UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Funkcionalni redovi

Lekcija 10

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 10

FUNKCIONALNI REDOVI

Uvod

UVOD

Funkcionalni redovi

U ovoj lekciji proučićemo teoriju redova u kojoj se vrši sumiranje realnih funkcija jedne realne promenljive na zajedničkom domenu, tzv. funkcionalni ili funkcijski redovi, sa aspekta različitih tipova njihove konvergencija, kao i osobine ovih redova koje iz njih proizilaze. Takođe, biće izložena i teorija o stepenim ili potencijalnim redovima, kako se još nazivaju, koji predstavljaju veoma bitnu klasu funkcionalnih redova. Na kraju lekcije biće reči o tome kako je moguće i pod kojim uslovima određenu funkciju razviti u red.

Poglavlje 1

Funkcionalni niz

POJAM

Kada kažemo da je funkcionalni niz definisan na nekom skupu, smatramo da je svaka funkcija tog niza definisana na tom skupu (oblast definisanosti svake funkcije je taj skup).

Uređeni skup realnih funkcija jedne realne promenljive $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koje su definisane na istom domenu $A \subseteq \mathbb{R}$ i koji zapisujemo

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots),$$

naziva se funkcionalni niz.

Funkcionalni niz ćemo slično, kao i brojni niz, označavati na sledeći način $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće $(f_n(x))$.

Funkcija $f_n(x)$ se naziva opšti član funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcionalni niz se najčešće zadaje preko njega.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz $\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je opšti član $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$. Tada, prvih nekoliko članova ovog niza glasi $f_1(x) = \frac{x}{1}$, $f_2(x) = \frac{x}{4}$, $f_3(x) = \frac{x}{9}$, $f_4(x) = \frac{x}{16}$ itd., odakle vidimo da su članovi ovog reda, zapravo, linearne funkcije, čiji grafici sadrže koordinatni početak. Oblast definisanosti svih članova ovoga niza tj. funkcija je $\mathbb{R}$.

S druge strane, ako izaberemo neku konkretnu vrednost za $x \in \mathbb{R}$, na primer $x = 1$, tada posmatrani funkcionalni red postaje brojni red $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Osobine ovih nizova smo obrađivali u okviru Matematike 1, a kratko podsećanje je dato u okviru prethodne lekcije.

Kao i kod brojnih redova, pojam konvergencije je najvažnije pitanje u vezi sa funkcionalnim redovima. O tome govorimo u nastavku.

KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA U TAČKI I NA INTERVALU

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u tački $x = x_0 \in A$, ako konvergira brojni niz $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, tj. ako postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Ako ne postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, tada kažemo da funkcionalni niz divergira u tački $x_0 \in A$. Skup svih tačaka $x_0 \in A$ za koje dobijeni brojni niz konvergira, predstavlja oblast konvergencije posmatranog funkcionalnog niza.

Pretpostavimo da je oblast konvergencije neki interval (a, b) (može biti i neki od interval $[a, b]$ ili $[a, b)$ ili $(a, b]$). Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na intervalu $(a, b) \in A$ ka funkciji $f(x)$, $x \in (a, b)$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, za svako $x \in (a, b)$. Iz prethodnog sledi da za svako $\varepsilon > 0$ i svako fiksirano $x \in (a, b)$, postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, takav da važi da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$.

Za funkcionalni niz kažemo da divergira na intervalu (a, b), ako divergira u svakoj tački tog intervala.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

za $x \in \mathbb{R}$. Tada za svaki realan broj x važi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx + x^2}{n^2} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} + x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Dakle, na čitavom skupu $\mathbb{R}$ posmatrani funkcionalni niz konvergira ka funkciji $f(x) = 0$.

PRIMER 1

Konvergencija i divergencija funkcionalnog reda.

Primer. Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza

$$f_n(x) = \cos^n x, \; n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešenje. Za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ važi da je $0 \le \cos x < 1$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0.$$

Za $x = 0$ imamo da $f_n(0) = \cos^n 0 = 1$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Stoga, funkcionalni niz

$$f_n(x) = \cos^n x,\ n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ konvergira ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Napomena. Iz ovog primera bi trebalo uočiti da funkcija $f(x)$ ne mora biti obavezno neprekidna funkcija, iako je funkcionalni niz sastavljen od neprekidnih funkcija.

Primer. Da li funkcionalni niz

$$f_n(x) = n^2 x^n,\ n \in \mathbb{N},$$

konvergira na intervalu $x \in [0, 1]$?

Rešenje. Za $x = 0$ važi da je $f_n(0) = 0,$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa posmatrani niz konvergira u tački 0.

Za $0 < x < 1$ imamo da je $n^2 x^n = n^2 e^{n \ln x}$. Kako je $\ln x < 0$, za $0 < x < 1$

$$\lim_{n \to \infty} n^2 e^{n \ln x} = 0.$$

(Pokazati za vežbu da ovo važi.) Dakle, posmatrani niz konvergira na intervalu $(0, 1)$ ka funkciji $f(x) = 0$.

Za $x = 1$ imamo da $f_n(1) = n^2$, pa je očigledno početni funkcionalni niz ne konvergira u tački $x = 1$.

Dakle, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira na intervalu $[0, 1]$, jer ne konvergira u svakoj tački tog intervala.

RAVNOMERNA (UNIFORMNA) KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA

Svaki uniformno konvergentan niz je konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

U jednom od prethodnih primera smo videli da “prolaz limesa kroz neprekidnu funkciju” nije moguć u opštem slučaju. Zato nas može interesovati da li se mogu postaviti uslovi koji obezbeđuju neprekidnost funkcije koja je predstavlja graničnu vrednost konvergentnog funkcionalnog niza neprekidnih funkcija. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Definicija. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ravnomerno (ili uniformno) na intervalu (a,b) ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$, ako za svako $\varepsilon>0$, postoji prirodan broj $n_0=n_0(\varepsilon)$, takav da važi

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

za svako $n>n_0$ i svako $x\in(a,b)$.

Uniformna konvergencija se označava sa $f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in(a,b),\ n\to\infty$.

Ravnomernu konvergenciju zadatog funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnije je ispitati primenom sledećeg stava nego prethodno datom definicijom.

Stav. Funkcionalni niz konvergira ravnomerno na intervalu (a,b), ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$ ako i samo važi da je

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$

2° Postoji realni nula niz (c_n) koji ne zavisi od $x\in(a,b)$, takav da je $|f_n(x)-f(x)|<c_n$, za svaki $x\in(a,b)$ i skoro svaki $n\in\mathbb{N}$.

Napomena. Treba istaći da u prethodno datoj definiciji prirodan broj n_0 zavisi jedino od ε (ne i od x.) Stoga uniforma konvergencija povlači (običnu) konvergenciju na intervalu, dok obrnuto, u op[tem slučajune važi.

PRIMER 2

Ovim primerom pokazujemo da konvergentan funkcionalni niz ne mora biti uniformno konvergentan. Primer kojim se obara neko tvrđenje se u matematici naziva kontraprimer.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\ n\in\mathbb{N},$$

za $x\in(0,\infty)$.

Ovaj niz konvergira na intervalu $(0,\infty)$ ka funkciji $f(x)=0$. Naime, $1+n^2x^2\sim n^2x^2$, kada $n\to\infty$ (asimptotski se ponaša isto), pa imamo da je

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x^2n^2}=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

S druge strane, za $\varepsilon < \frac{1}{2}$ imamo da je

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} - 0 > \varepsilon.$$

Stoga, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira ravnomerno (uniformno).

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: uniformna konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Funkcionalni red

POJAM

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, predstavlja ispitivanje njihove konvergencije.

Neka je dat funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, $(A \neq \emptyset)$. Beskonačan zbir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

naziva se funkcionalni red.

Napomena. Treba istaći da se i beskonačan zbir funkcija

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

gde je $p \in \mathbb{N}_0$, takođe naziva funkcionalan red. U mnogim slučajevima prilikom rada sa ovakvim redovima može se desiti da brojač n kreće od nule. Funkcionalni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$, za $p \neq 1$, se razlikuju za konačno mnogo članova.

Veoma važni primeri funkcionalnih redova su

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

koji su od posebnog interesa u matematici i primenama, i oni će biti obrađeni na ovom i narednom predavanju.

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, jeste ispitivanje njihove konvergencije. Prilikom ispitivanja konvergencije funkcionalnih redova može se govoriti o konvergenciji u tački ili na intervalu, apsolutnoj konvergenciji i o uniformnoj konvergenciji.

SUMA FUNKCIONALNOG REDA

Funkcionalni red konvergira na nekom intervalu ako njegov niz parcijalnih suma konvergira na tom intervalu. Ta granična funkcija se naziva suma funkcionalnog reda.

Zbir prvih n članova funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, u oznaci $S_n(x)$, tj.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

gde su $x \in A,\ n \in \mathbb{N}$, predstavlja n-tu parcijalnu sumu funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Na ovaj način se može generisati funkcionalni niz $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definisan za $x \in A$, funkcionalnim nizom $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A$.

Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako niz parcijalnih suma $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na tom intervalu. Dakle, ako posmatramo sledeću graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

za $x \in A$ i ako granica prethodnog limesa postoji u $\mathbb{R}$ (označimo je sa $S(x)$), tada za nju kažemo da je suma funkcijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A_1 \subseteq A$. Tada zapisujemo

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in A_1 \subseteq A.$$

Beskonačan zbir, u oznaci $R_n(x)$, oblika

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

se naziva ostatak funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

PRIMER

Određivanje sume geometrijskog reda.

Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

se naziva geometrijski red, koji je konvergentan za $-1 < x < 1$, za koji je poznato da važi

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Takođe, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

predstavlja geometrijski red, ali je njegov prvi član $f_1(x) = x$, pa je njegova suma jednaka $S(x) = \frac{x}{1-x}$.

Poglavlje 3

Konvergencija funkcionalnog reda u tački i na intervalu

POJAM

Konvergencija funkcionalnog reda u tački se poklapa sa konvergencijom odgovarajućeg brojnog reda. Skup svih tačaka u kojima posmatrani red konvergira se nalazi oblast konvergencije.

Konvergencija (divergencija) funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ u tački $x_0 \in A$ poklapa se sa konvergencijom (divergencijom) brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Skup svih tačaka $A_1 \subseteq A$ za koje posmatrani funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira naziva se oblast konvergencije posmatranog reda. Ta oblast može biti prazan skup tačaka, a može se poklopiti i sa skupom A. Konvergencija na intervalu, zapravo, predstavlja konvergenciju u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Oblast konvergencije u ovom slučaju predstavlja interval konvergencije jer se tačke x_0 u kojima funkcionalni red konvergira nalaze u $\mathbb{R}$.

Koristeći pojam ostatka funkcionalnog reda, možemo definisati konvergenciju na intervalu $A_1 \subseteq A$ na sledeći način: funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0 koji zavisi od x i ε, tj. $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ takav da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ i svako fiksirano $x \in A_1$.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda.

Odrediti oblast konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$.

Rešenje. Funkcije $f_n(x) = n^{\ln x}$, za $n \in \mathbb{N}$, su definisane za $x > 0$ (zbog funkcije $y = \ln x$), pa će oblast konveregencije, svakako, biti interval koji je podskup ovog skupa (ili njemu jednak). Takođe, sve pomenute funkcije su uvek pozitivne za $x > 0$, pa govorimo o konvergenciji reda (ne o apsolutnoj konvergenciji o kojoj će biti reči kasnije), jer je ovo red sa pozitivnim članovima. Opšti član ovog reda se može zapisati u oblik

$$f_n(x) = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Videli smo da brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sa pozitivnim članovima, koji se naziva hiperharmonijski red, konvergira za $p > 1$, a da za $p \leq 1$ divergira. Tada će i polazni red konvergirati za $-\ln x > 1$, tj. za $\ln x < -1$, tj. za $x < e^{-1}$. Kako važi da je $x > 0$, tada je $0 < x < e^{-1}$, tj. $x \in (0, e^{-1})$, što predstavlja oblast konvergencije polaznog reda. Svakako, za $x \geq e^{-1}$ polazni red divergira.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Uniformna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM UNIFORMNE KONVERGENCIJE

Neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda, u opštem slučaju, ne povlači neprekidnost njegove sume. Od posebnog interesa su funkcionalni redovi kod kojih ovo važi.

Može se zapaziti veoma važna činjenica da neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda ne povlači, u opštem slučaju, neprekidnost njegove sume $S(x)$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} S(x) \neq S(x_0).$$

ili što je isto sa tvrdnjom

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Dakle, "prolaz limesa kroz sumu" nije moguć u opštem slučaju. U daljem tekstu interesovaće nas dovoljni uslovi koji obezbeđuju neprekidnost sume konvergentnog reda neprekidnih funkcija, tj. koji garantuju jednakost u prethodnim izrazima. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije kod funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je suma $S(x)$ definisana za $x \in A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Takođe, neka je $B \subseteq A_1$ $(B \neq \emptyset)$. Tada za posmatrani red kažemo da uniformno (ravnomerno) konvergira ka $S(x)$ na B, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da za svako $x \in B$ i svako $n \geq n_0$ važi da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Napomena. Za razliku od obične konvergencije, kod ravnomerno konvergentnih funkcionalnih redova prethodna procena važi nezavisno od $x \in B$.

Ravnomerna konvergencija se može predstaviti i sledećom karakterizacijom.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, i neka je $S(x)$ definisano za $x \in A_1 \subseteq \mathbb{R}$. Tada je, za neko $B \subseteq A$, $(B \neq \emptyset)$, ovaj rad uniformno konvergentan ka $S(x)$, za $x \in B$, ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in B} |S(x) - S_n(x)| \right) = 0$$

Napomena. Prethodna formula je veoma bitan alat za ispitivanje ravnomerne konvergencije u zadacima. U skoro svim zadacima „sup” (supremum) iz prethodne formule biće kod nas „max” (maksimum).

Za funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ koji uniformno konvergira ka $S(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ uvodimo oznaku

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ n \to \infty.$$

Napomena. Uslov ravnomerne konvergencije jači je od uslova obične konvergencije na nekom intervalu. Drugim rečima, ako je neki funkcionalni red ravnomerno konvergentan, tada je on konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

VAJEŠTRASOV KRITERIJUM

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum.

Ispitivanje konvergencije na intervalu se svodi na ispitivanje konvergencije u tačkama tog intervala, tj. na ispitivanje konvergencije brojnih redova. Zato za običnu konvergenciju nisu razvijeni nikakvi posebni kriterijumi.

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum. Najpoznatiji među njima je Vajerštrasov kriterijum i njega navodimo u nastavku.

Stav (Vajerštrasov kriterijum). Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisan za $x \in A$, i neka je dat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da je ispunjeno

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

za svako $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na intervalu A, ako nenegativan brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Napomena. Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 1

Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Ispitati uniformnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Rešenje. Primena Vajerštrasovog kriterijuma u ovom slučaju nije moguća jer važi

$$\frac{(-1)^n}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Naime, brojni red čiji je opšti član $\frac{1}{n}$ je poznati harmonijski red koji je divergentan. Međutim, polazni red konvergira, jer za ostatak tog reda važi

$$\begin{aligned} R_n(x) &= |S(x) - S_n(x)| = \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x^2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2+x^2} + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Odavde zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$R_n(x) < \varepsilon,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ uzimajući da je $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ odakle zaključujemo da n_0 zavisi samo od ε, a ne i od x. Dakle, dati funkcionalni red konvergira uniformno.

OSOBINE UNIFORMNO KONVERGENTNIH REDOVA

Suma neprekidnih funkcija koje uniformno konvergira je neprekidna funkcija.

Zbog velikog praktičnog značaja, navodimo osobine uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka je $g(x)$ ograničena funkcija na A. Tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x) \cdot f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

U sledećem tvrđenju iskazaćemo jednu od najvažnijih osobina uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalan red red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka $f_n(x)$, za $x \in A$, neprekidne funkcije, za svako $n \in \mathbb{N}$, i neka je posmatrani red uniformno konvergentan na intervalu A. Tada je i funkcija

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ x \in A,$$

neprekidna na A, gde $S(x)$ predstavlja sumu tog reda.

Kao što smo već rekli, ako neki funkcionalni red nije uniformno konvergentan, a jeste konvergentan, za $x \in A$, tada granična funkcija $S(x)$ ne mora biti neprekidna na A.

INTEGRACIJA UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

U opštem slučaju funkcionalni red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$, koji je uniformno konvergentan na A. Takođe, neka je $x_0 \in (a, b) \subseteq A$ fiksirano, a $x \in (a, b)$ proizvoljno. Tada važi da je:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t) dt \right),$$

gde su funkcije $f_n(t)$ neprekidne na (a, b) za svako $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Prethodna formula se u literaturi često naziva „integracija funkcionalnog reda član po član”. Pretpostavka da je red uniformno konvergentan je veoma važna, jer se u opštem slučaju red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član. Drugo, iz ove formule vidimo da je funkcija zbira posmatranog funkcionalnog reda integrabilna u smislu određenog integrala. Najzad, funkcionalni red na desnoj strani u ovoj formuli je takođe uniformno konvergentan na skupu A.

PRIMER 2

Integracija uniformno konvergentnog funkcionalnog reda član po član.

Da li se red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2},$$

može integraliti član po član, za svako $x \in \mathbb{R}$?

Rešenje. Potrebno je proveriti da li su uslovi prethodnog stava ispunjeni. Dakle, potrebno je proveriti da li su funkcije $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}$, neprekidne, za svako $x \in \mathbb{R}$, što je očigledno tačno, kao i da li posmatrani red uniformno konvergira. Kako važi da je

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

i kako je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red, tada na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma imamo da je posmatrani red uniformno konvergentan. Dakle, polazni red se može integraliti član po član i tada važi

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$$

jer je

$$\int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{t}{n} \Big|_0^x = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n},$$

što se ostavlja studentima da urade za vežbu.

DIFERENCIRANJE UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

Primena ovog stava na određeni funkcionalni red je dozvoljena samo uz ispunjenja navedenih pretpostavki.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$, i neka on konvergira (obično) za barem jedno $x_0 \in A$. Pretpostavimo još da su funkcije $f_n(x)$ diferencijabilne i $f'_n(x)$ neprekidne, za $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ i da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ uniformno konvergira na A. Tada je

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

za svako $x \in A$.

Napomena. Prethodna formula se u literaturi često naziva „diferenciranje reda član po član” i bez navedenih pretpostavki u stavu je ne smemo koristiti.

Poglavlje 5

Apsolutna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM

Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija.

Osim konvergencije i uniformne konvergencije, kod funkcionalnih redova se uvodi i pojam apsolutne konvergencije.

Definicija. Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ kažemo da je apsolutno konvergentan u tački $x_0 \in A$, ako je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ konvergira.

Stav. Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ je apsolutno konvergentan na intervalu $A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, ako je apsolutno konvergentan u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Prilikom ispitivanja apsolutne konvergencije u tački nekog funkcionalnog reda može se desiti da on ne konvergira apsolutno, ali da konvergira uslovno, jer se radi o konvergenciji brojnog reda.

Istakli smo već da iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, ali da obrnuto ne važi. Međutim, apsolutna i uniformna konvergencija ne mogu se porede na ovaj način.

Napomena. Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija. Ovo sledi iz samog dokaza Vajerštrasovog kriterijuma.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda sa znakopromenljivim članovima.

Odrediti oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{n}.$$

Rešenje. Ovde se vrši određivanje apsolutne konvergencije, jer su članovi reda očigledno znakopromenljivi. Primenićemo Dalamberov kriterijum. Tada imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n (2x)^n}{n}} \right| = |2x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x|.$$

Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, imamo da važi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \begin{cases} \text{za } D > 1, & \text{posmatrani red divergira,} \\ \text{za } 0 \leq D < 1, & \text{posmatrani red konvergira,} \\ \text{za } D = 1, & \text{nemamo odgovor po ovom kriterijumu.} \end{cases}$$

Dakle, ako je $|2x| < 1,$ tj. $|x| < \frac{1}{2}$ posmatrani red konvergira, dok za $|x| > \frac{1}{2}$ divergira. Ostaje jedino još pitanje šta se dešava u slučaju kada je $|2x| = 1,$ tj. kada je $x = \frac{1}{2}$ ili $x = -\frac{1}{2}$ I oni se posebno ispituju.
Za $x = \frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

koji je uslovno konvergentan na osnovu Lajbnivcovog kriterijuma.

Za $x = -\frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

koji je divergentan red (ovo je harmonijski red).

Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Stepeni redovi

POJAM

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni redovi zbog svojih osobina.

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni i trigonometrijski redovi, a među trigonometrijskim redovima najznačajniji su Furijeovi redovi. Stepene i Furijeove redove, kao i njihovu konvergenciju, ćemo posebno razmatrati. Ovde, najpre, govorimo o stepenim redovima.

Potencijalni redovi, kako se drugačije nazivaju stepeni redovi, imaju sve karakteristike iz opšte teorije funkcionalnih redova i još neke dodatne.

Naime, za funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je potencijalni red ako je

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$$

za $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n niz realnih brojeva, a x_0 fiksirana vrednost iz $\mathbb{R}$ i x realna promenljiva.

U našem razmatranju posmatraćemo slučaj $x_0 = 0$, dok se slučaj $x_0 \neq 0$ može svesti na slučaj $x0 = 0$, uvođenjem smene $x - x_0 = t$, gde je t nova realna promenljiva. Kada je $x_0 = 0$ takve stepene redove nazivamo centrirani stepeni redovi.

Zbog važnosti u primenama, posmatraćemo stepene redove kod kojih je prva vrednost za brojač $n = 0$, tj. posmatraćemo potencijalne redove oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in \mathbb{R}$, gde je a_0 dodatni prvi član u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Za red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ važi sve dosad izneto iz opšte teorije o redovima, jedino treba napomenuti da se za njega niz brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naziva nizom njegovih koeficijenata.

KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU STEPENIH REDOVA

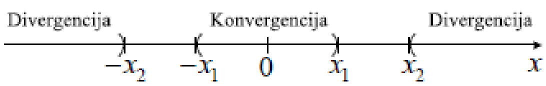
Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije stepenih redova je Abelov kriterijum.

Svaki stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira barem za $x = 0$, jer se svodi na vrednost a_0. Za ostale vrednosti $x \in \mathbb{R}$ posmatrani stepeni red može konvergirati ili ne (u zavisnosti od slučaja do slučaja). Postoje stepeni redovi koji ne konvergiraju ni za jedno $x \neq 0$.

Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije potencijalnih redova je Abelov kriterijum.

Stav. (Abelov kriterijum). Neka je dat stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ako konvergira za $x_1 \in \mathbb{R}$, tada apsolutno konvergira za svako $x \in (-|x_1|, |x_1|)$. Ako divergira za $x_2 \in \mathbb{R}$, tada divergira za svako $x \in (-\infty, |x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

Grafički prikaz prethodnog stava, pod pretpostavkom da je $x_2 > x_1 > 0$, je dat na sledećoj slici.



Slika 6.1 Oblast konvergencije stepenog reda.

Umesto Abelovog stava, u praksi se često koristi njegova posladica.

Stav. Neka je dat stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tada postoji $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tako da dati stepeni red apsolutno konvergira na intervalu $(-R, R)$ i divergira na intervalu $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.
Vrednost R se naziva poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Kada je R jednak $+\infty$, tada posmatrani stepeni red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$. U slučaju da je $R = 0$, posmatrani stepeni red konvergira samo za $x = 0$. Prema prethodnom stavu za dati stepeni red razmatra se konvergencije za sve vrednosti $x \in \mathbb{R}$, osim za $x = R$ i $x = -R$. U tim slučajevima moramo dodatno uraditi sledeće: zameniti vrednost $x = R$ u datom stepenom redu i ispitati konvergenciju nastalog brojnog reda, a zatim isto uraditi i za $x = -R$. U slučaju da dati stepeni red konvergira u nekoj od pomenutih vrednosti, tu vrednost pridružujemo ostalim iz oblasti konvergencije tog stepenog reda.

METODOLOGIJE ZA ODREĐIVANJE POLUPREČNIKA KONVERGENCIJE

Poluprečnik konvergencije stepenog reda se određuje uz pomoć Dalmaberovog i Košijevog metoda.

Stav (Dalamberov metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Tada je $R = \frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Dalamberovog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.

Stav (Košijev metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Tada je $R = \frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Košijevog korenog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.
Napomena. Veličina R se naziva poluprečnik konvergencije posmatranog reda. U slučaju obe metode kada je $l = 0$, uzimamo $R = +\infty$, a kada je $l = +\infty$, uzimamo $R = 0$.

Univerzalan metod za određivanje vrednosti za R je Koši-Ademarov metod i on u sebi kao specijalne slučajeve sadrži prethodna dva stava. Međutim, on nije operativan u primenama (u zadacima) kao Dalamberov i Košijev metod. U ovom slučaju se veličina R određuje na sledeći način

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

gde se koristi limes superior za određivanje veličine R.
Primećujemo da o konvergenciji stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ odlučuju samo koeficijenti tog reda.

PRIMER

Određivanje poluprečnika i oblasti konvergencije stepenog reda.

Odrediti interval konvergenicije za sledeće stepene redove:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \text{ i } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} x^n.$$

Rešenje. Za prvi red ćemo primeniti Dalamberov metod, pri čemu imamo da je:

$$|a_n| = \frac{1}{n+1}, \ |a_{n+1}| = \frac{1}{n+2}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

Pa imamo da je $R = 1$. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1)$. Ostaje da se razjasni šta se dešava za $x = 1$ i $x = -1$.

Za $x = 1$ je dobijamo red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ koji je uslovno konvergentan red, po Lajbnicovom kriterijumu.

S druge strane, za $x = -1$ imamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$koji je divergentan red, kao harmonijski red. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1]$.

Za drugi red ćemo takođe primeniti Dalamberov metod. Tada imamo da je

$$|a_n| = \frac{n}{(n-1)!}, \ |a_{n+1}| = \frac{n+1}{n!}.$$

Sada je:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n-1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

pa je i poluprečnik konvergencije $R = +\infty$. Dakle, interval konvergencije je $(-\infty, +\infty)$.

UNIFORMNA KONVERGENCIJA STEPENIH REDOVA

Stepeni red je na proizvoljnom intervalu koji je podskup intervala konvergencije uniformno konvergentan i tada se može integraliti i diferencirati član po član.

Sada ćemo govoriti o uniformnoj konvergenciji za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gde će R predstavlja poluprečnik (radijus) konvergencije.

Stav. Stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa poluprečnikom konvergencije R uniformno konvergira na segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Sledeća dva stava imaju veliku praktičnu primenu, a posledica su uniformne konvergencije stepenih redova.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada je funkcija $S(x)$ koja predstavlja zbir stepenog reda, tj.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

neprekidna funkcija na svakom segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada ovaj stepeni red na segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$, možemo proizvoljan broj puta integraliti i diferencirati, pri čemu se dobijaju redovi koji imaju poluprečnik konvergencije R.

Napomena. Konvergencija stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i redova koji nastaju njegovom integracijom ili diferenciranjem može da se razlikuje u tačkama $x = \pm R$. Na primer, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ može da bude divergentan u $x = R$, a red koji se dobija integracijom (ili diferenciranjem) konvergentan i obrnuto.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: diferenciranje stepenog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Tejlorovi redovi

TEJLOROVI KOEFICIJENTI

Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije i tada funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u centrirani stepeni red.

U mnogim matematičkim disciplinama i tehničkim naukama često je potrebno neku posmatranu funkciju predstaviti jednostavnijim oblikom (recimo polinomom) koje je operativniji za rad sa njima.

Neka je data funkcija $y = f(x),\ x \in D(f)$. Ako postoji centrirani stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ čiji je poluprečnik konvergencije $R > 0$, tako da je $(-R, R) \subseteq D_f$ i da je

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in (-R, R)$, tada za funkciju f kažemo da je analitička funkcija na $(-R, R)$. Klasu svih takvih funkcija na $(-R, R)$, označavamo sa ?$(-R, R)$.

Napomena. Svaka analitička funkcija po definiciji ima osobinu da se može predstaviti (razviti) nekim stepenim redom na domenu konvergencije tog stepenog reda.

Posmatrajmo još klasu beskonačno diferencijabilnih funkcija na $(-R, R)$, u oznaci $C^{\infty}(-R, R)$, koje imaju izvode funkcije bilo kog reda.

Stav. Neka je data funkcija $f \in$?$(-R, R)$ i neka je $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$. Tada važi da

1. $f \in C^{\infty}(-R, R)$.

2. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Koeficijenti dati prethodnom formulom za posmatranu analitičku funkciju nazivaju se Tejlorovi koeficijenti, i vidimo prema njihovoj konstrukciji da su jedinstveni. Stepeni red koji se kreira preko Tejlorovih koeficijenata naziva se Tejlorov red, i za posmatranu funkciju f on predstavlja jedinstven razvoj. Dakle, u ovom slučaju funkcija f se može razviti u red oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

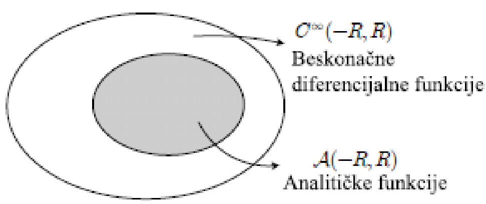
na $(-R, R)$.

Napomena. Činjenice na kojima smo zasnovali razvijanje funkcija date prethodnom formulom nazivamo osnovama Maklorenove teorije. Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije, kada posmatramo centrirani stepeni red i tada za funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u okolini tačke 0 (nula).

KLASA BESKONAČNO DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA I KLASA ANALITIČKIH FUNKCIJA

Važi da je klasa analitičkih funkcija potklasa klase beskonačno diferencijabilnih funkcija.

U vezi sa prethodnom datim stavom potrebno je istaći da ako je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, tada se može dokazati da za funkciju f ne mora da važi $f \in ?(-R, R)$, tj. važi da je $?(-R, R) \subset C^{\infty}(-R, R)$ (videti sliku). Drugim rečima, to znači da Tejlorov red funkcije za koju je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, a ne važi $f \in ?(-R, R)$, ovaj red nije obavezno konvergentan na $(-R, R)$ (osim u tački $x_0 = 0$ u kojoj je sigurno konvergentan). Dakle, u opštem slučaju ne može se svaka ovakva funkcija razviti u odgovarajući Tejlorov red.



Slika 7.1 Šematski prikaz da je klasa analitičkih funkcija podskup klase beskonačno-diferencijalnih funkcija.

KARAKTERIZACIJA ANALITIČNOSTI BESKONAČNO-DIFERENCIJABILNE FUNKCIJE

Važi da je klasa analitičkih funkcija potklasa klase beskonačno diferencijabilnih funkcija

Stav. Neka je data funkcija je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, $R > 0$. Tada je $f(x) \in ?(-R, R)$ ako i samo ako je

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right\} = 0$$

za svako $x \in (-R, R)$.

Napomena. Prethodni stav je veoma slab za operativnu upotrebu u zadacima i zato navedimo sledeća dva kriterijuma koji su njegove posledice – oni su dobri alati za rad u zadacima.

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R, R),\ R > 0$ i neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$, njome kreiran stepeni red po Tejlorovom principu. Ako postoji niz nenegativan realnih brojeva $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i konstanta $B > 0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

za $x \in (-R, R),\ n \in \mathbb{N}$, i da je

$$\frac{M_n B^n}{n!} \to 0,\ n \to \infty.$$

tada je $f \in ?(-R, R)$.
Sledeće tvrđenje je pojednostavljenje prethodnog stava i najčešće se koristi kao kriterijum u zadacima (najvažnije za određivanje konvergencije reda i da li je funkcija analitička).

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R, R),\ R > 0$ i neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$, njome kreiran stepeni red po Tejlorovom principu. Ako postoji broj $M > 0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

za $x \in (-R, R),\ n \in \mathbb{N}$, tada je $f \in ?(-R, R)$.

MAKLORENOV RAZVOJ NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Ovo su razvoji koji se najčešće koriste u primenama.

1. Za funkciju $f(x) = e^x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

2. Za funkciju $f(x) = \sin x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots,$$

3. Za funkciju $f(x) = \cos x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots,$$

4. Za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ poluprečnik konvergencije je $(-1, 1]$ i važi da je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

5. Za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, poluprečnik konvergencije je $(-1, 1)$ i važi da je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Specijalno, za $\alpha = -1$ imamo da je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ako u poslednjem razvoju zamenimo x sa $-x$ on postaje

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Za oba ova razvoja je poluprečnik konvergencije $(-1, 1)$.

TEJLOROV RED

Maklorenov red je samo specijalni slučaj Tejlorove teorije redova.

Opšta Tejlorova teorija redova je potpuno analogna Maklorenovoj teoriji, s tim što se u tom slučaju posmatra stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Ako je R poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada prethodni red konvergira u intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Na analogan način prethodno izloženom, neka funkcija f može se razviti u stepeni red po stepenima $x - x_0$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

za $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Tada za koeficijente ovog razvoja važi $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, pa se posmatrana funkcija f može razviti u red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Izloženo o klasi beskonačno diferencijabilnih i klasi analitičkih funkcija važi i ako se pomatraju Tejlorovi redovi iz prethodne napomene, za koje je $x_0 \neq 0$, samo što se tada posmatraju intervali $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Međutim, ovde ćemo mahom izučavati Maklorenovu teoriju zbog njene primene u nematematičkim problemima, koje ovaj deo matematike modelira.

MAKLORENOV POLINOM

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju.

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

gde je Tejlorov polinom $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa

$$T_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a ostatak $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa:

$$R_n(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

Prethodno znači da mi možemo određenu funkciju f aproksimirati polinomom $T_n(x)$, pri čemu činimo grešku koja je jednaka ostatku $R_n(x)$. Prilikom vršenja aproksimacije određene funkcije Tejlorovim polinom mogu se javiti određeni zahtevi. Na primer, da se funkcija aproksimira polinom tačno određenog stepena i da se za takvu aproksimaciju odredi greška koja je tom prilikom načinjena. U vezi sa ovim od interesa su razni oblici ostatka $R_n(x)$, o kojima student može pogledati 14. predavanje iz MA101. Drugi zahtev može biti da se određena aproksimacija vrši sa unapred zadatom greškom, odnosno postavlja se pitanje do kog stepena Tejlorovog polinoma izvršiti aproksimaciju određene funkcije, a da greška aproksimacije ne bude veća od unapred zadate greške. U ovakvim situacijama često se u zadacima koristi procena $R_n(x) < |a_{n+1}|$.

PRIMER 1. DEO

Primena Maklorenovog razvoja funkcije na određivanje približne vrednosti određenog integrala.

Izračunati vrednost određenog integrala $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, sa greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje. Razvijmo, najpre, funkciju e^{-x^2} u red. Poznato je da važi

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Da bismo odredili približnu vrednost datog određenog integrala, sa greškom manjom od 10^{-3} , potrebno je izvršiti razvijanje dobijenog alternativnog reda do određenog člana, tako da postavljena tačnost bude zadovoljena. Postavlja se pitanje koliko prvih članova ovog reda treba uzeti? Poznato je da za ostatak R_k i prvi zanemareni član a_{k+1} nekog konvergentnog alternativnog reda važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

U našem slučaju je $|a_k| = \dfrac{1}{(2k+1)k!}$, pa je $|a_{k+1}| = \dfrac{1}{(2k+3)(k+1)!}$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Stoga, treba da odredimo najmanje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za koje je zadovoljena nejednakost

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(2k+3)(k+1)!} < 10^{-3}.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje do kog člana treba raviti funkciju u polinom kako bi se postigla željena tačnost.

Na ovaj način smo sigurni da će onaj deo reda koji zanemarujemo tj. ostatak reda biti manji od 10^{-3}, jer važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, pa će samim tim i greška koju činimo biti manja od 10^{-3}. Tada imamo

1° Za $k = 0$ je $|a_1| = \frac{1}{3 \cdot 1!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

2° Za $k = 1$ je $|a_2| = \frac{1}{5 \cdot 2!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

3° Za $k = 2$ je $|a_3| = \frac{1}{7 \cdot 3!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

4° Za $k = 3$ je $|a_4| = \frac{1}{9 \cdot 4!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

5° Za $k = 4$ je $|a_5| = \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0,001$, pa prethodna nejednakost važi.

Dakle, počev od člana a_5 možemo da zanemarimo ostale članove posmatranog reda, pri čemu dobijemo željenu tačnost. Tada je

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747.$$

Poglavlje 8

Vežba

ZADATAK 1

Konvergencija funkcionalnog reda

Neka je dat funkcionalni red

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

čija je oblast definisanosti $x \in \mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju ovog reda na $\mathbb{R}$.

Rešenje. Poznato je da važi

$$-1 \le \sin(nx+3) \le 1$$

za svako $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$\frac{-1}{\sqrt{n-1}} \le \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}} \le \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0$$

Tada na osnovu Stava o tri niza (Leme o dva policajca) važi da je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}} = 0$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Dakle, na čitavom skupu $\mathbb{R}$ posmatrani funkcionalni niz konvergira ka funkciji $f(x) = 0$.

Ispitati konvergenciju funkcionalni niz

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in [0, 1]$.

Rešenje. Za $x = 0$ i za $x = 1$ važi da je $f_n(0) = f_n(1) = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, pa posmatrani niz konvergira u tačkama 0 i 1 ka funkciji $f(x) = 0$.

Za $0 < x < 1$ imamo da je $nx(1-x)^n = nxe^{n\ln(1-x)}$. Kako je $\ln(1-x) < 0$, za $0 < x < 1$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} nxe^{n\ln(1-x)} = x \lim_{n \to \infty} ne^{n\ln(1-x)} = 0.$$

(Pokazati za vežbu da ovo važi.)

Dakle, posmatrani funkcionalni niz konvergira na intervalu $[0, 1]$ ka funkciji $f(x) = 0$.

ZADATAK 2

Vaještrasov kriterijum.

Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Rešenje:

Kako je opšti član datog reda

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Za proizvoljno $x \in R$ i $n \in N$ važi

$$\left|f_n(x)\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergentan, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da posmatrani red uniformno konvergira na celoj realnoj pravoj R.

Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}.$$

Rešenje:

Kako je opšti član datog reda

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}$$

za proizvoljno $x \in R$ i $n \in N$ važi

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1 + 3|\sin nx|}{n^{3/2}} \leq \frac{4}{n^{3/2}}.$$

Kako je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

konvergentan, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da posmatrani red uniformno konvergira na celoj realnoj pravoj $\mathbb{R}$.

ZADATAK 3

Osobine uniformno konvergentnih redova.

Da li se red $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ može diferencirati član po član za svako x?

Rešenje: Ako su članovi konvergentnog reda $\Sigma\, u_n(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) i ako red $\Sigma\, u_n'(x)$ ravnomerno konvergira na (a, b) tada je za svako $x \in (a, b)$

$$\left(\Sigma\, u_n(x)\right)' = \Sigma\, u_n'(x)$$

$$u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \Rightarrow \left|u_n(x)\right| = \left|\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right| = \operatorname{arctg} \left|\frac{x}{n^2}\right| = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{n^2}$$

$\Sigma \frac{|x|}{n^2} = |x|\, \Sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi da i $\Sigma \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ ravnomerno konvergira za svako x.

Dalje, $\Sigma \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ konvergira za svako x.

$$u_n'(x) = \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

$\left|\frac{n^2}{n^4 + x^2}\right| = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \le \frac{1}{n^2}$ za svako x.

$\Sigma \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi da $\Sigma\, u_n'(x)$ ravnomerno konvergira za svako x.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ se može diferencirati član po član.

ZADATAK 4

Osobine uniformno konvergentnih redova

Da li se red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ može integraliti član po član?

Rešenje:

Ako su članovi reda $\Sigma\, u_n(x)$ neprekidne funkcije i ako red ravnomerno konvergira na konačnom segmentu $[a, b]$ tada je

$$\int_a^b \left(\Sigma\, u_n(x)\right) dx = \Sigma \int_a^b u_n(x) dx.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{neprekidna za svako } x$$

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi po Vajerštrasovom kriterijumu da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ ravnomerno konvergira za svako x.

$$\int_0^{x_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x_1} \frac{1}{n^2 + x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}.$$

ZADATAK 5

Interval konvergencije stepenog reda

Odrediti interval konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}.$$

Rešenje:

Imamo da je

$$a_n = \frac{1}{n 2^n} > 0$$

Dalje, računamo količnik

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n 2^n}}{\frac{1}{(n+1) 2^{n+1}}} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Stoga ovaj stepeni red konvergira na intervalu $(-2, 2)$.

Za $x = 2$ dati red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Navedeni red divergira.

Za $x = -2$ dati red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Navedeni red uslovno konvergira.

Dakle, polazni red konvergira za $-2 \leq x < 2$.

ZADATAK 6

Interval konvergencije stepenog reda.

Odrediti interval konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^n}.$$

Rešenje:

Imamo da je

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n^n} > 0$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} \rightarrow 0, \quad \text{kada} \quad n \rightarrow \infty,$$

odakle je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Odavde sledi da dati red konvergira za sve vrednosti, pa je njegov interval konvergencije cela realna osa R.

ZADATAK 7

Tejlorov red.

Razviti u Tejlorov red funkciju

$$f(x) = \ln(3x-2)$$

u tački $x_0 = 2$.

Rešenje:

Smenom $u = x - 2$, dobijamo da je

$f(x) = \ln(3x - 2)$

$f(u) = \ln\left(3(2+u) - 2\right) = \ln(4 + 3u) = \ln 4\left(1 + \frac{3u}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{3u}{4}\right)$.

Kako je $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$, za $-1 < x < 1$

dobijamo da je

$f(u) = \ln 4 + \frac{3u}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3u}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3u}{4}\right)^3 - \cdots = \ln 4 + \frac{3(x-2)}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3(x-2)}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3(x-2)}{4}\right)^3 - \cdots$

Prethodno važi za $\frac{3|x-2|}{4} < 1$ tj. za $-\frac{4}{3} < x - 2 < \frac{4}{3}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 8

Tejlorov red

Razviti funkciju $y = \operatorname{arctg} x$ u stepeni red. U kom intervalu važi ovaj razvoj?

Rešenje. Važi da je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pa imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1).$$

Dobijeni stepeni red se može integraliti član po član na intervalu $[0,x] \subset (-1,1)$, pa je

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k x^{2k} dx, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1),$$

odnosno

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}\big|_0^x}{2k+1}, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1).$$

Kako je $\operatorname{arctg} 0 = 0,$ tada je

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

pri čemu dati razvoj važi za $x \in (-1, 1)$.

ZADATAK 9

Maklorenov red.

Razviti u Maklorenov red funkcije

1. $f(x) = \frac{1}{2+3x}$,
2. $g(x) = \frac{x}{x-1}$.

Rešenje:

1. Kako je

$f(x) = \frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3x}{2}}$,

ako uvedemo smenu $u = \frac{3x}{2}$ i iskoristimo razvoj

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots \qquad (|u| < 1)$,

dobijamo da je

$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3x}{2} + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 - \cdots$

Prethodni razvoj važi za $|x| < \frac{2}{3}$.

2. $g(x) = \frac{x}{x-1} = -x\frac{1}{1-x} = -x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) = -x - x^2 - x^3 - \cdots$

Prethodni razvoj važi za $|x| < 1$.

ZADATAK 10 - 1. DEO

Razvoj funkcije u Tejlorov red.

Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7},$$

razviti po stepenima $x + 2$ i odrediti interval konvergencije. Nakon toga, približno odrediti vrednost integrala:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7},$$

sa greškom manjom od 10^{-2}.

Rešenje. Polaznu funkciju možemo zapisati na sledeći način:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}=\frac{1}{x^2+4x+4+3}=\frac{1}{(x+2)^2+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Tada je na osnovu $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ za $x\in(-1,1)$ imamo da je u našem slučaju

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2 n$$

U našem slučaju je $a=-2$, pa ja interval konvergencije $(-2-R,-2+R)$, gde je R poluprečnik konvergencije koji ćemo odrediti primenom Košijevog metoda:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

pa je $R=\sqrt{3}$. Dakle, posmatrani red konvergira u intervalu $(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

Ostaje još da se proveri šta se dešava u granicama ovog intervala. Za levu i desnu granicu ovog intervala imamo:

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{3}\right)^{2n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

A ovo je divergentan red pa je konačno interval konvergencije $(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

ZADATAK 10 - 2. DEO

Razvoj funkcije u Tejlorov red

Kako za interval integracije važi da je $[-2,-1]\subset(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$ tada dobijeni dobijeni red možemo integraliti član po član, pa imamo

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+4x+7}=\int_{-2}^{-1}\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}\right]dx=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n}}\int_{-2}^{-1}(x+2)^{2n}dx$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}(x+2)^{2n+1}\Big|_{-2}^{-1}.$$

Tada, dobijamo da je

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}.$$

Za poslednji red imamo da je njegov niz njegovih koeficijenata

$$|a_n| = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}.$$

Potrebno je odrediti za koje n će važiti

$$\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)} < 10^{-2}.$$

Proverom zaključujemo da ova nejednakost nije ispunjena za $n = 0$ i $n = 1$, dok je $n = 2$ prva vrednost za koju je

$$|a_n| = \frac{1}{135} < 10^{-2}.$$

Svakako, ovo je ispunjeno i za $n = 3, 4, \ldots,$ ali nas interesuje prva vrednost za n za koju je to ispunjeno.

Kako imamo da je

$$R_1(x) = 10^{-2}$$

to znači da ćemo napraviti grešku manju od $0,01$ ako sumiramo samo prva člana reda prilikom određivanja vrednosti integrala. Tada je:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}.$$

ZADATAK 11 - 1. DEO

Određivanje intervala konvergencije reda.

Dat je red $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}$.

a) Odrediti interval konvergencije;

b) Naći sumu reda u konačnom obliku.

Rešenje. a) Imamo da je $a_{k+1} = (-1)^k(2k+1)$ i $a_k = (-1)^{k-1}(2k-1), k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$R = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{2k-1}{2k+1} = 1.$$

Za $x=-1$ ili $x=1$ polazni red postaje red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)$. On je alternativni brojevni red koji divergira, jer mu opšti član ne teži u nulu. Ukupno, red konvergira za $x\in(-1,1)$.

Napomena. Poluprečnik konvergencije se u početnom stepenom redu odnosi na veličinu x^2, ali kako je $R=1$, interval konvergencije se neće promeniti kada se posmatra za veličinu x .

ZADATAK 11 - 2. DEO

Određivanje funkcije koja se može razviti u posmatrani red.

b) Uvedimo oznaku

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}. \qquad (*)$$

Dati red se može u intervalu konvergencije integraliti član po član. Tada imamo

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)dx &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}dx = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{x^{2k-1}\big|_0^x}{2k-1}dx = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}x^{2k-1} = x-x^3+x^5-x^7+\ldots = \\ &= x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots) = \\ &= \frac{x}{1-x^2},\end{aligned}$$

za $x\in(-1,1)$.

Sada je

$$\left(\int_0^x S(x)dx\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)',$$

tj.

$$S(x)-S(0)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

za $x\in(-1,1)$. Kako iz $(*)$ važi da je $S(0)=0$, tada je

$$S(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

za $x \in (-1, 1)$.

ZADATAK 12 - 1. DEO

Rešenje 1. deo.

Dat je red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k \cdot 3^k}$.

a) Odrediti interval konvergencije;

b) Naći sumu reda u konačnom obliku;

c) Izračunati $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Rešenje. a) Imamo da je $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1) \cdot 3^{k+1}}$ i $a_k = \frac{1}{k \cdot 3^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$R = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{k \cdot 3^k}}{\frac{1}{(k+1) \cdot 3^{k+1}}} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1) \cdot 3 \cdot 3^k}{k \cdot 3^k} = 3.$$

Proverimo, posebno, šta se dešava u tačkama $x = 3$ i $x = -3$. Za $x = 3$, polazni red postaje brojevni red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ koji je divergentan red (harmonijski red). Za $x = -3$, polazni red postaje brojevni red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ koji je uslovno konvergentan red. Ukupno, red konvergira za $x \in [-3, 3)$.

b) Uvedimo oznaku

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k \cdot 3^k}. \qquad (*)$$

Tada, dati red možemo diferencirati član po član u intervalu $x \in [-3, 3)$ i imamo

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(x^k\right)'}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k.$$

Kako važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3 - x},$$

imamo da je

$$S'(x) = \frac{1}{3-x},$$

tj.

$$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{3-x}.$$

ZADATAK 12 - 2. DEO

Rešenje 2. deo.

Konačno je

$$S(x) - S(0) = -\ln(3-x)|_0^x = -\ln(3-x) + \ln 3 = \ln\frac{3}{3-x}.$$

Iz $(*)$ imamo da je $S(0) = 0$, pa je

$$S(x) = \ln\frac{3}{3-x},$$

za $x \in [-3, 3)$.

c) Stavljajući u polazni red i njegovu sumu da je $x = -3$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln\frac{3}{3-(-3)} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Zadatak 2. Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Zadatak 3. Odrediti poluprečnik konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n.$$

Rezultat: $R = 0$

Zadatak 4. Odrediti poluprečnik konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Rezultat: $R = +\infty$

Zadatak 5. Razviti u Tejlorov red funkciju

$$f(x) = \ln(4x - 3)$$

u tački $x_0 = 1$.

Rezultat: $f(x) = 4(x-1) - \frac{(4(x-1))^2}{2} + \frac{(4(x-1))^3}{3} - \cdots \qquad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}.$

Zadatak 6. Razviti u Maklorenov red funkciju

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^3}.$$

Rezultat: $f(x) = x - x^4 + x^7 - \cdots \qquad |x| < 1.$

Zaključak za lekciju 10

FUNKCIONALNI REDOVI

Funkcionalni red, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, uniformna konvergencija, divergencija, stepeni red, radijus konvergencije, razvoj funkcije u red.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa redovima čiji su članovi funkcije koje se definisane na određenom, zajedničkom domenu. Takvi redovi se nazivaju funkcionalni redovi. Pojam konvergencije se kod ovih redova proširuje pojmom uniformne konvergencije, pored već postojećih konvergencija koje smo izučili kod brojnih redova, a to su obična, apsolutna i uslovna konvergencija. Takođe, uveden je i pojam oblast (ili interval) konvergencije.

Uniformna konvergencija je veoma bitna osobina u teoriji funkcionalnih redova, jer na redove koji je poseduju na određenom intervalu konvergencije je moguće primenjivati određene transfomacije, kao što su diferencijaranje ili integraljenje član po član unutar intervala konvergencije, što je bitno u primenama teorije redova, kako u drugim matematičkim disciplinama, tako i u tehničkim naukama. Takođe, izložena je jedna veoma značajna klasa funkcionalnih redova, a to je klasa stepenih redova i u vezi sa njenom konvergencijom uveden je pojam poluprečnik (ili radijus) konvergencije.

Na kraju ove lekcije je izložena metodologija kako je moguće i pod kojim uslovima određenu funkciju razviti u red (tzv. Tejlorov red), a na primeru je pokazana jedna od primena ovakvih razvoja. Naime, moguće je primenom ove teorije približno određivati vrednosti određenih integrala. Ovo je bitno kada je posmatrani integral težak za integraciju ili kada podintegralna funkcija nema primitivnu funkciju, pa je nemoguće primeniti Njutn – Lajbnicovu formulu.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.