UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Rekapitulacija gradiva

Lekcija 15

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 15

REKAPITULACIJA GRADIVA

Uvod

UVOD

Rekapitulacija gradiva.

U ovoj lekciji ćemo rekapitulirati celokupno gradivo koje pokriva ovaj kurs iz Matematike 2. Cilj ove lekcije je da se student pripremi za polaganje ispita.

Poglavlje 1

Obnavljanje: neodređeni i određeni integral

ZADATAK 1

Metod parcijalne integracije.

Primer. *Primenom parcijalne integracije izračunati sledeće integrale*

a) $\int \arcsin x \, dx$;

b) $\int x \text{ arctg } x \, dx$;

Rešenje.

a) Ako je $u = \arcsin x$, $dv = dx$, tada je $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$, pa je

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

U poslednjem integralu smo koristili smenu $t = 1 - x^2$, tj. $dt = -2x \, dx$.

b) Ako je $u = \text{arctg}\, x$, $dv = x\, dx$, tada je $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x^2/2$, pa je

$$\begin{aligned}\int x \text{ arctg}\, x \, dx &= \tfrac{x^2}{2} \text{arctg}\, x - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{x^2}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \text{arctg}\, x + C.\end{aligned}$$

ZADATAK 2

Integracija racionalnih funkcija.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int \frac{(x^3 - x^2 + x + 1)\,dx}{x^2 - 9}$; *c)* $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 3x + 4)\,dx}{x^3 - 2x^2 + x}$;

Rešenje:

a) Na osnovu

$$\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - 9} = x - 1 + \frac{10x - 8}{x^2 - 9} = x - 1 + \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3},$$

dobija se sistem jednačina

$$A + B = 10, \quad 3A - 3B = -8,$$

čije rešenje je $A = 11/3, \quad B = 19/3$, pa je

$$\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - 9} = x - 1 + \frac{11}{3(x - 3)} + \frac{19}{3(x + 3)}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^3 - x^2 + x + 1)\,dx}{x^2 - 9} &= \int (x - 1)\,dx + \int \frac{11\,dx}{3(x - 3)} + \int \frac{19\,dx}{3(x + 3)} \\
&= \frac{x^2}{2} - x + \frac{11}{3}\ln|x - 3| + \frac{19}{3}\ln|x + 3| + C.
\end{aligned}$$

b) U ovom slučaju za podintegralnu funkciju važi

$$\frac{x^2-3x+4}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2-3x+4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2},$$

odakle se dobija sistem jednačina

$$A+B=1, \quad -2A-B+D=-3, \quad A=4,$$

čije rešenje je $A=4,\ B=-3,\ D=2.$

$$\int \frac{(x^2-3x+4)\,dx}{x^3-2x^2+x} \;=\; 4\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{x-1} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

c) Iz jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} &= \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{D}{2x-1} \\ &= \frac{(Ax+B)(2x-1)+D(x^2+4)}{2x^3-x^2+8x-4} \\ &= \frac{(2A+D)x^2+(-A+2B)x-B+4D}{2x^3-x^2+8x-4}\end{aligned}$$

dobija se sistem jednačina

$$2A+D=1, \quad -A+2B=-1, \quad -B+4D=-21,$$

odakle je $A=3$, $B=1$ i $D=-5$. Prema tome važi

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{5}{2x-1},$$

pa je

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2-x-21)\,dx}{2x^3-x^2+8x-4} &= \int\frac{(3x+1)\,dx}{x^2+4} + \int\frac{5\,dx}{2x-1} \\ &= \frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4} + \int\frac{dx}{x^2+4} + \int\frac{5\,dx}{2x-1} \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2}\ln|2x-1| + C.\end{aligned}$$

ZADATAK 3

Integracija trigonometrijskih funkcija.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \sin^4 2x\,dx$; *b)* $\int \sin^5 x\,dx$; *c)* $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$;

Rešenje:

a) Polazeći od jednakosti $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, dobija se

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 2x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \int \frac{1}{2}(1+\cos 8x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C.
\end{aligned}$$

b) Kako je $\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$. Smenom $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x\,dx &= -\int (1-t^2)^2\,dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt \\
&= -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

c) Smenom $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx &= \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int t^4(1-t^2)\,dt \\
&= -\int (t^4 - t^6)\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.
\end{aligned}$$

ZADATAK 4

Integracija trigonometrijskih funkcija – smena $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

$$a)\ \int \frac{dx}{3-\sin x+\cos x}; \qquad b)\ \int \frac{\sin x\, dx}{4\sin x-3\cos x}.$$

Rešenje:

a)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3-\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t^2-2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2-t+2}\\ &= \int \frac{dt}{(t-1/2)^2+7/4} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t-1/2}{\sqrt{7}/2} + C\\ &= 2\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{7}} + C.\end{aligned}$$

ZADATAK 5

Integracija iracionalnih funkcija.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}; \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}; \qquad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-5}+1};$$

Rešenje:

a) Smenom $t=\sqrt{x+2}$, tj. $t^2=x+2$, $2t\,dt=dx$, dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1} &= \int \frac{2t\,dt}{t-1} = 2t + 2\ln|t-1| + C\\ &= 2\sqrt{x+2} + 2\ln|\sqrt{x+2}-1| + C.\end{aligned}$$

b) Smenom $t=\sqrt{x}$, tj. $t^2=x$, $2t\,dt=dx$, dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1} &= \int \frac{2t^2}{t+1}dt = 2\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t+1}\\ &= 2\int \frac{(t^2-1)dt}{t+1} + 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\int (t-1)dt + 2\int \frac{dt}{t+1}\\ &= t^2-2t+2\ln|t+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.\end{aligned}$$

c) Smenom $t=\sqrt[3]{2x-5}$, tj. $t^3=2x-5$, $3t^2\,dt=2\,dx$, dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-5}+1} &= \frac{3}{2}\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = \frac{3}{2}\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{(\sqrt[3]{2x-5})^2}{2} - \sqrt[3]{2x-5} + \ln|1+\sqrt[3]{2x-5}|\right) + C.\end{aligned}$$

ZADATAK 6

Integracija iracionalnih funkcija – Ojlerove smene

Primer. *Izračunati:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x-9}}$;

Rešenje:

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+9)+6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+6}}$$
$$= \ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2+6}\right| + C. \qquad \text{Smena } t = x+3.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(25-10x+x^2)-34}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2-34}}$$
$$= \ln\left|x-5+\sqrt{(x-5)^2-34}\right| + C.$$

Napomena: Ovi integrali se rešavaju Ojlerovom smenom, ali je dozvoljeno na ispitu koristiti odgovorajajući integral kao tablični (dat je u tablici integrala).

ZADATAK 7 – 1. DEO

Integracija iracionalnih funkcija – Metod Ostrogradskog.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx;$ *b)* $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2}\,dx;$

Rešenje:

a)

$$\int \frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ dobija se

$$4x^2+2x+6 = 2A(x^2+x+1) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$4 = 4A, \quad 2 = 3A + 2B, \quad 6 = 2A + B + 2\lambda,$$

čije je rešenje $A = 1$, $B = -1/2$ i $\lambda = 9/4$. Dakle,

$$\int \frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Poslednji integral se napiše kao

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}},$$

što posle smene $t = x + 1/2$, $dt = dx$, postaje

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right| + C\\ &= \ln\left|(2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.\end{aligned}$$

Na kraju je

$$\int \frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{9}{4}\ln|(2x+1+\sqrt{x^2+x+1}| + C.$$

b)

$$\int \sqrt{x^2+2}\,dx = \int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} = A\sqrt{x^2+2} + (Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{x^2+2}$ sledi

$$x^2+2 = A(x^2+2) + (Ax+B)x + \lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$2A = 1, \quad B = 0, \quad 2A + \lambda = 2,$$

čije rešenje je $A = 1/2$, $B = 0$ i $\lambda = 1$. Dakle,

$$\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx.$$

Poslednji integral je tablični, pa je

$$\int \sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + C.$$

ZADATAK 7 – 2. DEO

Integracija iracionalnih funkcija – Metod Ostrogradskog

c) Smenom $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, dobija se

$$\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt.$$

Sada je

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = \left(A\sqrt{5-t^2-2t} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2-2t}}\right).$$

Nakon diferenciranja poslednje jednakosti po t dobija se

$$\frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}} = A\frac{-2t-2}{2\sqrt{5-t^2-2t}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{5-t^2-2t}}.$$

Posle sređivanja sledi $t+3 = -A(t+1)+\lambda$, odakle je $A=-1$, $\lambda=2$. Dakle,

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = -\sqrt{5-t^2-2t} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2-2t}}.$$

Poslednji integral se rešava tako što se imenilac napiše kao $\sqrt{5-t^2-2t} = \sqrt{6-(t+1)^2}$, pa je

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = -\sqrt{5-t^2-2t} + 2\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{6}}.$$

Konačno je

$$\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}}\,dx = -\sqrt{5-x^4-2x^2} + 2\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{6}} + C.$$

d) Smenom $t = e^x$, $dt = e^x\,dx$, dobija se

$$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^{2x}-e^x+1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,e^x\,dx = \int \frac{t^2-t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Dakle možemo pisati

$$\int \frac{t^2-t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = (At+B)\sqrt{1-t^2} + \lambda\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Posle diferenciranja poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{t^2-t+1}{\sqrt{1-t^2}} = A\sqrt{1-t^2} + (At+B)\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Sređivanjem se dobija $A=-1/2$, $B=1$ i $\lambda = 3/2$, pa je

$$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}e^x+1\right)\sqrt{1-e^{2x}} + \frac{3}{2}\arcsin x + C.$$

ZADATAK 8

Integracija iracionalnih funkcija – Ojlerove smene.

Primer. *Izračunati*

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$$

REŠENJE: Uvodimo Ojlerovu smenu:

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$$

$$1+x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1,\ \ x(1-x) = x(t^2x - 2t),\ \ 1 - x = t^2x - 2t$$

$$x = \frac{1+2t}{t^2+1},\ \ dx = -2 \cdot \frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 = t \cdot \frac{1+2t}{t^2+1} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}$$

$$1 + x = \frac{t^2+2t+2}{t^2+1}$$

$$I = -2\int \frac{t^2+1}{t^2+2t+2} \cdot \frac{t^2+1}{t^2+t-1} \cdot \frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt = -2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2}$$

$$I = -2\arctan(t+1) + C = -2\arctan\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C$$

ZADATAK 9

Integracija iracionalnih funkcija – Binomni diferencijal.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

$$a) \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2}; \qquad b) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}; \qquad c) \int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}.$$

Rešenje:

a) U ovom slučaju je $p=-2$, tj. p je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2=x$, $2t\,dt=dx$:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}\right)+C$$
$$= 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln|\sqrt{x}+1|-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)+C.$$

b) Sada je $m=1$, $n=2/3$ i $p=-1/2$, tj. p je razlomak, ali je broj $\frac{m+1}{n}=\frac{1+1}{2/3}=3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2=1+\sqrt[3]{x^2}$, tj. $x=\sqrt{(t^2-1)^3}$, ili $x^{1/3}=\sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2t\,dt=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$, $dx=3\sqrt{t^2-1}\,t\,dt$, pa je

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int \frac{(t^2-1)^2 t\,dt}{t} = 3\int (t^2-1)^2\,dt$$
$$= \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.$$

c) U ovom slučaju je $m=-6$, $n=2$, $p=-1/2$, pa je $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-5}{2}+\frac{-1}{2}$ ceo broj. Prema tome, može se uvesti smena $t^2=1-x^{-2}$, $t\,dt=\frac{dx}{x^3}$, $x^{-2}=1-t^2$, pa je

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3x^4\sqrt{1-x^{-2}}} = \int (t^2-1)^2\,dt = \frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t+C$$
$$= \frac{(\sqrt{1-x^{-2}})^5}{5} - 2\frac{(\sqrt{1-x^{-2}})^3}{3} + \sqrt{1-x^{-2}}+C.$$

ZADATAK 10

Integracija raznih klasa funkcija.

Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; *b)* $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$; *c)* $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx$;

Rešenje:

a) Smenom $x = 3\sin t$, dobija se $\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$ i $dx = 3\cos t\,dt$, pa je

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\int \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C\\ &= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\sin t\cos t + C = \frac{9}{2}\arcsin(x/3) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.\end{aligned}$$

b) Nakon smene $x = 4\,\mathrm{tg}\,t$, $dx = \frac{4\,dt}{\cos^2 t}$ i $\sqrt{16+x^2} = \frac{4}{\cos t}$, dobija se

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \int \frac{4\frac{dt}{\cos^2 t}}{16\,\mathrm{tg}^2 t\frac{4}{\cos t}} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}.$$

Dalje se koristi smena $u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$ i sledi

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} &= \frac{1}{16}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{16\sin t} + C = -\frac{1}{16\cos t\,\mathrm{tg}\,t} + C\\ &= -\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C.\end{aligned}$$

c) Posle smene $x = \frac{5}{\cos t}$, $dx = \frac{5\sin t\,dt}{\cos^2 t}$, koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \mathrm{tg}\,t$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\mathrm{tg}\,t\cos^2 t\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt\\ &= \int \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

Dalje se uvodi smena $u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$, i dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}\,dt &= \int \frac{u^2}{1-u^2}\,du = -u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C\\ &= -\sin t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C\\ &= -\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}}\right| + C\\ &= -\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-25}}{x-\sqrt{x^2-25}}\right| + C.\end{aligned}$$

ZADATAK 11

Integracija raznih klasa funkcija

Primer. *Izračunati*

$$a)\quad I=\int\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx \quad b)\quad I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

Rešenje:

a) Smena:

$$\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=t \qquad x=\frac{1-t^3}{1+t^3},\quad dx=-\frac{6t^2}{(1+t^3)^2},\quad 1+x=\frac{2}{1+t^3}$$

$$I=\frac{3}{2}\int t^3dt=\frac{3}{8}t^4+C=\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3}+C$$

b)

Smena: $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t,\ \frac{x+1}{x-1}=t^2,\ x=\frac{1+t^2}{t^2-1},\ dx=-\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}$

$$I=\int\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}dx=-4\int\frac{tdt}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(t+1)^3}$$

$$I=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+C$$

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{t}{(t+1)^2}+C,\quad t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

ZADATAK 12

Određena integracija: Metod smene

Primer. *Izračunati:*

a) $I = \int_4^5 x\sqrt{x^2-4x}\,dx$ *b)* $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

Rešenje: $I = \int_4^5 x\sqrt{(x-2)^2-4}\,dx \quad x-2=t,\ dx=dt$

$$I = \int_2^3 (2+t)\sqrt{t^2-4}\,dt = 2\int_2^3 \sqrt{t^2-4}\,dt + \int_2^3 t\sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2-4} - 2\ln|t+\sqrt{t^2-4}|\right)\Big|_2^3 + \frac{1}{3}(t^2-4)^{3/2}\Big|_2^3$$

$$= \frac{14}{3}\sqrt{5} - 4\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Napomena. Oba od ovih integrala rešiti samostalno.

b) Smena: $\cos x = t$

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)\cos^3 x} = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{(1-t^2)t^3}$$

$$\frac{1}{(1-t^2)t^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}$$ primenjen je metod neodređenih koeficijenata - uraditi postupno za vežbu.

$$I = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1+t} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t^3}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t^2-1) + \ln t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\ln 3 + 1$$

ZADATAK 13

Određena integracija: Metod parcijalne integracije

Primer. *Izračunati sledeće određene integrale:*

a) $I = \int_0^{1/2} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ b) $I = \int_0^1 \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx$

a) $u = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $dv = xdx$ $du = \frac{2dx}{1-x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_1^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \frac{1}{8} \ln 3 - \int_0^{1/2} \frac{x^2-1+1}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \ln 3 + x \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3$$

b) $u = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $v = \frac{-1}{2(1+x^2)}$

$$I = -\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2)^{-3/2} dx = -\frac{1}{4} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2} J$$

За J: $x = tant$, $t \in [0, \pi/4]$

$$J = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{-3/2} \cos^{-2} t dt = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4} \ln(1+\sqrt{2})$$

ZADATAK 14

Primena određene integracije na određivanje površine ravnog lika

Primer. *Odrediti površinu ograničenu sa krivom $y = x^3$ i pravama $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$.*

REŠENJE:

Presek pravih $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ je tačka $A(-4, 2)$, a presek krive $y = x^3$ sa pravom $2y + x = 0$ je tačka $O(0, 0)$ (koordinatni početak), dok je presek krive $y = x^3$ sa pravom $y = 6 + x$ tačka $B(2, 8)$. Svaka od ovih presečnih tačaka dobija se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina:

tačka A: $y = 6 + x$, $2y + x = 0$;
tačka O: $y = x^3$, $2y + x = 0$; tačka B: $y = 6 + x$, $y = x^3$.

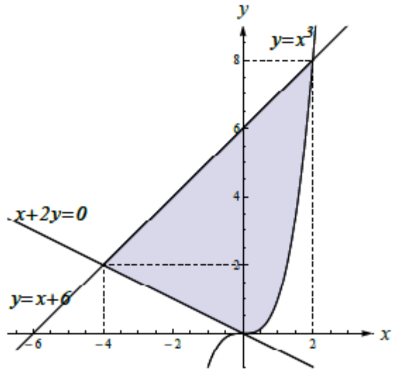
Tražena površina se dobija kao zbir $P = P_1 + P_2$, gde je

$$P_1 = \int_{-4}^0 \left(6 + x - (-\frac{x}{2})\right) dx = \int_{-4}^0 \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Big|_{-4}^0$$

$$= 24 - 12 = 12,$$

$$P_2 = \int_0^2 (6 + x - x^3)\, dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$
$$= 12 + 2 - 4 = 10.$$

Prema tome je $P = P_1 + P_2 = 12 + 10 = 22.$



ZADATAK 15

Primena određene integracije na određivanje dužine luka krive.

Primer. *Odrediti dužinu luka krive* $f(x) = \ln x$ *od tačke* $A(1,0)$ *do tačke* $B\left(\sqrt{3}, \frac{\ln 3}{2}\right)$.

REŠENJE:

Kako je $f'(x) = 1/x$, to je $\ell = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx.$ Smenom $x = \tan t$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$, pri čemu je $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$, a nove granice integracije postaju $\pi/4$ i $\pi/3$. Tako dobijamo

$$\ell = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}\, dt$$
$$= \left(\frac{1}{\cos t} + \ln|\tan(t/2)|\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\tan\frac{\pi}{8}.$$

ZADATAK 16

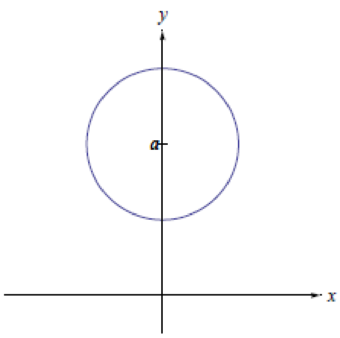
Primena određene integracije na određivanje zapremine rotacionog tela.

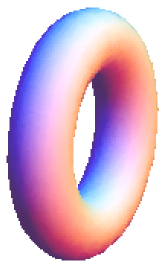
Primer. *Odrediti zapreminu torusa koji se dobija obrtanjem kružnice* $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, *oko* $x-$*ose, ako je* $0 < r < a$.

REŠENJE:

Označimo sa f_1 i f_2 redom funkcije date sa $f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ i $f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \leq r$. Tada je tražena zapremina $V = V_1 - V_2$, gde je $V_1 = \pi \int_{-r}^{r} f_1^2(x)\,dx$ i $V_2 = \pi \int_{-r}^{r} f_2^2(x)\,dx$. Prema tome je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \left((a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left(a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 \right) dx \\ &= 4a\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = 8a\pi \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx. \end{aligned}$$





Poglavlje 2

Obnavljanje: funkcija dve promenljive

ZADATAK 1

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije dve promemnljive.

Odredite lokalne ekstreme funkcije:

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

(b) $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$

(c) $f(x,y) = xy - x^3 - y^3$

(d) $f(x,y) = x^2 + y - e^y$

(e) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

(f) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(g) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 2x^2 - y^2$

Rešenje:

(a)

$T_1(2,6)$	minimum

(b)

$T_1(-1,1)$	maksimum
$T_2(0,0)$	nema ekstrema

(c)

$T_1(0,0)$	nema ekstrema
$T_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	maksimum

(d)

$T_1(0,0)$	nema ekstrema

(e)

$T_1(4,4)$	maksimum

(f)

$T_1(-2,-1)$	maksimum
$T_2(2,1)$	minimum
$T_3(-1,-2)$	nema ekstrema
$T_4(1,2)$	nema ekstrema

(e)

$T_1(-1,-\frac{1}{2})$	minimum
$T_2(-1,0)$	nema ekstrema
$T_3(-1,\frac{1}{2})$	minimum
$T_4(0,-\frac{1}{2})$	nema ekstrema
$T_5(0,0)$	maksimum
$T_6(0,\frac{1}{2})$	nema ekstrema
$T_7(1,-\frac{1}{2})$	minimum
$T_8(1,0)$	nema ekstrema
$T_9(1,\frac{1}{2})$	minimum

ZADATAK 2

Uslovni ekstremi.

a) Odredi ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ uz uslov $x^2 + 2y^2 = 1$.

Rešenje: Imamo stacionarne tačke $T_1\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $T_2\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $T_3(-1, 0)$ i $T_4(1, 0)$. U tačkama T_1 i T_2 funkcija ima minimum, a u tačkama T_3 i T_4 maksimum.

b) *Odredite ekstreme funkcije* $z = x + 2y$ *uz uslov* $x^2 + y^2 = 5$.

Rešenje. Stacionarne tačke: $P_1 = (1, 2)$ za $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ i $P_2(-1, -2)$ za $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Tačka P_1 je tačka lokalnog maksimuma i važi $z_{max} = 5$.
Tačka P_2 je tačka lokalnog minimuma i važi $z_{min} = -5$.

c) *Odredite lokalne ekstreme funkcije* $z = x^2 + y^2$ *uz uslov* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Rešenje. Tačka (18/13, 12/13) za $\lambda = -\frac{72}{13}$ je lokalni minimum $z_{min} = 36/13$.

d) *Odredite ekstreme funkcije* $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ *uz uslov* $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$.

Rešenje. $z_{min} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $z_{max}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Poglavlje 3

Obnavljanje: diferencijalne jednačine

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Određivanje opšteg i partikularnog rešenja diferencijalne jednačine.

1. Odrediti opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina:

   (a) $\sin x \cdot y' = y$
   (b) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$;
   (c) $3e^x \sin y dx = (e^x - 1)\cos y dy$;
   (d) $(x+1)y' = y - 1$;
   (e) $y' = (8x + 2y + 1)^2$;
   (f) $\frac{xy' - y}{x} = \sqrt{1 + (y')^2}$
   (g) $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$;
   (h) $2x^2 dy = (x^2 + y^2)dx$;
   (i) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$;
   (j) $xy' - 2y = 2x^4$;
   (k) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
   (l) $y' + 2y = \frac{3x^2 + 2x}{e^{2x}}$
   (m) $y' + y = \frac{x}{y}$;
   (n) $(2x + ye^x)dx + (\ln y + e^x)dy = 0$;
   (o) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$.

2. Odrediti partikularna rešenja diferencijalnih jednačina:

   (a) $ydx + \operatorname{ctg} x dy = 0$, uz početni uslov $y(\frac{\pi}{3}) = -1$;
   (b) $(xy' - y)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$, uz početni uslov $y(-1) = 0$;
   (c) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, uz početni uslov $y(2) = 0$.

1. Rešenja su:

   (a) $y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
   (b) $2\sqrt{y} + \ln y = 2\sqrt{x} + C$
   (c) $(e^x - 1)^3 = C \sin y$
   (d) $y = 1 + C(x+1)$
   (e) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(4x + y + \frac{1}{2}) = 2x + C$
   (f) $x^2 + y^2 = Cx$
   (g) $y = xe^{Cx}$
   (h) $\frac{2x}{x-y} = \ln |Cx|$
   (i) $\sin \frac{y}{x} = -\ln |x| + C$
   (j) $y = (x^2 + C)x^2$
   (k) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$
   (l) $y = \left(x^3 + x^2 + C\right) e^{-2x}$
   (m) $y^2 = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$
   (n) $x^2 + ye^x + y \ln y - y + C = 0$
   (o) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 + C = 0.$

2. Rešenja su:

   (a) $y = -2 \cos x$
   (b) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$
   (c) $y = -\ln |1 - x| \, e^{-x}$

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Homogene i nehomogene. Metod neodređenih koeficijenata za (a) do (h), Metod varijacije konstanti pod (i).

Odrediti opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

(a) $y'' + 3y' = 3$
(b) $y'' - 6y' + 9y = x^2$
(c) $y'' - y' - 6y = 3e^{2x}$
(d) $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$
(e) $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$
(f) $y'' - y = (x^2 - 3)e^{2x}$
(g) $y'' - 5y + 6y = e^{2x} + 4e^x$
(h) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cos x$
(i) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Rešenje:

(a) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x$
(b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{2}{27}$
(c) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{3}{4}e^{2x}$
(d) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}xe^{-2x}$
(e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2 - 2x\right)$
(f) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{1}{27}\right)$
(g) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{2x} + 2e^x$
(h) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} - (\cos x)\, e^{3x}$
(i) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln(\sin x)$

Poglavlje 4

Obnavljanje: brojni, funkcionalni i Furijeovi redovi

ZADATAK 1

Brojni red – određivanje sume reda.

Ispitati konvergenciju i naći zbir redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

(1°) $$a_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)},$$

(2°) $$a_k = \sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}.$$

Rešenje. (1°) Rastavljanjem a_k na delimične razlomke i sumiranjem sledi:

$$a_k = \frac{1}{3}\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{3k+1},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right),$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

(2°) Sumiranjem sledi:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}.$$

ZADATAK 2

Poredbeni kriterijum.

Ispitati konvergenciju redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

$$a_k = \frac{1}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k$$

Rešenje. Zadatak se rešava primenom poredbenog kriterijuma.

Neka je $b_k = \left(\frac{2}{5}\right)^k$. Za $k \geq 1$ je $\frac{1}{k} \leq 1$, pa je $a_k \leq \left(\frac{2}{5}\right)^k = b_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$ konvergentan geometrijski red, to je i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan.

Za vežbu:

Ispitati konvergenciju redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

$$(1^\circ)\quad a_k = \frac{1}{\sqrt{(2k-1)(2k+2)}}\,, \qquad (2^\circ)\quad a_k = \frac{5k+1}{\sqrt{k^6+3k^2+2}}\,,$$

ZADATAK 3

Košijev koreni kriterijum.

Ispitati konvergenciju redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

$$(1^\circ)\qquad a_k = \left(\frac{3k}{k+5}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{k^2}\,, \qquad (2^\circ)\qquad a_k = k^2\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k\,.$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom Cauchyevog kriterijuma.

(1°) Za opšti član a_n nalazimo

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = 3e^{-1} > 1\,,$$

pa red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

(2°) . pokazuje se da je $\lim_{x\to\infty} x^{2/x} = 1$.

Prema prethodnom je

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}\,\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \frac{1}{2} < 1$$

i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

ZADATAK 4

Dalamberov kriterijum.

Ispitati konvergenciju redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

$$(1^\circ) \qquad a_k = \frac{3^k k!}{k^k}\ , \qquad\qquad (2^\circ) \qquad a_k = \frac{(2k+1)!!}{3^k (k!)^2}\ .$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom D'Alambertovog kriterijuma.

(1°) Za opšti član a_n nalazimo

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3e^{-1} > 1\ ,$$

pa red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

(2°) Kako je

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} \frac{3^n (n!)^2}{(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3(n+1)^2} = 0 < 1\ ,$$

red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

ZADATAK 5

Košijev integralni kriterijum.

Ispitati konvergenciju redova $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$, gde je:

$$(1^\circ) \qquad a_k = k^2 e^{-\sqrt{k}}\ , \qquad\qquad (2^\circ) \qquad a_k = \frac{1}{k(\ln k)^{\ p}}\ .$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom Cauchyevog integralnog kriterijuma.

(1°) Posmatramo funkciju $f(x) = x^2 e^{-\sqrt{x}}$. Ova funkcija je pozitivna i neprekidna za svako $x \geq 0$. Za $x \geq 16$ je $f'(x) = \frac{1}{2}(4-\sqrt{x})xe^{-\sqrt{x}} \leq 0$, pa je $f(x)$ i nerastuća. Uzimamo $x_0 = 16$, $m = [x_0] = 16$ i

$$a_k = f(k) = k^2 e^{-\sqrt{k}} \quad (k \geq 16)\ .$$

Smenom $t = \sqrt{x}$ izračunavamo nesvojstveni integral

$$\int_{16}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{16}^{+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_4^{+\infty} t^5 e^{-t}\,dt$$ završiti za vežbu

(2°) Za $x \geq 2$, funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\,p}}$ je neprekidna i pozitivna. Takođe, $f(x)$ je nerastuća za $x \geq e^{-p}$ jer je $f'(x) = -\dfrac{p+\ln x}{x^2(\ln x)^{\,p+1}} \leq 0$. Uzimajući $x_0 = \max\{2, e^{-p}\} \geq 2$, $m = [x_0] \geq 2$ i $a_k = f(k)$, smenom $t = \ln x$ za $p \neq 1$ nalazimo

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\,p}} = \int_{\ln m}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\,p}} = \frac{t^{1-p}}{1-p}\Big|_{\ln m}^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to+\infty} t^{1-p} - \frac{(\ln m)^{\,1-p}}{1-p}\,.$$

Kako je

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1-p} = \begin{cases} +\infty\,, & p<1\,,\\ 0\,, & p>1\,,\end{cases}$$

to je

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty\,, & p<1\,,\\ -\dfrac{1}{1-p}(\ln m)^{\,1-p}\,, & p>1\,.\end{cases}$$

Za $p = 1$ je

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln m}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t\,\Big|_{\ln m}^{+\infty} = +\infty\,.$$

Dakle, red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$.

ZADATAK 6

Apsolutna i uslovna konvergencija.

Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju alternativnih redova $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, gde je:

(1°) $\quad a_k = \dfrac{(-1)^k}{(k!)^3}\,,\qquad$ (2°) $\quad a_k = \dfrac{(-2)^k}{(k^2)!}\,,$

(3°) $\quad a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)}\,,\qquad$ (4°) $\quad a_k = (-1)^{k-1}\tan\dfrac{1}{k}\,.$

Rešenje. (1°) Kako je $|a_n| = \dfrac{1}{(n!)^3}$ i

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^3}{[(n+1)!]^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0 < 1\,,$$

red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira prema D'Alambertovom kriterijumu. Tada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira.

(2°) Kako je

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2)!}{[(n+1)^2]!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n^2+2n+1)(n^2+2n)\cdots(n^2+1)} = 0 < 1\,,$$

red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, pa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira.

(3°) Za $x \geq 1$, funkcija $f(x) = x - \ln x$ raste i važi $f(1) = 1 > 0$. Zato je $f(x) > 0$, tj. $x > \ln x$, za svako $x \geq 1$.

Kako je $|a_k| = \dfrac{1}{\ln(k+1)}$, prema prethodnom sledi $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{\ln(k+1)}$. Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ divergira. Prema poređbenom kriterijumu tada divergira i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

S druge strane, niz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ je opadajući i važi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, pa red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira prema Leibnizovom kriterijumu.

Dakle, red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ uslovno konvergira.

(4°) Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$, to je $\tan x \sim x$ kad $x \to 0$.

Prema prethodnom je

$$|a_k| = \tan\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k},$$

pa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergira kao i harmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$.

Niz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ opada i važi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, pa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira prema Leibnizovom kriterijumu.

Dakle, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ uslovno konvergira.

ZADATAK 7

Uniformna konvegencija funkcionalnog reda.

Na segmentu $[\alpha, \beta]$ za $0 < \alpha < \beta$ ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, gde je

$$f_k(x) = \frac{x}{\big[1 + (k-1)x\big]\,(1 + kx)} .$$

Rešenje. Rastavljanjem $f_k(x)$ na delimične razlomke i sumiranjem sledi:

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + (k-1)x} - \frac{1}{1 + kx} ,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1 - \frac{1}{1 + nx} ,$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1 , \quad x \in [\alpha, \beta] .$$

Iz

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{n\alpha} ,$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$ sledi $|R_n(x)| < \varepsilon$ kad je $\dfrac{1}{n\alpha} < \varepsilon$, tj. $n > \dfrac{1}{\alpha\varepsilon}$. Zato postoji $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\alpha\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ tako da je $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n \geq N(\varepsilon)$ i svako $x \in [\alpha, \beta]$.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira na svakom segmentu $[\alpha, \beta]$ sa $0 < \alpha < \beta$ ka funkciji $S(x) = 1$.

Ako je $|x| \geq r,\ 0 < r < +\infty$, ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, gde je

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}\,\frac{1}{x}\ .$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom Weierstrassovog kriterijuma.
Za $|x| \geq r$ je

$$|f_k(x)| = \frac{1}{k\sqrt{k}}\,\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}\,\frac{1}{r} = M_k\ .$$

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k = \frac{1}{r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ je konvergentan hiperharmonijski red, pa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira na $(-\infty,-r]\cup[r,+\infty)$ za svako r takvo da je $0 < r < +\infty$.

ZADATAK 8

Potencijalni (stepeni) redovi.

Ispitati konvergenciju potencijalnog reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, gde je:

$$a_k = \frac{1}{k^{\,p}}$$

Rešenje.

Kako je

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{p/n} = e^0 = 1\ ,$$

red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergira za svako $x \in (-1,1)$.

Za $x = 1$ dobijamo hiperharmonijski red koji konvergira za $p > 1$.

Za $x = -1$ dobijamo alternativni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\,p}}$. Ovaj red, prema apsolutno konvergira za $p > 1$, uslovno konvergira za $0 < p \leq 1$ i divergira za $p \leq 0$.

ZADATAK 9

Potencijalni (stepeni) redovi

(2°) Radijus konvergencije je

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)\,2^{n+1}}{((n+1)^2-1)\,2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+2n}=2\,,$$

pa red konvergira za $x\in(-2,2)$.

Za $x=2$ se dobija red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k^2-1)$, a za $x=-2$ red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(k^2-1)$. Oba brojna reda divergiraju. Zato stepeni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ konvergira za svako $x\in(-2,2)$, tj. postoji zbir

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-1}{2^k}\,x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)(k+1)}{2^k}\,x^k\,,\quad x\in(-2,2)\,.$$

Integracijom nalazimo

$$S_1(x)=\int S(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)(k+1)}{2^k}\,\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}\,x^{k+1}=x^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}\,x^{k-2}\,,$$

odakle je

$$S_2(x)=\frac{S_1(x)}{x^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}\,x^{k-2}\,.$$

Ponovnom integracijom sledi

$$\begin{aligned}\int S_2(x)\,dx&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}\,\frac{x^{k-1}}{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{2^{k-1}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}\,,\end{aligned}$$

pa je

$$S_2(x)=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\frac{1}{(2-x)^2}\,.$$

Zato je

$$\begin{aligned}S_1(x)&=x^3S_2(x)=\frac{x^3}{(2-x)^2}\,,\\S(x)&=S_1'(x)=\left(\frac{x^3}{(2-x)^2}\right)'=\frac{x^2(6-x)}{(2-x)^3}\,,\quad x\in(-2,2)\,.\end{aligned}$$

Ispitati konvergenciju i naći zbir potencijalnih redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, gde je:

(1°) $\quad a_k = \dfrac{1}{k\,5^k}$, $\qquad$ (2°) $\quad a_k = \dfrac{k^2-1}{2^k}$.

Rešenje. (1°) Radijus konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,5^{n+1}}{n\,5^n} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 5\ ,$$

pa red konvergira za $x \in (-5,5)$.

Za $x = 5$ se dobija harmonijski red koji divergira. Za $x = -5$ se dobija alternativni red $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ koji konvergira prema Leibnizovom kriterijumu.

Dakle, dati red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergira za svako $x \in [-5,5)$, tj. postoji zbir

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,5^k}\,x^k\ , \quad x \in [-5,5)\ .$$

Dobijamo

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,5^k}\,kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}\,x^{k-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{5^{k-1}} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^{k} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5-x}\ . \end{aligned}$$

Kako je $S(0) = 0$, integracijom na $[0,x]$ za $|x| < 5$ nalazimo

$$\begin{aligned} &\int_0^x S'(t)\,dt = S(t)\Big|_0^x = S(x) - S(0) = S(x)\ , \\ &\int_0^x S'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{5-t} = -\ln|5-t|\Big|_0^x = -\ln|5-x| + \ln 5 = \ln\frac{5}{5-x}\ , \end{aligned}$$

pa je zbirna funkcija

$$S(x) = \ln\frac{5}{5-x}\ , \quad x \in [-5,5)\ .$$

Vrednost $x = -5$ je uključena zbog konvergencije reda i neprekidnosti funkcije $\ln\dfrac{5}{5-x}$ u $x = -5$.

ZADATAK 10

Razvoj funkcije u stepeni red.

Razviti u stepeni red funkcije:

$$(1^\circ) \qquad f(x) = \cos^2 x\ , \qquad\qquad (2^\circ) \qquad f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

i odrediti oblast konvergencije dobijenih redova.

Rešenje. (1°)

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k)!} x^{2k}\ , \quad x \in (-\infty, +\infty)\ .$$

(2°) Rastavljanjem $f(x)$ na delimične razlomke, dobijamo

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}$$
$$= \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{1}{\frac{x}{2} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}\ .$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k, \quad \frac{x}{2} \in (-1, 1)\ ,$$
$$\frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k, \quad \frac{x}{3} \in (-1, 1)\ .$$

Kako iz $\frac{x}{2} \in (-1, 1)$ sledi $x \in (-2, 2)$ i iz $\frac{x}{3} \in (-1, 1)$ sledi $x \in (-3, 3)$ i kako je $(-2, 2) \cap (-3, 3) = (-2, 2)$, to je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right)x^k\ , \quad x \in (-2, 2)\ .$$

ZADATAK 11

Razvoj funkcije u stepeni red

Razviti u stepeni red funkciju

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

i odrediti oblast konvergencije dobijenog reda.

Rešenje. Kako je

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\ ,$$

tada je:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\ , \quad x\in(-1,1]\ ,$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(-x)^k = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k\ , \quad x\in[-1,1)$$

i

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(-1)^{k+1}+1\Big]\frac{1}{k}x^k\ , \quad x\in(-1,1)\ .$$

Za $k=2m$ je $(-1)^{k+1}+1=0$, a za $k=2m-1$ je $(-1)^{k+1}+1=2$, gde je $m\in\mathbb{N}$. Zato je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{2m-1}x^{2m-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}x^{2k-1}\ , \quad x\in(-1,1)\ .$$

ZADATAK 12

Razvoj funkcije u Furijev red.

Naći Fourierov razvoj funkcije

$$f(x) = |x| \ , \quad x \in (-\pi, \pi) \ .$$

Na osnovu dobijenog rezultata naći zbir brojnog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \ .$$

Funkcija $f(x)$ je parna i zadata na intervalu $(-\pi, \pi)$. Fourierovi koeficijenti se nalaze :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \pi \ , \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx \right) = \frac{2}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \quad (n \in \mathbb{N}) \ , \\
b_n &= 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \ .
\end{aligned}$$

Kako je $(-1)^n - 1 = 0$ za $n = 2k$ i $(-1)^n - 1 = -2$ za $n = 2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$, to je:

$$a_{2k} = 0 \ , \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (k \in \mathbb{N}) \ .$$

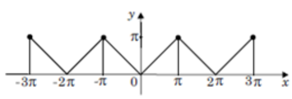
Fourierov red ima oblik:

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \ ,$$

pri čemu je

$$F(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi + \pi}{2} = \pi \ .$$

Grafik funkcije $F(x)$ je



Za $x = 0$ imamo $F(0) = f(0) = 0$ i

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \ ,$$

pa je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Naći Fourierov razvoj funkcije

$$f(x) = x^2 , \quad x \in (1,3) .$$

Na osnovu dobijenog rezultata naći sumu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Funkcija $f(x)$ je zadata na intervalu $(\alpha,\beta) = (1,3)$, pa za određivanje Fourierovih koeficijenata koristimo:

$$a_0 = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3} ,$$

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}x\,dx = \int_1^3 x^2\cos n\pi x\,dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \quad (n\in\mathbb{N}) ,$$

$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\sin\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}x\,dx = \int_1^3 x^2\sin n\pi x\,dx = \frac{8}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n\in\mathbb{N}) .$$

Pri izračunavanju koeficijenata a_n, b_n $(n\in\mathbb{N})$, odgovarajući integrali su rešeni dvostrukom primenom parcijalne integracije.

Tada je:

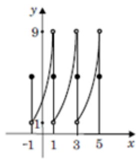
$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)$$

$$= \frac{13}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi x + \frac{8(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin k\pi x\right) ,$$

pri čemu je

$$F(1) = F(3) = \frac{f(1+0)+f(3-0)}{2} = \frac{1+9}{2} = 5 .$$

Grafik funkcije $F(x)$



Za $x = 1$ imamo $F(1) = 5$ i

$$5 = \frac{13}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi + \frac{8(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin k\pi\right) .$$

Zbog $\cos k\pi = (-1)^k$ i $\sin k\pi = 0$ $(k\in\mathbb{N})$, iz poslednje jednakosti sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Poglavlje 5

Obnavljanje: višestruki integrali

ZADATAK 1

Izračunavanje dvojnog integrala.

Primer. *Izračunati:*

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{1+y^2} dxdy, \quad \mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$$

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^3 + y^3)\, dxdy,$$ $\mathcal{D}$ јe облат ограничена правама $y = x/2$, $y = x$ и $x = 4$

Rešenje:

$$I = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$$

$$I = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \arctan y \Big|_0^1 dy$$

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 4, \ x/2 \le y \le x\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (x^3 + y^3)\, dxdy &= \int_0^4 dx \int_{x/2}^{x} (x^3 + y^3) dy \\
&= \int_0^4 \left[x^3 y + \frac{y^4}{4} \right] \Big|_{y=x/2}^{y=x} dx \\
&= \int_0^4 \left[x^3 (x - x/2) + \frac{1}{4}(x^4 - x^4/64) \right] dx \\
&= \frac{47}{64} \int_0^4 x^4 dx \\
&= \frac{752}{5}
\end{aligned}$$

ZADATAK 2

Smena promenljivih u dvojnom integralu.

Primer. *Izračunati:*

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)\,dxdy, \quad \mathcal{D}\,;\ x+y=1,\ x+y=3,\ 2x-y=2,\ 2x-y=-1$$

Rešenje:

$$x+y=u,\ 2x-y=v, \quad x=\frac{u+v}{3},\ y=\frac{2u-v}{3},\ J=-\frac{1}{3}$$

$$u\in[1,3],\ v\in[-1,2]$$

$$I=\int_1^3 du\int_{-1}^2 \frac{u}{3}(2v-u)\cdot\frac{1}{3}dv$$

$$I=-\frac{14}{9}$$

ZADATAK 3

Polarne koordinate.

e

Primer. *Izračunati:*

a) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

b) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \mathcal{D}\ :\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=0,\ y=x$

Rešenje:

a) Uvodimo polarne koordinate:

$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho\in[0,1],\ \varphi\in[0,\pi/2]$

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{a^3}{6}\pi$$

b) Uvodimo polarne koordinate:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi, \quad \rho\in[0,\pi/4],\ \varphi\in[4\cos\varphi,8\cos\varphi]$$

$$I=\iint_{\mathcal{G}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4}=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\frac{d\rho}{\rho^3}$$

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}d\varphi\cdot\frac{1}{\rho^2}\Big|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{64\cos^2\varphi}-\frac{1}{16\cos^2\varphi}\right)d\varphi$$

$$I=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{16}\right)\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-4}{64}\cdot\tan\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{3}{128}$$

ZADATAK 4

Primena dvojnog integrala na izračunavanje zapremine tela.

Izračunati zapreminu tela odredjenog na sledeći način:

a) $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 2y,\ z = x + 2y,\ z - 0$

b) $z = 0,\ z = \dfrac{x^2 + y^2}{2},\ (x-1)^2 + y^2 = 1$

Rešenje:

a) $V = \iint_{\mathcal{D}} z\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \le 2x,\ x^2 + y^2 \le 2y\} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ K_1\ :\ x^2 + y^2 = 2x,\ \rho = 2\cos\varphi,\ K_2\ :\ x^2 + y^2 = 2y,\ \rho = 2\sin\varphi$

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{D}} (x + 2y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^2\,d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \\ &= \cdots \\ &= \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) $x = 1 + \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi]$

$$V = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2 + y^2}{2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{(1 + \rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}{2} \cdot \rho\,d\rho$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{\rho}{2} + \rho^2\cos\varphi + \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{\cos\varphi}{3}\rho^3 + \frac{\rho^4}{8}\right) \Big|_0^1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos\varphi}{3}\right) d\varphi = \left(\frac{3}{8}\varphi + \frac{\sin\varphi}{3}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\pi$$

ZADATAK 5

Primena dvojnog integrala na izračunavanje površine ravnog lika.

Primer. Izračunati površinu ravnog lika određenog sa:

a) $\mathcal{D}: \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ |y| \leq x,$

b) $\mathcal{D}: \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \ y = 0$

Rešenje:

a) $x = \rho \cos\varphi, \ y = \rho \sin\varphi, \quad J = \rho$

$$\mathcal{G}: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi$$

$$P(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy = \iint_{\mathcal{G}} \rho d\varphi d\rho$$

$$P(\mathcal{D}) = 2\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$P(\mathcal{D}) = 4\int_0^{\pi/4} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} + 1$$

b) $P(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy$

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$\mathcal{G}: \ v = u^2, \ v = u, \quad J = -\frac{ab}{2}$$

$$P(\mathcal{D}) = \frac{ab}{2}\int_0^1 du \int_{u^2}^{u} dv = \frac{ab}{2}\int_0^1 (u - u^2) du$$

$$P(\mathcal{D}) = \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{ab}{12}$$

ZADATAK 6

Primena dvojnog integrala na izračunavanje površine dela površi.

Primer. Izračunati površinu dela konusa $x^2+y^2=z^2$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=2ax$.

Rešenje.

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \mathcal{D}\ :\ x^2+y^2\le 2ax,\ \mathcal{D}\ :\ (x-a)^2+y^2\le a^2$$

$$z_x'^2=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y'^2=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
P &= 2\iint_{\mathcal{D}}\sqrt{2}dxdy\\
&= 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho d\rho\\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2a\cos\varphi}d\varphi\\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}4a^2\cos^2\varphi d\varphi\\
&= 4a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\\
&= 4\sqrt{2}a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\\
&= 2\sqrt{2}a^2\pi.
\end{aligned}$$

ZADATAK 7

Trojni integrali.

1. Izračunaj:

(a) $\iiint\limits_V z\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} y \leq 1-x \\ y \leq 1+x \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ z \leq 1 \end{cases}$

(b) $\iiint\limits_V x\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} x \geq y^2 \\ x \leq 1 \\ z \geq 0 \\ z \leq x \end{cases}$

2. Izračunaj:

(a) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} z \geq x^2+y^2 \\ z \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

(b) $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} z^2 \leq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leq 2y \\ z \geq 0 \end{cases}$

(c) $\iiint\limits_V \left(x^2+\frac{y^2}{9}\right) dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} x^2+\frac{y^2}{9}-2x-z+1 \leq 0 \\ z \leq 2-2x \end{cases}$

(d) $\iiint\limits_V z\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} x^2+y^2 \leq z \\ z \leq 2-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Rešenja:

1.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{4}{7}$

2.

(a) $\frac{64\pi}{15}$

(b) π

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{3\pi}{4}$

3. Izračunaj:

(a) $\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} z^2 \geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z \end{cases}$

(b) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ ako je $V \ldots \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$

4. Odredi zapreminu tela V (primenom trostrukog integrala):

(a) $V \ldots \begin{cases} x \geq z^2 \\ y \geq -1 \\ y \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

(b) $V \ldots \begin{cases} x \geq z^2+y^2-2z-4y+1 \\ 2z+x \leq 8 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(c) $V \ldots \begin{cases} z = 1-x^2-y^2 \\ y+z = 1 \end{cases}$

(d) $V \ldots \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \\ z \leq 2y+1 \end{cases}$

(e) $V \ldots \begin{cases} z^2 \geq x^2+y^2 \\ z^2 \leq 3(x^2+y^2) \\ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \end{cases}$

(f) $V \ldots \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 2z \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z \end{cases}$

Rešenja:

3.

(a) 2π

(b) $\frac{15\pi}{8}$

4. Zapremine su:

(a) $\frac{8}{3}$

(b) $\frac{121\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{32}$

(d) π

(e) $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi}{3}$

(f) $\frac{28\pi}{3}$

Poglavlje 6

Obnavljanje: krivolinijski integrali

ZADATAK 1

Krivolinijski integral prve vrste

1. Izračunaj:

   (a) $\int\limits_K xy\,ds$ ako je K deo prave $y=-2x+2$ u prvom kvadrantu.

   (b) $\int\limits_K (x+y)\,ds$ ako je K rub trougla ΔABC zadatog tačkama $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(2,4)$.

   (c) $\int\limits_K xy\,ds$ ako je K luk elipse $16x^2+9y^2=144$ između tačaka $A(0,4)$ i $B(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2})$.

   (d) $\int\limits_K \sqrt[3]{xy}\,ds$ ako je K rub ravanskog lika određenog sa $y \geq x^2$ i $x \geq y^2$.

   (e) $\int\limits_K x\,ds$ ako je K deo kružnice $(x-\sqrt{2})^2+(y+2)^2=8$ u 1. kvadrantu.

2. Izračunaj:

   (a) $\int\limits_K x ds$ ako je K luk prostorne krive: $\begin{cases} x=\frac{3}{2}e^t \\ y=\frac{\sqrt{7}}{2}e^t \\ z=e^{2t} \end{cases}$ između tačaka $O(0,0,0)$ i $A(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, 1)$;

   (b) $\int\limits_K (x^2+y^2+z^2) ds$ ako je K luk zavojnice $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$;

   (c) $\int\limits_K (2x^2+y^2)\,ds$ ako je K kriva koja predstavlja presek površi $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ i $z=2-x$. (**Napomena:** Ovdje je potrebno parametrizirati zadanu krivu. Uočite da se z može izraziti preko varijable x, a da se x i y mogu parametrizirati tako da zadovoljavaju jednačinu cilindra.)

Rešenje:

1.
   (a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
   (b) $\frac{3}{2}(9+2\sqrt{2}+3\sqrt{5})$
   (c) $\frac{1}{7}(125\sqrt{2}-108)$
   (d) $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}$
   (e) $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+\frac{5\pi}{3}$

2.
   (a) $2\sqrt{2}-1$
   (b) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}b^2\pi^2\right)$
   (c) $4\sqrt{2}\pi$

ZADATAK 2

Krivolinijski integral druge vrste.

3. Izračunaj

(a) $\oint xydx + xdy + ydy$ ako je K kontura trougla sa temenima $O(0,0)$, $A(1,1)$ i $B(1,2)$ koja se prolazi u pozitivnom smeru.

(b) $\int\limits_K x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$ ako je K deo prave od tačke $A(1,2,3)$ do tačke $B(-1,2,1)$.

(c) $\int\limits_K xdx + ydy - zdz$ ako je K luk zadat sa $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = \frac{1}{t} \end{cases}$, $t \in [1,2]$.

Rešenja: 3.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{75}{8}$

Poglavlje 7

Obnavljanje: površinski integrali

ZADATAK 1

Površinski integrali.

1. Izračunaj:

   (a) $\iint\limits_S \sqrt{1+z^2}dS$ ako je S deo površi $x^2+y^2=z^2$ određen sa $-2 \le z \le 0$ i $y \ge 0$;

   (b) $\iint\limits_S z^2 dS$ ako je S deo površi $x^2+z^2=1$ određen sa $z \ge 0$ i $-1 \le y \le 1$;

   (c) $\iint\limits_S (z^2-y^2)dS$ ako je S deo površi $\sqrt{x^2+y^2}=z$ određen sa $y \ge x^2-1$ i $y \le 0$;

   (d) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$ ako je S površ koju $x+z=0$(ravan) odseca od sfere $x^2+y^2+z^2=1$.

   (e) $\iint\limits_S (x^2+z^2)dS$ ako je S deo površi $x^2+z^2=2y$ (konus) koji odseca ravan $y=1$.

2. Izračunaj:

   (a) površinu dela površi $y^2+z^2=1$ određenog sa $z \ge 0$ i $0 \le x \le 1$;

   (b) površinu dela površi $x^2+y^2=2$ što ga odsijeca sfera $x^2+y^2+z^2=4$;

   (c) površinu dela površi $x^2+y^2+z^2=4$ određenog sa $x \ge 0, y \le 0$ i $z \le 0$;

3. Izračunaj:

   (a) $\iint\limits_S (\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{4})dxdy$ ako je S donji deo ravni $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ u prvom oktantu.

   (b) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdy$ ako je S unutrašnja strana dela sfere $x^2+y^2+z^2=4$ određenog s $z \ge 0$, $x \ge 0$.

   (c) $\iint\limits_S (x^2+\frac{y^2}{4}+z)dxdy$ ako je S unutrašnja strana konusa $x^2+\frac{y^2}{4}=z^2$ određenog s $z \ge 0$, $z \le 2$.

   (d) $\iint\limits_S (z^2+2xy)\, dxdy$ ako je S unutrašnja strana cilindra $x^2+y^2=1$.

   (e) $\iint\limits_S z\, dxdy$ ako je S unutrašnja strana sfere $x^2+y^2+z^2=1$ (Pažnja: sferu S je potrebno podeliti na dva dela)

   (f) $\iint\limits_S (z^2+y)dxdy$ ako je S spoljašnja strana dela paraboloida $y=x^2+z^2$ odsečenog ravni y = 4. (Pažnja: paraboloid S je potrebno podeliti na dva dela)

4. Izračunaj:

(a) $\iint\limits_S (\frac{x}{2}+y-\frac{z}{4})dxdz$ ako je S deo ravni $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ u prvom oktantu i to ona strana koja se "ne vidi" iz koordinatnog početka.

(b) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y}\,dxdz$ ako je S donja strana ravni $x+z=1$

(c) $\iint\limits_S \left[(y-1)^2+(x-1)^2\right]dxdz$ ako je S deo ravni $y+z=1$ odsečen cilindrom $(x-1)^2+z^2=1$ i to ona strana koja se "vidi" iz koordinatnog početka.

(d) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdz$ ako je S unutrašnja strana dela sfere $x^2+y^2+z^2=4$ određenog s $z\geq 0$, $x\geq 0$.

5. Izračunaj:

(a) $\iint\limits_S (\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}-\frac{3z}{4})dydz$ ako je S deo ravni $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ u prvom oktantu i to ona strana koja se "vidi" iz koordinatnog početka.

(b) $\iint\limits_S xy\,dydz$ ako je S unutrašnja strana dela paraboloida $x^2+y^2=z$ određenog s $z\leq 4$, $x\geq 0$.

(c) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dydz$ ako je S spolajšnja strana dela sfere $x^2+y^2+z^2=4$ određenog s $z\geq 0$, $x\geq 0$.

(d) $\iint\limits_S x\,dydz$ ako je S spoljašnja strana sfera $x^2+y^2+z^2=1$.

6. Izračunaj:

(a) $\iint\limits_S (x^2-z^2)dxdy+(y+2x-2)dxdz+z(2x-2)dydz$ ako je S deo ravni $2x+y=2$ u prvom oktantu određen sa $z\geq 0$, $z\leq 3$ i to ona strana koja se "ne vidi" iz koordinatnog početka.

(b) $\iint\limits_S (x-y^2-z)\,dxdy+(y^2+z-1)\,dxdz+(x^2+y^2)dydz$ ako je S donja strana onog dela cilindra $z=1-y^2$ koji odseca cilindar $(x-1)^2+y^2=1$.

REŠENJA ZADATKA 1

Površinski integrali

Rešenja.

1.
(a) $\frac{\sqrt{2}}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi$
(b) π
(c) $\frac{4\sqrt{2}}{15}$
(d) $\frac{\pi}{2}$
(e) $\frac{4}{15}(1+6\sqrt{3})\pi$

2.
(a) π
(b) 8π
(c) 2π

3.
(a) -2
(b) -8π
(c) $\frac{80}{3}\pi$
(d) 0
(e) $-\frac{4}{3}\pi$
(f) 0

4.
(a) 4
(b) 0
(c) $-\pi$
(d) 0

5.
(a) 8
(b) 0
(c) 8π
(d) $\frac{4}{3}\pi$

6.
(a) -9
(b) 0

Zaključak za lekciju 15

REKAPITULACIJA GRADIVA

Obnavljanje gradiva i priprema za ispit

U ovoj lekciji smo rekapitulirali znanje stečeno u vezi sa

1. Integralima – neodređenim, određenim i nesvojstvenim
2. Funkcijama više promenljive – neprekidnost, lokalne ekstremne vrednosti, uslovni lokalni ekstremi
3. Diferencijalnim jednačinama I i II reda
4. Redovima – brojnim, funkcionalnim i Furijevim redovima
5. Višestrukim integralima – dvojnim i trojnim integralima
6. Krivolinijskim integralima I i II vrste
7. Površinskim integralima I i II vrste