Herhalingsoefeningen Problemen oplossen

Van de opgaven die geel gemarkeerd zijn, vind je achteraan de oplossingen. De oplossingen van de andere mag je steeds afgeven of er vragen over stellen.

Oef 1

Stel telkens de vergelijking van de parabool op.

1. De parabool p_1 met top T(-3,0) die door het punt S(0,-2) gaat.
2. De parabool p_2 snijdt de assen in de punten P(5,0), Q(6,0) en R(0,5).
3. De parabool p_3 gaat door de punten P(0,-1), Q(2,1) en R(-1,-5).
4. De parabool p_4 met top T(1,4) die door het punt S(2,-3) gaat.
5. De parabool p_5 snijdt de assen in de punten P(3,0), Q(-4,0) en R(0,24).
6. De parabool p_3 gaat door de punten P(0,5), Q(3,20) en R(-1,12).

Oef 2

De parabool $p \leftrightarrow y = 9x^2 + bx + c$ heeft als symmetrie-as $s \leftrightarrow x = 1$ en heeft juist één punt gemeenschappelijk met de x-as. Bepaal b en c.

Oef 3

Bepaal a en b als de coördinaat van de top gegeven is.

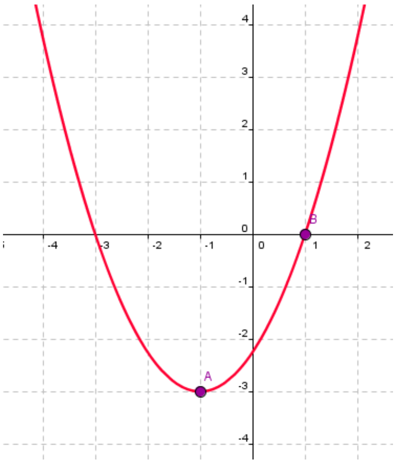
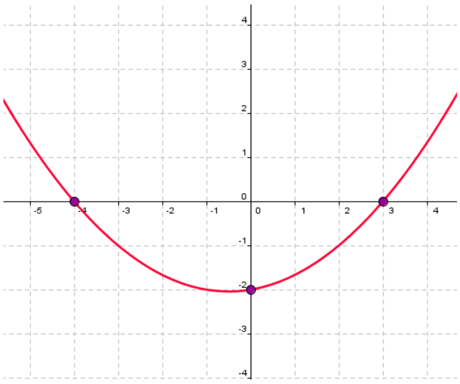
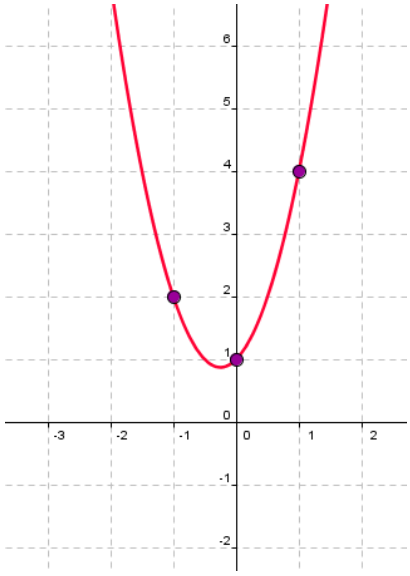
1. $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx + 4$ met T(2,0)
2. $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx - 10$ met T(3,-4)

Oef 4

Parabool $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ met top T(1,-5) gaat door het punt S(0,2). Bepaal a, b en c.

Oef 5

Bepaal in de volgende gevallen de vergelijking van de parabool p.

1 	2 	3 

Oef 6

Zoek de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de rechte v en de parabool p.

1. v: $y - x = 0$ p: $y = 2x^2 + 3x$	3. v: $x - y - 1 = 0$ p: $y = -x^2 + x + 7$
2. v: $2x - y - 2 = 0$ p: $y = -x^2 + 1$	4. v: $3x + y - 5 = 0$ p: $y = x^2 + x - 12$

Oef 7

De rechte v met richtingscoëfficiënt -3 raakt de parabool p: $y = -2x^2 + 3x + 1$.

1. Bepaal een vergelijking van de rechte v.
2. Bepaal de coördinaat van het snijpunt.

Oef 8

De rechte v raakt de parabool p: $y = x^2 - 4x + 1$ in het punt P(0,1) Bepaal een vergelijking van die rechte.

Oef 9

Zoek de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de parabolen.

1. p_1: $y = -2x^2 - x + 3$ p_2: $y = \frac{-5}{2}x^2 + 3$	3. p_1: $y = -3x^2 + 2x - 6$ p_2: $y = x^2 - x - 3$
2. p_1: $y = x^2 - x - 1$ p_2: $y = 2x^2 - 7x + 8$	4. p_1: $y = x^2 - 3x - 6$ p_2: $y = x^2 - 7x + 1$

Oef 10

Voor welke waarden van m hebben de parabolen p_1: $y = 2mx^2 + 3mx + 14$ en p_2: $y = -2mx^2 + 8$ geen enkel punt gemeenschappelijk?

Oef 11

Los de ongelijkheden op.

1. $x^2 - 5x + 4 \leq 0$
2. $-5x^2 < 20$
3. $3x^2 + 10x - 8 \leq 0$
4. $-t^2 + t \geq 0$
5. $5x(x + 1) \leq 2(1 + x^2)$
6. $(3x + 1)^2 > 3x - 1$
7. $(t - 1)^2 \leq (2t + 1)^2$
8. $2y(y + 1) < (y + 1)^2$

Oef 12

Zoek de waarden van x.

1. Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f(x) = 2x^2 + x - 15$ onder de x-as?
2. Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ boven de x-as?
3. Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f(x) = 6x^2 + x$ boven de grafiek van $g(x) = 1$?
4. Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f(x) = -x^2$ onder de grafiek van $g(x) = 2x$?

Oef 13

De hoogte van een driehoek is 5 cm minder dan de basis. Bepaal de hoogte en de basis van de driehoek wanneer de oppervlakte 42 cm³ is.

Oef 14

Boer Jan is het beu zijn kippen los over het erf te zien lopen. Hij zal een rechthoekige afrastering maken. Omdat hij slechts 10 m gaas heeft, besluit hij de afsluiting zo te maken dat de muur van de schuur gebruikt wordt als één van de zijden van de rechthoek.

1. Bereken de afmetingen van de kippenren met de grootst mogelijke oppervlakte. Hoe groot is de maximale oppervlakte?

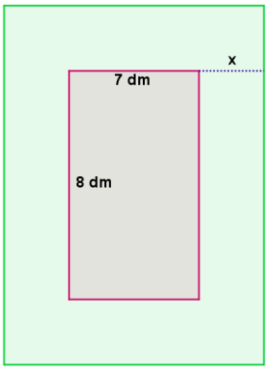
2. Wat zou de maximale oppervlakte zijn als Jan de vier zijden van het kippenhok in gaas had gemaakt?

Oef 15

Een weide heeft de vorm van een rechthoekige driehoek en moet omheind worden. De schuine zijde van de driehoek is 37 m en de ene rechthoekzijde is 23 m langer dan de andere. Hoeveel meter omheining is er nodig?

Oef 16

Een rechthoekig schilderij van 7 dm breed en 8 dm hoog moet ingelijst worden. Hoe breed moet de omlijsting zijn opdat de totale oppervlakte 72 dm² zou zijn?

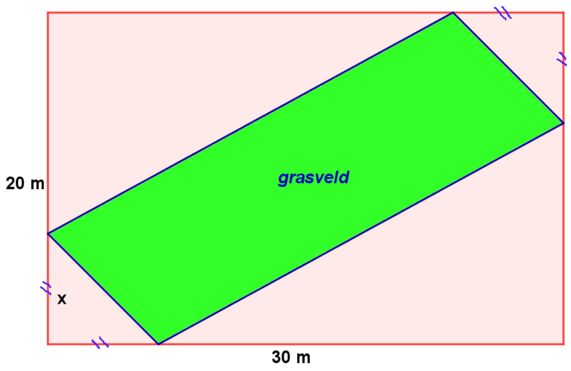


Oef 17

Mijn tuin is 20 m bij 30 m. Ik wil een grasveld aanleggen in de vorm van een parallellogram.

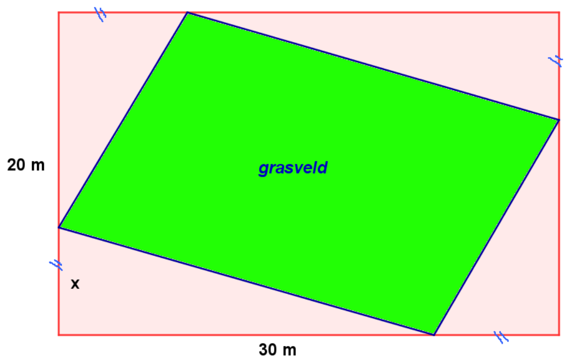
<table>
<tr>
<td>

1. Wat is de maximale oppervlakte van het grasveld als ik het aanleg zoals op de tekening?



</td>
<td>

2. Wat is de minimale oppervlakte van het grasveld als ik het aanleg zoals op de tekening?



</td>
</tr>
</table>

Oef 18

Leen en Jens spelen badminton in een sporthal van 8 m hoog. Jens staat de shuttle in een grote boog terug. De hoogte h van de shuttle is een functie van de tijd t met voorschrift $h(t) = -0{,}8t^2 + 2t + 4$. Hierbij is h uitgedrukt in meter en t in seconden.

1. Stel de hoogte van de shuttle grafisch voor.
2. Na hoeveel seconden is de shuttle 4 meter hoog?
3. Waarom raakt de shuttle het plafond niet?
4. Na hoeveel seconden komt de shuttle bij Leen aan (hoogte 2 m)?

Oef 19

Volgens het Belgisch instituut voor Statistiekkan het ledenaantal van de Belgische vakbonden beschreven worden met de functie $f(x) = -0{,}04x^2 + 4{,}4x – 20$. Hierbij is x het aantal jaar na 1930 en is f(x) het aantal leden van de vakbonden (per 10000). Dit model benadert de realiteit als $20 \leq x \leq 70$

1. Wanneer hadden de vakbonden het grootste aantal leden?
2. Hoeveel mensen waren er toen aangesloten bij een vakbond?

Oef 20

Stef trapt de bal naar Wim. Tijdens de vlucht van de bal is de hoogte h afhankelijk van de tijd t en wordt uitgedrukt door de functie $h(t) = -t^2 + 8t$. Hierbij is h uitgedrukt in meten en t in seconden.

1. Na hoeveel seconden komt de bal weer op de grond?
2. Toon aan dat, als Stef zo op de bal zou trappen in een sporthal met een hoogte van 10 meter, de bal tegen het dak zou vliegen. Hoe hoog moet de sporthal minstens zijn opdat de bal het dak niet zou raken?
3. Na hoeveel seconden bereikt de bal zijn hoogste punt?
4. Hoe lang vliegt de bal hoger dan 12 meter?

Oef 21

Een legertent heeft dee vorm van een parabool. Deze parabool is de grafiek van de funxctie $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2x$ waarbij h de hoogte in meter voorstelt, en x de afstand in meter vanaf de linkerkant van de tent.

1. Hoe breed is de tent?
2. Hoe hoog is de tent?
3. Op 1 meter van de zijkant wordt een lamp boven aan de tent gehangen. Hoe hoog hangt deze lamp?
4. De tent wordt gebruikt als garage voor legervoertuigen van 2 meter hoog. De ‘parkeerstrook’ van deze voertuigen moet minsten 2,5 meter breed zijn. Hoeveel wagens kunnen er naast elkaar in de tent staan?

Oef 22

Uit een luchtballon die zich in rusttoestand bevindt op 100 m boven de grond, laat men een zakje ballast vallen. Als men geen rekening houdt met de weerstand vande lucht, dan geldt bij deze valbeweging de volgende formule: $h = 100 – 4{,}9t^2$. Hierbij is de hoogte h uitgedrukt in meter en de tijd t in seconden.

1. Hoeveel tijd heeft de ballast nodig om de eerste 50 m af te leggen?
2. Na hoeveel seconden valt de ballast op de grond?

Blz 148 Oef 23

Voor Werchter Classic zijn er 80000 tickets te verkrijgen. Als de organisator 70 euro vraagt, weet hij dat alle tickets verkocht zullen zijn. Hij weet echter dat per euro dat hij het ticket duurder maakt, er telkens 500 tickets minder verkocht zullen worden. Bij welke ticketprijs heeft hij het meeste inkomsten?

Oef 24

Het punt A(3,5) is een vast punt op de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 4$.

Het punt $B(x_B, f(x_B))$ is een vrij punt op de grafiek van deze functie met $x_B > 3$.

1. Naar welke waarde nadert het differentietiequotiënt over het interval $[3, x_B]$ als x_B dichter en dichter bij 3 komt?

Tip: met het differentietiequotiënt wordt bedoeld het quotiënt van het verschil van de y-coördinaten gedeeld door het verschil van de x-coördinaten. (Het verschil van de y-coördinaten is $y_B – 5$.) In dat quotiënt vervang je nadien y_B door $x_B^2 - 4$.

2. Wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de grafiek van f?

Oef 25

Los op.

1. $\begin{cases} 3(x-5)(x+6) < 0 \\ (x+0{,}5)(x+3) \geq 0 \end{cases}$

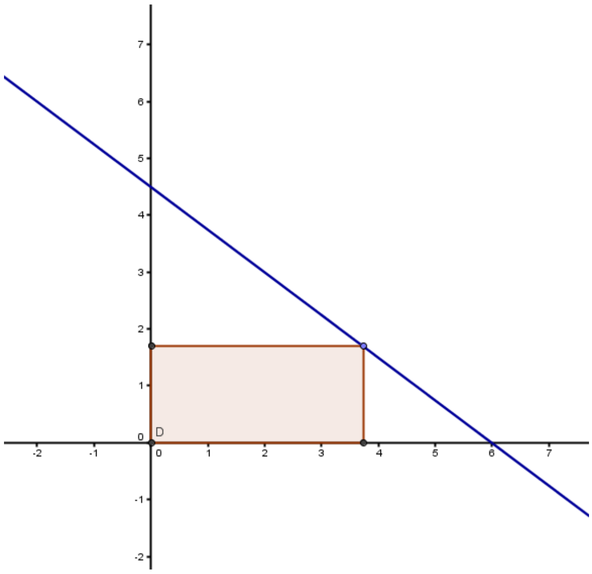
2. $|x^2 - 3| \leq 13$

3. $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$

4. $|x^2 - 6x + 2{,}5| \leq 2{,}5$

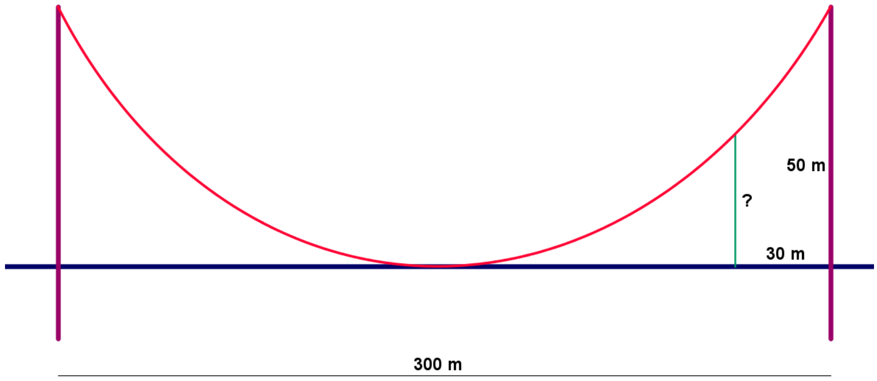
Oef 26

Gegeven is een rechthoek zoals op de tekening. Eén van de hoekpunten van de rechthoek ligt op de rechte a: $y = -0{,}75x + 4{,}5$. Voor welke afmetingen is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?



Oef 27

De torens van een kabelbrug staan 300 m uit elkaar en zijn 50 m hoger dan het wegdek. De kabel tussen de torens heeft de vorm van een parabool en raakt het wegdekl precies in het midden tussen de torens. Wat is de lengte van de verticale kabel die op 30 m van een van de torens het wegdek draagt?



Oef 27

1. Stel een tweedegraadsfunctie op bij de gegevens uit de tabel.

t aantal jaren na 1975	U uitgaven voor onderwijs in Vlaanderen (in miljoen euro)
0	11,00
1	10,15
2	9,40

2. Voorspel aan de hand van de functie de uitgaven voor het onderwijs in 2015.
3. Wanneer waren de uitgaven voor onderwijs het laagst?
4. In welk jaar zullen de uitgaven gestegen zijn tot 91 miljoen euro?
5. Wanneer waren de uitgaven kleiner dan 20 miljoen euro?

Wiskunde olympiade

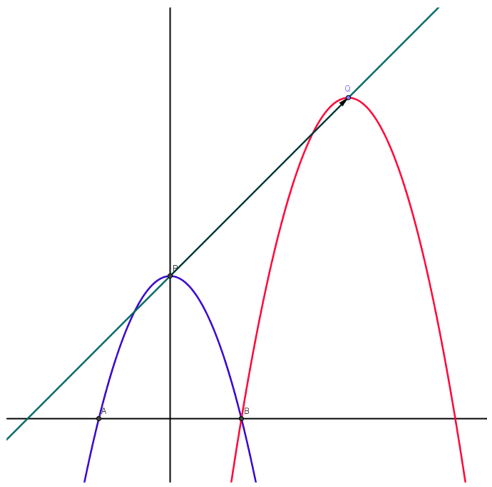
1. Welke van volgende ongelijkheden heeft juist één oplossing?

A $(7 - x)^2 > 0$	C $(7 - x)^2 \leq 0$	E $(7 - x)^2 \neq 0$
B $(7 - x)^2 < 0$	D $(7 - x)^2 \geq 0$	

2. In een orthonormaal assenstelsel snijdt een verticale rechte de parabool met vergelijking p: $y = \frac{1}{2}x^2$ in het punt A en de rechte met vergelijking a: $x - y = 2$ in het punt B. De kleinst mogelijke afstand tussen de punten A en B is gelijk aan.

A 1	B 1,625	C $\sqrt{2}$	D 1,5	E 2

3. De parabool $y = 4 - x^2$ heeft top P en snijdt de x-as in de punten A en B. De parabool wordt verschoven, zodanig dat zijn top beweegt langs de rechte $y = x + 4$ tot een zeker punt Q. In deze positie snijdt de parabool de x-as ook in het punt B. Wat is de y-coördinaat van het punt Q?



A 5	B 8	C 9	D 10	E 12

4. In een orthonormaal assenstelsel begrenzen de parabolen met vergelijking $y = x^2 - 4x - 5$ en $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5)$ een gebied. Wat is de oppervlakte van de kleinste rechthoek met zijden evenwijdig aan de coördinaatasssen, die dat gebied omvat?

Enkele oplossingen

Oef. 1

Er zijn drie verschillende vergelijkingen waarmee je kan werken:

Top en punt: $p \leftrightarrow y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Snijpunten met de x-as: $p \leftrightarrow y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Drie punten: $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$

1. De parabool p_1 met top T(-3,0) die door het punt S(0,-2) gaat. **De vergelijking van een parabool heeft volgende vorm: $p \leftrightarrow y = a(x - \alpha)^2 + \beta$** **top T(-3,0)** $\Rightarrow \alpha = -3$ en $\beta = 0$ $\Rightarrow y = a(x+3)^2 + 0$ $\Rightarrow y = a(x+3)^2$ **S(0,-2)** $\Rightarrow -2 = a(0+3)^2$ $\Rightarrow -2 = 9a$ $\Rightarrow 9a = -2$ $\Rightarrow a = \frac{-2}{9}$ $p \leftrightarrow y = \frac{-2}{9}(x+3)^2$ $p \leftrightarrow y = \frac{-2}{9}(x^2 + 6x + 9)$ $p \leftrightarrow y = \frac{-2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$
2. De parabool p_2 snijdt de assen in de punten P(5,0), Q(6,0) en R(0,5). **De vergelijking van een parabool heeft volgende vorm: $p \leftrightarrow y = a(x - x_1)(x - x_2)$** **Snijpunten met x-as: (5,0) en (6,0)** $\Rightarrow x_1 = 5$ en $x_2 = 6$ $\Rightarrow y = a(x - 5)(x - 6)$ **R(0,5)** $\Rightarrow 5 = a(0 - 5)(0 - 6)$ $\Rightarrow 5 = 30a$ $\Rightarrow a = \frac{1}{6}$ $p_2 \leftrightarrow y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $p_2 \leftrightarrow y = \frac{1}{6}(x - 5)(x - 6)$ $p_2 \leftrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 5$

3. De parabool p_3 gaat door de punten P(0,-1), Q(2,1) en R(-1,-5).

De vergelijking van een parabool heeft volgende vorm: p ↔ $y = ax^2 + bx + c$

P(0,-1) ∊ p ⇒ $-1 = a.0^2 + b.0 + c$

Q(2,1) ∊ p ⇒ $1 = a.2^2 + b.2 + c$

R(-1,-5) ∊ p ⇒ $-5 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c$

We hebben dus drie voorwaarden:

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ a - b + c = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4a + 2b - 1 = 1 \\ a - b - 1 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4a + 2b = 2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4a + 2b = 2 \\ a = b - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4(b - 4) + 2b = 2 \\ a = b - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 4b - 16 + 2b = 2 \\ a = b - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ 6b = 18 \\ a = b - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

p_3 ↔ $y = -x^2 + 3x - 1$

Oef. 4

De vergelijking van een parabool heeft volgende vorm: p ↔ $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

top T(-3,0) ⇒ $\alpha = 1$ en $\beta = -5$

⇒ $y = a(x - 1)^2 - 5$

S(0,2) ⇒ $2 = a(0 - 1)^2 - 5$

⇒ $2 = a - 5$

⇒ $a = 7$

p ↔ y = $y = 7(x - 1)^2 - 5$

p ↔ y = $7(x^2 - 2x + 1) - 5$

p ↔ $y = 7x^2 - 14x + 2$

Oef. 7

1. Bepaal een vergelijking van de rechte v.

De rechte raakt aan de parabool en heeft dus één punt gemeenschappelijk.

De vergelijking van v is van de vorm: y = -3x + q.

$$\begin{cases} y = -3x + q \\ y = -2x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

$-3x + q = -2x^2 + 3x + 1$

$2x^2 - 3x - 3x - 1 + q = 0$

$2x^2 - 6x - 1 + q = 0$

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.2.(q-1) = 36 - 8q + 8$

$= 44 - 8q$

Eén snijpunt, dus D = 0:

$44 - 8q = 0$

$-8q = -44$

$q = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$

Vergelijking: v: $y = -3x + \frac{11}{2}$

2. Bepaal de coördinaat van het snijpunt.

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2.2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow y = -3.\frac{3}{2} + \frac{11}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Snijpunt: $(\frac{3}{2}, 1)$

Oef. 11

5. $5x(x + 1) \leq 2(1 + x^2)$

$5x^2 + 5x \leq 2 + 2x^2$

$3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= 5^2 - 4.3.(-2) = 49$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

$= \frac{-5 + \sqrt{49}}{2.3} = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$= \frac{-5 - \sqrt{49}}{2.3} = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	

$V = [-2, \frac{1}{3}]$

Oef. 12

4. Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f(x) = -x^2$ onder de grafiek van $g(x) = 2x$?

$-x^2 < 2x$

$-x^2 - 2x < 0$

$-x^2 - 2x = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = 0$ of $x + 2 = 0$

$x = -2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	

De grafiek van $f(x) = -x^2$ ligt onder de grafiek van $g(x) = 2x$ voor $x < -2$ of $x > 0$

Oef. 17

1. Wat is de maximale oppervlakte van het grasveld als ik het aanleg zoals op de tekening?

Functie voor de groene oppervlakte:

$f(x) = 20.30 - 2.\frac{x^2}{2} - 2.\frac{(30-x)(20-x)}{2}$

$= 600 - x^2 - (600 - 30x - 20x + x^2)$

$= 600 - x^2 - 600 + 50x - x^2$

$= -2x^2 + 50x$

Grootste oppervlakte in de top (want bergparabool):

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2(-2)} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

De grootste oppervlakte is dan:

$f(\frac{25}{2}) = -2(\frac{25}{2})^2 + 50(\frac{25}{2})$

$= 312{,}5 \text{ m}^2$

Oef. 20

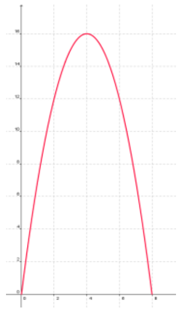
1. Na hoeveel seconden komt de bal weer op de grond?

$-t^2 + 8t = 0$

$t(-t + 8) = 0$

$t = 0$ of $-t + 8 = 0$

$t = 8$



Na 8 seconden.

2. Toon aan dat, als Stef zo op de bal zou trappen in een sporthal met een hoogte van 10 meter, de bal tegen het dak zou vliegen. Hoe hoog moet de sporthal minstens zijn opdat de bal het dak niet zou raken?

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2.(1)} = 4$

$h(4) = -4^2 + 8.4 = -16 + 32 = 16$

De bal vliegt 16 m hoog, en de zaal is maar 10 m.

3. Na hoeveel seconden bereikt de bal zijn hoogste punt?

Na 4 seconden (zie vorige vraag)

4. Hoe lang vliegt de bal hoger dan 12 meter?

$-t^2 + 8t > 12$

$t^2 - 8t + 12 < 0$

$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4.1.12 = 64 – 48 = 16$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{16}}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$$

x	-∞		2		6		+∞
f(x)		+	0	-	0	+	

Gedurende 6 s – 2s = 4s vliegt de bal hoger dan 12 m.