7강. 최적화 문제

[연 습 문 제]

1. 세 벡터 $u=(1-i, 4+2i, 3)$, $v=(2, 3i, 4-i)$, $w=(2+i, -2i, 4-5i)$ 에 대하여 $\overline{\langle i\overline{u}, w\rangle + \langle \|u\| v, u\rangle}$ 를 계산하시오.

2. 모든 2×2 실행렬 A의 대각성분들의 총합을 $tr(A)$라 할 때, $tr(A)^2 - 4\det(A) < 0$ 이면 A는 두 개의 복소켤레 고윳값을 가짐을 증명하시오.

3. 에르미트행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$ 을 유니터리 대각화하시오.

① 고윳값 구하기
② 각 고윳값당 고유벡터 구하기
③ P 구하여 $P^{-1}AP = P^{H}AP$ 구하기 } $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

── Index ──

1. 곡선 적합

(1) 보간법 interpolation

① 개념

주어진 특정 점들을 포함하는 함수를 구하는 방법.

정리) 좌표평면에 있는 임의의 서로 다른 n개의 점을 지나는 k차 다항함수는 유일하게 존재한다. (단, k는 $k<n$ 인 자연수)

1. $iu = (1+i, -2+4i, 3i)$

$\rightarrow \overline{iu} = (1-i, -2-4i, -3i)$

켤레

$\therefore \langle \overline{iu}, w\rangle$

$= (1-i)(2-i) - (2+4i)(2i) - 3i(4+5i)$

$= 1-3i-4i+8-12i+15 = 24-19i$

$\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{31}$

$\therefore \langle \|u\|v, u\rangle$

$= \sqrt{31}\{2\times(1+i) + 3i(4-2i) + (4-i)\times 3\}$

$= \sqrt{31}(20+11i)$

$\therefore (20\sqrt{31}+24) - (11\sqrt{31}-19)i$

2. Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\lambda-a)(\lambda-d) - bc$

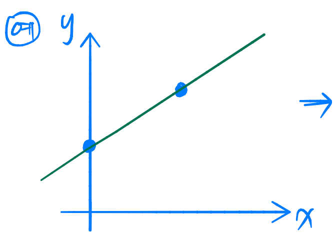
$= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{tr(A)}\lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{det(A)} = 0$

$\therefore$ 판별식 D : $tr(A)^2 - 4\det(A) < 0$

* 근과 계수와의 관계

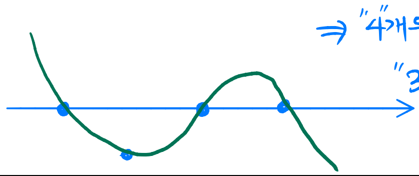
$\left.\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a+d \\ \lambda_1\lambda_2 = ad-bc \end{cases}\right\}$ 둘 다 실수이므로 λ_1과 λ_2는 켤레

예



→ "2"개의 점을 지나는 "1"차함수는 유일하다.

⇒ "4"개의 점을 지나는 "3"차 함수



존재하지 않을 수도 있지만 존재한다면, 유일하다

② 사례

네 점 $(1,3),(2,-2),(3,-5),(4,0)$ 을 모두 지나는 3차 함수

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

를 구하자. 우선 다음의 방정식을 세운다.

Step 1> $\boxed{\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}}$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

Step 2> 네 점을 대입하고 첨가행렬을 만든다.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2\\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5\\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0\end{pmatrix}$$

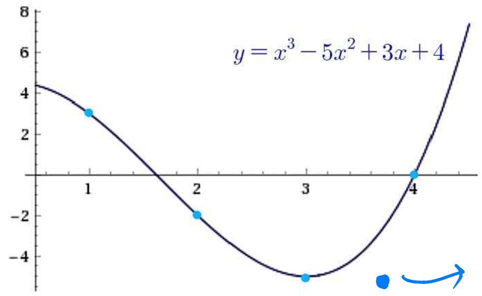
Step 3> 첨가행렬을 가우스-조던 소거법을 이용하여 풀이한다.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2\\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5\\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

Step 4> $a_0=4,\ a_1=3,\ a_2=-5,\ a_3=1$ 이므로 $f(x)=4+3x-5x^2+x^3$ 이다.

참고)



새로운 data에 유연하지는 않겠군

(2) 최소제곱법

단순 오차는 상쇄될 수 있는 문제 有

① 개념

특정 점들을 포함하는 함수를 특정 지을 수 없을 때, 실제 해와의 오차 제곱 합이 최소가 되는 근사적인 해를 구하는 방법.

정리) 방정식 $A\mathrm{x}=B$ 을 변형한 방정식 $A^TA\mathrm{x}=A^TB$ (정규방정식) 의 모든 해는 $A\mathrm{x}=B$ 의 최소제곱해이다.

※ 증명 과정 확인할 것!

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

② 사례

네 점 $(0,1),(1,3),(2,4),(3,4)$ 에 근사하는 일차함수 $f(x)=a_0+a_1x$ 를 구하자. 우선 다음의 방정식을 세운다.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

Step 1> $A\mathrm{x}=B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&x_1\\1&x_2\\1&x_3\\1&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

Step 2> 네 점을 대입하고 정규방정식 $A^TA\mathrm{x}=A^TB$ 으로부터 방정식 $\mathrm{x}=(A^TA)^{-1}A^TB$ 을 구성한다.

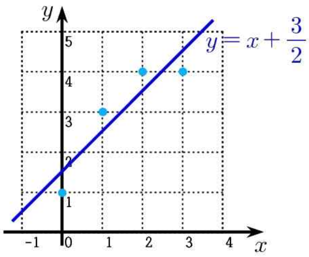
$A^TA=\begin{pmatrix}4&6\\6&14\end{pmatrix}$ 이므로

$$(A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}4&6\\6&14\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-3\\-3&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathrm{x}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

Step 3> $\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 이므로 구하고자 하는 함수는 $f(x)=\frac{3}{2}+x$ 이다.

참고)



Least Square

③ n차 일반화

m개의 자료점 $(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$ 에 대해 n차 다항식 $y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 을 최소제곱법을 이용하여 근사하기 위해서는 $A\mathrm{x}=B$ 를

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{pmatrix},\ \mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

로 설정하면 된다.

(3) 두 방법의 비교

	보간법 정확	최소제곱법 근사(경향)
목표	데이터를 모두 포함하는 함수	데이터의 경향을 반영하는 함수
데이터의 수	적을수록 좋음	많아도 무방함
정밀도	매우 높음	상대적으로 낮음
신축성	조절이 어려움	조절이 자유로움

가능한 사례가 적으나 가능만 하다면 정확

항상 가능하긴 하나 정확도 보장 없음.

2. 이차형식의 최적화

(1) 이차형식

가환환 K위의 가군 V에 대해 다음 세 조건을 만족시키는 함수 $Q: V \to K$

$\forall k, l \in K,\ \forall u, v, w \in V,$

1) $Q(kv) = k^2 Q(v)$

2) $Q(u+v+w)$
$= Q(u+v) + Q(v+w) + Q(u+w) - Q(u) - Q(v) - Q(w)$

3) $Q(ku+lv) = k^2 Q(u) + l^2 Q(v) + klQ(u+v) - klQ(u) - klQ(v)$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

ex 1> R^2 상의 일반적인 이차형식은 다음과 같다.

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ex 2> R^3 상의 일반적인 이차형식은 다음과 같다.

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

(2) 제약된 극값

① 개념

constraint

특정 제약 하에 결정되는 원하는 식의 최댓값 또는 최솟값.

정리) $n \times n$ 행렬 A의 고윳값을 큰 순서대로 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라 하자. 이때 $\|\mathrm{v}\| = 1$ 제약 하에 $\mathrm{v}^T A \mathrm{v}$의 최댓(솟)값은 $\lambda_1(\lambda_n)$에 대응하는 단위고유벡터에서 존재한다.

이차형식

② 사례

$\|v\|=1$

제약 $x^2+y^2=1$ 하에서

$$z=5x^2+5y^2+4xy$$

의 최댓값과 최솟값을 구하자. 우선 z를 이차형식 $\mathrm{v}^T A\mathrm{v}$ 형태로 변환한다.

Step 1> $a_1x^2+a_2y^2+2a_3xy$

$$\Leftrightarrow (x\ y)\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{v}^T A\mathrm{v}$$

즉, $z=(x\ y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

Step 2> 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$의 고윳값과 고유벡터를 구한다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=7 & \mathrm{v}_1=(1,\ 1) \\ \lambda_2=3 & \mathrm{v}_2=(-1,\ 1) \end{cases}$$

Step 3> 고유벡터를 정규화한다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=7 & \mathrm{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \lambda_2=3 & \mathrm{v}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

constraint
조건 만족

— Index —
1. 곡선 적합
(1) 보간법
(2) 최소제곱법
(3) 두 방법의 비교
2. 이차형식의 최적화
(1) 이차형식
(2) 제약된 극값

Step 4> 따라서 $(x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

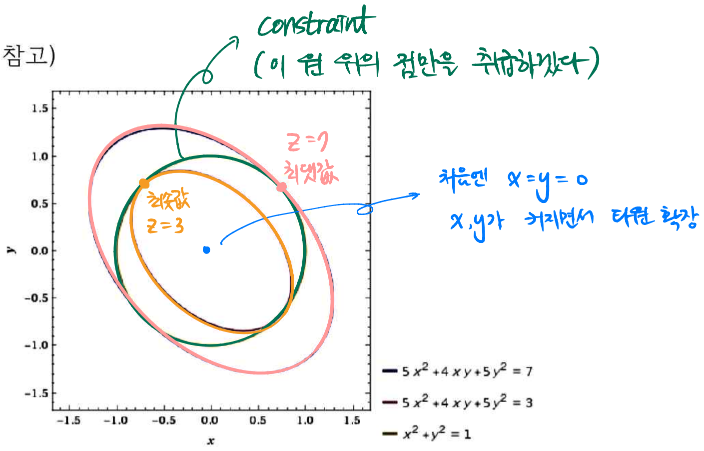
일 때 z는 최댓값 7을 갖고,

$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 일 때

z는 최솟값 3을 갖는다.

※ 물론 $\mathrm{v}_1=(-1,\ -1)$, $\mathrm{v}_2=(1,\ -1)$ 등으로 설정해도 무방하며, 최댓(솟)값은 변하지 않는다.

참고)



[연 습 문 제]

1. 다음 물음에 답하시오.
   (1) 세 점 $(0,-1),(1,2),(-1,0)$을 지나는 이차함수를 구하시오.
   (2) 네 점 $(-1,-2),(0,-4),(1,0),(2,16)$을 지나는 삼차함수를 구하시오.

2. 최소제곱법을 이용하여 다음 물음에 답하시오.
   (1) 세 점 $(0,0),(2,-1),(3,4)$에 근사한 일차함수를 구하시오.
   (2) 네 점 $(1,6),(2,1),(-1,5),(-2,2)$에 근사한 이차함수를 구하시오.

3. 제약조건 $x^2+y^2=1$ 하에서 $4x^2+2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그 때의 x와 y의 값을 각각 구하시오.

4. 제약조건 $x^2+y^2+z^2=1$ 하에서 $x^2-3y^2+8z^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x와 y의 값을 각각 구하시오.