

시변적 모수와 기대수익률 추정 불확실성을 반영한 포트폴리오 최적화 프레임워크

최우성¹, 주소현², 이영재³, 류병석⁴, 김영균⁵

¹강원대학교 행정학전공

²강원대학교 정보통계학전공

³강원대학교 경제학전공

⁴연세대학교 화공생명공학과

⁵융합소프트웨어랩

cwsu0313@naver.com, amro02@naver.com, blueyj331@naver.com,
bsryu@yonsei.ac.kr, ygkim-2004@hanmail.net

Portfolio Optimization Framework with Time-Varying Parameters and Uncertain Expected Returns

Useong Choe¹, Sohyun Cho², Youngjae Lee³, Byeongseok Ryu⁴, Younggyun Kim⁵

¹Dept. of Public Administration, Kangwon National University

²Dept. of Information Statistics, Kangwon National University

³Dept. of Economics, Kangwon National University

⁴Dept. of Chemical & Biomolecular Engineering, Yonsei University

⁵Convergence Software Lab.

요약

본 연구는 포트폴리오 최적화 과정에서 발생하는 두 가지 주요 문제, 즉 기대수익률 추정의 불안정성과 모수의 시변성을 고려한 방법론을 제시한다. 이를 위해 자산의 기대수익률은 시변성을 반영하는 상태공간 모형을 통해 동적으로 추정되었으며, 추정치의 안정성 확보를 위해 James-Stein 수축 추정기법이 적용되었다. 또한 자산 간의 동적 상관관계를 포착하고자 DCC-GARCH 모형을 활용하였다. 실증분석 결과, 본 전략은 10.91%의 연평균 성장률을 달성했으며, 주요 위험 조정 성과 지표에서도 비교 전략들을 상회하는 우수한 결과를 나타냈다.

1. 서론

자산 배분의 이론적 토대를 제공한 현대 포트폴리오 이론(MPT)은 기대수익률과 리스크의 균형을 통해 효율적인 투자 전략을 수립할 수 있다고 본다[1]. 그러나 실제 금융시장에서는 이러한 이상적인 가정이 자주 위배된다. 특히 포트폴리오 최적화에서 핵심 모수인 기대수익률과 공분산은 직접 관측할 수 없기 때문에 추정치에 의존할 수밖에 없으며, 이로 인한 추정 오차가 성과를 크게 저하시킬 수 있음이 지적되어 왔다[2]. 그 중에서도 기대수익률은 작은 표본 잡음에도 크게 흔들려 추정위험이 특히 심각하다[3-4]. 나아가 기대수익률은 고정된 상수가 아니라 경기 국면이나 경제 구조에 따라 변하는 시변적 특성을 보이며[5], 분산 또한 일정하지 않고 군집되는 경향을 보이기 때문에 이를 설명하기 위한 연구가 이루어졌으며[6], 이후 다변량으로 확장되어 공분산과 상관관계의 시변성을 포착하려는 노력이 진행되었다[7-8].

본 연구는 이러한 배경 하에, 자산별 기대수익률을 상태공간모형을 이용해 시점별로 동적으로 추정하였다. 나아가 기대수익률은 James-Stein 추정량을 활용해 보정함으로써 개별 추정치의 불안정성을 줄이고 보다 안정적인 평균값을 얻도록 하였다. 또한 리스크 구조는 DCC-GARCH 모형을 도입하여 자산 간 상관관계가 시점에 따라 동적으로 변화하는 특성을 반영하

였다. 마지막으로, 리스크 대비 기대수익률을 최대화하는 포트폴리오를 시점별로 구성하여 성과를 분석하였다. 본 연구의 접근은 정적 추정에 의존하는 전통적 전략에 비해 시장 변화에 대한 적응력이 높으며, 동시에 추정 불확실성을 통제함으로써 실무적 활용 가능성 이 한층 제고된 자산배분 방안을 제시한다.

2. 연구설계

2.1 데이터 수집 및 전처리

본 연구는 GICS산업 분류 체계에 따라 미국 주식시장을 대표하는 주요 섹터 ETF를 선정하였다. 상장 이력이 짧은 커뮤니케이션 서비스(XLC, 2018년 6월 22일 상장)와 부동산(XLRE, 2015년 10월 9일 상장), 그리고 규제와 정부 정책에 강하게 종속되어 시장 수급 논리에 따른 분석이 어려운 유트리티(XLU, 1998년 12월 16일 상장)는 제외하였다. 이러한 기준을 적용한 결과, 최종 표본에는 에너지(XLE), 소재(XLB), 산업재(XLI), 필수소비재(XLP), 자유소비재(XLY), 헬스케어(XLV), 금융(XLF), 정보기술(XLK) 등 8개 섹터 ETF 와 인플레이션 및 시장 불확실성 국면에서 위험 분산 효과를 제공하는 금 채굴 산업 ETF(GDX)가 포함되었다.

주가 데이터는 Yahoo Finance를 통해 각 ETF의 수정종가를 수집하였으며, 전체 ETF가 공통으로 거래된

기간을 기준으로 2006년 5월 22일부터 2025년 7월 23일까지의 일별 자료를 사용하였다. 수집한 가격 자료는 결측치를 제거한 후, 이를 기반으로 산출한 수익률을 분석에 활용하였다. 수익률은 (식1)로 계산된 초과수익률을 사용하였다.

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) - r_{f,t} \quad (\text{식1})$$

P_t 는 t 시점의 가격을 의미하고 r_f 는 일률화된 무위험 수익률로, 미국 3개월물 국채수익률로 설정하였으며, 자료는 미국 연방준비제도 산하 세인트루이스 연방준비은행이 운영하는 FRED에서 수집하였다. 3개월물 국채수익률은 단기 국채 중 거래량이 많고 신용위험이 사실상 없으며, 단기 투자기간에 대한 시장 기대금리를 안정적으로 반영하므로 금융 연구에서 표준적인 무위험 수익률 지표로 널리 사용된다.

2.2 상태공간모형 기반 기대수익률 추정

본 연구는 자산별 기대수익률을 시점별로 추정하기 위해 상태공간모형을 적용하였다. 기대수익률은 직접 관측할 수 없는 잠재 상태로 간주하고, 이를 수익률 시계열을 통해 추정하는 구조를 따른다. 사용된 모형은 (식2), (식3) 두 개의 방정식으로 정의된다.

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (\text{식2})$$

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (\text{식3})$$

여기서 (식2)는 상태방정식이며, (식3)은 관측방정식을 나타낸다. r_t 는 시점 t 의 초과수익률, μ_t 는 기대초과수익률을 나타내며 ϵ_t 는 관측오차, η_t 는 상태오차에 해당한다. 상태방정식은 보이지 않는 실제 흐름을, 관측방정식은 우리가 시장에서 관찰하는 실제 수익률 데이터를 나타낸다. 이 보이지 않는 흐름은 무작위로 움직이는 것처럼 보이지만, 특정 규칙을 따른다고 가정한다. 모형의 분산 파라미터는 최대우도법(MLE)을 통해 추정하였고, 기대수익률은 칼만 필터를 이용해 시점별로 추정하였다. 이러한 방식은 시장 변화와 구조적 변화를 반영할 수 있도록 한다.

2.3 James-Stein 추정을 통한 기대수익률 보정

상태공간모형을 통해 자산별·시점별 기대수익률을 추정하였으나, 금융 수익률은 본질적으로 잡음이 크며, 자산 수가 많아질수록 이러한 잡음이 누적되어 포트폴리오 해가 극단적으로 치우치는 문제가 나타난다. 이를 보완하기 위해 본 연구는 Stein(1956)이 제시한 James-Stein 수축 추정량을 활용하였다. James-Stein 추정은 추정값들을 특정 타깃(보통 0 또는 평균)으로 수축함으로써 표본평균보다 더 낮은 평균제곱오차(MSE)를 달성할 수 있음을 보장한다[9]. Stein 이후의 연구에서 Bock(1975)는 이분산 구조를 고려한 heteroscedastic JS를 제안하였고[10], Efron & Morris(1975)는 경험적 베이지안 관점에서 획단면 평균을 타깃으로 한 수축 기법을 발전시켰다[11]. 본 연구는 이 두 접근법을 결합하여, 각 시점별 기대수익률 벡터에 대해 (식4)와 같은 James-Stein 추정식을 적

용한다.

$$\hat{\mu}_{i,t}^{JS} = \bar{\mu}_t + \lambda_t^{JS}(\mu_{i,t} - \bar{\mu}_t) \quad (\text{식4})$$

여기서, $\mu_{i,t}$ 는 t 시점의 자산*i*의 기대수익률이며 $\bar{\mu}_t$ 는 시점t의 자산들의 기대수익률의 평균이다. λ_t^{JS} 는 쉬링크 강도로, (식5), (식6)과 같이 계산된다.

$$Q_t^{JS} = \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{\mu}_{i,t} - \bar{\mu})^2}{\sigma_{i,t}^2} \quad (\text{식5})$$

$$\lambda_t^{JS} = \max\left\{0, 1 - \frac{N-3}{Q_t^{JS}}\right\} \quad (\text{식6})$$

(식5)에서 $\sigma_{i,t}^2$ 는 자산*i*의 기대수익 추정치의 분산으로 추정값의 불확실성에 해당하며 (식6)에서 N 은 자산의 개수를 의미한다. 해당 방식은 각 시점의 기대수익률 벡터를 전체 평균값 방향으로 끌어당겨서 추정 분산을 줄이는 동시에, 개별 자산 간 기대수익률의 상대적 차이를 유지하는 장점이 있다. 따라서 $\hat{\mu}_t^{JS}$ 는 포트폴리오 최적화 과정에서 보다 실용적이고 안정적인 입력값으로 사용될 수 있다.

2.4 공분산 추정

금융 자산 수익률은 시간에 따라 변동성과 상관관계가 달라지므로, 단순 이동평균 공분산이나 CCC-GARCH와 같은 고정 상관 모형으로는 이를 충분히 반영하기 어렵다. 이에 본 연구는 DCC-GARCH 모형과 롤링 추정 기법을 적용하여 이러한 한계를 보완하였다. DCC-GARCH 모형은 Engle에 의해 제안된 다변량 시계열 분석 기법으로, 각 자산의 조건부 분산을 GARCH 모형을 통해 추정하고, 자산 간 조건부 상관관계는 시간에 따라 동적으로 변화하도록 설계되어 있다[8]. 즉, DCC-GARCH는 자산별 변동성과 자산 간 상관관계를 분리하여 추정할 수 있으며, 이는 고정 상관관계 모형보다 현실적인 장점을 제공한다. 이 모형은 조건부 행렬 H_t 을 (식7)과 같이 분해한다.

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (\text{식7})$$

여기서 D_t 는 각 자산의 조건부 표준편차로 구성된 대각행렬이고, R_t 는 자산 간의 시간에 따라 변화하는 조건부 상관관계 행렬이다. 즉, 공분산 행렬을 개별 위험과 자산 간 관계로 분리함으로써, 각 부분이 시장 상황에 따라 어떻게 변하는지를 따로 추적할 수 있게 된다. 각 자산의 분산은 GARCH(1,1) 모형으로 추정되며, R_t 는 (식8)과 같은 DCC 구조를 따른다.

$$Q_t = (1 - a - b) \bar{Q} + a \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}^T + b Q_{t-1} \quad (\text{식8})$$

여기서 Q_t 는 시점 t 에서의 비정규화 조건부 공분산 행렬을 의미하며, \bar{Q} 는 Q_t 의 무조건부 기대값으로, 장기적인 평균 공분산 구조를 반영한다. 계수 a 와 b 는

각각 과거의 외생적 충격에 대한 민감도 및 과거 공분산 구조에 대한 지속성을 나타내는 모수로, 일반적으로 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b < 1$ 의 조건을 만족하여 공분산 행렬의 안정성을 보장한다. $\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}^T$ 항은 직전 시점의 충격이 공분산 구조에 어떻게 반영되는지를 나타내며, 시장 충격의 동적 영향을 모델에 반영한다.

이러한 구조는 DCC(Dynamic Conditional Correlation) 모형에서 제안된 방식으로, 조건부 상관 행렬 R_t 는 (식9)와 같이 정규화 과정을 통해 얻어진다.

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (\text{식9})$$

여기서 $\text{diag}(Q_t)$ 는 Q_t 의 대각 성분만을 추출한 대각 행렬로, 이를 이용하여 각 자산의 분산 크기를 제거하고 상관 구조만을 분리한다. 즉, R_t 는 시점 t 에서의 동적 상관관계를 효과적으로 포착할 수 있게 한다.

본 연구에서는 DCC-GARCH 모형에 롤링 추정을 적용하여 공분산 행렬의 시간적 변화를 반영하였다. 전체 수익률 시계열을 252일 원도우로 나누고 25일 간격으로 모형을 재적합하여 동적 공분산 행렬을 예측 하였으며, 결과는 포트폴리오 최적화와 리스크 측정에 활용되었다. 또한 금융 시계열의 두꺼운 꼬리 특성을 고려해 조건부 분포를 Student-t로 가정함으로써 극단적 변동 가능성을 현실적으로 반영하였다.

2.5 포트폴리오 최적화 방법론

앞서 추정된 기대수익률과 공분산 행렬을 바탕으로, 시점별 포트폴리오를 구성하기 위해 샤프 비율최대화를 목표로 한 최적화 문제를 설정하였다. 샤프 비율은 단위 위험 당 초과수익률을 나타내는 지표로, 포트폴리오의 기대수익률에 표준편차를 나누어서 계산한다. 투자 전략의 수익성과 안정성을 통합적으로 반영하는 성능 척도다. 샤프 비율은 (식10)과 같이 정의된다.

$$\text{Sharpe}(w) = \frac{w^\top \hat{\mu} - r_f}{\sqrt{w^\top \Sigma w}} \quad (\text{식10})$$

여기서 w 는 자산별 투자 비중이며, r_f 는 무위험 수익률이다. 무위험수익률은 미국 10년물 국채수익률을 기준으로 시점별 동일한 값으로 적용하였다. 샤프비율은 비선형 분수형 목적함수이므로 해석적으로 최적해를 도출하기 어려우며, 이에 따라 수치적 최적화 방식을 채택하였다. scipy 라이브러리를 이용하여 (식11)의 목적함수를 최소화하는 방식으로 최적화를 수행하였다.

$$\min_w \left(-\frac{w_t^\top \hat{\mu}_{i,t}^{JS} - r_{f,t}}{\sqrt{w_t^\top \Sigma_t w_t}} + \lambda \cdot \|w_t\|_2^2 \right) \quad (\text{식11})$$

여기서 첫 번째 항은 샤프비율의 부호를 반전시킨 것으로 최대화를 위한 변환이며, 두 번째 항은 L2 패널티로서 수치적 안정성과 해의 분산 억제를 위한 정규화 항이다. λ 는 0.1으로 설정하였다. 또한 현실적으로 레버리지와 공매도에 제약이 존재함을 고려하여 비중의 합은 1로 제한하고 각 비중은 최소 0보다 크도록

제약 조건을 부여하였다.

3. 모델링 및 평가

본 연구는 2007년 5월 22일부터 2025년 7월 23일까지, 약 18년 2개월에 해당하는 일별 주가 데이터를 바탕으로 세 가지 자산배분 전략을 비교하였다. 투자 대상은 미국 상장 ETF로 구성된다.

첫 번째 전략은 Sharpe 전략은 본 연구의 방법론을 적용하여 매 시점마다 사전 계산된 자산별 최적 비중을 설정하고, 해당 비중을 목표 포트폴리오로 사용한다. 초기 시점에는 이 목표 비중으로 포트폴리오를 구성하고, 이후 실현된 자산 비중 중 하나라도 해당 목표 비중에서 $\pm 5\%$ 를 벗어날 경우 즉시 리밸런싱을 수행한다. 다시 말해, 단 한 자산이라도 허용 편차를 초과할 경우 전체 포트폴리오가 재조정되는 구조이다.

두 번째 전략은 균등 비중(Equal Weight) 전략으로, 첫 번째 전략에서 투자하는 자산에 단순히 동일한 비중을 부여한 후 매월 말 정기적으로 동일비중으로 재조정한다. 세 번째 전략은 S&P 500 지수를 추종하는 ETF(SPY)에 전액 투자하는 전략으로, 포트폴리오 내 자산 구성이나 리밸런싱 없이 단일 자산에 장기 투자하는 방식이다.

〈표 1〉 전략별 성과지표

Stat	Sharpe Strategy	Equal Weight	SPY
Total Return	556.78%	423.99%	486.01%
CAGR	10.91%	9.54%	10.22%
Max Drawdown	-49.99%	-51.67%	-55.19%
Calmar Ratio	0.22	0.18	0.19
Daily Sharpe	0.62	0.56	0.59
Daily Sortino	0.98	0.87	0.91
Daily Vol	19.73%	19.60%	20.06%
Daily Skew	-0.06	-0.32	0.01
Daily Kurt	14.63	11.39	14.22
Monthly Sharpe	0.72	0.64	0.7
Monthly Sortino	1.32	1.12	1.18
Monthly Vol	16.11%	16.21%	15.69%
Monthly Skew	-0.17	-0.41	-0.57
Monthly Kurt	2.02	2.04	0.89

〈표1〉은 각 전략의 성과지표에 해당하며 제시된 지표는 각 전략의 수익성, 안정성 및 위험 조정 수익률을 다각도로 평가하기 위한 목적으로 설정되었다. (그림 1)은 각 전략으로 100만큼 투자 했을 시 자산의 시계열 그래프를 보여준다. 본 절에서는 주요 지표의 개념을 간략히 소개하고, 본 연구에서 제안한 Sharpe 전략이 Equal Weight 및 SPY 벤치마크 전략에 비해 어떤 부분에서 우월한 성과를 보였는지를 중심으로 분석하고자 한다.

3.1 수익성 지표 분석

Sharpe 전략은 분석 기간 동안 556.78%를 누적 수익률을 기록하며, 이는 Equal Weight 전략(423.99%) 및 SPY 벤치마크 전략(486.01%)보다 더 높은 성과를 나타냈다. 연환산 수익률(CAGR) 또한 10.91%로, 비교 대상 전략보다 더 높은 수준을 보였다(Equal Weight 9.54%, SPY 10.22%).



(그림 1) 자산가치 시계열그래프

3.2 위험 및 안정성 지표 분석

시장 하락기에서의 손실 폭을 측정하는 최대 낙폭 (Max Drawdown)은 Sharpe 전략이 -49.99% 로 가장 낮게 나타났으며, Equal Weight 전략(-51.67%) 및 SPY전략(-55.19%)보다 안정적인 성과를 보였다. 이에 따라 연환산 수익률을 낙폭으로 나눈 Calmar 비율 또한 0.22로 가장 높아, 수익 대비 리스크 관리 능력에서 우수성을 보였다. 위험 대비 초과 수익률을 평가하는 핵심 지표인 Sharpe 비율은 일간(0.62)과 월간(0.72) 기준으로 모두 세 전략 중 가장 높은 수치를 기록했다. 이는 제안된 전략이 전반적인 수익성과 안정성 간의 균형을 효과적으로 달성했음을 의미한다. 추가적으로 하방 리스크(Downside risk)에 중점을 두는 Sortino 비율 역시 일간(0.98)과 월간(1.32) 기준 모두에서 타 전략의 성과를 웃돌았다. 이처럼 하락 위험 구간에서도 Sharpe 전략은 손실 억제와 수익 방어 측면에서 높은 효율을 입증하였다.

3.3 수익률 분포 및 리스크 분석

Sharpe 전략의 일간 수익률의 빈도로 측정한 연환산 변동성은 19.73% 로 SPY 전략(20.06%)보다 낮고 Equal Weight전략(19.60%)과 유사한 수준으로 나타났다. 이는 높은 수익률을 유지하면서도 불필요한 변동성을 효과적으로 억제했음을 보여준다. 한편, 수익률 분포의 비대칭성을 나타내는 왜도(Skewness)는 -0.06 으로 거의 대칭에 가까운 형태를 보였으며, 침도(Kurtosis)는 14.63으로 SPY(14.22)와 유사한 수준을 나타냈다. 이러한 지표는 극단적인 수익률이 일부 존재하더라도, 전반적인 수익률 분포가 안정적임을 시사한다.

4. 결론

본 연구는 금융 시계열 자료에서 발생하는 기대수익률 추정의 불안정성과 모수의 시변성을 고려한 포트폴리오 최적화 전략을 제안하였다. 상태공간모형을 활용하여 자산별 기대수익률을 시점별로 추정하고, James-Stein 수축 추정을 적용하여 추정 분산을 줄였다. 또한 자산간의 상관성은 DCC-GARCH 모형으로 추정하였다. 금융 데이터는 yfinance를 통해 수집하였으며, 기대수익률 추정은 statsmodels로 구현한 상태공간 모형을 통해 수행하였다. 공분산은 DCC-GARCH 모형 기반 자체 코드를 통해 추정하였

고, 포트폴리오 비중 산출에는 scipy를 사용하였다. 최종적으로 전략의 성과는 bt 라이브러리를 이용해 백테스트하였다.

실증분석 결과, 제안된 전략은 벤치마크 대비 우수한 수익성과 안정성을 보이며 유의미한 성과 개선을 달성했으며, 특히 주요 위험 조정 성과 지표에서 일관된 우위를 나타냈다. 그러나 본 연구에는 몇 가지 한계가 존재한다. 첫째, 분석이 미국 ETF 시장에 국한되어 있어 글로벌 자산군으로의 일반화에 제약이 따른다. 둘째, 거래비용과 세금이 고려되지 않아 실제 운용 성과와 차이가 발생할 수 있다. 셋째, 과거 수익률 정보에만 의존하므로, 금리·배당수익률·거시 변수 등 잠재적 설명변수를 충분히 반영하지 못했다는 한계가 있다.

향후 연구에서는 이러한 한계를 보완하는 방향으로 확장이 요구된다. 구체적으로 글로벌 ETF나 주식·채권 혼합 전략을 대상으로 적용 범위를 확대하고, 거래비용과 세금과 같은 현실적인 제약을 고려하며 금리, 배당수익률, 거시 변수 등 외생 설명변수를 상태공간모형에 통합할 필요가 있다.

참고문헌

- [1] H. Markowitz, "Portfolio selection," *Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.
- [2] R. O. Michaud, "The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal?," *Financial Analysts Journal*, vol. 45, no. 1, pp. 31–42, 1989.
- [3] R. C. Merton, "On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation," *Journal of Financial Economics*, vol. 8, no. 4, pp. 323–361, 1980.
- [4] V. K. Chopra and W. T. Ziemba, "The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice," *Journal of Portfolio Management*, vol. 19, no. 2, pp. 6–11, 1993.
- [5] E. F. Fama and K. R. French, "Business conditions and expected returns on stocks and bonds," *Journal of Financial Economics*, vol. 25, no. 1, pp. 23–49, 1989.
- [6] R. F. Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation," *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982.
- [7] T. Bollerslev, R. F. Engle, and J. M. Wooldridge, "A capital asset pricing model with time-varying covariances," *Journal of Political Economy*, vol. 96, no. 1, pp. 116–131, 1988.
- [8] R. F. Engle, "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models," *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 20, no. 3, pp. 339–350, 2002.
- [9] C. Stein, "Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution," in *Proc. 3rd Berkeley Symp. Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, pp. 197–206, Berkeley, CA: Univ. of California Press, 1956.
- [10] M. E. Bock, "Minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution," *Annals of Statistics*, vol. 3, no. 1, pp. 209–218, 1975.
- [11] B. Efron and C. Morris, "Data analysis using Stein's estimator and its generalizations," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 70, no. 350, pp. 311–319, 1975.