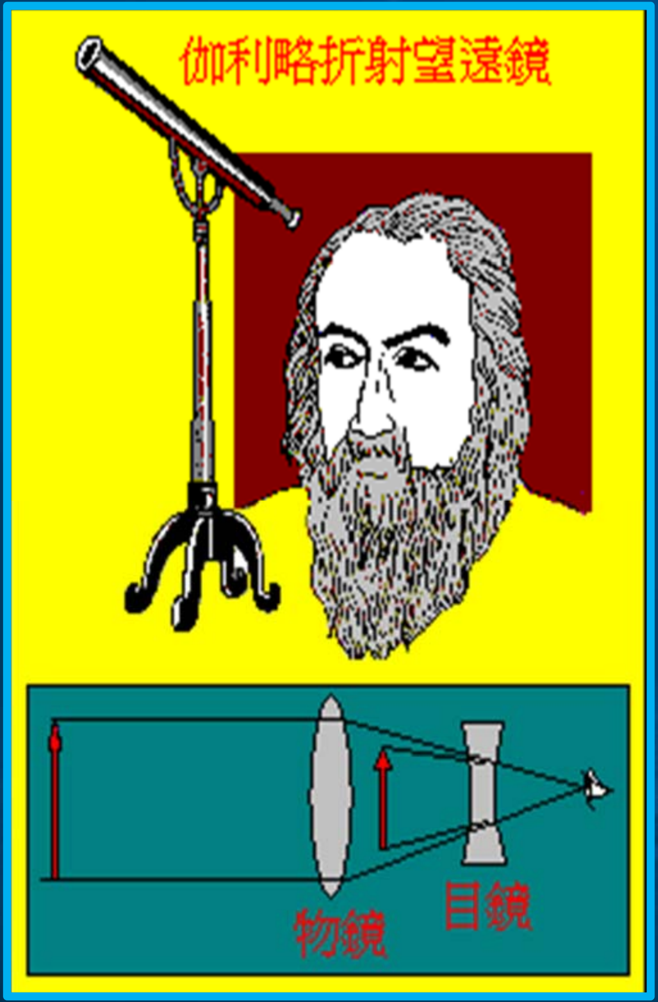
第1讲 微积分纵览

微积分创立背景

几个微积分问题

如何学习微积分



- 炮弹的最大射程
- 瞬时速度和加速度
- 光滑曲线的切线和法线

- 曲线的长度
- 平面图形的面积
- 空间物体的体积
- 天体间的引力

十六、十七世纪面临两大类科学问题：

- 光滑曲线的切线和法线
- 瞬时速度和加速度
- 炮弹的最大射程

（微分学）

- 曲线的长度
- 平面图形的面积
- 空间物体的体积
- 天体间的引力

（积分学）

微分学、积分学 → 微积分

牛顿[英]
1642—1727

莱布尼兹[德]
1646—1716

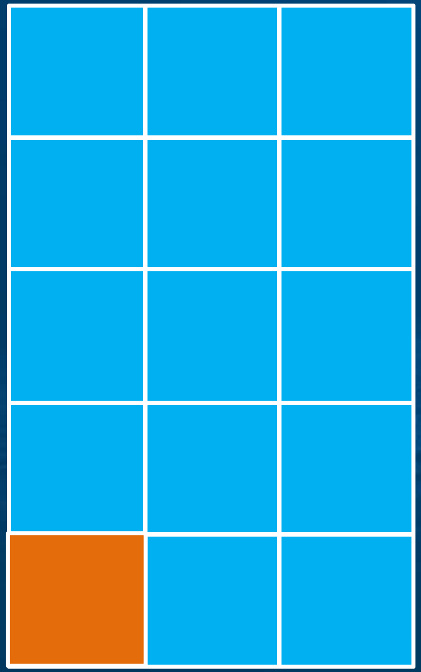
"牛顿是经验的、具体的和谨慎的，而莱布尼兹则是富于想象的、喜欢推广而且是大胆的."

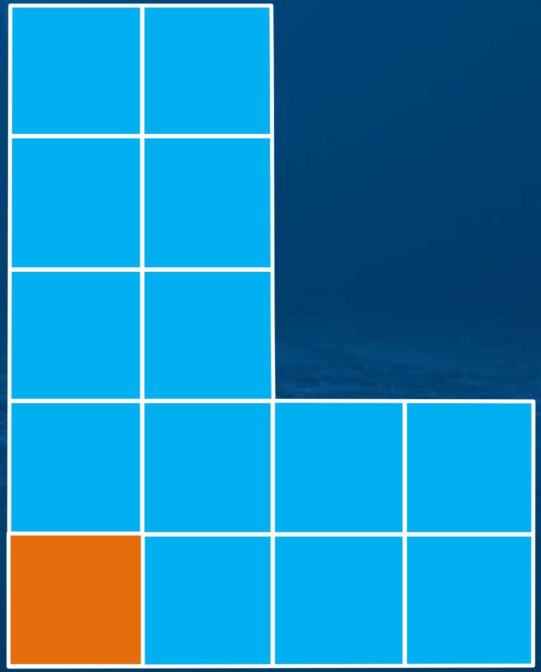
高等数学的主要内容

- 一元函数微分学
- 一元函数积分学
- 矢量代数与空间解析几何
- 多元函数微分学
- 多元函数积分学
- 无穷级数
- 常微分方程

如何求平面图形面积

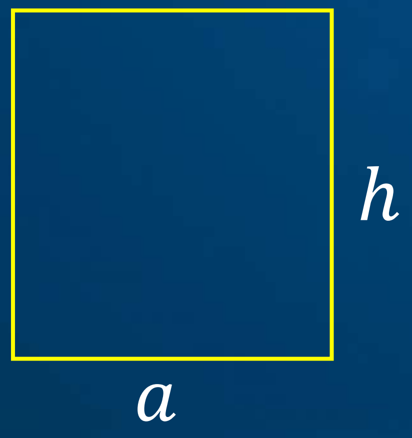
- 物体表面或者平面图形的大小称为面积
- 平面图形面积的大小是将该平面图形与单位长度的正方形比较后的数量



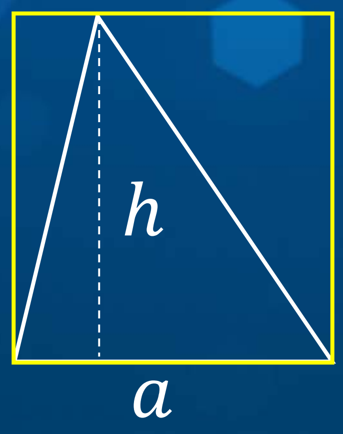


求面积的问题可以追溯到2500前的古希腊时代

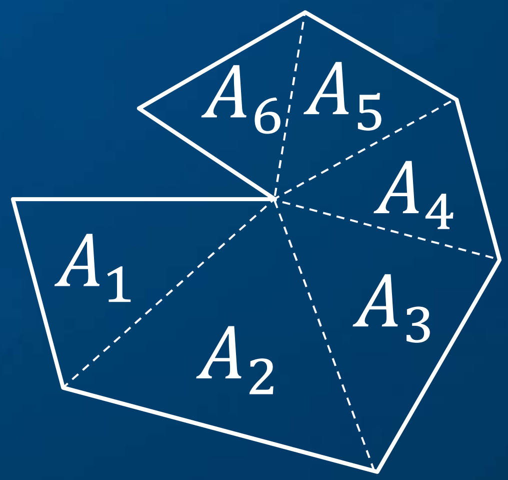
- 如何求直边图形的面积？



$$A = ah$$



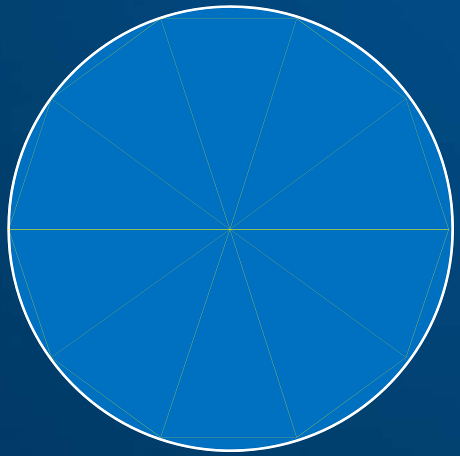
$$A = \frac{1}{2}ah$$



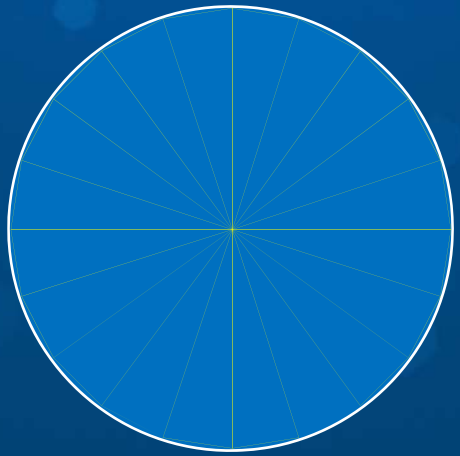
$$A = \sum_{k=1}^{6} A_k$$

- 如何求曲边图形的面积？

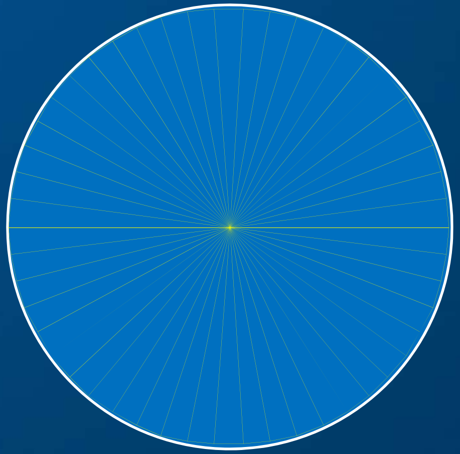
例1 计算半径为r的圆的面积.



$n = 10$



$n = 20$

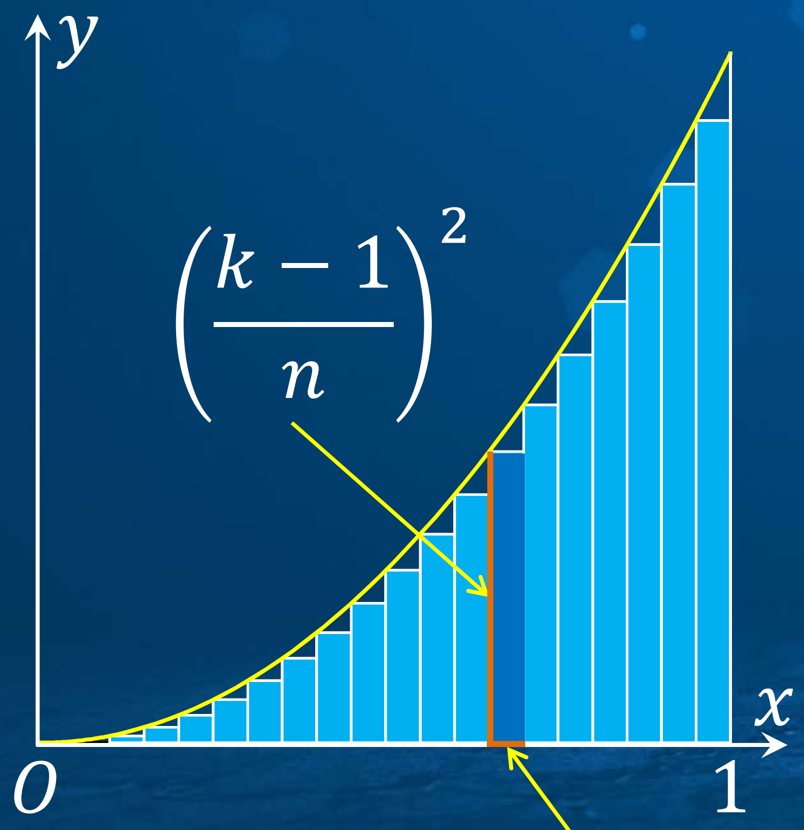


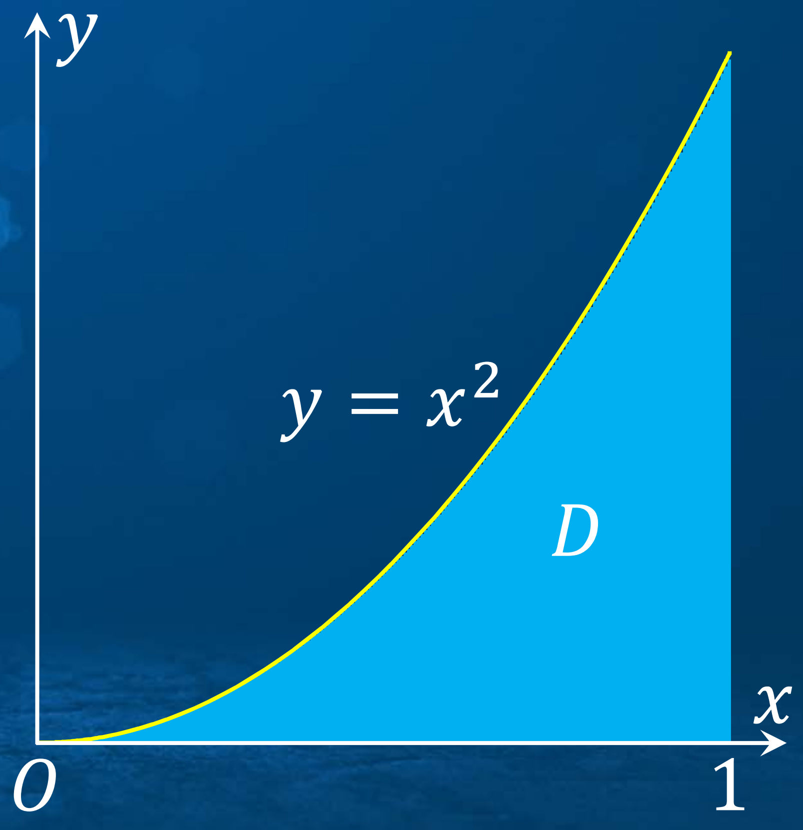
$n = 50$

圆内接正n边形的面积 $A_n = n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$$

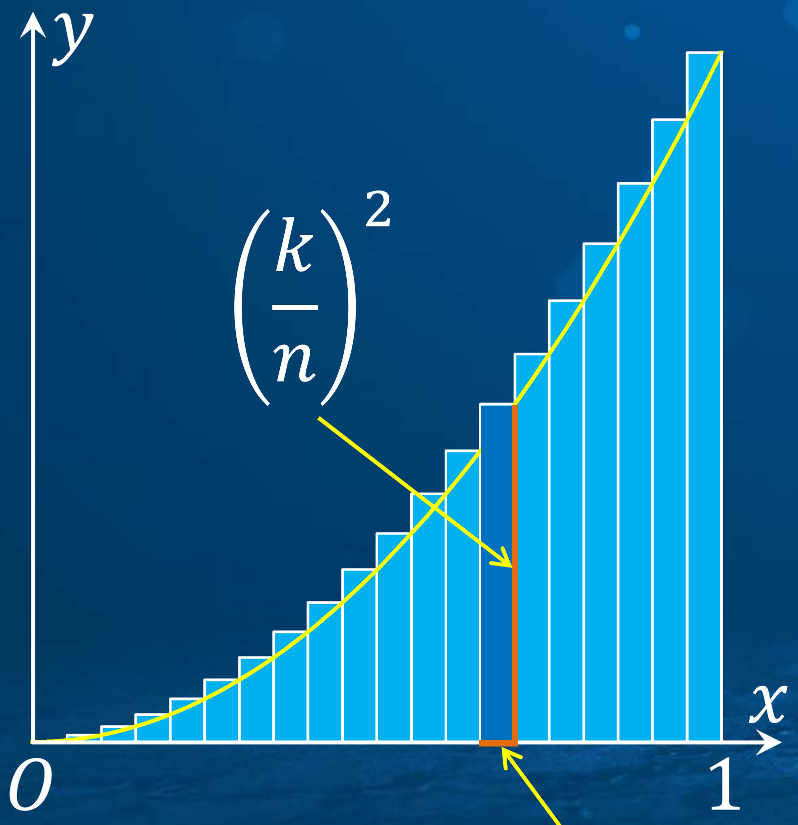
例2 求由抛物线 $y=x^2$、直线 $x=1$及 x 轴所围图形D的面积A.

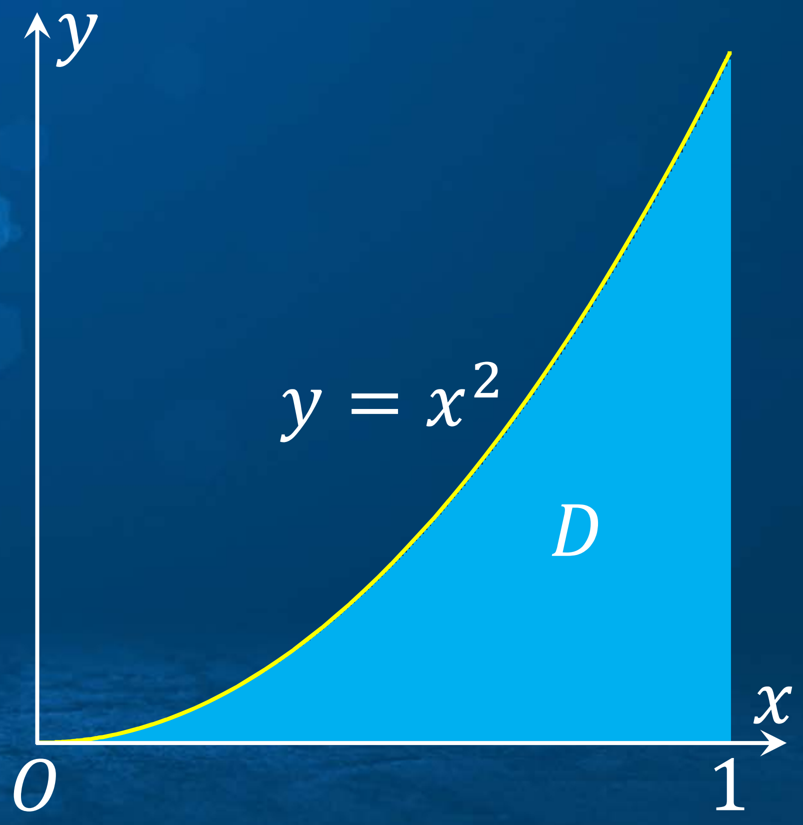




将 [0,1] 区间 n 等分：$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ $(k=1,2,\cdots,n)$

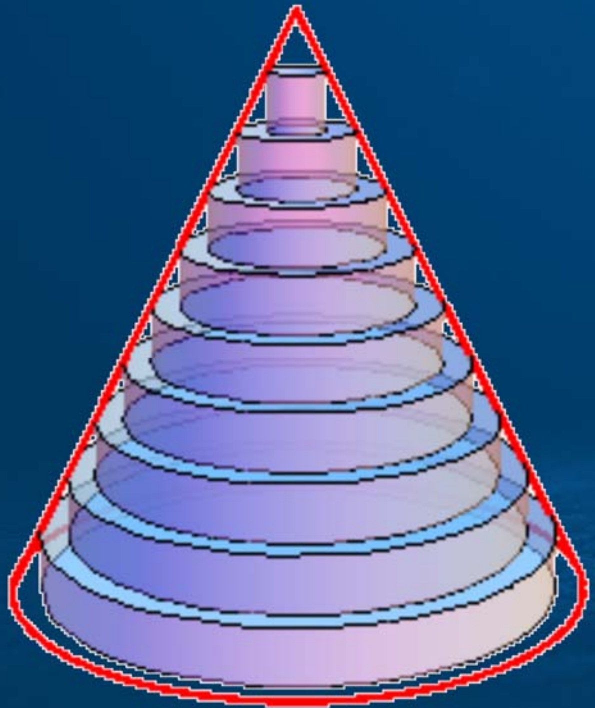
例2 求由抛物线 $y=x^2$、直线 $x=1$及 x 轴所围图形D的面积A.



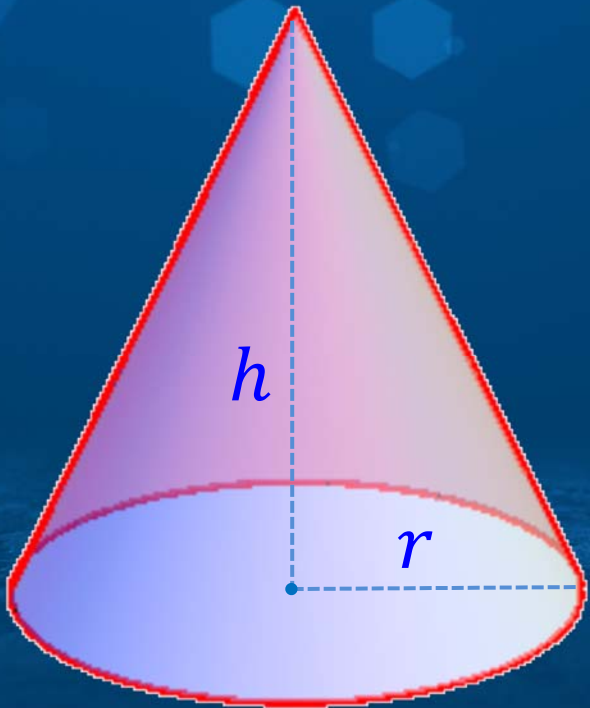


将 [0,1] 区间 n 等分 : $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ $(k=1, 2, \cdots, n)$

例3 求底半径为r、高为h正圆锥体的体积V. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$



$<$



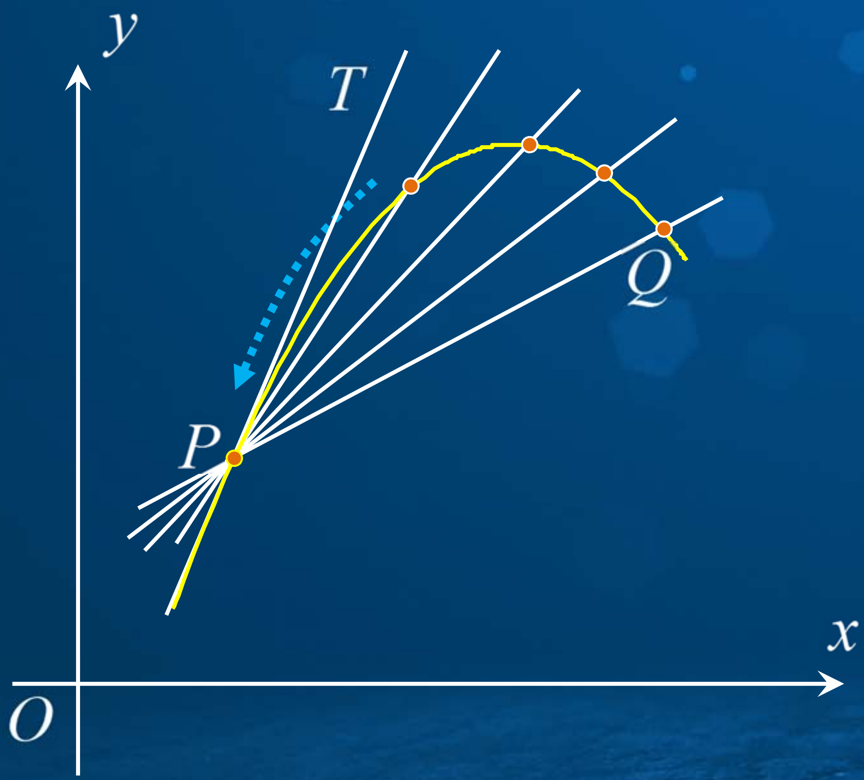
$<$

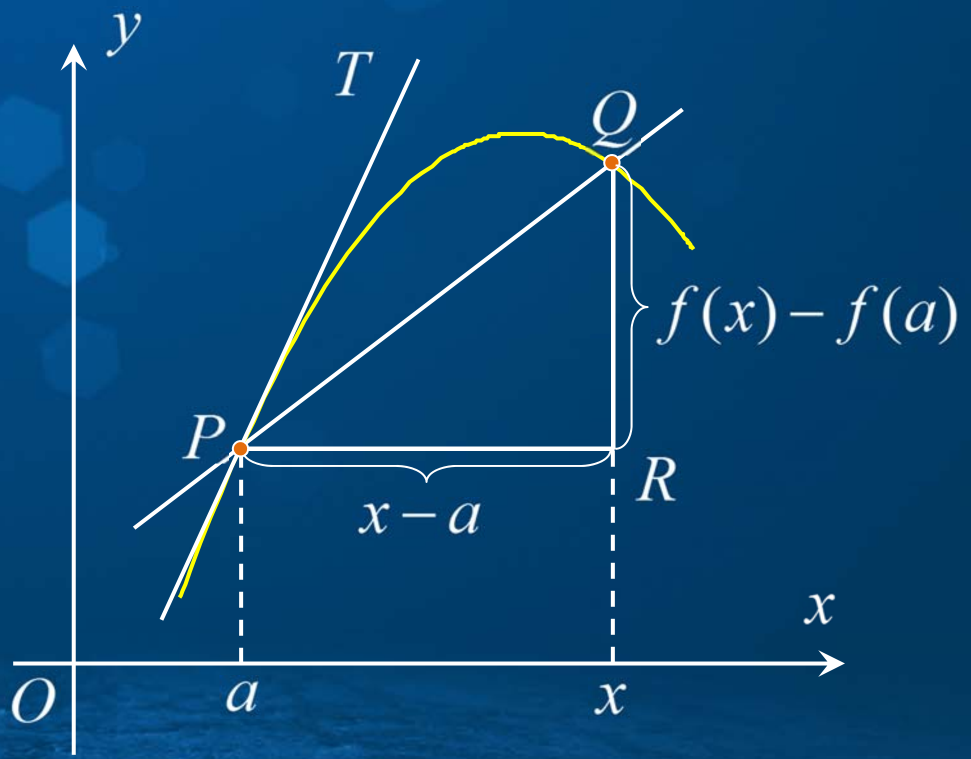
如何求平面曲线切线？

- 与曲线旁触的直线称为切线

（a）欧几里得：与圆相交且只相交一次的直线．

（b）如何定义一般曲线的切线？

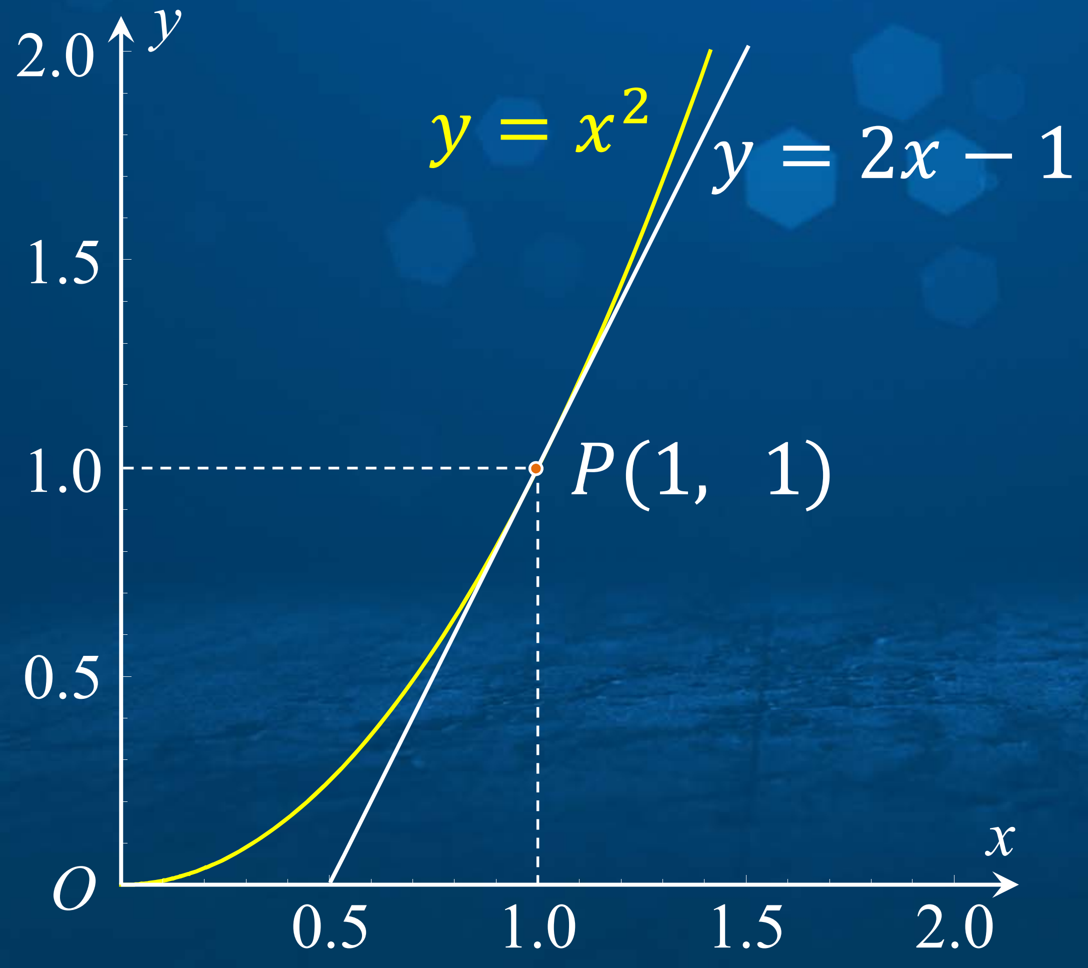




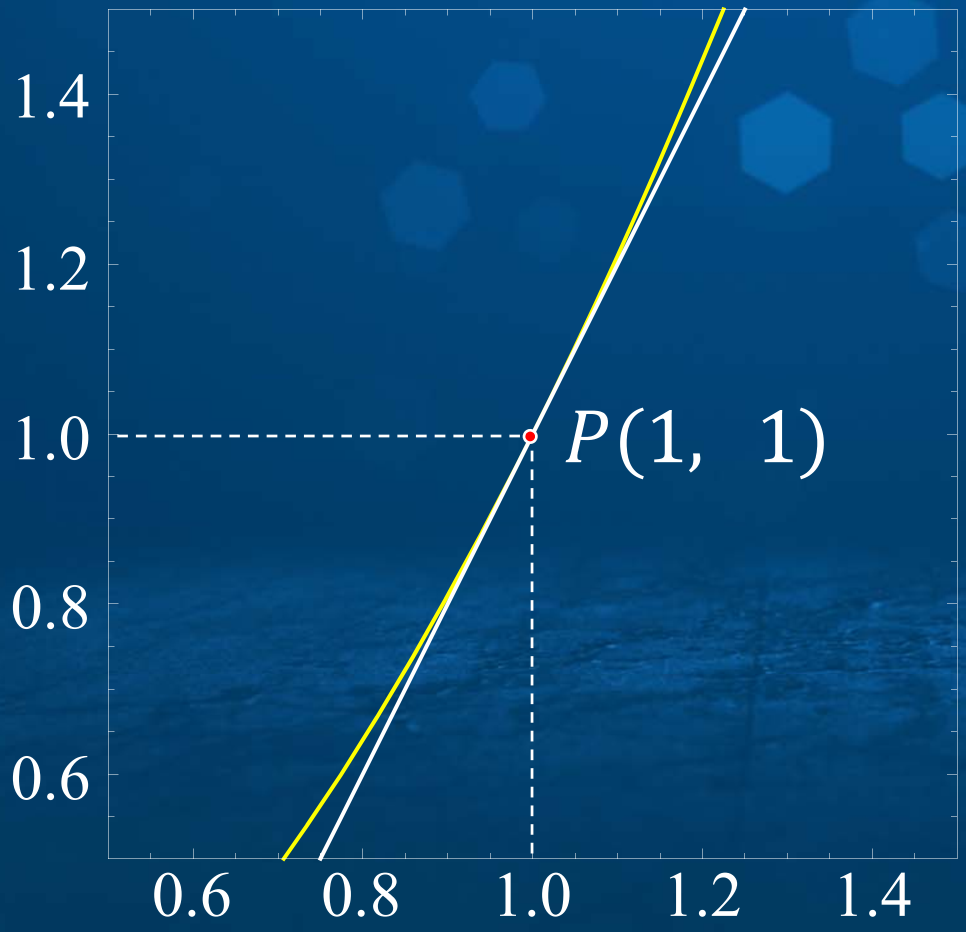
$$k_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$k_{PT} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

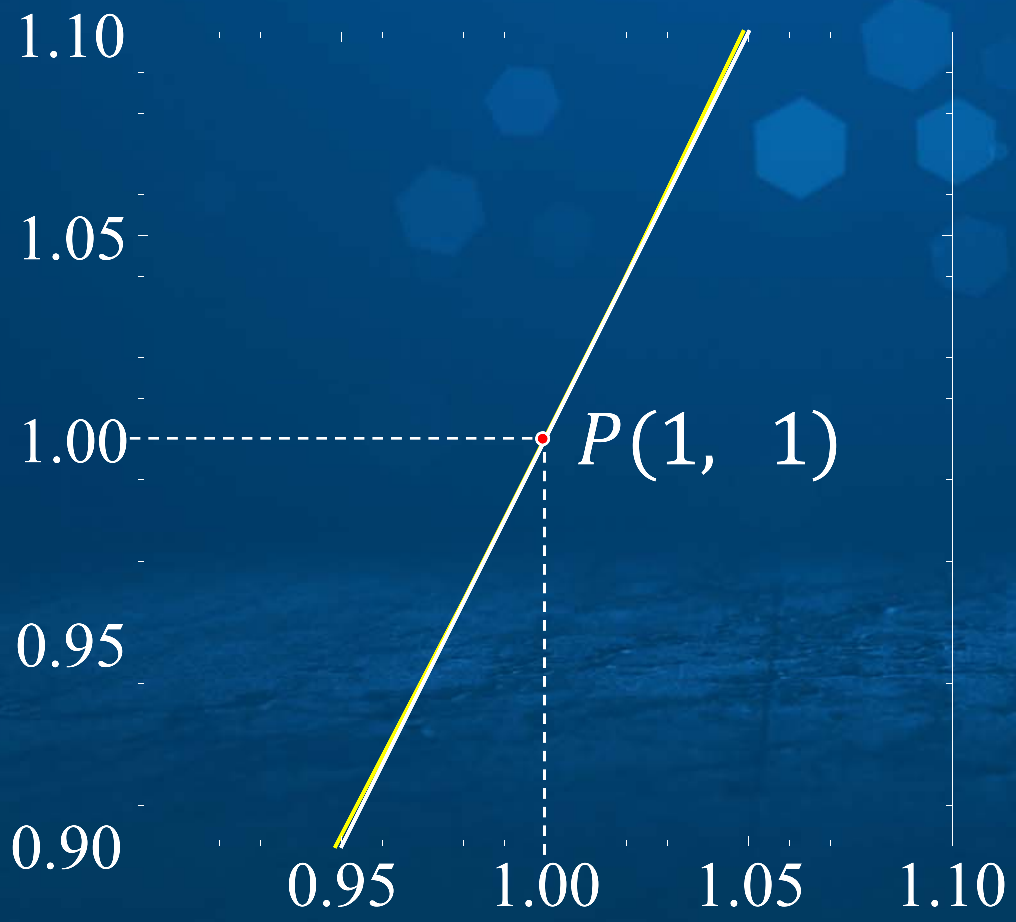
例4 求抛物线$y = x^2$在点 $P(1,1)$ 处的切线方程.



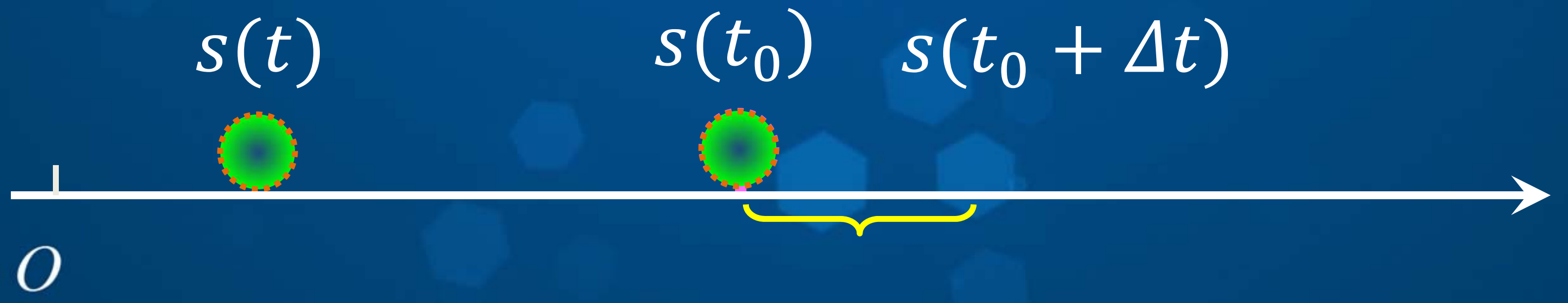
例4 求抛物线$y = x^2$在点$P(1,\ 1)$处的切线方程.



例4 求抛物线$y=x^2$在点$P(1,\ 1)$处的切线方程.



如何变速直线运动的瞬时速度？



在 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 的平均速度：$\bar{v} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

在 t_0时刻的瞬时速度为：

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

例5 已知作直线运动的质点在t时刻离开原点的距离为$s = t^3$，求质点在 t_0 时刻的速度.

【牛顿的求解】

在$[t_0, \ t_0 + \mathrm{d}t]$瞬间质点经过的路程为

$$\mathrm{d}s = (t_0 + \mathrm{d}t)^3 - t_0^3 = 3t_0^2\mathrm{d}t + 3t_0(\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}t)^3$$

在$[t_0, \ t_0 + \mathrm{d}t]$瞬间的速度为

“无穷小量”

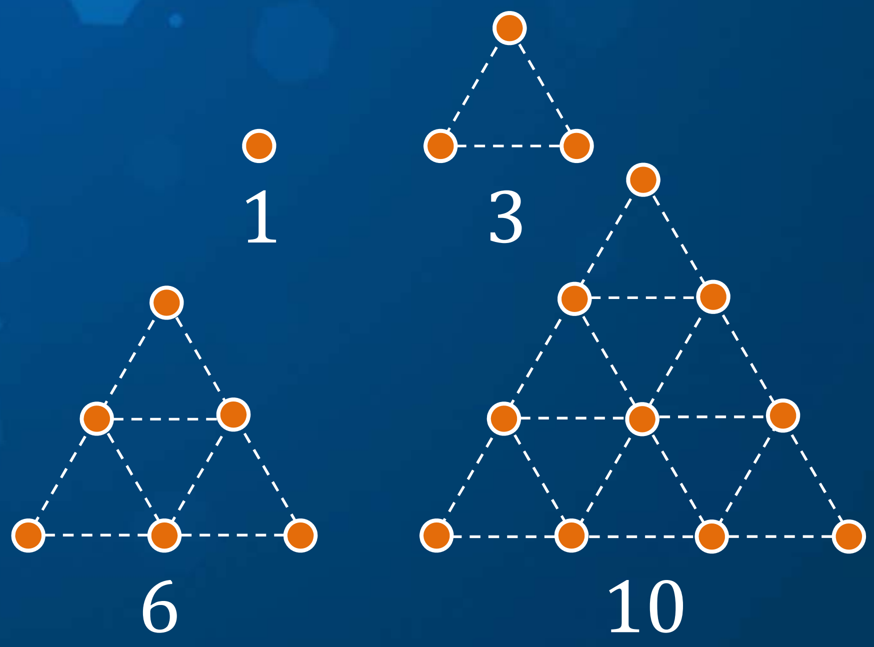
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t_0^2 + 3t_0\mathrm{d}t + (\mathrm{d}t)^2 \overset{\boxed{\mathrm{d}t=0}}{=} 3t_0^2$$

红衣大主教贝克莱批评道：“无穷小量是已死量的幽灵！”

- 如何求无穷多个数的和

惠更斯指导莱布尼兹研究的问题

三角形数：1, 3, 6, 10 , ⋯



$$s=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=?$$

$$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots=1\ \Rightarrow s=2$$

雅各布·伯努利与约翰·伯努利兄弟研究的问题

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\text{（部分和）}$$

$$S_{2^k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+1}{2}\,(k=1,\,2,\,\cdots)$$

$$S_{2^{k+1}}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$>\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}\cdot 2^k=\frac{k+2}{2}$$

例如 $S_{2^{199}}>\dfrac{199+1}{2}=100$ $\qquad S_{2^{999}}>\dfrac{999+1}{2}=500$

计算$S_{2^{199}}$需要多长时间呢？

“天河二号”拥有每秒 33.86千万亿次的浮点运算速度，假设每计算一项需要一次运算，则需要

7.52446×10^{35}年！

当今理论和观测认为宇宙年龄在136亿年到138亿年之间.

伯努利兄弟的问题 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=?$

一、明确学习微积分的目的

数学素质

- 从实际问题抽象出数学模型的能力
- 计算与分析的能力
- 了解和使用现代数学语言和符号的能力
- 使用数学软件学习和应用数学的能力

数学的三大特点：研究对象的抽象性、论证方法的演绎性以及应用的广泛性

二、处理好课程学习的每一个环节

预习　浏览每讲视频内容梗概，懂与不懂都要做到心中有数

听课　带着问题观看视频，看如何克服难点解决问题的

复习　阅读教材，回答为每讲准备的概念性问题，检验内容是否基本掌握，尽量做到“四会”

“定义会说、定理会证、公式会推、例题会做”

作业　独立完成每讲的课后习题

反思　思之不得则存疑，有疑就要问——问自己、问同学、问老师、“问”教材，学会提问题

三、怀着浓厚的兴趣学习

爱因斯坦“兴趣是最好的老师”

—— 发现兴趣、培养兴趣、巩固兴趣

数学自身体现着美和神奇 —— 和谐、简洁、对称

- 因为数学是美丽的，所以需要欣赏
- 因为数学是有趣的，故而数学可以欣赏
- 因为数学是有用的，因此数学值得欣赏

我们欣赏数学，我们需要数学。

——陈省身