北京科技大学

**硕士学位研究生**

**选题报告及文献综述**

论文题目：控制系统可达集的数值方法研究及应用



指导教师： 邵立珍

单 位： 北京科技大学

学 号： S20160637

作 者： 张扬帆

专业名称： 控制科学与工程

入学时间： 2016年9月

2017年 7月

**目 录**

[1 课题的目的与意义 1](#_Toc486948553)

[1.1 课题背景 1](#_Toc486948554)

[1.2 研究意义 2](#_Toc486948555)

[1.3 国内外研究现状 3](#_Toc486948556)

[2 文献综述 5](#_Toc486948557)

[2.1 可达集数学模型 5](#_Toc486948558)

[2.2 可达集离散化 6](#_Toc486948559)

[2.3 控制系统模型示例 7](#_Toc486948560)

[3可达集求解算法 9](#_Toc486948561)

[3.1 李雅普诺夫函数法 9](#_Toc486948562)

[3.2 数值化方法 11](#_Toc486948563)

[3.2.1 几何近似法 11](#_Toc486948564)

[3.2.2 网格点近似法 13](#_Toc486948565)

[3.3 多目标优化综述 14](#_Toc486948566)

[3.3.1 多目标优化问题数学模型 14](#_Toc486948567)

[3.3.2 多目标优化算法 16](#_Toc486948568)

[4 拟研究的主要内容及思路 18](#_Toc486948569)

[5 工作进度安排 19](#_Toc486948570)

[参考文献 20](#_Toc486948571)

# 1 课题的目的与意义

## 课题背景

自从机械被发明以来，人们就希望这些机械能够自动完成由人类布置的工作。而随着科技水平的日益提升，机械的自动化程度越来越高，甚至出现了不需要人类发出特定指令就能完成特定任务的自主机器人。这类自主移动机器人的种类繁多，如无人驾驶车辆、无人机、扫地机器人等，它们已经走进了人们的生活中。这种智能机器人的运动，涉及到环境感知、模式识别、导航定位、智能决策控制以及计算机技术等众多学科的前沿研究领域，其研究目标是取代人类进行自主工作，并以此保证人类的安全和工作效率，具有重要的研究意义。对于无人驾驶车辆、无人机而言，它们作为展示计算机科学、模式识别、人工智能技术水平和引领车辆、飞行器工业未来发展的重要平台，己成为世界发达国家研究的热点。然而现实中的综合环境信息量大，复杂多变，对于这些机器人而言即使是一个很小失误也会造成严重的、甚至灾难性的后果。为了确保它们自主机动行为的可控性、可达性和高度可靠性，在实际运行之前一个至关重要的工作就是对系统行为方式以及决策方案的安全性进行验证。因此，如何保证它们动态系统的稳定及控制的高效成为了关键问题之一，因此对控制系统的可达集研究与分析也就运应而生。

在控制理论中，可达集是状态估计和参数估计的一种重要方法。动态控制系统的可达集是指：在外界输入有界的情况下，系统的状态从原点出发，描述系统所有可能出现的状态的一个集合。可达集的计算在分析控制系统的运行过程中具有重要的实际意义，且对于非线性控制理论和动态系统中不定参数的定量研究而言，可达集的数值计算是关键的问题之一。

比如，我们将无人驾驶汽车作为被控对象，被控对象从初始时刻到终止时刻行进路线即可看作控制系统状态的一条轨迹，被控对象的方向控制则为系统的控制量，被控对象可到达的区域即为控制系统的可达集，通过分析该系统的可达集即可实现控制对象安全无撞地从起点运动至终点。而该问题解决的关键，同时也是本课题的研究内容，即采用数值计算方法，如何精确快速地求解控制系统的可达集。

## 1.2 研究意义

可达集的研究被广泛地应用在各个学科领域。例如，在卫星轨道预测中，可以对卫星轨道在不同初值调节或不同推力作用下的可达集进行分析，从而实现良好的变轨过程[1]-[3]。在飞行器控制领域，利用可达集得到飞行器机动动作的边界状态范围，为驾驶员完成标准机动动作提供决策支持[4]。此外，可达集分析在进行基因表达控制[5]、目标追击躲避[6]、进行模型预测控制[7][8]等方面均得到了广泛的应用。

在一些问题上，相较于直接规划目标的运动状态，基于控制系统可达集分析的方法在一些问题的解决上显示出了一定的优越性，比如避障问题。避障问题的本质是在含有障碍物的区域内寻找从起点到终点的可行行动路线，因此避障问题就是一个有约束的最优控制问题。传统的路径规划方法展示的是当前规划的路径与某一不安全状态相冲突，证明沿此路径行驶的不安全性。可是现实环境存在着各种不确定的影响因素，而处理这些不确定性传统系统仿真一贯采用的方法是重复进行路径规划计算。但是每一次路径规划计算所产生的一条轨迹是无法涵盖车辆所有可能的不确定行为状态，而且完备性难以从理论上得到保障，因而置信水平较低[9]。而基于可达集分析的方法，通过掌握控制对象未来安全目标位置的动态分布，就可以推断避障过程中的安全状态的可达范围。这样不仅可以全面、灵活地控制其安全避障，还可以对未来某一时间间隔内对象状态的安全性进行预测。分析可达集实现避障方面已经出现了很多的实际应用，如无人机安全区域监测及避障[10][11]、自主车辆避障及交通行驶路线规划[12][13] 、帮助机器人进行路径规划[14]、船舶安全领域建模[15]等方面都有大量的研究成果。

由以上示例可以看出，研究控制系统的可达集及求解方法具有重要意义。由于现实中各种不确定性因素的影响，而对象的控制系统模型往往是非线性的，其可达集也往往是非凸的。随着控制系统的深入研究，目前已有多种可达集的求解方法，但对于非凸可达集的求解，主流算法还有许多不足。因此，如何开发出一种新的可达集定界方法并克服当前方法的不足是本课题的关键所在。本课题通过研究以往的可达集理论研究和多目标优化算法，将两者进行有机结合，希望能找到更好的可达集数值计算方法，用更少的时间得到更加精确的可达集近似结果。

## 1.3 国内外研究现状

可达集的定界问题最早提出于1960年。一般而言，人们根据控制对象的属性不同，将控制系统分为线性和非线性系统、无延时和带延时系统、连续和离散系统。而对于不同类型的控制系统，其可达集的求解方法也有差别。

线性无延时控制系统的可达集具有凸性、关于原点对称等重要几何性质[16]-[18]。文献[19][20]通过构造若干接触可达集边界的外部或内部椭球，来得到可达集的近似估计。文献[21][22]将可达集描述为一个Hamilton-Jacobi偏微分方程，并利用水平集方法近似可达集。Kostousova和Elena针对于离散线性系统，通过构造多面体对可达集进行外部近似[23]，该方法对于少量或无状态约束的系统较为有效。

线性时变延时系统的可达集估计问题最早在文献中被研究[24]，该文献的结果是Razumikhin理论和S-procedure方法构造了含有若干个决策变量的线性矩阵不等式(linear matrix inequalities, LMI)，通过求解LMI，得到一个包含可达集的最小椭球。这个结果被广泛地应用于设计带饱和执行器的控制系统[25]。Phan T. Nam等人考虑了不可微分且延时在上下界可知的区间内变化的线性系统，并提出了李雅普诺夫函数和延时分解相结合的方法，得到包含可达集的LMI[26]。Nguyen D.等人构造李雅普诺夫函数后，最小化每个坐标轴上椭圆的投影距离，将这些椭圆的交点组成新的可达集的范围[27]。Lam在LMI中加入了加权变量，加强了李雅普诺夫函数的限制条件，并讨论了自治系统和不同参数多面体的情况。这种方法可以扩展到切换系统和广义线性系统[28]。

相较于国外，国内对可达集的研究起步较晚，但也取得了不错的成就。

崔红迪等人分析了线性时滞系统的可达集问题，考虑了加入状态反馈下系统的可达集估计问题，通过构造适当的L-K泛函，结合积分不等式，得到状态可达集界定的充分条件[29]。王超、张胜修等人针对过程噪声设定边界与真实噪声边界失配的有界干扰离散线性不确定系统，提出一种具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒模型预测控制方法[30]。

左志强等考虑了带有多面体不确定性和有限峰值输入的延时系统，并且讨论了延时有界和延时导数有界两种延时情况[31]。提出最大化李雅普诺夫函数方法，改进了积分不等式，求出每个顶点的李雅普诺夫函数最大值来代替传统的李雅普诺夫函数。可达集可以通过一些椭圆集合的焦点得到，此方法不受延时导数大小的限制。另外，左志强还提出了一种将最大化李雅普诺夫函数和互反凸方法相结合的方法估计可达集，可以获得更小的可达集[32]。

张保勇等人对具有有界峰值输入的线性延时系统进行研究。他们在文献[33]中提出了确定包含系统状态的椭球的方法，并运用于对标称延时系统，利用松弛李雅普诺夫-克拉索夫斯基(Lyapunov-Krasovskii, L-K)函数进行研究，获得了所需椭圆体存在的延迟依赖和延迟率依赖条件；对时变系统状态，利用参数依赖L-K函数得到所需椭球存在的充分条件，并用参数独立L-K函数将条件松弛化，即可得到所求系统的椭球存在的参数率依赖条件。利用类似的方法，他们进一步研究了多常数延时系统的可达集估计、带有界扰动延时系统的可达集估计和控制器设计[34]。

钟守铭和徐丽研究了带扰动的分布式时变延时系统的可达集边界估计，通过构建最大L-K函数，利用线性矩阵不等式，得到了系统可达集的非椭球近似描述[35]；进一步地，陈浩、钟守铭等人将李雅普诺夫函数与延时分解技术、互反凸方法及自由权重矩阵方法相结合，得到了更为准确的可达集边界描述，并对带有三重积分的线性离散混合延时系统的可达集进行求解[36]。

以上大多数处理时滞系统的方法都是基于李雅普诺夫函数，构造一个包含可达集的椭圆，最终解LMI得到椭圆球的参数。更多的研究方向则是寻找更小的椭圆描述，但可达集通常都不是椭圆，因此李雅普诺夫函数具有一定的保守性。数值化方法求解可达集不受椭圆的限制，并且可以精确求出具体某一时刻的控制量，因此作为新的研究方向。

相比其他非数值化方法，数值化求解可达集是一种更具优势的方法，这类方法的近似结果更加接近真实可达集，且能够给出可达集边界点上的控制量。通过求解一系列优化问题，得到可达集上的边界点，利用这些边界点形成凸包来近似可达集。一般这种方法形成的可达集属于内部近似可达集。Baier等提出了一种数值化的方法来计算可达集边界，具体方法是构造一系列超平面，通过求解每一个超平面的优化问题得到边界点[37]。赵方园等人提出了外部投影法，通过在可达集四周布置等间隔的网格点，将网格点向可达集投影得到可达集的边界点来近似线性控制系统的可达集[38]。但这些方法仅仅适用于线性控制系统，对非凸可达集并不适用。对非线性系统，Gornov和Finkel和Shtein通过在二维可达集内部布置了若干点，并迭代更新，使这些点的分段线性轮廓线所围成的区域最大，从而近似可达集[39]。Baier、Gerdts和Xausa提出了基于最优控制的DFOG方法来近似离散系统的可达集[40]，该方法在包含可达集的区域内分布等间距的网格点，对每个网格点求解该点到可达集的最短距离，并在该区域内除去以外部网格点为圆心、最短距离为半径的开球集，最终剩余集合即为可达集的近似集合。Rasmussen、Rieger和Webster在DFOG算法的基础上，利用SVM分类器对DFOG算法得到的可达集边界点进行分类[41]，从而提升了可达集的近似精度。

# 2 文献综述

## 2.1 可达集数学模型

可达集有前向可达集和后向可达集之分，其中前向可达集(forward reachable set)是指控制系统从初始状态出发，取遍满足约束的所有控制量，到终止时刻的所有状态的集合；后向可达集(backward reachable set)是在满足控制约束条件之下，系统能够达到时刻目标集的所有状态在时刻所构成的集合。值得注意的是，前向可达集和后向可达集都是针对某一时刻，即它们均跟随的变化而变化，时刻不同，系统的可达集就不同。

考虑如下控制系统：

(2-1-1)

式中，——系统状态向量；

——系统初始状态；

——非空紧密的控制量集合；

——时间系数。

如果是关于的线性函数，则该控制系统为线性控制系统，线性控制系统的可达集均为凸集，而非线性控制系统的可达集可能为凸集，也可能为非凸集。

系统(2-1-1)从初始条件出发，在终止时刻的前向可达集为：

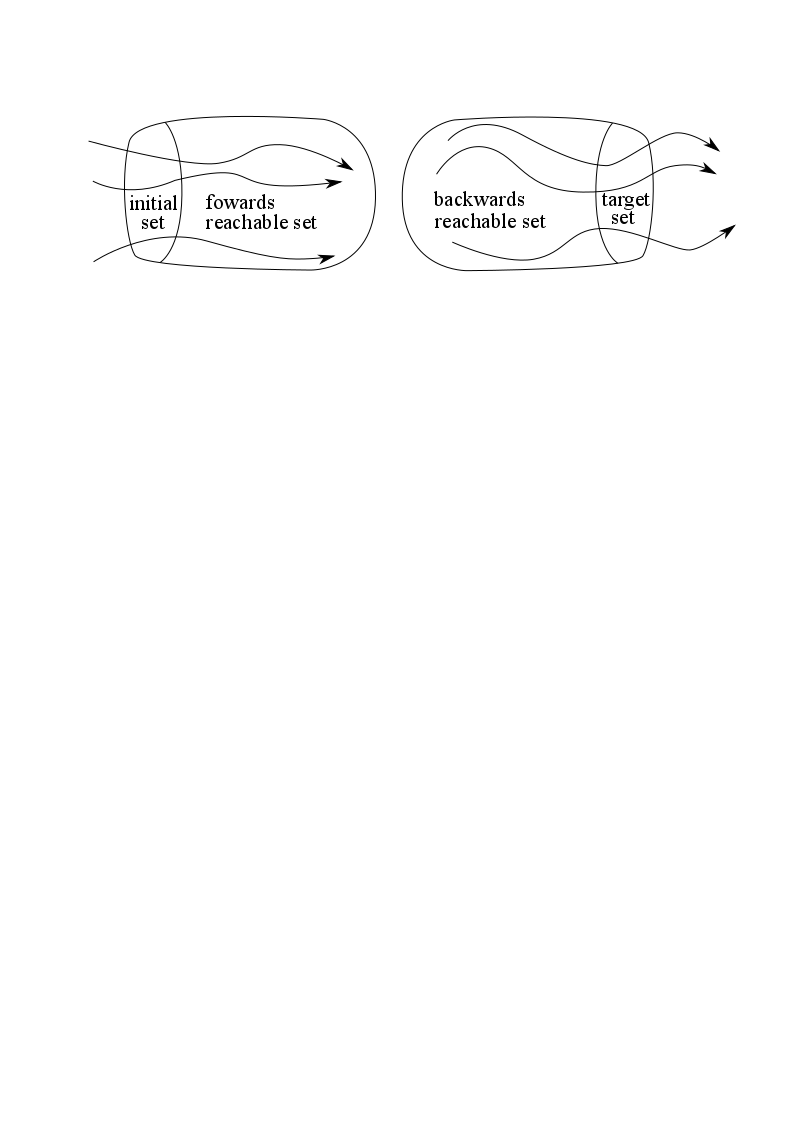
. (2-1-2)

正如前文所述，后向可达集是在一定控制量下达到目标集的初始条件集合。设集合为时刻的目标集，为有限时间范围内的时刻的后向可达集，，表示系统的状态，为系统(2-1-1)在时刻的状态。那么系统(2-1-1)的后向可达集即可表示为：

(2-1-3)

图1为前向可达集和后向可达集的图示，直观的表现出前向可达集和后向可达集的意义与区别。

**图 1 前向可达集和后向可达集**



## 2.2 可达集离散化

由于计算机无法直接接收连续量，需要经过离散化后才能处理。因此连续控制系统的研究逐渐向离散控制系统的研究发展。而连续系统的可达集也可用对应的离散系统的可达集进行近似[42]。离散化的方法可以采用欧拉法、龙格-库塔法、线性多步法[43]等。以欧拉法为例，在时间内，取等间隔的时间点，其中为离散步长，正整数为离散步数，每一个时间点对应的增量函数为，假定控制函数在间隔内恒定为，则离散后的系统为：

(2-1-4)

于是对于离散系统，从初始条件出发，在时刻的前向可达集表示如下：

(2-1-5)

离散系统的后向可达集可表示如下：

(2-1-6)

两个集合间的相似程度一般用豪斯多夫距离(Hausdorff Distance)来衡量，豪斯多夫距离定义如下：

定义1（豪斯多夫距离）设集合为两个非空紧集，则与之间的豪斯多夫距离为：

(2-1-7)

其中。

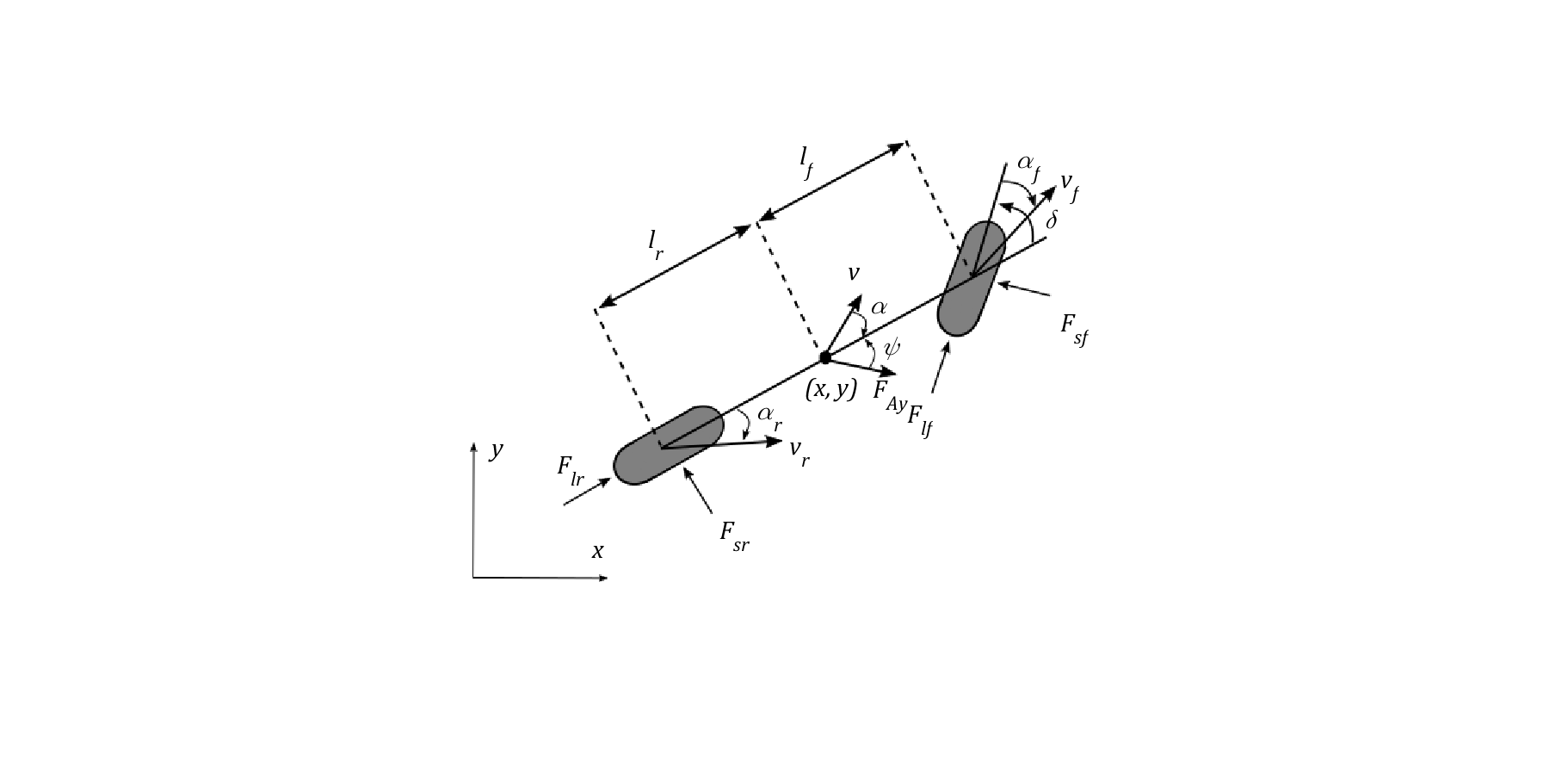
文献[43]指出，连续系统的可达集用其离散系统的可达集来近似，近似精度取决于离散步长。对于前向可达集而言，若系统中的满足利普希茨(Lipschitz)条件，取正整数为离散步数，为离散步长，利用欧拉方法对系统(2-1-1)进行离散化处理得到系统(2-1-4)，则存在一个常数是的离散系统可达集与离散系统可达集有如下关系：

(2-1-8)

## 2.3 控制系统模型示例

控制系统的种类繁多，外部硬件结构也各不相同，因此运动及控制模型也千差万别。因此选取了较为简单常见的自主车辆的运动模型作为起步研究工作[9]。

在进行车辆动态基本描述和优化建模时，选用简化的车辆模型，具体如图2所示，其中两块阴影部分表示车辆一侧的前轮和后轮。



**图 2 自主车辆的基本模型**

模型的基本情况如下：

基本假设：车辆的整体结构为刚性系统；

控制变量：，其中转向角速度为，其范围限定为，且；制动力为，其范围限定为，且，于此建立一个制动()和加速()的组合模型。

状态变量：以地面为坐标平面，车辆中心的坐标为；车辆的速度以及前轮和后轮的速度为；转向角、侧滑角和偏航角分别为；前轮和后轮的滑移角为；前轮和后轮的横向受力为和；前轮和后轮的纵向受力为；重心到车辆的前轮和后轮的距离为；车辆质量为。

车辆动态：车辆的动态由以下差分方程给定：

(2-3-1)

其中为常数；为方向上的速度；为偏航角速率；为状态的非线性函数，并且

(2-3-2)

其中分别表示空气阻力和侧风对车辆的阻力。

在时刻，为了确保车辆的最终安全状态，且车辆依旧沿着车道行驶而不发生偏离，定义如下边界约束：

(2-3-3)

此外，为了保持车辆行驶在车道上，还需要增加如下状态约束：

(2-3-4)

其中为给定常数，分别表示两条车道线的坐标和车体宽度。

# 3可达集求解算法

## 3.1 李雅普诺夫函数法

这类方法主要针对于线性延时连续系统的可达集求解，即考虑如下形式的线性系统：

(3-1-1)

式中为常数矩阵，为正控制量，为有界的延时函数,为时间变量，为常数。

该系统的可达集为式(2-1-2)。该方法的主要思路是构建一个包含整个可达集的椭球，该椭球的数学表达式为：

, (3-1-2)

其中。

得到该椭球后，需要采用参数化的一阶模型变换来减小椭球包含范围[44]，得到尽量精确的可达集近似：

(3-1-3)

假设当时有。如果取，可以由该模型变换产生时滞独立条件；若取则可以获得关于一阶模型变换的时滞相关条件。需要指出式(3-1-3)不等同于式(3-1-1)，因为式(3-1-3)具有双倍的延时和额外的动态性，但是式(3-1-3)的所有解都满足式(3-1-1)。

显然当满足且，则椭球包含了系统(3-1-1)由初始状态出发，在控制量作用下的所有解，即包含了整个可达集。由于的表达式依赖于而不仅仅是，因此求解难度很大。实际上，如果系统的一个椭球内起始的状态量在某个时刻离开椭球，则有

*.* (3-1-4)

因此，如果只有式(3-1-4)为真，式(3-1-3)才需要满足。这就是李雅普诺夫函数法的基本思想。图3显示了李雅普诺夫函数法求解可达集的示例，图中外部椭球表示算法生成的可达集椭球边界，内部实心集合表示真实可达集。



**图 3 李雅普诺夫函数法求解可达集示例**

但是这种方法的弊端比较明显，最终结果仅仅是可达集的大致范围，求得的椭球是可达集的过近似，椭球的边界并不是真正的可达集边界，导致无法准确评估可达集范围和边界，近似误差较大。大多数研究可达集的方法都是建立李雅普诺夫函数，求出满足系统稳定情况下的不等式中决策变量的值，就可以得到一个包含真实可达集的椭球。然而不同的限制条件会导致不一样的李雅普诺夫函数，最终求解的结果也不同，且大多数方法都有很大的局限性，通常只适用于某一特定的条件，不能得到很好的应用；即使利用李雅普诺夫函数即使得到了椭球边界，也无法精确得到某一时刻具体的控制量。

## 3.2 数值方法

采用数值方法处理可达集，需要首先对连续系统离散化处理。虽然离散控制系统的数据量较大，但是如今发展迅速的计算机已经可以轻而易举地求解大量的优化问题，并且可以计算出每一时刻具体的最优控制量。

### 3.2.1 几何近似法

这类方法的主要思路是通过构建与可达集相接的多面体，利用多面体对可达集进行外部或内部近似。如支撑超平面法，可求解若干个可达集边界点作为支撑点，对每个点构建可达集的超平面，将这些超平面围城的凸包作为可达集的近似集。由于要求可达集具有凸性，因此这类方法主要用于求解线性可达集问题。

在求解可达集前，需要对可达集表达形式作如下处理。以前向可达集(2-1-2)为例，该可达集求解问题可以归结为如下求集合的问题：

(3-2-1)

进一步地，将(3-2-1)中的每个约束都转化为的形式，于是上述问题可描述为如下形式：

(3-2-2)

其中表示变量；表示最后列为单位阵且其他元素为的矩阵。

在包含可达集的空间内，首先给定一个单位方向向量且，为了得到在该方向上一个可达集边界上的支撑点，必须先找到得到状态的控制函数。我们可以通过求解优化问题

(3-2-3)

得到最优的和，表示以为方向上的最优解。通过选取不同的方向向量，我们可以得到多个及对应的控制量，每个均为可达集边界上的点，为构建支撑超平面的支撑点。以每个为法向量，相对应的为支撑点可以构建一个支撑超平面。于是所有的支撑超平面围城的凸包即为可达集的外部近似集合；若直接将所有支撑点构建的凸包，则该凸包可以看作可达集的内部近似集合。如图4所示，图中实线围城的凸集为可达集，集合的外部虚线为构建的支撑超平面，虚线与实区线的交点为支撑点。



**图 4 支撑超平面法求解可达集示例**

理论上若选取的每个方向向量之间的角度均匀分布，则可使得到的支撑点分布较为均匀。在系统离散化方法和离散化步长相同的情况下，若方向向量选取越多，则得到支撑点越多，可达集近似精度越高，但是消耗时间越长。

### 3.2.2 网格点近似法

在求解非线性控制系统可达集问题时，由于可达集具有非凸性，上述通过构建凸包的方法并不能取得理想的效果。为了解决这类问题，研究人员通过在包含可达集的空间内布置大量给定间隔的网格点，通过借助这些网格点对可达集进行近似。distance fields on grids(DFOG)算法中是这类算法中较为新颖的算法。

DFOG算法的主要思想是对每个网格点求解它到可达集的距离，并在空间内除去以点为球心、距离为半径的开球集，剩余集合即为可达集的近似集合。在介绍该算法前需要给出去除开球集的表达式：

(3-2-4)

其中为所求闭合集合，表示集合的内部， 表示以点为球心，到的距离为半径的球，若则有。

选取子空间使得可达集。在内布置间距为的均匀分布的网格点，记网格点集为。对每个网格点，求解如下最小化问题：

(3-2-5)

将最优解记为，最优值为。于是可达集的近似集合可以表示为

(3-2-6)

若在理想情况下，所有优化问题都求得全局最优值，则近似集和真实集满足如下关系：

. (3-2-7)

其中为常数，为欧拉法离散化步长，为网格点距离。



**图 5 DFOG法求解可达集示例**

图5显示了DFOG算法的求解示例，图中的大圆表示算法构建的开球集，星形点为大圆与可达集的切点，同时也是求得的可达集边界点，圆点为布置的网格点。然而该算法对优化问题(3-2-5)的求解要求非常苛刻，如果某一个优化问题没有求得全局最优，则去除开球集的过程中会除去部分真实的可达集，造成近似结果比实际集合要小。对于高维非线性控制系统，优化问题根本无法保证求得全局最优，因此在高维情况下该算法的近似化误差较大。

## 3.3 多目标优化综述

本课题拟采用多目标优化对可达集边界进行近似。多目标优化问题是最优化问题的一个分支。最优化问题是指在一定的约束条件下，求解输入以使得目标函数取得期望极值的问题。优化问题的核心有三部分决策(decision)，目标(objective)和约束(constraint)。所有的决策问题，小到我们生活中的每一个选择，大到国家的战略，都可以分解为这样的三部分。因此优化的思想可以说是在人们的生活中无处不在其中。

### 3.3.1 多目标优化问题数学模型

单目标优化问题是仅有一个目标函数的最优化问题，而目标函数超过一个并且需要同时优化的问题则称为多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP)。多目标优化问题的数学模型如(3-3-1)所示。

, (3-3-1)

*.*

式中，——维决策变量；

——目标函数向量，变量空间到目标空间的映射函数；

——约束条件函数。

首先定义多目标优化问题的变量空间可行域和目标空间可行域。

*.* (3-3-2)

*.* (3-3-3)

对于多目标优化问题而言，目标函数之间往往是矛盾的，即无法找到一组可行解使所有目标达到最优，因此多目标优化问题的解通常并不是唯一的，在定义多目标优化问题的有效解之前，需要先做如下定义：

定义2（Pareto支配）设为多目标优化问题的两个可行解，且，。若满足且，则称支配，记作。如果两者互不相互支配，则称是等价的。

定义3（Pareto最优解）在多目标优化问题可行域内不存在任何一个解支配，则称为Pareto最优解，或有效解(efficient solution)，则被称为非支配点(nondominated point)。

定义4（Pareto最优解集）多目标优化问题的所有有效解的集合，即，被称为Pareto最优解集，或有效解集。

定义5（Pareto前沿）Pareto前沿是Pareto最优集合映射到目标空间所形成的集合，也就是所有非支配点的集合，因此也被称为非支配集(nondominated set)，记作，表示为。

如图6所示，两个坐标轴分别表示双目标优化问题的目标空间中的两个优化函数，并展示了双目标优化问题中支配点、非支配点、帕累托前沿的关系。求解多目标优化问题其实就是求解非支配集，但是与单目标优化问题不同的是，多目标优化问题在求解过程中不仅要考虑每个目标函数的优化问题，还要考虑多个可行解之间的支配问题；同时非支配集可能是连续或间断的曲面，计算机只能用离散的点来代表曲面，因此不仅需要考虑算法能否收敛到支配集上，还要考虑求得的离散非支配点能否代表整个非支配集。



**图 6 支配点、非支配点和Pareto前沿**

### 3.3.2 多目标优化算法

传统的多目标优化算法是将多目标称中的各个子目标函数经过数学处理或变换，转变为一个单目标函数，然后采用单目标优化技术求解。基本的求解方法有：(1)分层序列法：按照子目标的重要性的顺序逐个进行优化，将其他目标函数作为约束，这种方法对各个子目标的优化是不平等的，如-约束法、等式约束法。(2)评价函数根据设计者提供的偏好信息构造出一个评价函数，将目标作为评价函数的变量输入，使多目标优化问题的最优解等价于评价函数的最优解。常用的评价函数构造法有线性加权法、平方加权法等。虽然该理论为分析多目标优化提供了一种工具，然而在多数情况下设计者的偏好信息不足以确定理想的评价函数。

近年来，随着启发式算法的深入研究，启发式逐渐被用到多目标优化问题的求解上。相较于传统算法，启发式算法能够应对非凸、不连续等复杂情况，且能够一次性得到多组解[45]。

目前主流的多目标启发式算法为非支配排序遗传序算法(nondominated sorting genetic algorithm, NSGA)[46]和强Pareto进化算法(strength Pareto evolutionary algorithm, SPEA)[47]。

NSGA算法有两个关键步骤。首先对群体进行非支配排序：找出群体非支配集记为第一非支配层,并从群体中除去，继续寻找第二非支配层，直到整个群体被分层；给每一个非支配层指定一个虚拟适应度值，保证非支配层级低的个体更有可能进入下一代。NSGA与简单的遗传算法的主要区别在于：该算法在选择算子执行之前根据个体之间的支配关系进行了分层。其选择算子、交叉算子和变异算子与简单遗传算法没有区别。在NSGA算法的基础上，Deb等人提出了NSGA-II算法[48]，该算法进行了以下方面改进：提出了快速非支配排序法，降低了算法的计算复杂度；提出了拥挤度和拥挤度比较算子；引入精英策略，将父代种群与已其产生的子代共同竞争产生下一代种群。由于NSGA-II算法在学术研究与工程实践中的广泛应用[49][50]，本课题拟利用NSGA-II算法求解可达集。

SPEA算法的主要策略是利用一个种群和一个空的存档集合(archive)进行迭代。首先将所有个体放入存档中，去除被支配和重复的个体，如果个体数量超过存档容量则通过聚类去除离群点；然后对所有个体依据适应度给定强度值，按照强度值选择个体进行交叉，生成子代。而后Eckart Zitzler等人提出了SPEA-II算法[51]，该算法在指定个体适应度时同时考虑了支配和被支配的情况，避免了多个个体被同一个个体支配时，它们的适应度相同的情形出现；而且固定了存档集合的大小，只能选择存档内的个体进行交叉。

此外，还有多目标粒子群[52]、多目标模拟退火[53]等启发式多目标算法。

# 4 拟研究的主要内容及思路

在控制理论中，可达集是状态估计和参数估计的一种重要方法。动态控制系统的可达集是指：在外界输入有界的情况下，系统的状态从原点出发，描述系统所有可能出现的状态的一个集合。可达集的计算在分析控制系统的运行过程中具有重要的实际意义，且对于非线性控制理论和动态系统中不定参数的定量研究而言，可达集的数值计算是关键的问题之一。随着控制系统的深入研究，目前已有多种可达集的求解方法。因此，如何开发出一种新的可达集定界方法并克服当前方法的不足是本课题的关键所在。本课题通过研究以往的可达集理论研究和多目标优化算法，将两者进行有机结合，希望能找到更好的可达集数值计算方法，得到更加精确的可达集近似结果。

内容及思路：

本课题拟研究的主要内容有：控制系统建模、可达集建模及离散化、可达集数值方法求解、基于多目标优化的可达集数值方法近似。数值方法的思想是将连续系统运用数值方法进行离散化，对离散化后的可达集构建若干个优化问题，通过求解这些优化问题得到可达集的边界点。相对于其它非数值方法，它是对真实可达集的近似，而非求解某个包含可达集的区域；同时它能够给出可达集边界点的控制量，有利于接下来对系统进行最优控制。但这种方法的计算量大，且优化问题的求解容易陷入局部最优。本课题拟采用多目标优化算法，建立基于多目标的可达集模型，尝试改进现有算法的不足之处。

创新点：

本课题的创新点体现在以下方面：

1. 传统数值方法求解可达集时，求解一个优化问题只能得到一个可达集边界点；多目标方法每次求解可得到多个可达集边界点。
2. 传统数值方法求得的可达集边界点分布不均匀，对可达集边界的代表性弱；而多目标进化算法利用了拥挤度概念，保证边界点分布均匀。
3. 目前可达集求解算法普遍没有利用到多目标优化方法，本课题为这类问题的解决提供了新思想，深入研究的潜力大。

# 5 工作进度安排

2017年7月—2017年10月

查阅文献资料学习可达集和多目标优化相关知识。

2017年11月—2018年4月

整理可达集求解和多目标优化的算法，总结创新并提出自己的算法，编写程序进行仿真。

2018年5月—2018年8月

整理所有程序与实验结果，准备撰写毕业论文。

2018年9月—2018年12月

完成毕业论文的撰写，准备毕业答辩。

# 参考文献

1. 雪丹, 李俊峰, 宝音贺西.平面脉冲作用下卫星轨道的可达范围研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(1): 88-92.
2. Li X H, He X S, Zhong Q F, et al. Reachable domain for satellite with two kinds of thrust [J]. Acta Astronautica, 2011, 68(11): 1860-1864.
3. 解永锋, 唐硕. 亚轨道飞行器再入可达域快速计算方法[J]. 飞行力学, 2011, 29(4): 72-76.
4. 刘瑛, 杜光勋, 全权,等. 基于Hamilton-Jacobi方程的飞行器机动动作可达集分析[J]. Acta Automatica Sinica, 2016(3): 347-357.
5. Parise F, Valcher M E, Lygeros J. On the reachable set of the controlled gene expression system [C]. IEEE, 2014: 4597-4604.
6. Mitchell I M, Tomlin C J. Over approximating reachable sets by Hamilton-Jacobi projections [J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1-3): 323-346.
7. 王亚锋, 孙富春, 张友安,等. 基于可达集的鲁棒模型预测控制[J]. 信息与控制, 2011, 40(5): 669-672.
8. 程奇峰,马奥运等.基于多面体可达集的时间最优模型预测控制[J].控制与决策, 2016, 31(10): 1884-1888.
9. 曹凯, 黄肖肖, 于云, 等. 自主车辆避障安全路径的可达集建模[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(3): 526-533.
10. Zhou Y, Baras J S. Reachable Set Approach to Collision Avoidance for UAVs[J]. Mathematics, 2015.
11. Gillula J H, Huang H, Vitus M P, et al. Design of guaranteed safe maneuvers using reachable sets: Autonomous quadrotor aerobatics in theory and practice[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2012: 1649-1654.
12. Althoff M, Dolan J M. Set-based computation of vehicle behaviors for the online verification of autonomous vehicles[C]// International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems. IEEE, 2011: 1162-1167.
13. Qi X, Theilliol D, Song D, et al. Invariant-Set-Based Planning approach for obstacle avoidance under vehicle dynamic constraints[J].Robotics and Biomimetics, 2015: 1692-1697.
14. Gerdts M, Henrion R, Homberg D, et al. Path planning and collision avoidance for robots [J]. Numerical Algebra Control and Optimization, 2012, 2(3): 437-463.
15. 郑凯. 一种基于可达集的船舶安全领域建模方法研究[C]. 第35届中国控制会议. 2016: 6.
16. Luca Benvenuti. On the reachable set for third-order linear discrete-time systems with positive control: The case of complex eigenvalues. Systems and Control Letters, 2011, 60(12): 1000-1008.
17. Benvenuti L. On the reachable set for third-order linear discrete-time systems with positive control: The case of complex eigenvalues[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(12): 1000-1008.
18. Gunther Reissig. Convexity of reachable sets of nonlinear discrete-time systems[C]. In Methods and Models in Automation and Robotics, 2007.
19. Kurzhanski A, Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(1): 26-38.
20. Kostousova E K. External polyhedral estimates for reachable sets of linear discrete-time systems with integral bounds on controls[J]. International Journal of Pure & Applied Mathematics, 2009, 50(2): 187-194.
21. Stipanovic D M, Hwang I, Tomlin C J. Computation of an over-approximation of the backward reachable set using subsystem level set functions[C] European Control Conference. IEEE, 2003: 300-305.
22. Mitchell I M, Bayen A M, Tomlin C J. A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(7): 947-957.
23. Kostousova E K. On polyhedral estimates for reachable sets of discrete-time systems with bilinear uncertainty[J]. Automation and Remote Control, 2011, 72(9): 1841-1851.
24. Fridman E and Shaked U. Technical communique: On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs. Automatica, 2003, 39(11): 2005-2010.
25. Jin Hoon Kim and F. Jabbari. Scheduled controllers for buildings under seismic excitation with limited actuator capacity. Journal of Engineering Mechanics, 130(7): 800-808, 2004.
26. Phan T. Nam ,Pubudu N. Pathirana. Technical communique: Further result on reachable set bounding for linear uncertain polytopic systems with interval time-varying delays. Automatica, 2011, 47(8): 1838-1841.
27. Nguyen D. That, Phan T. Nam, and Q. P. Ha. Reachable set bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 157(1): 96-107.
28. Lam J, Zhang B, Chen Y, et al. Reachable set estimation for discrete-time linear systems with time delays[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2013, 25(2): 269-281.
29. 崔红迪, 林崇, 李金泽. 时滞控制系统的可达集研究[J]. 青岛大学学报(工程技术版), 2011, 26(3): 1-5.
30. 王超, 张胜修, 秦伟伟, 等. 具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒预测控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(1): 11-18.
31. Zuo Z, Daniel W. C. Ho, and Wang Y. Technical communique: Reachable set bounding for delayed systems with polytopic uncertainties: The maximal Lyapunov-Krasovskii functional approach. Automatica, 2010, 46(5): 949-952.
32. Zuo Z, Fu Y, Chen Y, et al. A new method of reachable set estimation for time delay systems with polytopic uncertainties[J]. Applied Mathematics & Computation, 2013, 221(9): 639-647.
33. Zhang B, Lam J, Xu S. Relaxed results on reachable set estimation of time‐delay systems with bounded peak inputs[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2015, 26(9): 1994-2007.
34. Zhang B, Lam J, Xu S. Reachable set estimation and controller design for distributed delay systems with bounded disturbances[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3068-3088.
35. Li X, Zhong S. Reachable Set Bounding Estimation for Distributed Delay Systems with Disturbances[J]. International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering 2014, 8(9).
36. Chen H, Cheng J, Zhong S, et al. Improved results on reachable set bounding for linear systems with discrete and distributed delays[J]. Advances in Difference Equations, 2015(1): 1-14.
37. R. Baier, C. Skens, I. A. Chahma, and M. Gerdts. Approximation of reachable sets by direct solution methods for optimal control problems. Optimization Methods and Software, 2007, 22(22): 433-452.
38. 邵立珍, 赵方园, 胡广大. 一种求解线性控制系统可达集的数值方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(3): 541-546.
39. A. Yu. Gornov and E. A. Finkel.Shtein. Algorithm for piecewise-linear approximation of the reachable set boundary. Automation and Remote Control, 2015, 76(3): 385-393.
40. Baier R, Gerdts M, Ilaria X. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. Numerical Algebra, 2013, 3(3): 519-548.
41. Martin Rasmussen, Janosch Rieger, and Kevin Webster. Approximation of reachable sets using optimal control and support vector machines. Mathematics, 2014, 311: 68-83.
42. Dontchev A L, Farkhi E M. Error estimates for discretized differential inclusions[J]. Computing, 1989, 41(4): 349-358.
43. Chapra S C, Canale R P. Numerical methods for engineers[M]. New York: McGraw-Hill, 2010.
44. Niculescu S I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach[J]. Of Lecture Notes in Control & Information Sciences, 2001, 269.
45. 马小姝, 李宇龙, 严浪. 传统多目标优化方法和多目标遗传算法的比较综述[J]. 电气传动自动化, 2010, 32(3): 48-50.
46. Srinivas N, Deb K. Multiobjective Function Optimization Using Nondominated Sorting Genetic Algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 1301-1308.
47. Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
48. Deb K. A fast elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2000, 6(2): 182-197.
49. 李海燕, 井元伟. 基于NSGA-II的具有多目标子学科的协同优化方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(8): 1497-1503.
50. 孙建龙, 吴锁平, 陈燕超,等. 基于改进NSGA2算法的配电网分布式电源优化配置[J]. 电力建设, 2014, 35(2) :86-90.
51. Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm[J]. Evolutionary Methods for Design Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, 2001, 95-100.
52. 冯琳, 毛志忠, 袁平. 一种改进的多目标粒子群优化算法及其应用[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1313-1319.
53. 李金忠, 夏洁武, 曾小荟,等. 多目标模拟退火算法及其应用研究进展[J]. 计算机工程与科学, 2013, 35(8): 77-88.