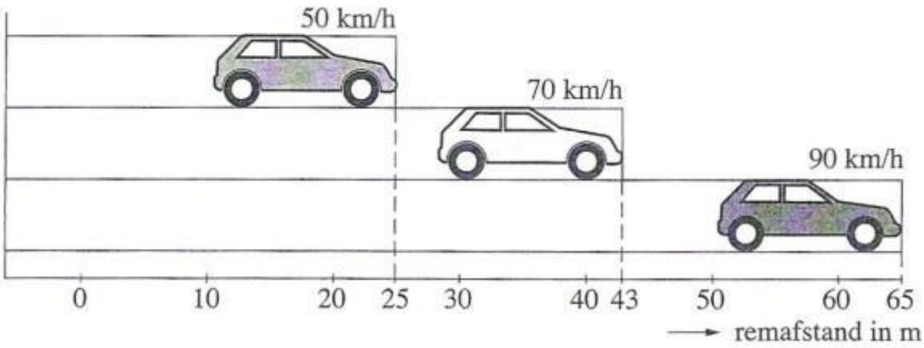
3. Inverse functies

3.1 Inleidend voorbeeld

- Als een auto remt, staat hij nog niet meteen stil. Hij legt nog een bepaalde remafstand af. Op onderstaande figuur is de remafstand afgebeeld die met verschillende snelheden correspondeert.



Met volgende formule kun je de remafstand r (in meter) van de auto benaderend berekenen uit zijn snelheid v (in kilometer per uur) :

$$r = 0{,}0055v^2 + 0{,}23\,v \qquad v \geqslant 0$$

Hiermee kun je de waarden op de figuur controleren.

- In de realiteit beïnvloeden weersomstandigheden, het wegdek, de toestand van de banden, het gewicht van het voertuig, de concentratie van de bestuurder e.d. de remafstand en hanteert men als vuistregel :

$$r = \frac{v^2}{100} \qquad (1)$$

De remafstand is een kwadratische functie van de snelheid.

Tabel

v	0	20	40	60	80	100	120	140
r	0	4	16	36	64	100	144	196

Formule (1) kun je omvormen :

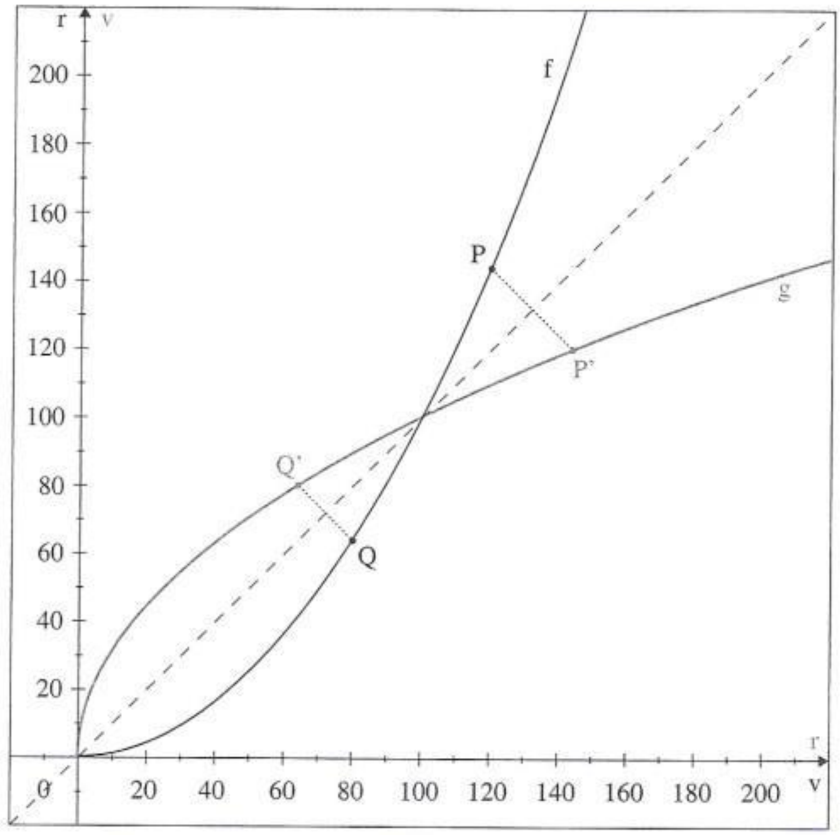
$$r = \frac{v^2}{100} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 100r \quad \Leftrightarrow \quad v = \qquad (2)$$

Nu kun je snelheden berekenen die bij een bepaalde remafstand passen.
Omdat het argument r in (2) onder een wortelteken staat, zeggen we : de snelheid is een irrationale functie van de remafstand.

Tabel

r	0	4	16	36	64	100	144	196
v								

- De grafieken van (1) en (2) werden in eenzelfde orthonormaal assenkruis (x, y) getekend:



	x-as	y-as	functie	functievoorschrift
(1)	v	r	kwadratische functie f	$y = \dfrac{x^2}{100}$
(2)	r	v	irrationale functie g	$y = 10\sqrt{x}$

Grafisch kenmerk De grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de ee bissectrice (y = x) van het orthonormaal assenkruis.

Op de grafiek van f liggen bijv. de punten P(120, 144) en Q(80, 64).
Hun spiegelbeelden t.o.v. de eerste bissectrice zijn P'(144, 120) en Q'(64, 80).
De punten P' en Q' liggen op de grafiek van g.

Let op !
De grafiek van de kwadratische functie f is normaal gezien een volledige parabool.
De linkerhelft van de parabool valt weg omdat het argument x hier een positieve snelheid (v) voorstelt.

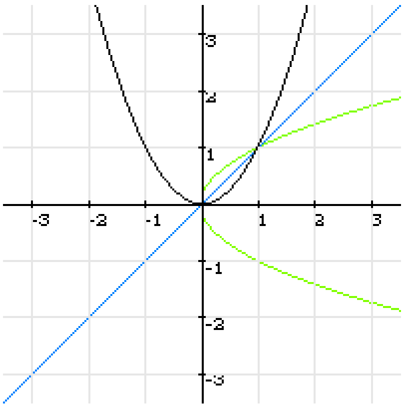
Je controleert gemakkelijk : $\text{dom } f = \mathbb{R}^+ = \text{ber } g$ en $\text{ber } f = \mathbb{R}^+ = \text{dom } g$

De functie g is de inverse functie van de functie f.

3.2 Verband tussen $f : y = x^2$ en $g : y = \sqrt{x}$

Voorschrift omvormen:

We bepalen de inverse functie f^{-1} van f door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice y = x.



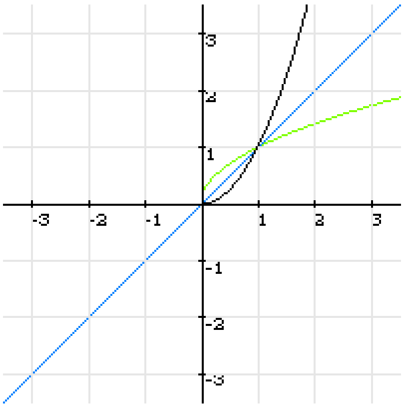
Is de grafiek van het spiegelbeeld van *f* een functie?

....

....

....

We beperken het domein van f tot IR^+:



Is de grafiek van het spiegelbeeld van f nu een functie?

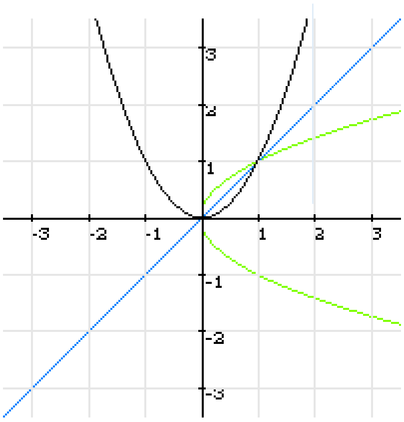
....

Wat is het voorschrift van f^{-1} in dit geval?

....

Dom f^{-1} = ... Ber f^{-1} = ...

We beperken het domein van f tot IR^-:



Is de grafiek van het spiegelbeeld van f nu een functie?

....

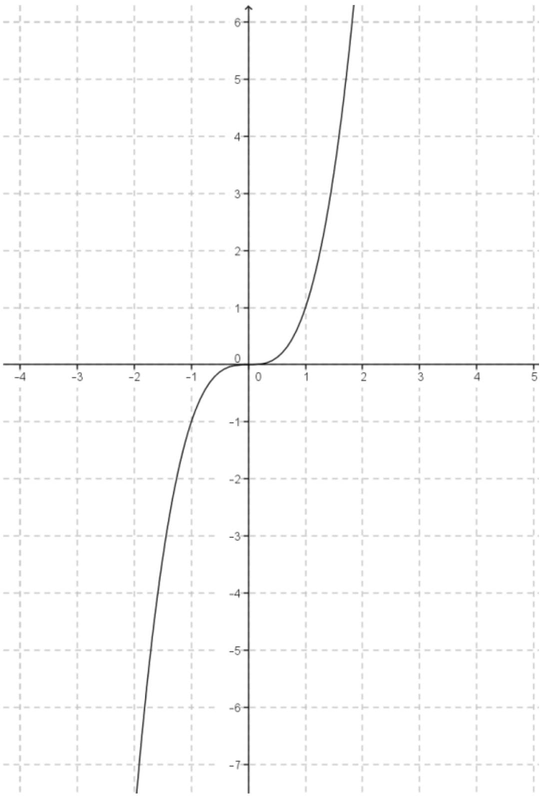
Wat is het voorschrift van f^{-1} in dit geval?

....

Dom f^{-1} = ... Ber f^{-1} = ...

3.3 **Verband tussen** $f : y = x^3$ **en** $g : y = \sqrt[3]{x}$

Voorschrift omvormen:



Hoe construeren we de grafiek van de inverse functie?

Construeer de grafiek van de inverse functie.

Is het spiegelbeeld een grafiek van een functie is *IR*?

....

3.4 **Besluit**

We vinden het voorschrift van de inverse relatie als volgt:

Schrijf het voorschrift van f op: y = f(x)
Verwissel de rollen van x en y: x = f(y)
Zonder y af: $y = f^{-1}(x)$

De grafieken van inverse functies zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v de eerste bissectrice (y = x) van een georthonormeerd assenstelsel.

$f : y = x^n$

n oneven: f^{-1} is een inverse functie met voorschrift $f^{-1} : y = \sqrt[n]{x}$

n even: na beperking van het domein is f^{-1} een functie.

- Dom f = IR^+ $f^{-1} : y = \sqrt[n]{x}$
- Dom f = IR^- $f^{-1} : y = -\sqrt[n]{x}$

3.5 Oefeningen

-

1) Schets de grafiek van de inverse functie en bepaal het voorschrift.

a $f(x) = 2x^2$ en $x \geqslant 0$

b $f(x) = x^4$ met $x < 0$

c $f(x) = x^7$

d $f(x) = \frac{1}{x}$

e $f(x) = -\sqrt{x}$

f $f(x) = -\sqrt[3]{x}$

2) Gegeven: $f(x) = 3x^3 + x^2 + x - 1$

Gevraagd: bepaal x zodat $f^{-1}(x) = -3$

3) Bepaal algebraïsch het voorschrift van f^{-1}:

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = \dfrac{-5}{3x+4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$