration 33: Proposition 37

Deux triangles qui ont la même base, et qui ont des sommets qui sont sur une droite parallèle à la base, ont les mêmes surfaces.

Démonstration

On parle des triangles ABC et DBC, dont AD est donc parallèle à BC. Par le postulat 2, on prolonge AD en une droite.

Par la proposition 31, on peut construire une droite parallèle à AC, dans le point B. Cette droite coupera AD dans le point E.

De la même façon, on construit CF, parallèle à BD.

EACB est donc un parallélogramme (EA est parallèle à BC et EC est parallèle à AC). DFCB est un parallélogramme de la même façon. Se sont des parallélogrammes de même base BC et entre les mêmes droites parallèles. Par la proposition 35, ils ont la même surface.

AB est une diagonale de EACB. Le triangle ABC a donc la surface qui est la moitié de EACB par la proposition 34.

CD est une diagonale de DFCB. Le triangle BCD a donc la surface qui est la moitié de DFCB par la proposition 34.

Il en suit que la surface de ABC est égale à la surface de BCD. QED.

Proposition 38

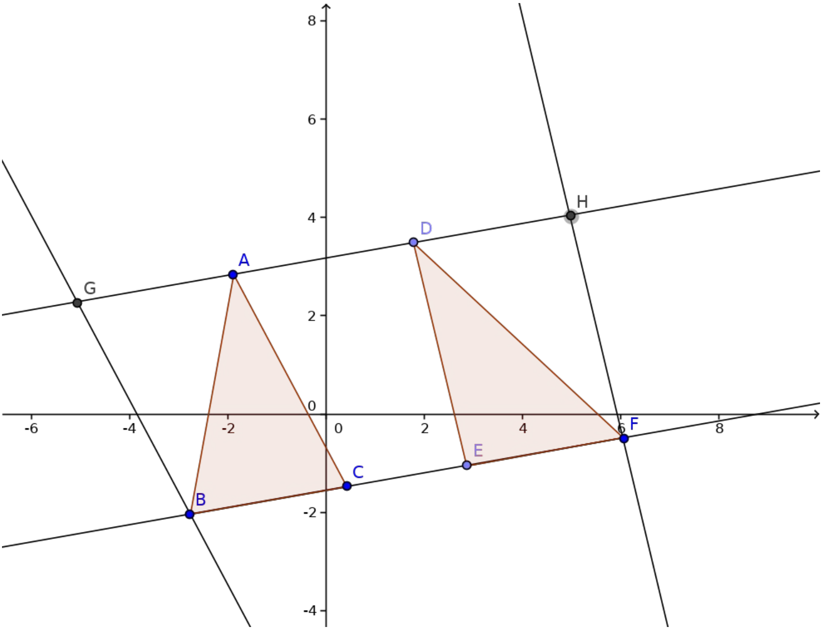

Illustration 34: Proposition 38

Deux triangles, qui ont des bases de longueur égale et qui font partie de la même droite, et qui ont des sommets qui font partie de la même droite parallèle aux bases, ont les mêmes surfaces.

Cette proposition est une généralisation de la proposition 37, qui nécessitait que les bases soient le même segment.

Démonstration

On construit BG, parallèle à AC. Cette droite peut être construite car c'est une droite parallèle à un segment donné (AC) qui passe par un point donné (B) par la proposition 31.

De la même façon, on construit FH, parallèle à DE.

GACB est un parallélogramme (délimité par des droites 2 à 2 parallèles), ainsi que DHFE.

Ces deux parallélogrammes ont des bases de même longueur et entre les mêmes parallèles. Par la proposition 36, ils ont la même surface.

La diagonale AB coupe le parallélogramme GACB en deux : le triangle ABC a donc la demi-surface du parallélogramme.

La diagonale DF coupe le parallélogramme DHFE en deux : le triangle DEF a donc la demi-surface du parallélogramme.

Ainsi, le triangle ABC et le triangle DEF ont donc la même surface. QED.

Proposition 39

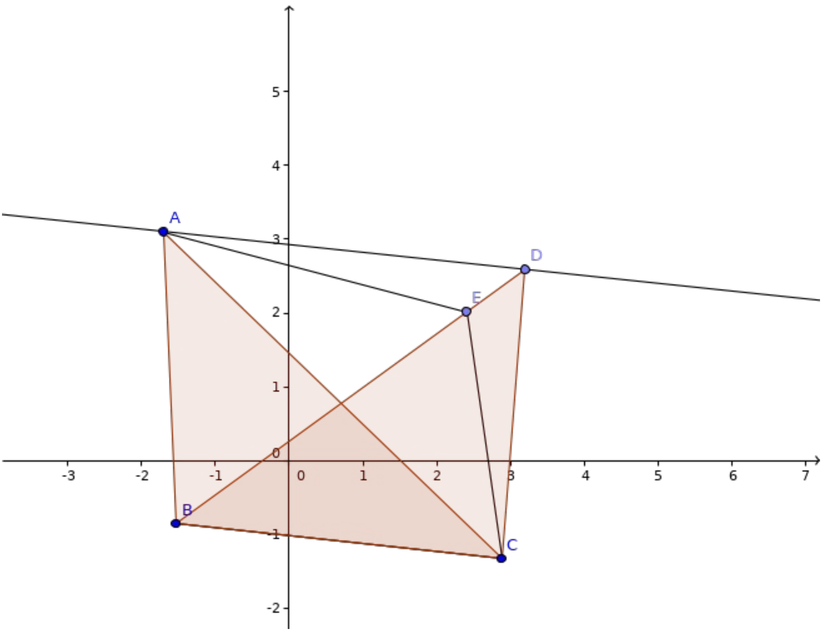

Illustration 35: Proposition 39

Des triangles de même surface, sur la même base et du même coté de la base, ont des sommets sur une droite, parallèle à la base.

Démonstration

Les triangles ABC et DBC ont la même base BC, et sont du même coté de cette base. Ils ont la même surface. Il faut prouver que AD est parallèle à BC.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il est possible de construire une droite AE, parallèle à BC, passant par le point A, par la proposition 31. Cette droite coupe la droite BD dans le point E, différent de D. Reliez le point E au point C par le postulat 1.

Le triangle ABC est sur la même base, et entre les mêmes parallèles, que le triangle BEC. Par la proposition 37, ils ont les mêmes surfaces. Mais le triangle BDC avait aussi cette même surface. Si E se trouve entre B et D, alors le triangle BEC doit être plus petit que BDC. Si E se trouve au-delà de D, alors BEC doit être plus grand que BDC. Contradiction. QED.

Proposition 40

La proposition 40 a été ajouté par des auteurs après Euclide et n’est pas utilisée dans le reste de l’œuvre. On ne la présente pas.

Proposition 41

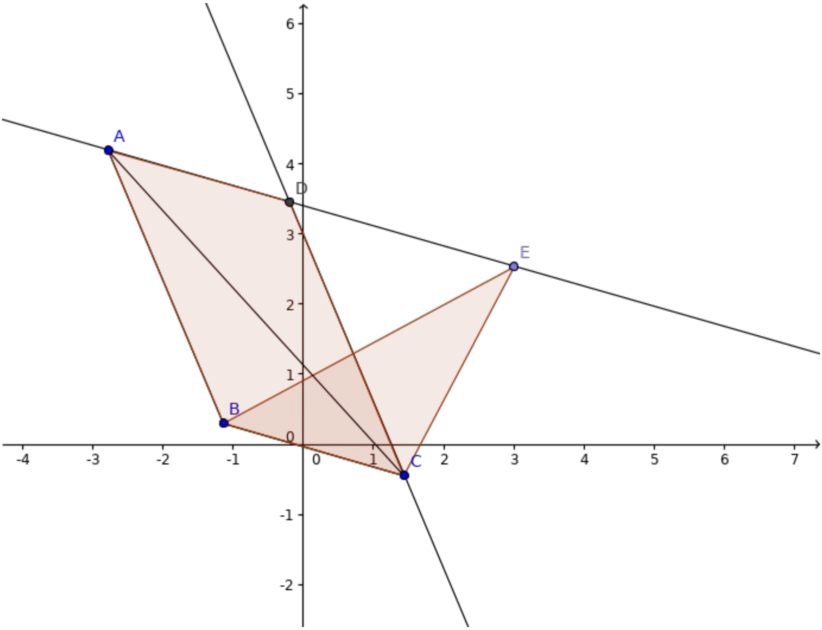

Illustration 36: Proposition 41

Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et le sommet du triangle est sur la droite parallèle de l'autre coté que la base du parallélogramme (Euclide dit : que le parallélogramme et le triangle sont contenus par la même paire de droites parallèles), alors la surface du triangle est la moitié de la surface du parallélogramme.

Démonstration

Le parallélogramme ADCB et le triangle EBC ont la même base BC. Le sommet du triangle se trouve sur la droite AD (parallèle à BC).

On construit la diagonale AC du parallélogramme.

Le triangle ABC est sur la même base BC que le triangle EBC, et les deux triangles ont leur sommet sur une droite parallèle à la base. Par la proposition 37 ils ont la même surface.

Le triangle ABC a la moitié de la surface du parallélogramme ADCB, car la diagonale coupe le parallélogramme en deux (proposition 34). Ainsi, le triangle EBC, de même surface que ABC, est donc la moitié de la surface du parallélogramme ADCB. QED.

Proposition 42

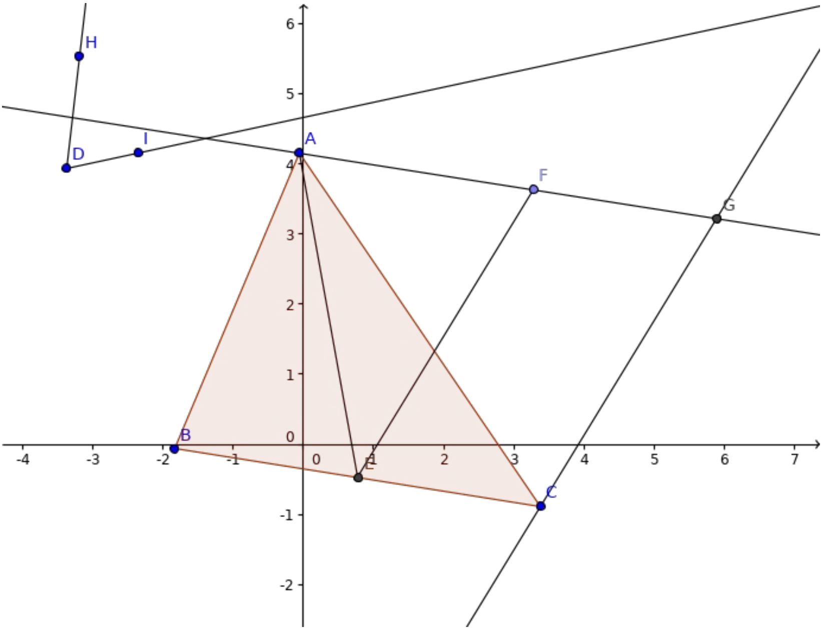

Illustration 37: Proposition 42

La construction suivante produit un parallélogramme avec un angle donné et de surface égale à un triangle donné.

L’angle donné est HDI, le triangle donné est ABC, et le parallélogramme est CEFG.

E est le milieu de BC. FEC est égal à l’angle donné. AF est parallèle à la base BC ; CG est parallèle à EF.

Démonstration

La proposition 10 permet de trouver le milieu E du segment BC. Le postulat 1 permet de construire le segment AE. On peut construire un angle donné sur une droite donnée dans un point de la droite selon la proposition 23 : c’est ce qu’on fait quand on construit EF sur la droite BC dans le point E, selon l’angle HDI. En appliquant deux fois la proposition 31, on peut construire une droite, parallèle à BC, par le point A (qui coupe notre coté de l’angle dans le point F) ; et on peut construire une droite, parallèle à EF, dans le point C. Qui coupera AF en G.

Il en suit que EFGC est bien un parallélogramme.

Comme BE est égal à EC, le triangle BAE et le triangle BCE sont des triangles sur des bases égales, et entre deux mêmes parallèles : ils ont donc les mêmes surfaces par la proposition 38. Leur somme est la surface du triangle ABC. Donc ils ont chacun la moitié de cette surface. Le triangle BCE a dont la moitié de la surface du triangle ABC. On peut aussi dire que le triangle ABC est le double du triangle BCE.

Le parallélogramme EFGC a la même base que le triangle BCE, et le sommet du triangle BCE se trouve sur la droite parallèle à la base qui est aussi celle du coté opposé du parallélogramme : par la proposition 41, la surface de EFGC est donc le double de la surface de BCE.

Il en suit que la surface de EFGC est bien la même surface que celle du triangle ABC, tous les deux le double de la surface de BCE.

QED.

Proposition 43

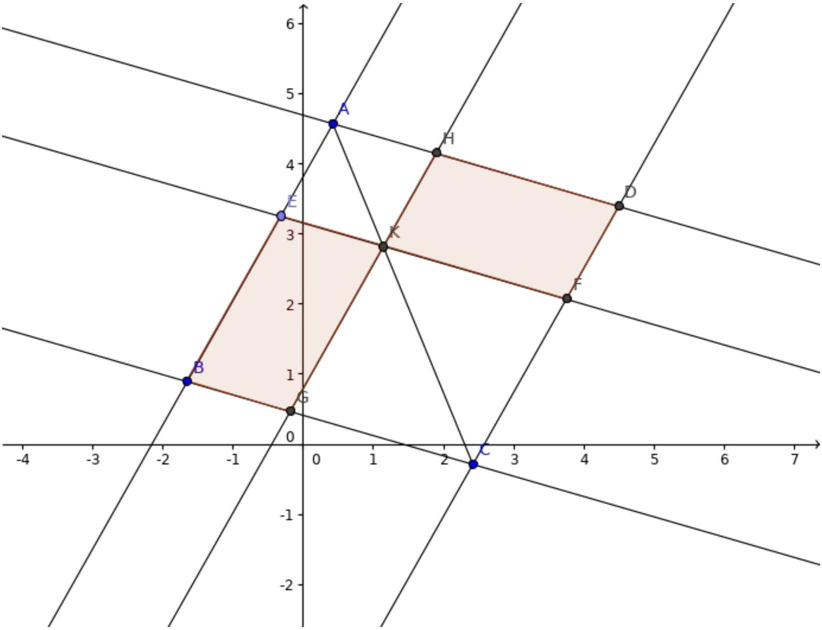

Illustration 38: Proposition 43.

Dans un parallélogramme ABCD, un point sur la diagonale (K) définit 4 parallélogrammes : deux « sur la diagonale » (AEKH et GKFC), et deux « compléments » : EKGB et HKFD. Les deux compléments ont la même surface.

Démonstration

Par la proposition 34, le triangle ABC et le triangle ADC ont la même surface. Par la proposition 34, le triangle AEK a la même surface que le triangle AHK. Et encore par la proposition 34, le triangle KFC a la même surface que KGC.

La surface de EKGB est égale à la surface de ABC, moins la surface de AEK et moins la surface de KGC.

La surface de HKFD est égale à la surface de ADC moins la surface de AHK et moins la surface de KFC.

Comme ces surfaces sont respectivement égales, alors les résultats le sont aussi : la surface EKGB est donc bien égale à la surface de HKFD.

QED.

Proposition 44

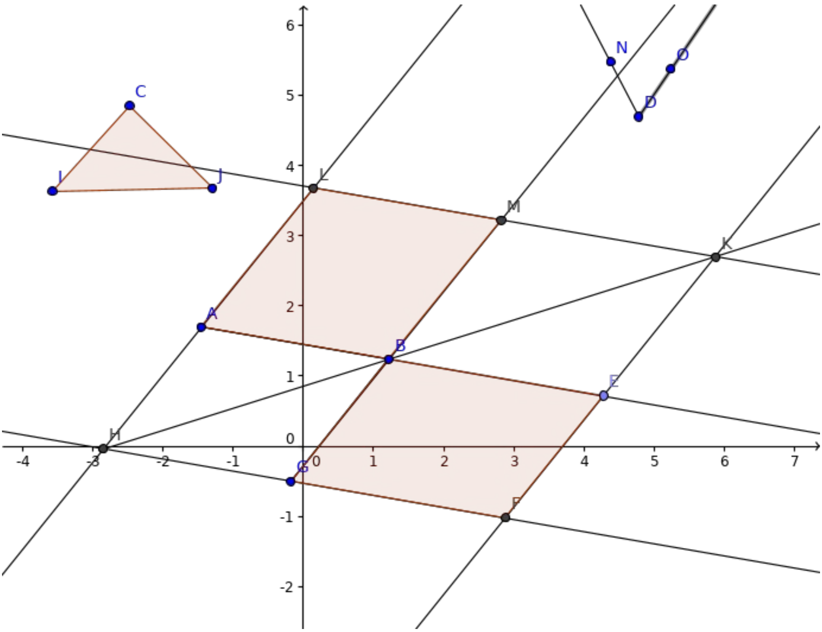

Illustration 39: Proposition 44

La construction suivante produit un parallélogramme de même surface qu'un triangle donné, qui a comme base un segment AB donné, et qui a en A, un angle donné.

On construit d'abord, sur la prolongation de AB, un parallélogramme BEFG de même surface et d'angle donné, comme proposition 42 le prescrit.

On prolonge en suite FG, et on construit une droite parallèle à BG, qui passe par le point A. L'intersection de ces deux droites sera le point H. HABG est un parallélogramme.

On construit sa diagonale HB, et on la prolonge. On prolonge EF en une droite. La droite HB coupe la droite EF dans le point K.

On construit une droite parallèle à AB qui passe par le point K. On prolonge GB et HA, qui coupent cette droite respectivement dans le point M et le point L.

Alors ABML est le parallélogramme, construit sur la base AB, qui a un angle donné, et qui a la même surface que le triangle donné.

Démonstration

Pour utiliser la proposition 42, il faut, en fait, construire un triangle de même surface que le triangle donné dans la prolongation de AB. Euclide ne le mentionne pas explicitement dans sa démonstration, mais essentiellement la proposition 22 permet de le faire.

Nous allons donc accepter que le parallélogramme BEFG peut être construit, selon l'angle donné, et de la surface du triangle donné, par la proposition 42.

Les constructions sont possibles grâce aux postulats 1 et 2, et la proposition 31.

Euclide prend soin de prouver que le point K existe. HF coupe les droites parallèles AH et EF. Par la proposition 29, la somme des angles AHF et HFE (angles internes du même coté) est donc 2 angles droits. L'angle BHF est plus petit que l'angle AHF. Alors la somme des angles BHF et HFE est donc plus petite que deux angles droits. Mais ce sont les angles internes de deux droites (HK et EF) qui coupent une troisième droite HF. Selon le postulat 5, ces deux droites vont alors se couper du même coté que les angles internes. Le point K existe donc.

HLKF est un parallélogramme. HK est une diagonale de ce parallélogramme. Nous sommes dans le cas de la proposition 43. La surface du parallélogramme BEFG est égale à la surface de ABML.

L'angle EBG est l'angle ABM par la proposition 15, et l'angle EBG était par construction, l'angle donné.

Ainsi, le parallélogramme ABML a comme base, AB, a comme surface la surface du triangle donné, et a comme angle, l'angle donné. QED.

Proposition 45

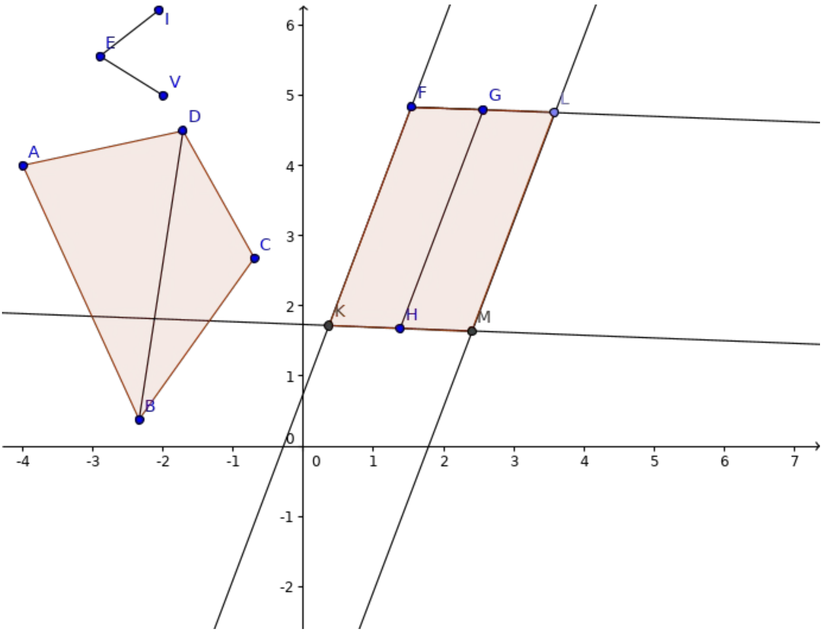

Illustration 40: Proposition 45

On peut construire un parallélogramme d'un angle donné qui a la même surface qu'une figure rectiligne. Il en va ainsi :

On construit des segments (ici seulement BD) qui coupent la figure rectiligne (ici ABCD) en triangles.

On prend le premier triangle (ici ABD) et on construit un parallélogramme de même surface (ici KHGF) selon l'angle donné (ici IEV) en FKH.

Puis, on prend le deuxième triangle (ici BCD). On construit alors le parallélogramme de même surface sur le segment GH *et d’angle IEV en GHM.*

On procède ainsi de suite, jusqu’à ce que tous les triangles sont utilisés.

La somme de tous les parallélogrammes juxtaposés ainsi, est un parallélogramme qui a l’angle donné et qui a la surface de la figure rectiligne.

Démonstration

On peut construire les segments pour couper toute figure rectiligne en triangles par le postulat 1.

Par la proposition 42, on peut construire le premier parallélogramme selon l’angle donné « quelque part ».

Par la proposition 44, on peut construire ainsi les parallélogrammes suivants (dans la démonstration, on ne le fait qu’une fois) pour les triangles suivants. Les surfaces de chaque parallélogramme étant les surfaces des triangles, la surface de la figure globale sera bien la surface de la figure rectiligne donnée.

Il nous reste à démontrer que la figure globale est un parallélogramme.

L’angle FKH et l’angle GHM sont tous les deux, par construction, égaux à l’angle IEV. Ils sont donc égaux. On ajoute aux deux angles l’angle KHG. Ainsi, FKH + KHG est égal à GHM + KHG.

La droite KH coupe les droites parallèles KF et HG. Par la proposition 29, la somme des angles FKH et KHG (angles internes du même coté) est deux angles droits.

Ainsi, GHM + KHG est aussi deux angles droits. Par la proposition 14, si deux demi-droites HK et HM issues du même point (H) d'une droite (GH) et des cotés opposés, ont des angles adjacents qui font deux angles droits, les deux demi-droites forment une droite : KM est une droite.

On peut faire la même chose pour FL : la droite HG coupe les deux droites parallèles KH et FG. Par la proposition 29, les angles internes alternes sont égaux : MHG et HGF sont les mêmes.

On ajoute l'angle HGL : alors MHG + HGL est égal à HGF + HGL. GLMH étant un parallélogramme, et donc GH coupant les deux droites parallèles GL et HM, par la proposition 29, l'angle GHM plus l'angle HGL est deux angles droits (somme des angles internes du même coté). Alors HGF + HGL est aussi deux angles droits.

Par la proposition 14, les demi-droites GF et GL, issues du même point d'une droite HG, de cotés opposés, et ayant des angles adjacents qui font une somme de deux angles droits, forment une droite : FL est une droite.

Par construction, FK et GH sont parallèles et de mếme longueur (FGHK est un parallélogramme et proposition 30). GH et LM sont aussi parallèles et de même longueur (GLMH est un parallélogramme et proposition 30). FK et LM sont de même longueur. Par la proposition 30, ils sont aussi parallèles. Les segments droits FL et KM joignent leurs extrémités (dans le bon sens). Par la proposition 33, ils sont égaux et parallèles.

Il en suit que KFLM est bien un parallélogramme. Nous avions déjà démontré que cette figure avait la surface de la figure rectiligne donnée. L’angle FKM est par construction, l’angle IEV donné. QED.

Proposition 46

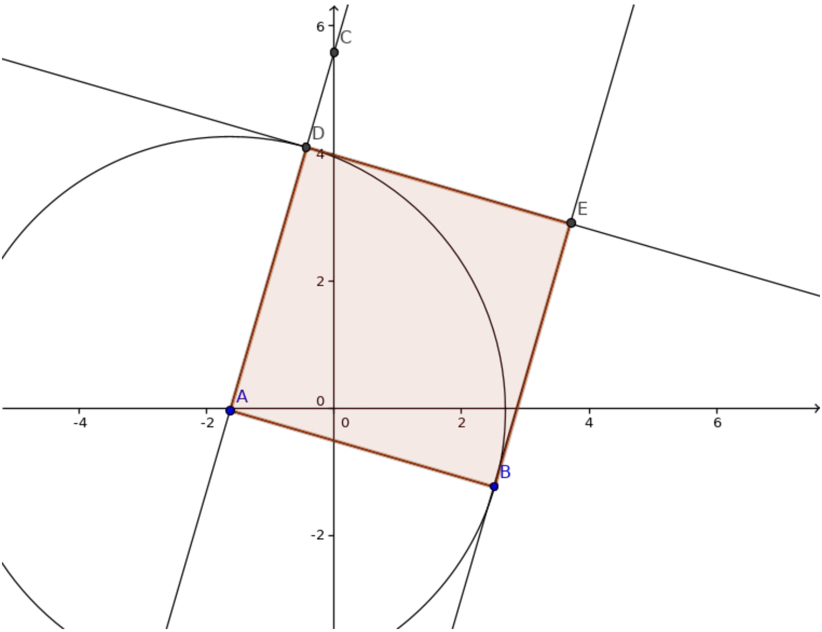

Illustration 41: Proposition 46

On peut construire un carré sur un segment AB donné, de la façon suivante :

On construit une droite perpendiculaire sur AB, en A : la droite AE. On y prend le segment AD, de même longueur que AB.

On construit une droite parallèle à AB, dans le point D. On construit une droite parallèle à AD, dans le point B. Ces deux droites se coupent dans le point E. La figure ABED est le carré demandé.

Démonstration

La proposition 11 permet la construction de la droite AC. La proposition 3 permet d'y prendre la longueur de AB, donc déterminer le point D. On peut appliquer deux fois la proposition 31 pour construire la droite BE et DE.

Il en suit que ADEB est un parallélogramme. Alors AB est égal à DE et AD est égal à BE par la proposition 34. Mais comme AD est aussi égal à AD nous avons que les 4 segments BA, AD, DE et EB sont égaux. Le parallélogramme ADEB est équilatéral.

Comme AD coupe les droites parallèles AB et DE, la somme des angles BAD et ADE est deux angles droits par la proposition 29 (somme des angles internes du même coté). Mais BAD est un angle droit. Il en suit que ADE est un angle droit (par le postulat 4).

Par la proposition 34, les angles opposés dans un parallélogramme sont égaux, alors les angles ABE et BED sont aussi des angles droits.

Alors dans le parallélogramme, tous les cotés sont de même longueur, et tous les angles internes sont des angles droits : c'est un carré, qui a comme base AB. QED.

Proposition 47 (théorème de Pythagore)

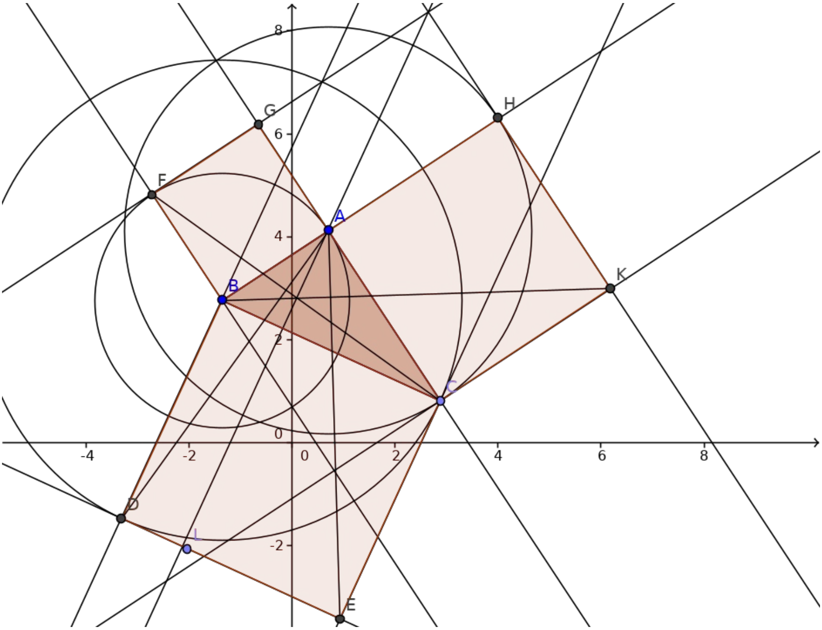

Illustration 42: Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré sur la base du coté en face de l'angle droit est égal à la somme des carrés qui ont comme bases, les deux autres cotés.

Démonstration

Dans le triangle ABC, l'angle BAC est un angle droit.

Par la proposition 46, appliquée 3 fois, nous construisons les carrés BAGF, ACKH et BCED.

On construit la droite AL, parallèle à la droite BD (par la proposition 31). On construit les segments AD et FC (postulat

1).

Comme BAC et BAG sont deux angles droits, il en suit par la proposition 14, que GAC est une droite. De la mềme façon, BAH est une droite.

L’angle DBC est égal à l’angle FBA (les deux sont des angles droits). On ajoute eux deux, l’angle ABC. Il en suit que l’angle FBC est égal à l’angle DBA.

Comme DB est égal à BC et FB est égal à BA, les deux cotés AB et BD sont donc égaux respectivement aux cotés FB et BC et l’angle ABD est égal à l’angle FBC. Les triangles ABD et FBC sont donc égaux, et la base AD est égale à la base FC.

Le parallélogramme BL (rectangle en fait) est deux fois la surface du triangle ABD, car c’est un parallélogramme qui a la base commune BD et le sommet A est sur la droite qui est aussi le coté parallèle à la base du parallélogramme, par la proposition 41.

Le carré GB est deux fois la surface du triangle FBC, aussi par la proposition 41, car la base FB est commune, et le sommet C se trouve sur la droite du coté opposé GA.

Ainsi le carré GB et le parallélogramme BL ont la même surface.

Si on construit le segment AE et BK, on peut démontrer de la même façon que le parallélogramme LC a la même surface que le carré AK. On montre que le triangle BKC et ACE sont les mêmes, et que le carré AK et le parallélogramme LC ont le double de leur surfaces.

Ainsi, nous avons donc que le carré BE a comme surface, la somme des carrés BG et AK. QED.

Proposition 48

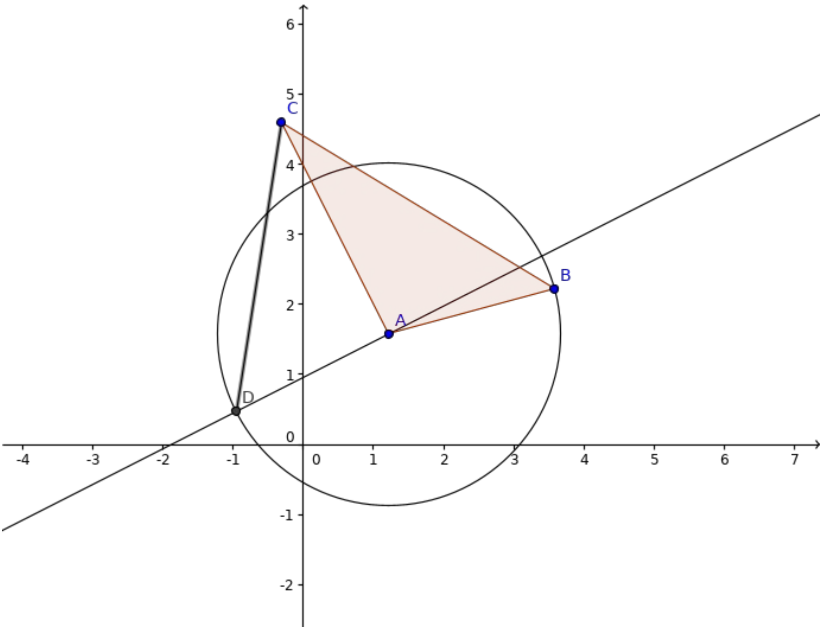

Illustration 43: Proposition 48

Si un triangle est tel, que le carré de la base est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres cotés, alors le triangle est rectangle (l'angle droit est en face de la base).

Démonstration

Construisons une droite dans le point A, perpendiculaire à AC, par la proposition 11. Construisons le segment AD sur cette droite avec la même longueur que AB (par la proposition 3). Construisons le segment DC (par le postulat 1). Le triangle CAD est un triangle rectangle par construction.

Comme DA est égal à AB, le carré construit sur DA est égal au carré construit sur AB. On ajoute à cette surface, la surface du carré construit sur AC. Alors la somme des carrés sur DA et AC est égale à la somme des carrés sur AB et AC.

Comme le triangle CAD est un triangle rectangle, la somme des carrés sur DA et AC est égale au carré sur DC par la proposition 47. Donc le carré sur DC a comme surface, la somme des carrés sur AB et AC. Mais par hypothèse, cette somme est aussi égale au carré sur BC.

Il en suit que DC est égal à BC car les carrés qu'on construit dessus ont les mêmes surfaces.

Mais alors le triangle CAD a les trois mêmes cotés que le triangle ABC : DC est égal à BC, AD est égal à AB, et AC est commun. Par la proposition 8, ils ont donc les mêmes angles. Mais l'angle CAD est un angle droit. L'angle correspondant dans ABC, qui est l'angle CAB, est donc aussi un angle droit. QED.

Commentaire

Il est démontré nulle part que deux carrés avec la même surface, ont les mêmes cotés. Mais ce n'est pas difficile à démontrer (exercice).

Livre I : étude

Raisonnements logiques

La puissance de la méthode déductive, c'est à priori qu'on peut arriver à savoir la vérité sur une « infinité » de cas possibles, c.à.d. qu'on démontre une vérité « dans un cas général ».

La première proposition du livre I dit qu'on peut construire un triangle équilatéral *sur n'importe quel segment*. Il y en a beaucoup, des segments. Infini même. Pour tous les segments qui existent dans le plan, on peut construire un triangle équilatéral dessus.

On affirme donc quelque chose concernant une infinité de situations. On peut se demander à quoi bon, on ne va jamais avoir besoin d'une infinité de triangles équilatéraux.

La raison principale pour laquelle il est utile d'avoir des affirmations concernant une infinité de situations, c'est la forme logique qui s'appelle le syllogisme.

Utilisation du syllogisme

Le syllogisme est **une forme de raisonnement logique**, dont on accepte donc qu'**il produit des nouvelles vérités** si les hypothèses de base en sont vraies. Le syllogisme a deux hypothèses et une conclusion.

La première hypothèse est justement « une généralité », qui elle-même consiste d'une implication (un « si, alors »). Par exemple, la première proposition est une telle généralité :

« pour tout objet géométrique, si cet objet est un segment, alors on peut construire un triangle équilatéral dessus ».

La deuxième hypothèse du syllogisme est « un cas concret ». Par exemple, « l'objet AB est un segment ».

La conclusion est l'application de la généralité à ce cas concret :

« alors on peut construire un triangle équilatéral sur AB ».

En réalité, le syllogisme est tellement banal qu'on l'utilise sans s'en rendre compte, comme M. Jourdain. Il est utilisé partout dans Euclide. Les axiomes et les propositions sont toujours des « généralités », et dans des démonstrations, on les utilise dans des cas spécifiques.

Démonstration d'une généralité

Nous venons de dire comment on *utilise* une généralité quand elle est établie. C'est par le syllogisme, et ce n'est pas sorcier.

Par contre, on peut se demander comment on va *démontrer* une généralité, qui porte sur une infinité de cas. On ne peut pas envisager de les considérer un par un, on n'en finirait pas.

Essentiellement, on va « utiliser le syllogisme à l'envers ». On ne va pas directement démontrer « le cas général », mais **on va trouver un modèle de démonstration pour un cas concret.** Cependant, ce modèle doit être fait de telle façon, q**u'il marchera pour tout cas concret.**

On fait cela en donnant des noms aux objets concrets, avec l'idée que ces noms « peuvent représenter n'importe quel objet du genre dans le cas général ». Ces noms sont alors **des variables**, sauf qu'on ne s'en rend pas compte.

Une variable est donc un nom d'un objet d'un certain type (un point, une droite, …) qu'on remplacera par l'objet concret au moment de vouloir utiliser la propriété générale dans un syllogisme.

Dans la démonstration de la première proposition, la généralité porte sur « tout segment possible ». On va donc donner un nom « générique » à un segment, AB. Ce A et ce B, cependant, sont des variables. On veut dire : « le jour où vous allez utiliser cette propriété générale pour un cas concret, on prouvera la vérité du cas concret selon le modèle de démonstration qu'on va maintenant annoncer ».

Alors, dans notre modèle de démonstration, il faut se dire que le A et le B peuvent être à priori n'importe quels points qui formeront un segment AB. *La démonstration « sera exécutée » quand il faudra appliquer le cas général à un cas concret en utilisant le syllogisme.* On peut donc dire qu'**un modèle de démonstration, c'est une recette qui marchera toujours quand on remplacera les variables dans la recette par un cas concret**, et que cette recette nous démontrera alors la vérité du cas concret.

En d'autres termes, quand il faudra établir la vérité qu'on puisse construire un triangle équilatéral sur un segment concret, on saura qu'on pourra l'établir toujours en suivant la recette.

Mais comment savoir si cette recette marchera toujours ? Il faut s'assurer que toute étape dans la démonstration est

« générique », c.à.d. que toute étape marchera toujours quand on aura remplacé les variables par n'importe quel élément du type en question. L'utilisation de syllogismes sur les variables est alors utile par exemple.

Et finalement, si on a vraiment un modèle de démonstration qui est convaincant dans tous les cas, on peut en réalité dire **qu'on a donc démontré la généralité même.**

Utiliser le dessin dans la démonstration

Nous voyons maintenant pourquoi les mathématiciens d'aujourd'hui **n'aiment pas « le recours au dessin »,** comme on a dû le faire souvent chez Euclide : **un dessin est toujours un cas concret.** Il est difficile de concevoir un « dessin générique » : quand on fait un dessin, on utilise un segment concret, et pas un autre, on utilise un point concret, et pas un autre, etc. Alors, le cas concret du dessin peut convaincre pour ce cas, mais il est difficile d'établir la vérité « en général ». Un dessin n'a pas de « variables », car il faut dessiner l'objet concret.

Par exemple, dans la proposition 1, on « apprend du dessin » que les deux cercles se coupent dans le point C. Pour ce cas concret du dessin fait dans la figure 1, il n'y a bien sûr pas le moindre doute que ces deux cercles concrets se coupent. Mais ce n'est pas la question. Le dessin n'est qu'un cas concret parmi l'infinité de cas à considérer pour la proposition. Alors la question « du dessin » est un peu plus subtile : est-ce que, *quel que soient les points A et B* qu'on pourrait choisir, les deux cercles vont *toujours* se couper ?

Il faut donc s’imaginer qu’on va bouger A et B « dans tous les sens » et il faut essayer de s’imaginer s’il serait possible qu’on trouve des cas où ces deux cercles ne se coupent pas.

Ce genre de « conviction » ne plaît pas aux mathématiciens d’aujourd’hui, c’est pourquoi ils considèrent que la théorie d’Euclide n’est pas vraiment « des mathématiques faites comme il le faut ».

Cependant, et je l’ai déjà argumenté, le cas de la géométrie plane « de la feuille blanche » n’est de toute façon pas des mathématiques pures, car **on est en réalité en train d’essayer de trouver un modèle mathématique pour « la physique idéalisée du dessin sur feuille blanche »**, et donc même les définitions et les axiomes sont « inspirés du dessin ». Les axiomes aussi, sont des généralités annoncées, et « justifiées par leur évidence » sur des dessins concrets.

On peut d’ailleurs répéter qu’aucune propriété qu’Euclide a déduite « du dessin » ne s’est avérée fausse finalement, aussi dans les systèmes axiomatiques « corrigés » qui n’ont plus besoin du recours au dessin.

Il faut cependant en être conscient que « le recours au dessin » implique plus que juste constater que pour ce dessin concret, la chose énoncée est évidente : *il faut que cela reste « évident » pour le « dessin générique »* quand on choisit de remplacer les variables par tous les objets possibles du type en question.

La réduction à l’absurde

Euclide utilise parfois une forme de raisonnement qui s’appelle

« la réduction à l'absurde ». Une « absurdité », c'est une contradiction : un énoncé qui est à la fois vrai et faux. Par exemple : « a est plus grand que b et a n'est pas plus grand que b. »

Si on ne trouve pas toujours une façon directe de démontrer une proposition, on peut utiliser cette technique, qui consiste à supposer que la proposition à prouver serait fausse. Si, en raisonnant avec cette hypothèse, on arrive à une contradiction, alors notre hypothèse doit être, elle-même, fausse. Mais s'il est faux que la proposition est fausse, c'est qu'elle est vraie.

Problèmes systématiques

Les axiomes d'Euclide ne sont pas suffisants pour prouver les propositions du premier livre. Il y a donc systématiquement un recours au dessin pour certains aspects, et c'est souvent le cas pour *l'ordre* des objets.

Par exemple, si ABC et CBD sont deux angles, ils sont clairement « adjacents » : ils sont exprimés dans le même point B, et ils ont un des « bras » commun : BC.

La question concerne la relation de ABD avec ces angles. Si le bras BC est « à l'intérieur » de ABD, alors l'angle ABD est la *somme* des angles ABC et CBD. Si, par contre, BC est à l'extérieur, alors selon que ABC soit plus grand que DBC ou plus petit que DBC, ABD sera l'angle ABC – DBC, ou il sera l'angle DBC – ABC. Euclide a beaucoup de démonstrations où il utilise le fait qu'un angle est la somme de deux autres angles, mais cela n'est valable que quand le coté commun est « à l’intérieur ». Euclide n’a pas de moyens pour démontrer cela, car aucun axiome ne parle d’un ordre. Il faut donc toujours déduire cela du dessin.

Euclide n’a pas d’axiome non plus qui dit qu’une droite qui passe par le sommet d’un triangle, et qui « entre » dans le triangle, doit aussi couper le coté d’en face.

Dans presque tous les cas, ce genre de considération est « évident » sur le dessin, mais il faut faire attention qu’on a bien traité tous les cas possibles.

Démonstrations semi-formelles

Il faut apprendre que dans une démonstration, **tout nouvel énoncé doit suivre logiquement de ce qui précède** : il faut donc dire, à chaque nouvel énoncé :

1. sur quels énoncés précédents on se base
2. quel est la justification pour passer de ces énoncés précédents sur le nouvel énoncé

C’est en appliquant cela qu’on découvrira quand on a utilisé une vérité cachée (du dessin, de l’intuition….).

Nous allons faire cela comme exemple pour la proposition 10.

- Le segment AB est donné.
    - Nous avons un segment AB (1)
- (1), proposition 1, et syllogisme
    - Nous avons le triangle équilatéral ABC (2)

- (2), définition intuitive d’un triangle et syllogisme
  - Le triangle ABC a un angle linéaire interne en C, l’angle ACB (3)
- (3), proposition 9 et syllogisme
  - construction possible d’une droite d passant par C qui coupe l’angle ACB en deux (4)
- (1), (4), dessin
  - cette droite d coupe le segment AB en un point D (5)
- (2), (5), définition intuitive d’un triangle, syllogisme
  - nous avons le triangle ADC (6)
- (2), (5), définition intuitive d’un triangle, syllogisme
  - nous avons le triangle BDC (7)
- (2), définition triangle équilatéral, syllogisme
  - longueur AC = longueur BC (8)
- (4), définition bissectrice, syllogisme
  - L’angle ACD = l’angle BCD (9)
- trivialité (« notion commune »)
  - la longueur de CD = la longueur de CD (10)
- (6), (7), (8), (9), (10), proposition 4, syllogisme
  - angle CAD = angle CBD ; angle DAC = angle DBC, longueur AD = longueur DB (11)

- définition milieu, (11), syllogisme :
  - D est milieu de AB

QED

Dans le chapitre précédent, nous n’avons pas été dans un tel détail, mais ce n’est qu’en faisant comme ça, qu’on découvre des hypothèses cachées.

Gros exercice

1. Étudier chaque proposition du livre I par une preuve semi-formelle.
2. Noter quand il faut faire appel au dessin, ou à une idée intuitive
3. Noter de quelles propositions une proposition donnée dépend
4. Faire l’arbre généalogique de dépendances des propositions du livre I.

Vue plus générale sur le livre I

Pourquoi si peu d’axiomes ?

Nous avons déjà dit que, puisque Euclide puise dans « le dessin » à plusieurs occasions, on se demande pourquoi se faire mal pour démontrer des propositions qui « se voient » aussi bien sur le dessin.

Il y a là-dedans du ‘zèle de mathématicien’, c.à.d. le désir de prendre le jeu d’axiomes le plus petit et simple possible. C’est quelque part un « sport de mathématicien » de vouloir énoncer que des axiomes « indépendants ». On ne veut en général pas énoncer un axiome quand on peut le prouver à partir des autres axiomes. D'un coté on peut comprendre une telle économie, d'un autre coté on peut se poser la question à quoi bon. C'est arrivé qu'on avait introduit un certain axiome dans un système ; tout le monde en était satisfait. Et puis, un jour, quelqu'un a trouvé comment démontrer cet axiome des autres. Du coup, on a écarté ledit axiome, et maintenant, il faut le prouver. On peut se poser la question pourquoi on pouvait facilement accepter cette « vérité » tant qu'on ne savait pas qu'on pouvait la déduire des autres « vérités acceptés », mais dès qu'on se rend compte qu'on puisse la démontrer, on en voudra une démonstration !

Mais donc, c'est une tradition en mathématiques, et Euclide l'a commencée, d'**utiliser des axiomes avec parcimonie.**

Cela implique cependant, qu'on va devoir démontrer beaucoup de propositions « évidentes » qu'on aurait aussi bien accepté comme axiome, mais on le démontre quand-même. Par exemple, personne ne doute un seul instant qu'on puisse bien construire un triangle équilatéral sur n'importe quel segment. Vouloir démontrer cela est du zèle.

Comme dans ce texte, nous nous intéressons surtout au *raisonnement*, tout raisonnement est bon à prendre, et les raisonnements pour démontrer des simplicités sont aussi utiles que des démonstrations de théorèmes beaucoup moins évidents. Mais si on voulait apprendre des choses sur la géométrie, on perd beaucoup de temps à argumenter des évidences.

Des constructions

Cependant, Euclide fait souvent plus que démontrer une proposition : souvent, il nous propose une **construction**. Cet aspect a été extrêmement important jusqu'à la première moitié du 20ième siècle. Le dessin était aussi une forme de « calcul ». Quand on dessinait par exemple, une structure mécanique, les tailles des pièces à fabriquer étaient mesurées sur le dessin, et non calculées avec des nombres. Savoir précisément construire des dessins était donc très important dans la pratique de l'utilisation de la géométrie en mécanique et en construction.

Alors que personne n'a vraiment besoin d'une démonstration pour se convaincre que sur tout segment, on puisse construire un triangle équilatéral, *donner une méthode pour réellement le dessiner*, comme le fait Euclide dans la première proposition, était utile en soi, indépendamment de la « démonstration logique ».

Plusieurs propositions assez évidentes nécessitent des constructions intéressantes et loin d'être évidentes. Dans ce sens alors, la perte de temps par la « démonstration » de trivialités est compensée par l'étude d'une construction utile et non-évidente.

Propositions intéressantes

Beaucoup de propositions dans le livre I sont des évidences, mais elles forment un tout, comme l'exercice de l'arbre généalogique a montré : c'est un édifice qu'on construit, petite évidence après petite évidence.

Mais il y a quelques résultats qui ne sont pas des trivialités : les propositions 16, 21, 32, 35, 36, 37, 38, 41, 43, 47, 48.

Stratégie du livre I

Euclide commence par attaquer le triangle. Le triangle est la figure la plus simple « qui sort d'une droite », et permet de mettre en relation segments et angles. Le triangle est l'outil de base pour maîtriser des relations entre des longueurs, et des relations entre des angles, et des relations entre les deux.

Essentiellement les propositions 1 – 26 servent à « maîtriser le triangle ».

En suite, il s'intéresse aux droites parallèles, et le parallélogramme. Le parallélogramme sera sa base pour étudier les surfaces. Effectivement, la stratégie sera en suite de réduire toute surface à une surface de parallélogramme, et surtout des parallélogrammes « droits » (des rectangles donc). La culmination sera la proposition 44 et la proposition 45: La proposition 44 permet, en fait, de convertir des « surfaces » en des « longueurs », en choisissant la base AB comme « unité ». Il définit en fait « le mètre carré » comme mesure de surface, sans le dire et il peut réduire tout triangle à un « nombre de mètres carrés ». La proposition 45 lui permet d'obtenir la surface de n'importe quelle figure polygonale, et la proposition 46 de dessiner « l'unité de surface ».

Le théorème de Pythagore (et son inverse), les propositions 47 et 48, font un autre lien entre longueurs et surfaces.

Les axiomes de Hilbert

J’ai déjà annoncé plusieurs fois que les mathématiciens contemporains ne sont pas d’accord avec la façon de faire d’ Euclide, et ses utilisations cachées de dessins comme source supplémentaire de « vérités ».

Le grand mathématicien David Hilbert a proposé, à la fin de 19ième siècle, un jeu complet d’axiomes « dans le genre d’Euclide ». Ils sont organisés dans 5 groupes. On va sélectionner ce qui est pertinent pour la géométrie plane. On ajoute en italique « l’interprétation Euclidienne ».

Incidence

1. Par deux points distincts passe une droite *(postulat 1)*
2. Cette droite est unique
3. Toute droite contient au moins deux points, et il existe, pour toute droite, un point qui n’appartient pas à la droite

Ordre

Ces axiomes introduisent la notion de « un point entre deux autres » (essentiellement donc le segment).

1. Si un point B est entre les points A et C, il est aussi entre les points C et A, et il existe une droite qui contient ces 3 points. *(tout segment appartient à une droite)*
2. Si A et C font partie d’une droite, il existe alors un

troisième point B de la droite, tel que C soit entre A et B. *(on peut prolonger une droite indéfiniment)*

3. Si A, B et C sont alignés, alors au plus un des trois est entre les deux autres. *(les points sur une droite sont dans un ordre)*

4. (axiome de Pasch) Soit A, B et C trois points non-alignés et soit d une droite, qui ne passe pas par A, B ni C. Si d passe par un point du segment [AB], alors d passe par un point du segment [AC] ou par un point du segment [BC]. *(quand on entre avec une droite dans un triangle, alors on en sort par un des autres cotés)*

Congruence

Congruence est un mot savant pour dire « de la même magnitude en tout aspect ». Deux segments qui sont congruents sont « de même longueur ». Deux angles qui sont congruents sont « de même magnitude ». Par contre, deux triangles qui sont congruents, ont leurs cotés congruents, leurs angles congruents, et leurs surfaces « de même magnitude ».

1. Soit A et B deux points distincts, d une droite, et A’ un point de la droite d. Il existent alors exactement deux points C et D de la droite, tel que A’ se situe entre C et D, que AB est congru à CA’ ainsi qu’à A’D. *(sur une droite, il y a exactement deux points à une distance donnée d’un point)*

2. La relation « congruence » est transitive. *(notion commune)*

3. Soit d une droite qui contient les segments AB et BC qui n’ont que B en commun. Soit d’ une droite qui contient les segments A’B’ et B’C’ qui n’ont que B’ en commun. Si AB est congru à A’B’, et BC est congru à B’C’, alors AC est congru à A’C’. *(addition des longueurs sur une droite)*

4. Soit un angle ABC et une demi-droite B’C’. Il existent alors exactement deux demi-droites B’D et B’E tel que l’angle DB’C’ est congru à l’angle ABC et tel que l’angle EB’C’ est congru à l’angle ABC. *(on peut construire un angle à gauche ou à droite d’une demi-droite donnée)*

5. Soient deux triangles ABC et A’B’C’, tel que AB est congru à A’B’, AC est congru à A’C’ et l’angle BAC est congru à l’angle B’A’C’. Alors les triangles ABC et A’B’C’ sont congrus. *(proposition 4)*

Axiome d’Euclide

Le 5ième postulat avait depuis longtemps été trouvé équivalent à la proposition 31.

1. Soit d une droite et A un point qui n’appartient pas à cette droite. Il existe alors exactement une seule droite d’ qui passe par A, et qui n’a aucun point commun avec d. *(proposition 31)*

Continuité

Les axiomes de continuité sont subtils et servent en fait à pouvoir définir les nombres réels sans le dire.

1. Axiome d'Archimède : Soit AB et CD deux segments, tel que le point C et D sont différents. Alors, sur la droite contenant le segment AB, il existe N points A_i, tel que : A_1 est le point A ; les segments A_iA_{i+1} sont congruents à CD, A_i se trouve entre A_{i-1} et A_{i+1} et B se situe entre A et A_n. *(essentiellement, cet axiome dit qu'on peut toujours empiler suffisamment de segments de longueur CD, à partir de A, pour dépasser B).*

2. L'ensemble des points d'une droite ne peut pas être augmenté et toujours respecter les autres axiomes (sauf l'axiome d'Euclide éventuellement). *(ceci est un axiome logiquement très subtil, on ne le discutera pas)*

Conclusion

Ce n'est pas étonnant qu'Euclide doit faire appel régulièrement à « la vérité du dessin », car son système axiomatique est largement incomplet. Les axiomes d'Euclide pèchent essentiellement sur les notions d'ordre, et les notions de « continuité » (ou, si on veut « étanchéité »). Mais le prix à payer pour le faire formellement correct, comme Hilbert, est élevé en complexité et subtilité, pour finalement simplement « convaincre » d'avantage des trivialités qu'on voit comme ça sur un dessin. En plus, ce ne sera pas par cette voie qu'on fera de la géométrie « moderne » et « appliquée ». Nous avons simplement mentionné les axiomes d'Hilbert pour indiquer que c'est évident que chez Euclide, on aura besoin du dessin pour « source de vérité », et que son système axiomatique n'est pas formellement suffisant.

Survol du livre II

Introduction

Nous n'allons pas étudier le livre II en détail, car il implémente quelques notions d'algèbre par la voie géométrique, ce qui est beaucoup plus « pénible » que la façon moderne de le faire.

Cependant, nous voulons simplement illustrer quelques aspects géométriques de l'algèbre : on n'y aurait pas pensé parfois !

Propositions 1-10

Proposition 1 : $x.(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = x.y_1 + x.y_2 + \ldots + x.y_n$

Euclide le démontre en considérant le segment AB qui est le segment AD + DE + EB, et le rectangle construit sur AB et AC qui a comme surface la somme des surfaces des rectangles de base AD, DE et EB, et de hauteur AC.

Algébriquement, nous appelons cette propriété la distributivité de la multiplication versus l'addition, mais Euclide le fait par des objets géométriques.

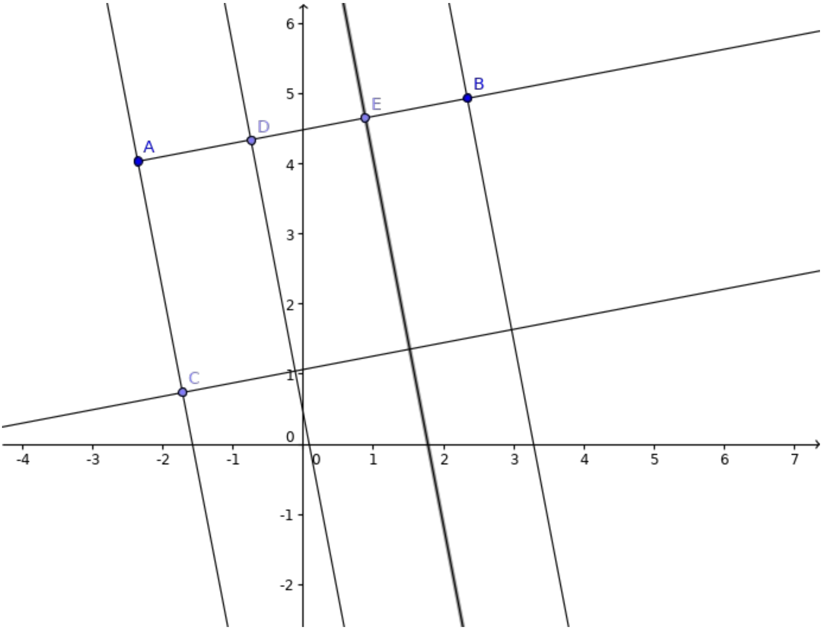

Illustration 44: Illustration de la proposition 1

Les propositions 2 et 3 sont des cas spéciaux de la proposition 1.

La proposition 4 est l'identité remarquable

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$

Sur le dessin, le segment AB représente a+b, AC est a, CB est b. La surface du carré sur AB est donc $(a+b)^2$. On peut décomposer cette surface en 2 carrés et deux rectangles de même surface.

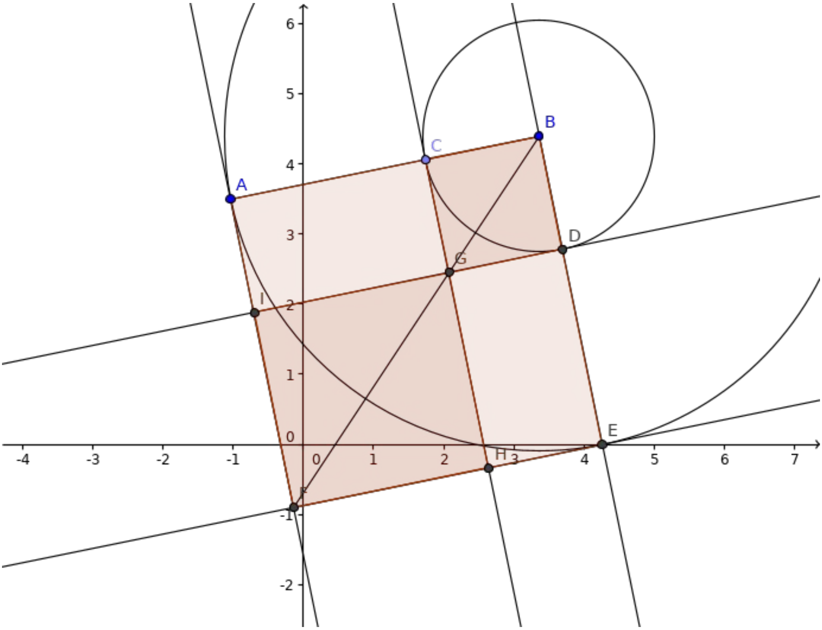

Illustration 45: Proposition 4

La proposition 5 est un dessin compliqué qui correspond à l'identité algébrique :

$x.y = ((x+y) / 2)^2 - ((x-y) / 2)^2$

La proposition 6 en est une variante :

$x.(x – b) = (x – b/2)^2 - (b/2)^2$

et la proposition 7 en est encore une variante :

$x^2 + z^2 = 2.x.z + (x – z)^2$

et encore une pour la proposition 8 :

$4.x.y + (x – y)^2 = (x + y)^2$

Les propositions 9 et 10 sont encore du même genre.

La proposition 11

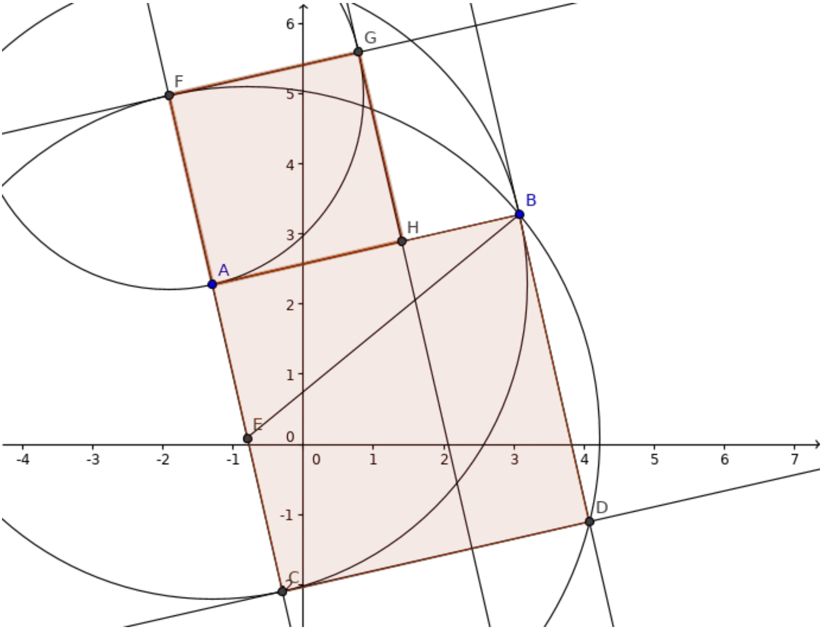

Illustration 46: Proposition 11

On peut construire un point H sur un segment donné AB, tel que le rectangle fait par AB et le segment restant HB a la même surface que le carré sur l'autre partie de AB, à savoir AH.

On construit un carré ABDC sur le segment donné AB, et on prend le milieu E de AC. On construit le segment EB. On prolonge EA en EF, tel que EF est EB. On construit un carré AFGH sur AF. Le sommet H, qui se trouve sur le segment AB, *est le point recherché.*

Essentiellement, cette construction nous donne la solution de l'équation $a.(a - x) = x^2$ avec a la longueur du segment AB, et x la longueur du segment AH. On voit alors que x^2 est la surface du carré AH, et $a.(a - x)$ est la surface du rectangle HD.

On va démontrer cette construction de façon algébrique, on ne va pas le faire en suivant Euclide (car il utilise des propositions précédentes, exprimées géométriquement).

Appelons AB donc *a*.

AE est $(a/2)$; EB = $\sqrt{((a/2)^2 + a^2)} = \sqrt{(5/4)} . a$

AF = AH est alors AE – $a/2 = (\sqrt{(5/4)} - 1/2) . a$

La surface du carré AFGH est : $(\sqrt{(5/4)} - 1/2)^2 . a^2$

ou encore : $(5/4 + 1/4 - \sqrt{(5/4)}).a^2 = (3/2 - \sqrt{(5/4)}).a^2$

La surface du rectangle HBDK est :

$(a - (\sqrt{(5/4)} - 1/2) . a) . a$

ou encore : $(3/2 - \sqrt{(5/4)}). a^2$

ce qui montre bien que la surface du rectangle HBDK est égale à la surface du carré AHGF.

Nous allons ici donc à l'envers d'Euclide : nous établissons une vérité géométrique par la voie de l'algèbre, là où Euclide fait l'inverse.

L'intérêt de cette construction particulière s'avérera quand il faudra construire un pentagone régulier.

Les propositions 12 et 13

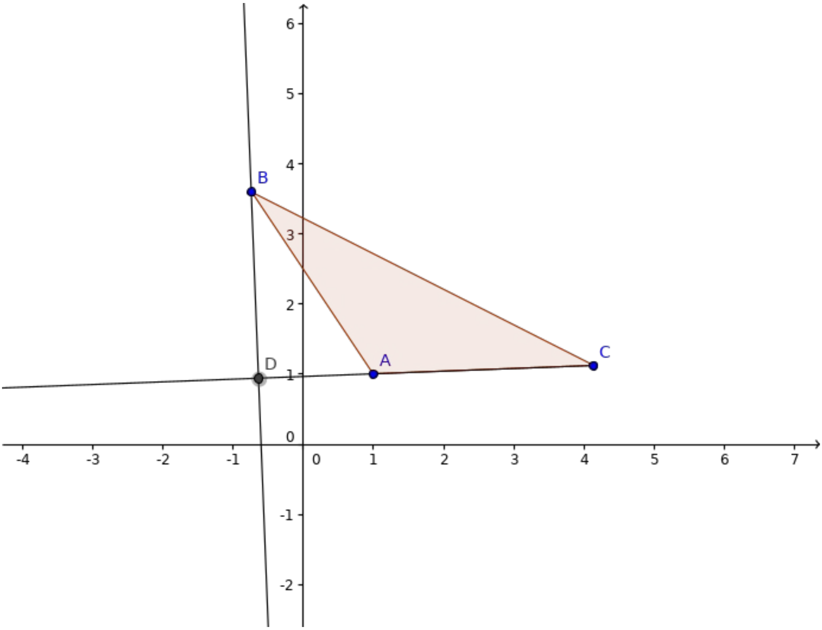

Illustration 47: Proposition 12

Proposition 12 : Dans un triangle avec un angle BAC obtus, si la longueur du coté BC est a, la longueur du coté AC est b et la longueur du coté AB est c, alors :

$a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.(AD)$

Proposition 13 : Dans un triangle avec un angle BAC aigu, et les mêmes conventions, nous avons :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.(AD)$

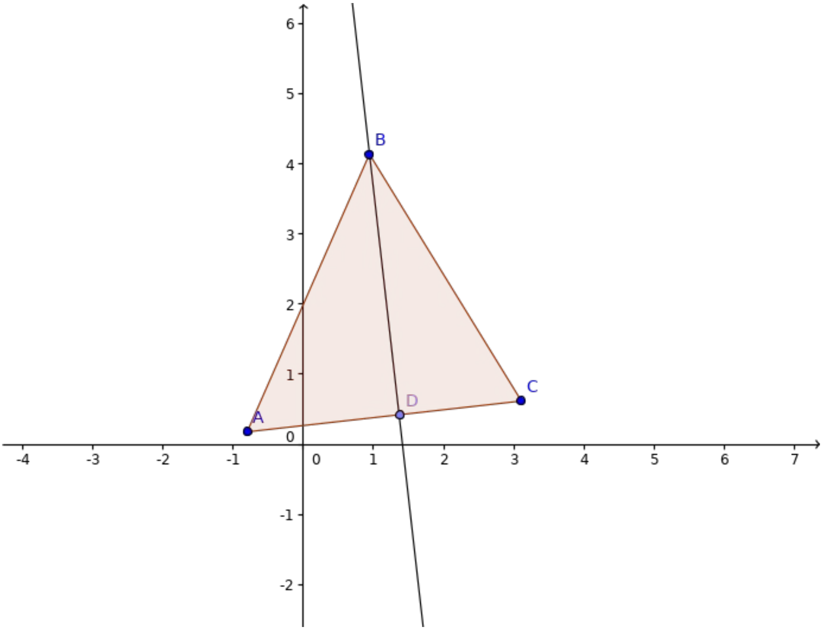

Illustration 48: Proposition 13

Pour information :

Ces deux propositions sont maintenant connues sous le nom de la règle du cosinus :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos(BAC)$

avec :

$AD = c \,.\, \cos(BAC)$

Proposition 14

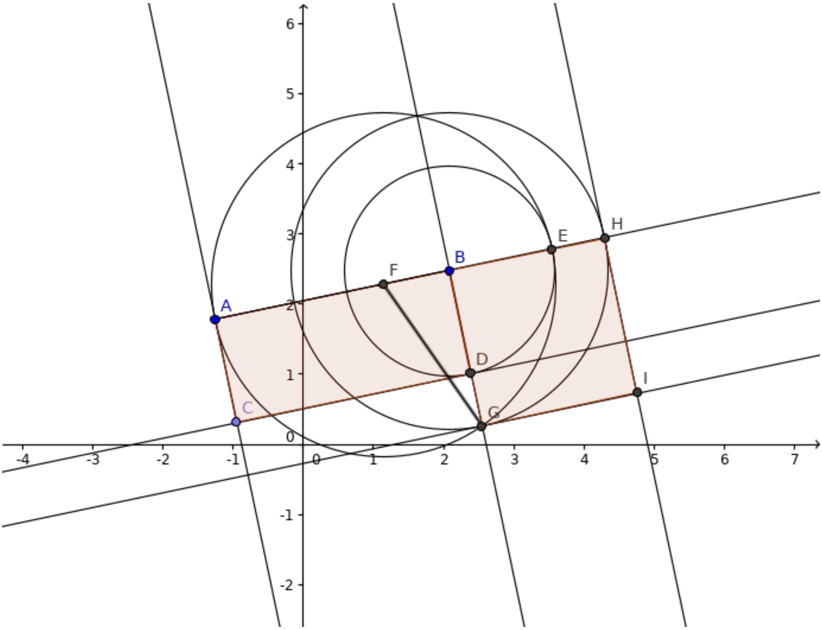

Illustration 49: Proposition 14

Quand on a un rectangle ABDC donné, il est possible de construire un carré avec la même surface, de la façon suivante :

On suppose AB plus long que BD. On prolonge AB en AE, avec BE égal à BD. On trouve le milieu de AE, qu'on appelle F.

On prolonge BD. On construit le cercle de rayon FE. Ce cercle coupe la droite BD en G.

Le carré construit sur BG est alors de la même surface que le *rectangle original.*

On va le démontrer à nouveau par voie algébrique :

Appelons la longueur de AB, a, et la longueur de BD, b. Le rectangle original ABDC a donc une surface de a.b.

AE est $(a + b)$, le rayon du cercle $(a + b) / 2$.

FB = $(a + b)/2 – b = (a – b)/2$

Le triangle rectangle FBG obéit à Pythagore. Si on appelle la longueur de BG le nombre c, alors nous avons :

$(a – b)^2 / 4 + c^2 = (a + b)^2 / 4$

ou encore : $c^2 = (a + b)^2 / 4 – (a – b)^2 / 4 = a.b$

Il en suit bien que le carré, de coté *c*, a bien la surface *a.b.*

Conclusion

Alors que le livre I est relativement rempli d'évidences dont on se demande parfois pourquoi il faudrait les démontrer, il est clair que avec le livre II, nous sommes entrés dans le vif du sujet, et les constructions sont toutes sauf évidentes.

Les raisonnements géométriques dans ce livre, comme faits par Euclide, sont bien plus compliqués que les « versions algébriques » que je vous propose. On commence à s'apercevoir de la force de l'algèbre ; historiquement, cependant, Euclide utilisait la géométrie pour justifier l'algèbre.

La suite Cartésienne

Les autres livres des Éléments

Il est un peu regrettable de s’arrêter juste au moment où cela commence à devenir intéressant.

Nous allons simplement énoncer quelques théorèmes intéressants dans les livres suivants, sans les démontrer.

Livre III

- Proposition 20 : le triangle qui a comme base la corde d’un arc de cercle, et comme sommet, le centre du cercle, a un angle interne à ce sommet, qui est le double de l’angle interne du sommet d’un triangle qui a la même base, et un sommet sur le bord du cercle.
- Proposition 21 : les triangles qui ont comme base la corde d’un arc de cercle, et comme sommet, un point sur l’arc, ont tous le même angle interne au sommet.
- Proposition 31 : si la base d’un arc est un diamètre, l’angle dont on parle dans la proposition 21 est un angle droit.

Livre IV

Toutes les 16 propositions du livre IV sont intéressantes : elles concernent les cercles inscrits et conscrits de triangles, carrés, pentagones, hexagones, et le polygone régulier à 15 cotés.

Cela va dans les deux sens : on donne un cercle, et on veut le polygone, ou vice versa.

Le livre V

Le livre V ne nous intéresse que très peu, car il ressemble au livre II, dans le sens qu'il utilise de la géométrie pour faire de l'algèbre.

Le livre VI

Le livre VI contient beaucoup de théorèmes géométriques intéressants, qui sont souvent étudiés dans l'enseignement secondaire.

Il y a surtout des variations sur ce qu'on appelle parfois *le théorème de Thalès* : propositions 2, 9, 10, 11, 12 sont des exemples de variations sur ce thème.

La géométrie plane s'arrête essentiellement au livre VI.

La suite pour nous

Nous avons utilisé l'œuvre historique d'Euclide pour introduire le raisonnement mathématique. Nous avons aussi annoncé qu'à un certain moment, **il faut laisser Euclide derrière soi**, car finalement, ce n'est ni la façon de faire des mathématiques, ni la façon de faire beaucoup de géométrie. Alors, ce moment est venu. Le livre I nous a donné suffisamment de démonstrations et de raisonnements pour s'exercer à cela, et contient suffisamment de « légèretés » formelles pour qu'on commence à avoir une idée ce que cela peut être. Dans le livre II, nous avons senti la puissance de l'algèbre quand il s'agit de faire de la géométrie.

Les constructions graphiques, sur papier blanc, ont eu une utilité pratique pendant des siècles, mais maintenant, avec l’existence d’ordinateurs, le « calcul par dessin » n’est plus une voie utile, sauf pour aménager sa cuisine, et encore.

Alors, nous allons nous préparer pour faire de la géométrie autrement, par la voie de Descartes.

Le plan de Descartes

L’axe des nombres réels

Euclide, dans la tradition des Grecs, basait l’idée de nombre sur l’idée de magnitude géométrique (longueur par exemple). Un nombre pour les Grecs, c’était d’abord une longueur géométrique. Mais aujourd’hui, nous entrons dans les mathématiques par les nombres, et non par la géométrie. Nous connaissons les nombres entiers naturels, les nombres entiers relatifs, les fractions (les nombres rationnels), et puis nous avons une intuition pour ce qu’on appelle le nombre « réel ».

Cet objet mathématique aura une définition tout à fait non-géométrique, mais intuitivement, il reste quand-même encore une influence Grecque : « l’axe des nombres ».

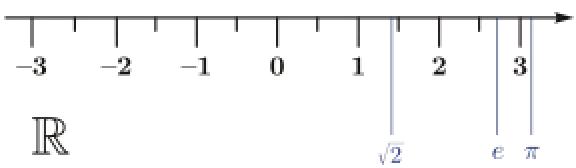

Illustration 50: L'axe des nombres réels

Un nombre réel est un nombre qui est en relation 1-1 avec un point de la droite « orientée et graduée » (cela veut dire qu’on à choisi une orientation (le coté positif), et un 0 et un 1). A chaque point de la droite correspond exactement un nombre réel, et à chaque nombre réel correspond exactement 1 point de la droite.

Le plan de Descartes

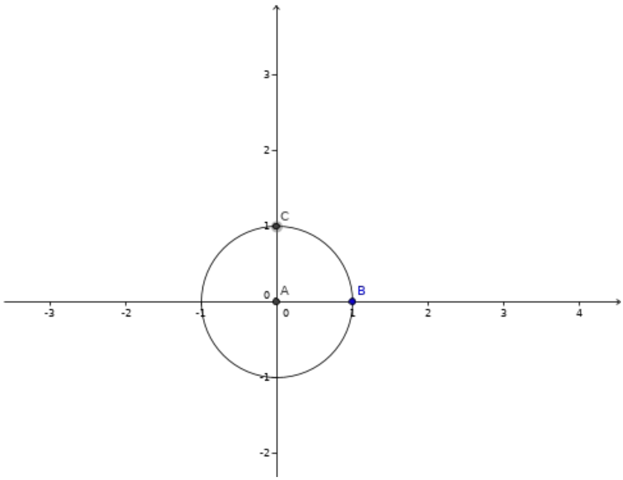

Illustration 51: Les axes du plan de Descartes

Descartes fait la chose suivante : dans le plan d’Euclide, il prend un segment AB. A s’appellera « l’origine » et la longueur du segment AB « l’unité ».

Alors, on peut considérer la droite AB comme un axe numérique avec A le zéro, B le « 1 ». Cela donne une orientation et une graduation de l’axe AB, qu’on appellera « l’axe X ».

En A, il construit une droite perpendiculaire à l’axe X, et le cercle « unitaire », de rayon AB.

Ce cercle coupe la nouvelle droite en deux points, et on en choisit un : le point C. La nouvelle droite peut donc être « orientée et graduée » avec A comme zéro, et le point C comme « 1 ». On appellera cette droite « l'axe Y ».

Ce choix, essentiellement donc le choix du segment AB avec A comme « origine », et l'orientation de l'axe Y (le choix du point C parmi les deux points possibles), s'appelle **choisir un repère**.

Un point du plan

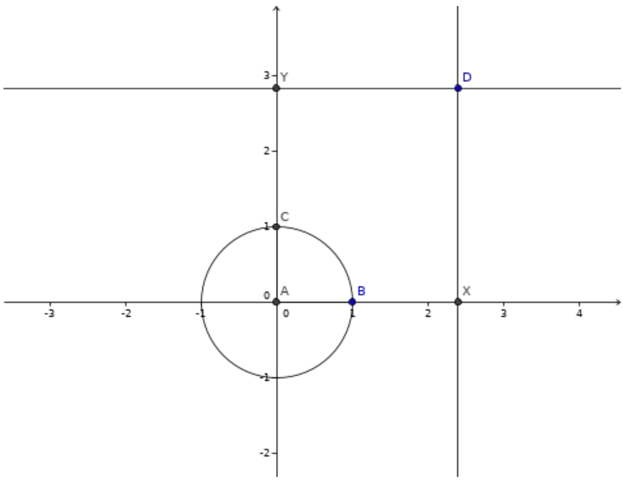

Illustration 52: Coordonnées du point

Pour tout point D du plan, on peut construire une droite parallèle à l'axe X, qui coupera donc l'axe Y en un point (Y), et une droite parallèle à Y, qui coupera donc l'axe X en un point (X). Comme l'axe X et l'axe Y sont deux droites orientées et graduées, il y a un nombre réel *x* qui correspond au point X sur l'axe X, et il y a un nombre réel *y* qui correspond au point Y sur l'axe Y. Il y a donc un jeu de deux nombres réels, *(x, y)*, unique qui correspond au point D. On peut facilement s'en convaincre que cela marche aussi dans l'autre sens : à chaque jeu de deux nombres *(x,y)* correspondra exactement un seul point du plan. On les appelle **les coordonnées du point**.

Quand on a choisi un repère, on a fait correspondre donc, de façon un sur un, un couple de deux nombres réels *(x,y)*, les coordonnées, à chaque point du plan.

Quand on a une telle relation 1 sur 1, que les mathématiciens appellent une bijection, on peut représenter le premier type d'objets par le deuxième et vice versa.

Mais il faut quand-même faire attention : il n'y a pas de correspondance *naturelle* entre les points et les couples de nombres réels *(x,y)* : **cela dépend du repère qu'on a choisi** !

Le même point D sera associé à deux autres nombres réels si on choisit une autre intervalle que l'intervalle AB pour construire notre repère, mais ce sera toujours le point D.

On peut se demander à quoi bon, ce genre de correspondance ? En quelle mesure est-ce qu'il peut être pratique de faire correspondre un couple de nombres à un point ? La réponse est bien sûr qu'*avec des nombres, on peut calculer,* et ces calculs auront des significations géométriques. On va donc exécuter le programme d'Euclide à l'envers (comme on avait déjà commencé à le faire un peu quand on a survolé le livre II).

La droite

On ne pourrait pas faire beaucoup de géométrie dans le plan si on n'a pas une description de l'objet « droite ».

Comme dans la vision de Descartes, un point, c'est un couple de nombres réels, il faut quelque chose qui fait l´équivalent pour les droites, et d'ailleurs, pour tous les autres objets géométriques, comme des cercles, des triangles etc.

La nouvelle idée est que tout objet géométrique est « faite de points ». Cela n'était pas nécessairement le cas chez Euclide : la droite était un objet à part, qui pouvait « passer par » des points, mais qui avait son existence « en soi ». Chez Descartes, une droite, de n'est rien d'autre que un jeu de points. C'est **un ensemble de points**. Si on connaît tous les points d'une droite, on connaît la droite. Si on connaît tous les points d'un cercle, on connaît le cercle.

Un objet géométrique, pour Descartes, c'est donc une condition d'appartenance sur des points : si un point satisfait la condition, ce point en fait partie, si un point ne satisfait pas cette condition, le point n'en fait pas partie. Et c'est tout ce qu'il faut savoir pour connaître l'objet géométrique en question : la condition d'appartenance du point.

Comme les points sont maintenant associés à des couples de nombres, un objet géométrique, comme une droite, sera donc une condition sur ce couple de nombres. Un genre de condition sur des nombres, c'est **une équation**.

Il s'avère qu'une droite correspond à un genre très particulier d'équation :

$a.x + b.y + c = 0$

On l'appelle : **l'équation Cartésienne de la droite**.

où *a*, *b*, *c* sont (les noms) des nombres réels spécifiques qui déterminent exactement quelle droite, et *x* et *y* sont les (noms des) deux coordonnées du point dont on veut vérifier s'ils appartiennent à la droite ou non.

Par exemple, pour $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$, nous avons l'équation : $x = 0$.

Cette équation est l'équation de l'axe Y. Effectivement, tous les couples (x,y) pour lequel *x* est zéro, vont satisfaire cette équation. La coordonnée *y* peut avoir n'importe quelle valeur, mais *x* doit être zéro. Les points de l'axe Y satisfont cette équation.

Un autre exemple : $a = 1$, $b = 0$, et $c = 5$ nous donne :

$x + 5 = 0$

Cette équation va décrire une droite « verticale » à gauche de l'axe Y. Tous les points (x,y) pour lesquels $x = -5$ vont satisfaire cette équation, et ils vont donc se trouver sur la droite, parallèle à Y, qui coupe le point qui correspond à -5 sur l'axe X.

Encore un exemple : $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$:

$y = 0$

Cette équation nous donne l'axe X. Tous les points (x,y) pour lesquels $y = 0$ se trouvent sur l'axe X, et la valeur de x ne joue pas de rôle.

Si $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, nous avons :

$x - y = 0$. On peut aussi écrire : $x = y$

La droite qui correspond à cela est la « bissectrice de BAC », la droite sous 45 degrés. Tout point sur cette droite aura la valeur de x égale à la valeur de y, et satisfait donc l'équation.

On peut donc croire qu'à chaque triplet de nombres (a,b,c) correspond une droite, comme à chaque couple (x,y), correspond un point. Mais ce n'est pas vrai. Si v est un nombre réel non-nul, alors, si (a,b,c) correspond à une droite, alors $(v.a, v.b, v.c)$ correspond à exactement la même droite.

Effectivement : suppose qu'un couple de nombres (x,y) satisfait :

$a.x + b.y + c = 0$

on peut multiplier cette équation à gauche et à droite par v non nul :

$v.(a.x + b.y + c) = 0$

ou encore :

$v.a.x + v.b.y + v.c = 0$

Mais ça, c'est l'équation qui correspond à $(v.a, v.b, v.c)$. C'est d'ailleurs aussi vrai dans l'autre sens. Si nous avons :

$v.a.x + v.b.y + v.c = 0$

alors :

$v.(a.x + b.y + c) = 0$

Cela est vrai si v = *0* ou si $a.x + b.y + c = 0$ (un produit est zéro si au moins un de ses facteurs est zéro). Mais nous avons supposé que *v* n'est pas zéro. Donc, nous avons :

$a.x + b.y + c = 0.$

En d'autres termes, si une droite est représentée par *(a, b, c)*, alors la même droite est représentée par *(v.a, v.b, v.c)* avec *v* non nul.

La correspondance entre un triplet de nombres *(a, b, c)* et une droite est donc un peu plus complexe que la correspondance entre un point et un couple de nombres *(x,y)* : là où il y a une correspondance 1-1 pour les points et les couples de nombres, et on peut donc « remplacer » les points par des couples, **il y a toute une famille de triplets de nombres qui correspondent à la même droite**.

Cela fait un peu penser aux fractions. Il y a toute une famille d'écritures de fractions : 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, …. qui correspond au même nombre rationnel (0.5). Si on associe une écriture de fraction à un « couple d'entiers », on pourrait dire que les couples (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)…. correspondent tous au même nombre rationnel.

Nous sommes dans un cas semblable avec les droites : toute une famille de triplets décrit une et même droite. Par exemple, nous avons vu que le triplet (1, -1, 0) décrivait la bissectrice de BAC. Le triplet (12.5 , -12.5, 0) décrit la même bissectrice.

On peut toujours multiplier le triplet par un nombre non-nul, et on obtiendra un triplet qui décrit la même droite.

Nous avons vu que le cas où $b = 0$ correspond à une droite « verticale » (c.à.d. parallèle à l'axe Y). Si la droite n'est donc pas verticale, b n'est pas 0.

Notre équation est : $a.x + b.y + c = 0$ avec b non-nul.

Nous pouvons représenter la même droite en multipliant par un nombre non-nul et on va choisir $1/b$.

Alors $(1/b) . (a.x + b.y + c) = 0$; ou encore :

$(a/b).x + (b/b).y + c/b = 0$; ou encore :

$(a/b).x + y + c/b = 0$; ou encore :

$y = - (a/b).x - c/b$

Si on renomme $\boldsymbol{u = - a/b}$ **et** $\boldsymbol{v = - c/b}$ nous avons :

$y = u.x + v$

C'est une autre façon d'écrire l'équation d'une droite non-verticale. Elle a l'avantage que pour toute valeur de x, elle nous permet directement de calculer la valeur de y qui va satisfaire la condition pour appartenir à cette droite.

On dit parfois que c'est **la forme fonctionnelle** de la droite. N'oublions pas que cette forme *n'existe pas pour une droite verticale.*

On peut « interpréter » un peu plus facilement la forme fonctionnelle. D'ailleurs, il y a bien une correspondance 1-1 entre les couples (u, v) et les droites non-verticales : **à chaque**

droite non-verticale correspond exactement un couple *(u, v)*, et à chaque couple *(u, v)* correspond exactement une droite non-verticale.

La valeur de *v* est le point de l'axe Y où la droite non-verticale coupe l'axe Y. Une droite non-verticale coupera d'ailleurs toujours l'axe Y en un seul point, et ce point correspond donc à la valeur unique de *v*.

La valeur de *u* est **le coefficient-directeur** de la droite.

Toutes les droites non-verticales qui sont parallèles, ont le même coefficient-directeur, et toutes les droites avec le même coefficient-directeur sont parallèles.

On peut facilement voir cela :

Imaginez que nous avons deux droites avec le même coefficient directeur u :

droite d_1 : $y = u.x + v$

droite d_2 : $y = u.x + w$

Un point (x_1, y_1) qui appartient aussi bien à d_1 que à d_2 doit satisfaire les deux équations à la fois (nous y reviendrons) :

$y_1 = u.x_1 + v$

$y_1 = u.x_1 + w$

Nous avons bien sûr que $y_1 = y_1$ et donc :

$u.x_1 + v = u.x_1 + w$

En soustrayant $u.x_1$ aux deux cotés, nous obtenons :

$v = w$.

Pour qu'il y ait donc un point commun entre la droite d_1 et d_2, il nous faut que $v = w$. Mais alors, d_1 et d_2 ont la même équation et sont les mêmes droites (u était déjà, par hypothèse, la même chose).

Cela prouve donc que les droites d_1 et d_2 sont parallèles : ou bien ils n'ont aucun point commun (si v est différent de w, aucun (x_1,y_1) peut être trouvé, aucun point d'intersection peut être trouvé), ou bien ce sont les mêmes droites.

Ainsi, la forme fonctionnelle nous donne :

- **par le coefficient-directeur : le jeu de droites parallèles**
- **par *v* : le point d'intersection avec l'axe Y**

Mais, on répète, cela exclut donc les droites verticales.

Les droites verticales sont toutes décrites par une équation simple :

$x = w$.

L'interprétation est simple : w est le point de l'axe X qui coupe la droite verticale.

Intersection de deux droites

Si on veut trouver l'intersection de deux droites, c.à.d. les points qui appartiennent à deux droites, alors nous avons 3 cas possibles :

- les deux droites sont verticales

- une des deux droites est verticale
- aucune droite n'est verticale

Le premier cas est simple. Nous avons donc :

$x = w_1$, et $x = w_2$.

Si $w_1 = w_2$, ce sont les mêmes droites, et leur intersection, c'est la droite entière.

Si w_1 n'est pas w_2, ce sont deux droites parallèles qui n'ont aucun point en commun.

Le deuxième cas est le suivant :

$d_1 : x = w_1$

$d_2 : y = u.x + v$

Le point d'intersection est trouvé par :

$x_1 = w_1$, et $y_1 = u.w_1 + v$.

Le troisième cas générique nous donne :

$d_1 : y = u_1.x + v_1$

$d_2 : y = u_2.x + v_2$

Si $u_1 = u_2$, d_1 et d_2 sont parallèles. Si $v_1 = v_2$, ce sont les mêmes droites et donc l'intersection est la droite entière. Si v_1 et v_2 sont différents, les droites parallèles n'ont aucun point en commun.

Si u_1 est différent de u_2, nous pouvons faire la soustraction :

$0 = (u_1 – u_2).x_1 + v_1 – v_2$

Il en suit que :

$\boldsymbol{x_1 = (v_2 - v_1) / (u_1 - u_2)}$

La division peut se faire, car $u_1 - u_2$ n'est pas zéro (car u_1 est différent de u_2).

On trouve alors $\boldsymbol{y_1 = u_1 . (v_2 - v_1) / (u_1 - u_2) + v_1}$

Nous avons ainsi déterminé le point d'intersection (x_1, y_1) des droites d_1 et d_2.

Droite passant par deux points donnés

Maintenant, nous supposons que nous avons deux points, (x_1,y_1) et (x_2,y_2), et nous voulons obtenir l'équation de la droite qui passe par ces deux points.

Premier cas : les deux points se trouvent sur une verticale. Si $x_1 = x_2$, alors l'équation de la droite sera $x = x_1$ (ou x_2).

Si x_1 n'est pas x_2, alors la droite ne sera pas verticale, et une représentation fonctionnelle existe donc.

$y_1 = u.x_1 + v$

$y_2 = u.x_2 + v$

La soustraction des deux équations nous livre :

$y_1 - y_2 = u.(x_1 - x_2)$, et donc :

$u = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$

Ceci est autorisé puisque $x_1 - x_2$ n'est pas zéro.

On trouve v en substituant la valeur de u trouvé dans la première équation :

$y_1 = x_1.(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) + v$

et donc :

$v = y_1 - x_1.(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$

Droite parallèle à une droite donnée

Pour obtenir l'équation d'une droite, qui est parallèle à une droite donnée, et qui passe par un point donné, nous pouvons faire la chose suivante :

Si la droite donnée n'est pas une verticale :

La droite donnée est $y = u_1.x + v_1$

Le point donné est (x_2,y_2)

La nouvelle droite sera alors de la forme : $y = u_1.x + v_2$, où il faut déterminer v_2 encore, mais u_1 vient de la droite donnée.

Pour passer par le point (x_2,y_2), il faut donc :

$y_2 = u_1.x_2 + v_2$, d'où :

$v_2 = y_2 - u_1.x_2$

Si la droite donnée est une verticale, alors la droite demandée est :

$x = x_2$

Translations

Une translation est un déplacement de tout point du plan, parallèle et sur une même distance. On « glisse » le plan en entier dans une direction, un sens et sur une distance.

On peut obtenir une translation du plan dans le système cartésien, quand on connaît le déplacement de **l'origine**. L'origine, c'est le point A du segment sur lequel nous avons construit le repère, et qui a donc, par construction, les coordonnées (0,0).

Si cet origine, après la translation, se trouve dans le point *(u,v)*, alors tout point *(x,y)* avant la translation, se trouvera dans le point *(x + u, y + v)* après la translation.

Ainsi, une translation est entièrement déterminée par le point où arrive l'origine.

A tout point, correspond donc exactement une seule translation.

Effectivement, deux points différents ne peuvent pas décrire la même translation, car l'origine arrive dans deux points différents sous ces deux translations. Et l'origine peut arriver dans n'importe quel point, définissant ainsi une translation.

Nous allons introduire **une notation pour la translation** déterminée par le point U (avec coordonnées *(u,v)*) :

T_U (P) = Q

se lit : le point P, sous la translation déterminée par le point U, arrive dans le point Q.

Si les coordonnées de P sont (x_1, y_1) et les coordonnées de Q sont (x_2, y_2) nous avons : $x_2 = x_1 + u$ et $y_2 = y_1 + v$.

Une translation n'est donc rien d'autre que l'addition un

par un des coordonnées.

On peut écrire cela encore comme :

$Q = P + U$

car c'est naturellement ce qu'on fait avec les coordonnées.

On peut additionner des points dans le plan de Descartes, alors que c'est quelque chose qui n'avait aucun sens chez Euclide. Mais attention, **cette addition a seulement un sens dans un repère donné**. L'addition des mêmes points P et U aura un tout autre résultat dans un autre repère, et ne sera pas « le même point Q ». Mais nous allons garder notre repère, ne pas changer de repère, et alors, cette opération, dans ce repère, est bien définie.

Nous avons introduit deux notations différentes pour la même chose :

$T_U (P) = Q$

et

$Q = P + U$

Les deux notations impliquent la somme des coordonnées de P et de U pour obtenir les coordonnées de Q. Mais celle avec T_U met plus l'accent sur « un déplacement du plan entier », dont on veut voir quel effet cela à sur le point P, qu'on déplace dans le point Q, alors que celle avec l'addition parle seulement des points P et U, pour obtenir un autre point Q.

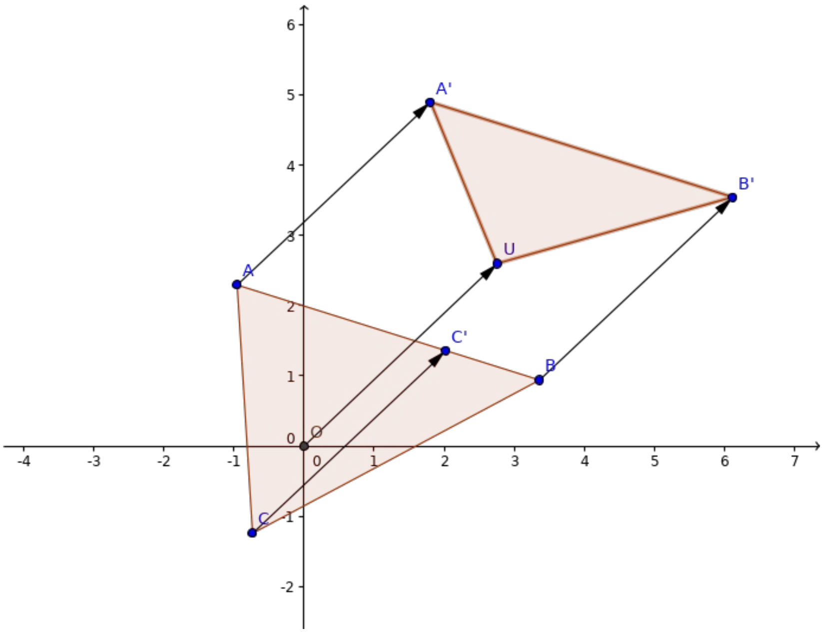

Illustration 53: Translation associée au point U, appliquée à un triangle ABC pour donner le triangle A'B'C'

Comme une translation est en fait une addition de nombres, et que nous connaissons plusieurs propriétés de l'addition, ces propriétés se reportent automatiquement sur la translation.

L'addition est commutative, ce qui veut dire : $a + b = b + a$.

Il en suit : Q = P + U = U + P.

Et donc :

$T_U(P) = T_P(U)$

Algébriquement, c'est une évidence, mais géométriquement, ce n'est pas si simple.

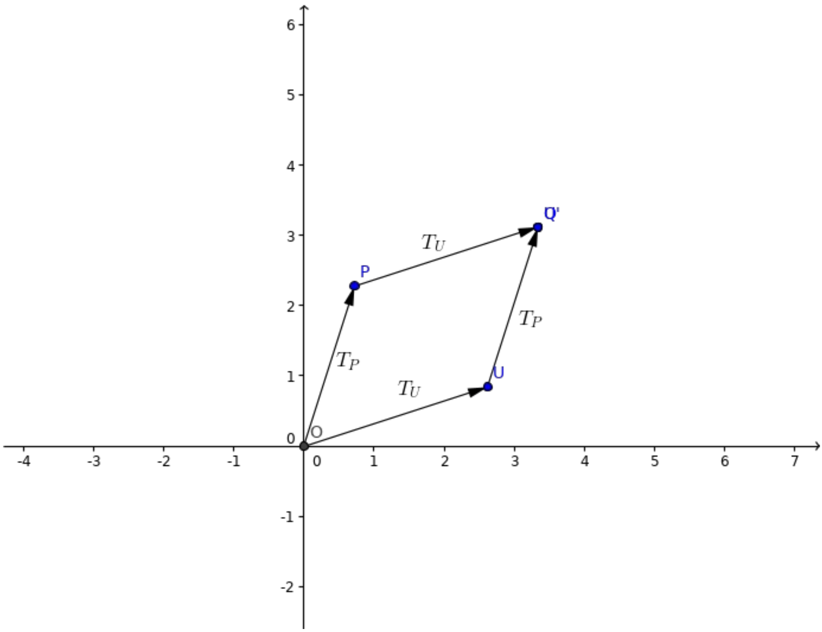

Illustration 54: La commutativité de l'addition et son effet sur les translations: la translation déterminée par le point U, du point P, est le même point Q que la translation déterminée par le point P, du point U. L'origine O, et P, Q et U forment un parallélogramme (sauf qu'on ne le sait pas encore...).

Un autre effet de la commutativité de l'addition est la suivante :

Si on applique deux translations à la suite, l'ordre n'a pas d'importance.

$T_V(T_U(P)) = T_U (T_V(P))$

Algébriquement, cela est démontré en une ligne :

$T_V(T_U(P)) = P + U + V = P + V + U = T_U (T_V(P))$

Géométriquement, cela ressemble à la figure suivante :

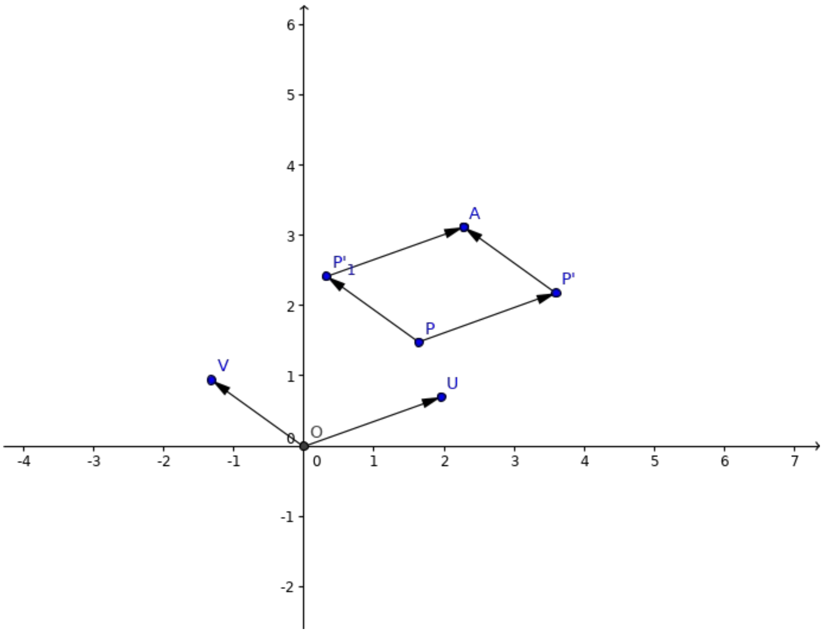

Illustration 55: L'ordre de deux translations de suite n'a pas d'importance.

Il y a même plus : deux translations de suite, ça fait une nouvelle translation :

$T_V(T_U(P)) = T_{U+V} (P)$

Algébriquement, c’est encore une évidence.

Mais maintenant **on peut donc aussi « additionner » des translations**. C’est la même chose qu’additionner leurs points définissants.

Il n’y a donc vraiment pas de différence fondamentale entre l’addition des points (leur coordonnées) et les translations.

Droites et translations

Il y a une translation spéciale : celle associée à l'origine. Cette translation va donc transporter l'origine vers l'origine : elle ne fait donc rien. Elle correspond à ajouter (0,0) à tout couple de nombres *(x,y)* : elle ne fait rien du tout. C'est **la translation neutre**. On l'écrit normalement : T_O.

La translation neutre laisse tout point « en place ». Toute autre translation ne laisse aucun point « en place ».

On peut maintenant se demander ce qui se passe avec des droites sous une translation. Comme une droite, c'est un ensemble de points selon Descartes, et n'est pas « plus » que cela, **la translation d'une droite, c'est l'ensemble de tous les points de la droite, après qu'ils aient, tous, un par un, subi la translation.**

La première chose à constater, c'est que **la translation d'une droite, c'est une droite.** Ce n'est pas un cercle ou un triangle : quand on applique une translation à tous les points d'une droite, tous ces points arrivent sur un autre (ou la même) droite.

On va montrer cela par une voie algébrique.

Si la droite de départ est une verticale, alors elle a comme équation :

$x = d$.

La translation *(p,q)* va changer chaque point *(x,y)* de la droite de départ en $(x',y') = (x+p, y+q)$.

Alors, nous voyons que les points d'arrivée vont satisfaire :

$x' = d + p$

car si $x = d$, alors $x + p = d + p$ et $x + p = x'$.

Mais $x' = d + p$ est l'équation d'une autre verticale.

On voit d'ailleurs que la seule chose qui compte dans la translation d'une verticale, c'est « la partie X » de la translation. La valeur de q n'a aucune importance.

Donc tous les points d'une verticale arrivent sur une autre verticale (ou la même verticale, si $p = 0$).

Si la droite n'est pas verticale, nous avons :

$y = u.x + v$ pour notre droite. Pour un point quelconque (x,y) de notre droite, nous calculons où il arrivera :

en $(x', y') = (x + p, y + q)$

Alors, $y' = y + q$ et donc $y' = u.x + v + q$

$x' = x + p$ donc $x = x' - p$

$y' = u.(x' - p) + v + q = u.x' + v - u.p + q$

Si nous appelons $\boldsymbol{v' = v - u.p + q}$, alors nous avons :

$y' = u.x' + v'$

ce qui est bien l'équation d'une droite non-verticale.

Nous constatons d'ailleurs que la valeur de u n'a pas changé :

Tous les points d'une droite non-verticale arrivent sur une autre droite non-verticale, parallèle à la droite d'origine.

Une translation garde donc les droites parallèles.

Nous voyons donc qu'une droite, qu'elle soit verticale ou pas, est transportée dans une autre droite parallèle par une translation, et parfois en elle-même.

Nous allons nous intéresser à ce dernier cas : **quand est-ce que une droite reste elle-même (on dit qu'elle est « invariante ») sous une translation ?**

Pour une verticale, c'est simple : il faut que $p = 0$. Mais cela veut dire que le point qui définit la translation, le point (p,q) donc, satisfait l'équation $p = 0$.

Il faut donc que le point qui définit une translation, qui garde une droite verticale invariante, se trouve lui-même sur l'axe Y.

Pour une droite non-verticale, nous avons vu que la droite :

$y = u.x + v$

se transforme en la droite :

$y = u.x + v'$ avec $v' = v - u.p + q$.

Pour que cette droite reste invariante, il faut donc que $v' = v$.

Ou que $v = v - u.p + q$. Ou encore $u.p = q$.

Le point (p,q) qui définit la translation doit donc obéir à l'équation :

$q = u.p$

Mais c'est une droite, ça ! C'est en fait la droite, parallèle à notre droite qui doit rester invariante (le même u), et qui passe par l'origine (son « v » est 0).

Nous constatons donc en général que :

une droite d reste invariante sous une translation, quand le point qui définit cette translation se trouve sur la droite parallèle à d, et qui passe par l’origine.

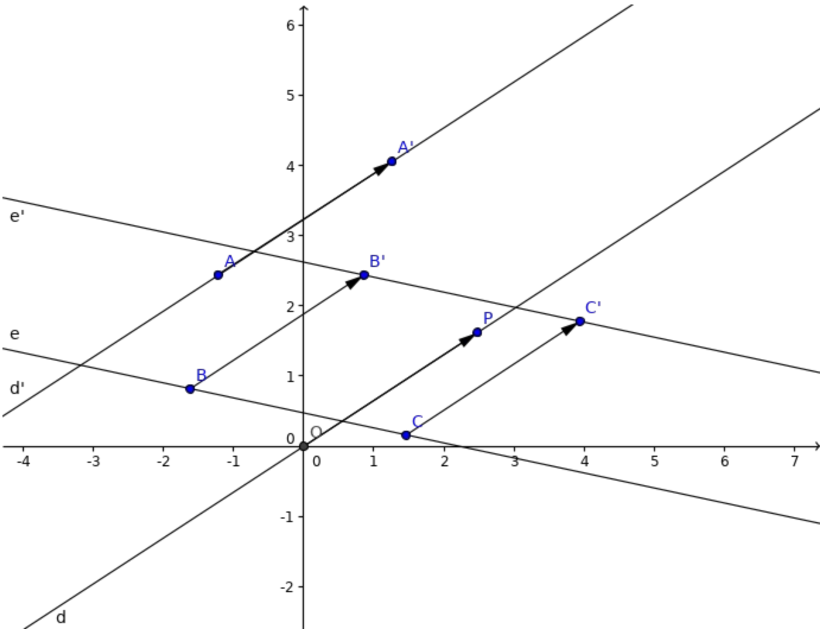

Illustration 56: Droites soumises à une translation: la droite e est transportée par la translation définie par le point P en la droite e'. La droite d' est invariante sous cette translation, car P se trouve sur la droite d, parallèle à d', et qui passe par l'origine.

La translation du point A vers point B

Nous avons vu qu’un point P définit une translation. Si le point P a les coordonnées *(u,v)*, alors tout point *(x,y)* sera porté sur le point *(x+u, y+v)* par la translation en question.

Mais on peut se poser la question inverse : **imaginons que nous voulons trouver la translation qui est telle, que le point *(x_1, y_1)* sera projeté sur le point *(x_2, y_2)*, à quel point correspond cette translation alors ?**

La réponse est très simple :

$u = x_2 – x_1$

$v = y_2 – y_1$

comme on peut facilement vérifier.

On peut donc dire : **la translation qui va porter le point A sur le point B, est définie par le point B – A.**

De la même façon qu'on peut donc dire qu'un point P définit une translation, on peut aussi dire qu'un couple de points (A,B) définit une translation, et le lien entre les deux est P = B – A.

On nomme parfois un couple de points, utilisé pour définir une translation, un **vecteur**[3]**.** On note le couple de points (A,B) alors de la façon suivante :

$\overrightarrow{AB}$ qui représente T_{B-A}

Donc essentiellement, cette notation dit qu'on utilise le couple de points (A,B) pour définir une translation qui, elle, est définie par le point B – A. Cette translation a comme propriété de porter le point A sur le point B.

3 Ce n'est qu'une des diverses façons de parler du concept de vecteur. Ici, nous proposons un vecteur comme étant une translation. On peut le faire d'autres façons.

Nous avons alors la propriété suivante : **une droite reste invariante sous la translation d'un vecteur dont les deux points font partie de la droite en question.**

On dit alors aussi que deux vecteurs sont égaux, s'ils définissent la même translation :

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si B – A = D – C

Donc, attention, deux vecteurs qui sont égaux n'implique pas que les deux points sont égaux, mais seulement que la translation qu'ils représentent, sont les mêmes.

Distance

Euclide parle souvent de **la longueur d'un segment** : la longueur est la magnitude associée à un segment. Dans la géométrie de Descartes, cette magnitude sera bien sûr un nombre réel (positif). Mais c'est alors le même concept que **la distance entre deux points.**

La distance entre deux points existe déjà pour l'axe numérique bien sûr : c'est la différence du plus grand nombre et le plus petit nombre qui correspond aux deux points en question sur l'axe numérique.

La distance entre 3.2 et 5.8, c'est 5.8 – 3.2 = 2.6. Il faut prendre 5.8 en premier, car c'est le plus grand.

On peut donc noter **la distance entre de deux nombres** comme :

***d(a,b)*. Si *a* > *b*, alors *d(a,b)* = *a* – *b*, sinon c'est *b* – *a*.**

Nous avons donc une distance sur l’axe X, et sur l’axe Y. Mais il faut une distance entre deux points du plan.

Pour cela, nous allons d’abord définir la distance d’un point à l’origine.

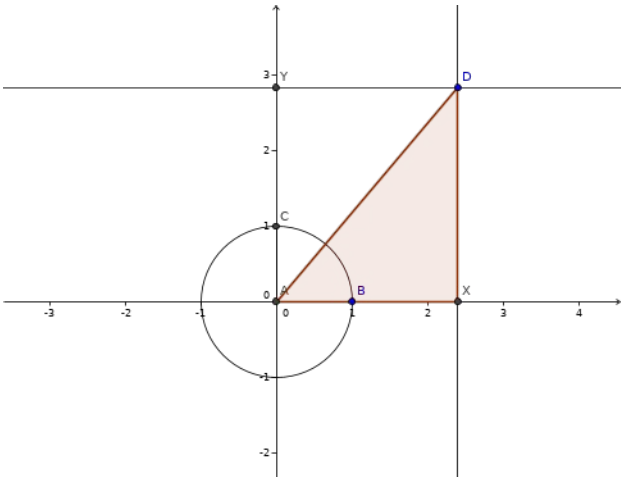

Illustration 57: Distance du point D de l'origine A.

Nous voulons calculer la distance entre le point D (avec coordonnées *(x,y)*) et le point A, ou dans d’autres termes, la longueur du segment AD.

La droite YD est parallèle à la droite AX, et la droite AY est parallèle à la droite XD. Ainsi, la figure YDXA est un parallélogramme (c’est même un rectangle, puisque l’angle XAY est un angle droit par construction).

La distance entre le point A et le point X est connue, car c’est une distance sur l’axe X. Cette distance est donc *x* si *x* est positif, et -*x* si *x* est négatif, ce qui fait que cette distance est la valeur absolue de *x*.

On peut faire le même raisonnement sur la distance entre A et Y : elle est la valeur absolue de *y*.

Dans un parallélogramme, les cotés opposés sont de même longueur, donc la longueur du segment XD est aussi la valeur absolue de *y*.

Le triangle AXD est un triangle rectangle, car l'angle AXD est un angle droit. Effectivement, l'axe X coupe deux droites parallèles AY et AD, l'angle XAY est un angle droit, et la somme des deux angles internes du même coté est deux angles droits. Cette somme est AXD et XAY. Puisque XAY est un angle droit, il reste un angle droit pour AXD.

Par le théorème de Pythagore, la longueur de AD au carré est la longueur de AX au carré plus la longueur de AY au carré.

Nous avons donc que $(AD)^2 = x^2 + y^2$

Ce qui fait que **la distance du point D à l'origine A est** :

$d(A,D) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

Si maintenant on accepte qu'une translation ne change pas les distances (c.à.d. que la distance entre deux points après une translation est la même que la distance entre ces deux points avant la translation), et on a deux points différents (x_1, y_1) et (x_2, y_2), la distance entre les deux ne changera pas si on applique la translation associée à $(-x_1,-y_1)$.

Mais sous cette translation, le premier point devient (0,0), et le deuxième devient $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

La distance entre les deux points est alors égale à la distance du point $(x_2 – x_1, y_2 – y_1)$ de l'origine (0,0). Mais ça, on vient de le faire, c'est : **√** $\boldsymbol{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$

Ainsi on peut conclure :

La distance entre deux points $\boldsymbol{(x_1,y_1)}$ **et** $\boldsymbol{(x_2,y_2)}$ **est :**

√ $\boldsymbol{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2)}$

Maintenant, on peut se poser la question suivante : on pensait qu'avec la géométrie de Descartes, plus besoin de « raisonner comme Euclide », et que l'algèbre suffit. Mais nous venons de faire une démonstration « à l'Euclide ». Alors est-ce que Descartes est aussi «intuitif - dessin» qu'Euclide finalement ?

Non, pas du tout. On peut simplement *définir* la distance entre deux points chez Descartes avec la formule ci-dessus. Si on a deux points, alors la formule ci-dessus est par définition leur « distance ». Mais on voulait montrer que cette valeur « abstraite » correspond bien à ce qu' Euclide voulait comprendre par « longueur d'un segment ». Il fallait donc « parler Euclide » pour faire le lien.

Droites perpendiculaires

Problème : nous avons une droite d. Il nous faut une droite d', perpendiculaire à d.

Si d est une verticale, alors choisissons d' l'axe X avec équation : $y = 0$.

Si d n'est pas une verticale, elle a une forme fonctionnelle :

$y = u.x + v.$

Si *u = 0*, alors c'est une horizontale. La droite perpendiculaire est alors une verticale. Nous supposons maintenant que *u* n'est pas 0.

Nous allons montrer que la droite qui passe par l'origine, et par le point *(-u, 1)*, est perpendiculaire à la droite *y = u.x* (qui, elle, est parallèle à la droite d).

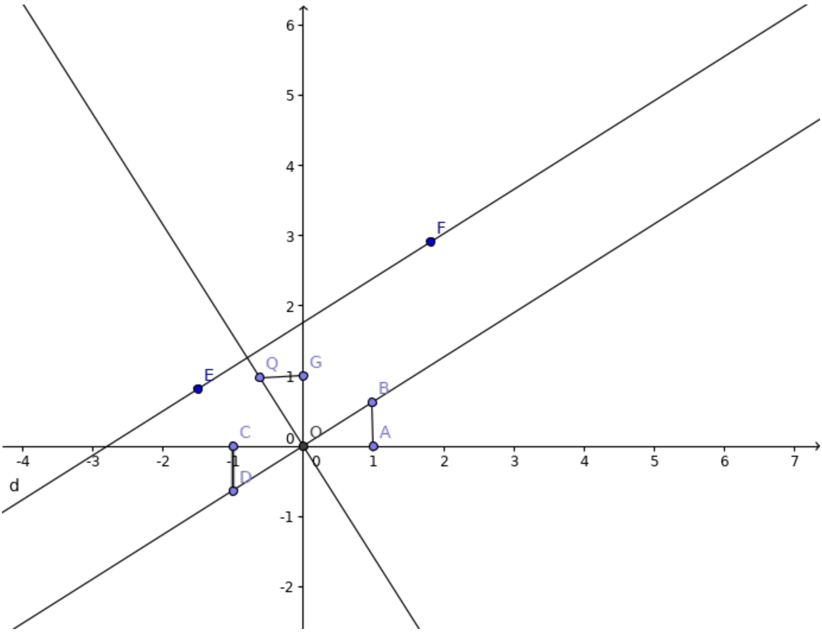

Illustration 58: Une droite, perpendiculaire à d.

La droite *y = u.x* passe par le point *(1, u)* et le point *(-1, -u)* (les points B et D sur la figure).

Ces deux points sont à même distance de l'origine, donc l'origine est le milieu du segment BD.

Le carré de la distance du point *(-u, 1)* au point B est :

$(-u - 1)^2 + (1 - u)^2 = u^2 + 1 + 2.u + 1 + u^2 - 2.u = 2.u^2 + 2.$

Le carré de la distance du point *(-u, 1)* au point D est :

$(-u + 1)^2 + (1 + u)^2 = u^2 + 1 - 2.u + 1 + u^2 + 2.u = 2.u^2 + 2$

Cela veut dire que le point Q (avec coordonnées *(-u, 1)*) et à même distance de D et de B : le triangle DQB est un triangle isocèle. Dans un triangle isocèle, la droite du milieu de la base vers le sommet est perpendiculaire à la base (par le fait que le triangle DOQ et le triangle BOQ ont les cotés de même longueur et donc l'angle DOQ = l'angle BOQ. Mais leur somme est deux angles droits, donc chacun est un angle droit). Ici, la base est BD, le milieu de la base est O, et le sommet est Q. Donc la droite OQ est bien perpendiculaire à BD.

Mais la droite OQ contient l'origine, et le point Q (coordonnées *(-u, 1)*).

Cette droite à pour équation :

y = (-1/u).x

Si une droite a un coefficient directeur de *u*, alors les droites avec coefficient directeur *-1/u* sont perpendiculaires à cette droite.

Le cercle

Un cercle (le bord donc) est l'ensemble des points qui sont à une distance *r* (rayon) d'un centre (x_c, y_c).

Il est plus facile de travailler avec le carré, mais un point *(x,y)* du cercle doit donc satisfaire cette exigence de distance :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Voilà donc l'équation du cercle !

Homothéties

Une homothétie est un « zoom » uniforme du plan, à partir de l'origine. Une homothétie déplace les points du plan, comme une translation déplaçait les points du plan. Une translation ajoutait une valeur à la coordonnée x, et une autre valeur à la coordonnée y de chaque point. Une homothétie multiplie x et y avec le même nombre réel.

Si k est un nombre réel, alors H_k est une homothétie et $H_k(P)$ = Q avec P le point (x,y) et Q le point $(k.x, k.y)$.

On écrit aussi : Q = k.P

On multiplie un point donc avec un nombre réel. Comme pour l'addition de points, **cela n'a qu'un sens dans un repère donné.**

L'homothétie H_1 est spéciale, car, comme T_O, elle ne fait rien : tous les points restent en place. H_0 est aussi une homothétie spéciale, car tous les points arrivent sur l'origine. Parfois on ne considère pas que H_0 est une vraie homothétie. Si k est négatif, H_k est une homothétie qui « flippe » les points de l'autre coté de l'origine.

L'effet d'une homothétie sur une droite est un peu inattendu : (à part l'homothétie H_0) une homothétie transporte une droite en une droite parallèle à elle-même.

Si la droite est une verticale, alors nous avons :

$x = d$.

Alors $k.x = k.d$.

Si la droite d n’est pas une verticale, alors nous avons :

d :$y = u.x + v$

$k.y = k.u.x + k.v = u.(k.x) + k.v$

Ainsi, les points de la droite d, après homothétie, satisfont donc l’équation :

$y' = u.x' + k.v$

avec $x' = k.x$ et $y' = k.y$

C’est une droite, avec le même u (donc parallèle) et avec :

$\boldsymbol{v' = k.v}$

Comme une homothétie est une multiplication avec un nombre réel, nous avons que **deux homothéties de suite est de nouveau une homothétie** :

$H_{k.k'}(P) = H_k (H_{k'}(P))$

Comme la multiplication de nombres réels est commutative, **l’ordre dans lequel nous appliquons deux homothéties n’a pas d’importance** :

$H_k (H_{k'} (P)) = H_{k'} (H_k (P))$

Toutes les distances, après une homothétie, sont multipliées par la valeur absolue de *k*.

Exercices

Points et repères

1. J'ai un point (d'Euclide) P. Comment choisir chaque fois un repère (il faut donc dessiner la construction) pour que ce point ait comme coordonnées :
    1. (1,0)
    2. (0,0)
    3. (0,1)
    4. (1,1)
2. J'ai deux points (d'Euclide), P et Q. Comment choisir chaque fois un repère (dessiner la construction) pour que :
    1. P soit (0,0) et Q soit (0,1) ?
    2. P soit (1,0) et Q soit (1,0) ?
    3. P soit (0,1) et Q soit (0, 2) ?

Droites

1. La droite d : $x + 5.y - 12 = 0$, contient-elle le point (1,2) ? Le point (2,2) ? Le point (2, 1) ? Le point (2,2) ?
2. La droite d : $x + 5.y - 12 = 0$ contient un point qui à comme premier coordonnée la valeur de 32. Quelle est la valeur de la deuxième coordonnée ?
3. La droite d : $x + 5.y - 12 = 0$ est-elle la même droite que d' : $2\,x + 10 - 24 = 0$? Et est-elle la même droite

que d'' : $5\,x + y - 12 = 0$?

4. Écrivez la droite d : $x + 5.y - 12 = 0$ en forme fonctionnelle. Quel est son coefficient directeur ? Où est-ce que cette droite coupe l'axe vertical Y ? Trouvez la droite d', parallèle à la droite d, qui passe par l'origine. Trouvez la droite d'', parallèle à d, qui passe par le point (0,10).

5. Trouvez la droite qui passe par les points :

    1. (5,0) et (5, 2)
    2. (5,0) et (6,0)
    3. (5,2) et (6,2)
    4. (2,3) et (3,4)
    5. (3,1) et (5,0)

6. La droite d passe par les points (2,3) et (4,2). Trouvez la droite d', qui est parallèle à la droite d, et qui passe par le point (1,1).

7. Trouvez l'intersection de :

    1. $x = 5$ et $y = 3.x + 4$
    2. $y = 3$ et $y = 3.x + 4$
    3. $x = 5$ et $y = 3$
    4. $y = 3.x + 4$ et $y = 4.x + 3$
    5. $y = 7.x$ et $y = 2.x$

Translations

1. Une translation T est telle, que l'origine arrive sur le point (5,2). Quelle est alors l'image sous cette translation des points (1,1), (1,0) et (0,1) ?
2. La translation T est déterminée par le point (5,3). La translation S est déterminée par le point (1,2). Trouvez :
    1. L'image sous T de l'origine
    2. L'image sous S de l'origine
    3. L'image sous T de l'image sous S de l'origine
    4. L'image sous S de l'image sous T de l'origine
    5. L'image sous T du point (10, 5)
    6. L'image sous S du point (10, 5)
    7. L'image sous T de l'image sous S de (10,5)
    8. L'image sous S de l'image sous T de (10,5)
    9. La translation U qui est la somme de T et de S
    10. L'image sous U de (10,5)
3. Trouvez la translation qui porte le point (5,5) sur le point (6, 8). Trouvez l'image du point (8,8) sous cette translation.
4. Considérons la translation qui porte le point (5,5) au point (6,8). Cette translation portera la droite d : $y = 3.x + 5$ en quelle droite ? Et l'axe X ? Et l'axe Y ?

5. Démontrez : si d et d’ sont deux droites qui se croisent dans un point P, et T est une translation, alors, si d est porté en g, et d’ est porté en g’, les droites g et g’ se croisent dans un point Q, tel que Q est l’image de P sous T. (aide : posez le point P comme (x_1,y_1) qui appartient aussi bien à d qu’à d’ ; posez le point Q étant la translation par (a,b), donc $x_2 = x_1 + a$, $y_2 = y_1 + b$; calculez les équations de g et g’ et vérifiez que Q appartient bien à ces droites)

6. Proposez 3 translations différentes qui gardent la droite $y = 5.x + 3$ invariante.

7. Considérez la translation définie par le point (5, 2). Trouvez la droite invariante sous cette translation, qui passe par le point (1,1).

Distance et perpendicularité

1. Quelle est la distance entre le point (1,0) et le point (0,1) ?

2. Trouvez le ou les points sur l’axe X qui sont à la distance de 2 du point (0,1). Trouvez aussi les deux points sur l’axe Y qui sont à la distance 2 du point (0,1).

3. Trouvez la droite qui passe par l’origine, et qui est perpendiculaire à la droite d : $y = 5.x – 3$.

4. Trouvez la droite qui est perpendiculaire au segment AB, dans le point A, si A est le point (1,1) et B est le point (2,3).

Homothéties

1. Démontrez que la distance est multipliée par la valeur absolue de *k* quand on applique une homothétie avec facteur k.

2. T est une translation définie par le point (2,4) ; S est une translation définie par le point (3,2). H est une homothétie avec un facteur 3, G est une homothétie avec un facteur -2. P est le point (1,2).

    1. Trouvez H (G (P)) et G (H(P))

    2. Trouvez T (S (P)) et S(T(P))

    3. Trouvez T(H(P)) et H(T(P))

    4. Trouvez T (H(S(P))) et S (H (T(P)))

3. Trouvez l’effet d’une homothétie sur un cercle.

Épilogue

Dans la pédagogie de la géométrie, différents courants s’opposent, entre les « classiques » qui tendent vers Euclide, ceux qui veulent une approche synthétique, mais avec une axiomatique ‘pure’ et puis les « algébristes », avec une approche purement structurelle sur le plan algébrique. Cependant, la finalité d’une première introduction à la géométrie est multiple et ne peut être totalement satisfaite par aucune de ces approches « pures ». En premier lieu, la géométrie est *un outil pour apprendre à raisonner* : la finalité n’est pas la géométrie, c’est juste un outil pour apprendre le raisonnement déductif. En suite, la géométrie a un coté « pratique et physique » : on ne peut pas détacher la géométrie du dessin et des observations physiques dans l’espace physique. Et finalement, étudier un classique historique de plus que 2300 ans, y trouver ce qui est majestueux, et ce qui est problématique donne une dimension à l’étude, autre que purement mathématique. Mais Euclide n’est ni mathématiquement « rigoureux », ni la façon d’utiliser la géométrie dans la pratique. On ne peut donc pas se limiter à cela. En commençant par Euclide « presque dans le texte » du livre I, en étudiant le livre II « à l’envers » et en plongeant alors dans la géométrie cartésienne, j’espère avoir apporté un peu de tout, pour donner une vision plus équilibrée et riche de la géométrie et des différents aspects du raisonnement déductif.