UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – I deo

Lekcija 05

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 05

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE – I DEO

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive.

Uočimo ceo racionalan algebarski izraz $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Ako posmatramo jednakostraničan trougao čija je stranica dužine x, tada važi da je $P(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ površina tog trougla. Domen funkcije $P(x)$ je skup pozitivnih realnih brojeva, jer x predstavlja dužinu stranice. Funkcija $P(x)$ je realna funkcija jedne realne promenljive.

Uočimo, sada, ceo racionalan algebarski izraz $x^2 + 2xy$. Ako posmatramo pravilnu četvorostranu piramidu gde je x dužina osnovice te piramide, a y dužina bočne visine (apoteme), tada $P(x, y) = x^2 + 2xy$, predstavlja površinu te piramide. U ovom slučaju, površina $P(x, y)$ je realna funkcija dve realne promenljive za koje važi da je $x > 0$ i $y > 0$.

Iz prethodnog vidimo da se slično realnim funkcijama jedne realne promenljive mogu posmatrati i realne funkcije više realnih promenljivih. Mnoge pojave u prirodnim i tehničkim naukama opisuju se ovakvim funkcijama.

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive, a sve izloženo važi i za realne funkcije sa tri ili više realnih promenljivih.

Poglavlje 1

Pojam funkcije dve promenljive

DEFINICIJA I GRAFIK

Funkcija dve promenljive, isto kao i funkcija jedne promenljive, može biti zadana u eksplicitnom, parametarskom obliku, ili u implicitnom obliku.

Definicija. Realna funkcija dve realne promenljive je bilo koje pravilo ili zakon po kome se svakom uređenom paru (x,y) iz nekog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje tačno jedan broj $z \in B \subseteq \mathbb{R}$.

Napomena. Ubuduće ćemo realnu funkciju dve realne promenljive kraće zvati funkcija dve promenljive.

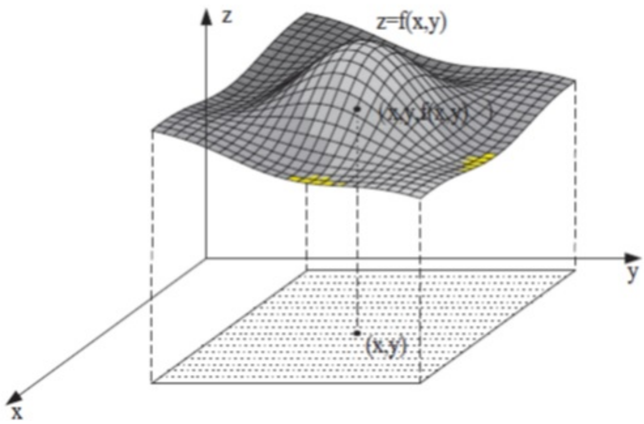
Skup A se naziva domen funkcije ili oblast definisanosti funkcije, a skup B se naziva skup vrednosti ili kodomen funkcije. Vrednosti x i y se nazivaju nezavisno promenljive (ili argumenti), a vrednost z se naziva zavisno promenljiva.

Funkciju dve promenljive u eksplicitnom obliku zapisujemo sa $z = f(x,y)$. Ona može biti data u parametarskom, kao i u implicitnom obliku, o čemu će biti reči kasnije.

Oblast definisanosti funkcije dve promenljive je skup tačaka $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ za koje $z = f(x,y)$ može da se odredi. Ovde važe iste napomene u vezi sa oblašću definisanosti kao i kod funkcije jedne promenljive.

Grafik generisan realnom funkcijom dve realne promenljive (videti sliku) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \{\big(x,y,f(x,y)\big) \mid (x,y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$



Slika 1.1 Grafik realne funkcije dve realne promenljive.

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ.

Napomena. Na način kako je definisana funkcije dve promenljive, analognose može definisati i funkciju tri ili više promenljivih.

PRIMER 1

Određivanje domena funkcije dve promenljive.

Odrediti domene sledećih funkcija:

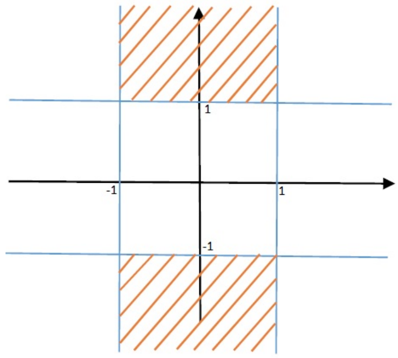
$$a)\ z = x^2 + y^2 + 2x - 1, \qquad b)\ z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1},$$
$$c)\ z = \ln(4 - x^2 - y^2), \qquad d)\ z = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+y^2}}.$$

Rešenje.

a) U ovom slučaju nema nikakvih ograničenja, pa je domen $\mathbb{R}^2$.

b) Zbog korena parnog reda neophodno je da bude $1 - x^2 \geq 0$ i $y^2 - 1 \geq 0$. Tada je domen ove funkcije skup

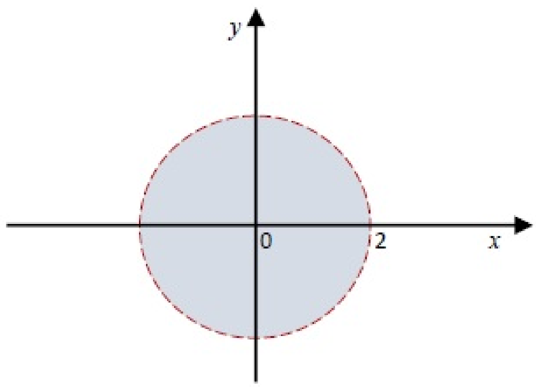
$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1] \wedge y \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\big\}.$$



Slika 1.2 Domen funkcije $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

c) Zbog logaritamske funkcije mora biti $4-x^2-y^2>0,$ tj. $x^2+y^2<4$. Dakle, domen ove funkcije je unutrašnjost kruga $x^2+y^2=4,$ bez kružnice, tj.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\right\}.$$



Slika 1.3 Domen funkcije $z=\ln(4-x^2-y^2)$.

d) Kako imamo koren neparnog reda, zbog njega nema nikakvih ograničenja i jedino ograničenje je $x^2+y^2\neq 0,$ tj.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0 \wedge y\neq 0\right\}.$$

Dakle, domen funkcije su sve tačke iz ravni, bez koordinatnog početka, tj. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

PRIMER 2

Određivanje domena funkcije

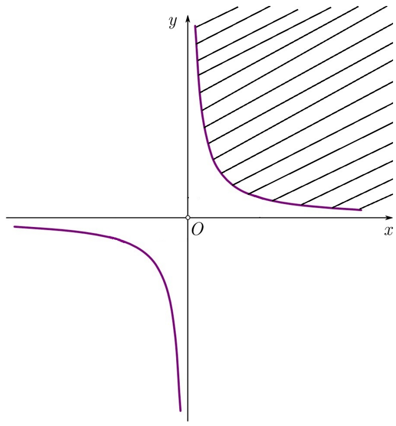
Odrediti domen funkcije

$$z=\sqrt{\ln x+\ln y}.$$

Rešenje. Zbog logaritamske funkcije važi $x > 0$ i $y > 0$, a zbog kvadratnog korena važi da je $\ln x + \ln y \geq 0$, tj. $\ln xy \geq 0$, tj. $xy \geq 1$. Ukupno, imamo da je $y \geq \frac{1}{x}$, za $x > 0$ i $y > 0$. Tada domen ove funkcije predstavlja skup

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x} \wedge x > 0 \wedge y > 0\right\}.$$

Napomenimo da $xy = 1$ predstavlja jednačinu parabole čije su asimptote koordinatne ose u prvom i trećem kvadrantu. Na osnovu postavljenih uslova, domen funkcije predstavlja deo prvog kvadranta iznad parabole $y = \frac{1}{x}$, uključujući i nju kao graničnu liniju (videti sliku).



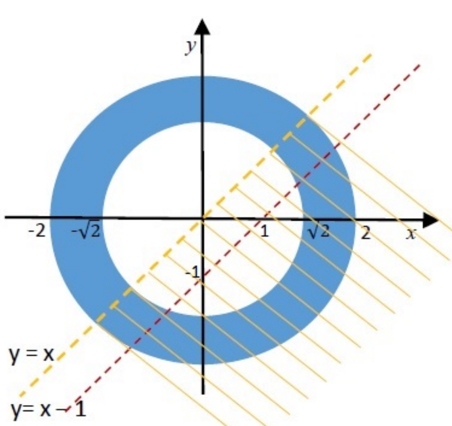
Slika 1.4 Domen funkcije $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$.

Odrediti domen funkcije $z = \dfrac{\arcsin(x^2 + y^2 - 3)}{\ln(x - y)}$.

Rešenje. Domen inverzne trinometrijske funkcije $y = \arcsin x$ je $-1 \leq x \leq 1$, pa je u našem slučaju $-1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1$, odnosno $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Dalje, zbog logaritamske funkcije imamo da je $x - y > 0$, tj. $x > y$. Na kraju, važi da je $\ln(x - y) \neq 0$, tj. $x - y \neq 1$ odnosno $y \neq x - 1$. Tada je domen ove funkcije skup

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > y \wedge y \neq x - 1\right\},$$

koji predstavlja deo ravni unutar kružnog prstena $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (obojen plavom bojom na datoj slici), koji se nalazi ispod prave $y = x$ (ne uključujući i nju), iz koga su izbačene tačke sa prave $y = x - 1$.



Slika 1.5 Domen funkcije $z = \dfrac{\arcsin(x^2+y^2-3)}{\ln(x-y)}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - određivanje domena funkcije dve promenljive

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DVODIMENZIONALNA OBLAST

Uvedeni su pojmovi: otvoren skup, povezan skup, granica, zatvorena oblast, ograničena oblast i neograničena oblast u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Uvešćemo sada pojam dvodimenzionalne oblasti, koji nam je potreban za dalje izlaganje. Da bismo ga definisali, najpre, moramo definisati pojmove otvoreni skup i povezani skup u $\mathbb{R}^2$.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je otvoren ako i samo ako se oko svake njegove tačke može opisati krug koji ceo pripada njemu.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je povezan ako i samo ako je putno povezan.

> **Napomena.** Neki skup je putno povezan ako svake dve njegove različite tačke možemo spojiti putem koji ceo pripada skupu (put je bilo koja neprekidna kriva u $\mathbb{R}^2$).

Definicija. Neki skup nazivamo oblast u $\mathbb{R}^2$ ili dvodimenzionalna oblast ako i samo je taj skup otvoren i povezan u prostoru $\mathbb{R}^2$,

Definicija. Tačka A se naziva granična tačka neke oblasti E ako i samo ako svaka okolina tačke A, pored tačaka iz oblasti E, sadrži i tačke koje ne pripadaju oblasti E.

Skup svih graničnih tačaka neke oblasti E nazivamo granica oblasti i označavamo ∂E.

Ako nekoj otvorenoj oblasti E pridružimo sve njene granične tačke dobijamo skup tačaka koje zovemo zatvorena oblast i nju označavamo sa $\overline{E}$ (tj. važi $\overline{E} = E \cup \partial E$).

Ako za datu oblast možemo naći krug konačnog poluprečnika, koji pokriva tu oblast, onda tu oblast nazivamo ograničena oblast. U suprotnom oblast nazivamo neograničena oblast.

Poglavlje 2

Granična vrednost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Za granične vrednosti funkcije dve ili više promenljivih važe analogni stavovi kao za granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije dve promenljive potrebno je, najpre, definisati pojam okoline tačke $A(x_0, y_0)$.

Definicija. Proizvoljan skup tačaka u ravni se naziva okolina tačke $A(x_0, y_0)$ ako i samo ako sadrži unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, gde je ε pozitivan broj.

Specijalno, unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, zovemo $\varepsilon -$ okolinom tačke A . Označavaćemo je sa $U_\varepsilon(A)$.

Definicija. Broj b se naziva granična vrednost funkcije $z = f(x, y)$, kada $x \to x_0, y \to y_0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ -okolina tačke $A(x_0, y_0)$ takva da za sve tačke iz te okoline, osim možda u tački A, važi nejednakost

$$\left|f(x, y) - b\right| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b, \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b.$$

Analogno se može definisati i granična vrednost funkcije tri i više promenljivih.

Napomena. Ako granična vrednost funkcije dve promenljive postoji u nekoj tački, ona mora davati istu konačnu vrednost, bez obzira kako joj prilazimo. To znači da, ako želimo da dokažemo da granična vrednost u nekoj tački ne postoji, dovoljno je naći dva pravca po kojima prilazimo posmatranoj tački, a da pri tom dobijamo različite vrednosti posmatranih limesa (konačne ili beskonačne).

PRIMER 1

Određivanje granične vrednosti funkcije dve promenljive.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$;

Rešenje. a) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Naime, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $x=0$ (tj. po $y-$ osi), tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3,$$

a ako se približava po pravoj $y=0$ (tj. po $x-$ osi), onda je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.
b) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x^2+16x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{1+16x^2} = 0.$$

Međutim, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po paraboli $y=\sqrt{x}$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

c) Posmatrana granična vrednost postoji, jer je

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6-y^6}{x^3+y^3} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^3-y^3\right) = 0.\end{aligned}$$

PRIMER 2

Određivanje granične vrednosti funkcije primenom polarnih koordinata. Ona je pogodna za primenu kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2.

Napomena. U situacijama kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme $x^2 + y^2$, odnosno njihova uopštenja, takvi limesi se mogu rešavati uvođenjem polarnih koordinata $x = \rho \cos\theta$ i $y = \rho \sin\theta$, ili njihovih uopštenja, gde je $\rho > 0$ i $\theta \in (0, 2\pi]$. Na ovaj način se dobija granična vrednost samo po promenljivoj ρ kojom se prilazi tački u kojoj se ispituje granična vrednost, dok se veličinom θ "pokrivaju" svi pravci kojima se može prići toj tački.

Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}.$$

Rešenje. Shodno prethodno rečenom, ovaj zadatak možemo rešiti na sledeći način

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-\rho} - 1}{\rho} = -\lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-\rho} - 1}{-\rho} = -1,$$

gde imamo da, zbog $x \to 0$ i $y \to 0$, važi $\rho \to 0$, gde je $\theta \in (0, 2\pi]$.

HAJNEOVA DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Hajneova definicija se koristi za utvrdjivanje nepostojanja granične vrednosti funkcije u datoj tački.

Prethodno data definicija granična vrednosti funkcije dve promenljive je poznata kao okolinska ili Košijeva definicija. Pored nje može se uvesti i Hajneova definicija granične vrednosti preko nizova (o ovome smo govorili i prilikom definisanja granične vrednosti funkcije jedne promenljive).

Definicija. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$ ako i samo ako za niz $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, kada $n \to \infty$, važi da $f(x_n, y_n) \to b$, kada $n \to \infty$.

Napomena. Hajneova i Košijeva definicija granične vrednosti su ekvivalentne.

Primer. Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

Rešenje. Uočimo dva niza $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Za ova dva niza važi $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$, kada $n \to +\infty$ i $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$, kada $n \to +\infty$. Tada imamo da je

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

S druge strane, imamo da je

$$f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

ODREĐIVANJE DVE UZASTOPNE GRANIČNE VREDNOSTI

Postojanje istovremene granične vrednosti neke funkcije dve promenljive u nekoj tački, ne mora povući postojanje uzastopnih graničnih vrednosti.

Oznaka $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se koristi prilikom traženje istovremene granične vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tački (a,b), tj. kada istovremeno $x\to a$ i $y\to b$, za $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Istovremena granična vrednost se označava i sa $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f(x,y)$.

S druge strane, $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$ označava izračunavanje dva uzastopna limesa, gde se prvo određuje $\lim_{y\to b} f(x,y)$, dok je promenljiva x fiksirana. Nakon toga se od dobijenog rezultata, računa limes kada $x\to a$. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$.

Veza između ovih limesa je sledeća: ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l_1\in\mathbb{R}$ i ako za svako x postoji granična vrednost $\lim_{y\to b} f(x,y)$, tada postoji uzastopna granična vrednost $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=l_2\in\mathbb{R}$, pri čemu je $l_1=l_2$. Obrnuto ne mora da važi, što ćemo pokazati u narednom zadatku. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$.

Primer. Ako je $f(x,y)=\frac{x-y}{3x+2y}$, ispitati da li postoje sledeće uzastopne granične vrednosti $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ i $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$? Da li postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Rešenje. Važi da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{2y}=-\frac{1}{2}.$$

Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{7x}=-\frac{1}{7},$$

a ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2x}=0.$$

Dakle, granična vrednost u tački $(0,0)$ ne postoji.

Poglavlje 3

Neprekidnost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA NEPREKIDNOSTI

Uveden je pojam neprekidnosti funkcije u tački i pojam neprekidnosti funkcije na zatvorenoj oblasti.

Pojam neprekidnosti funkcija dve ili više promenljivih u tački se zadaje analogno kao i u slučaju funkcije jedne promenljive.

Definicija. Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $A(x_0, y_0)$ ako je definisana u nekoj okolini ove tačke i ako je

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Za funkcije dve ili više promenljivih koje su neprekidne u nekoj tački važe analogni stavovi kao za funkcije jedne promenljive. Kod funkcije jedne promenljive smo neprekidnost posmatrali na intervalu, dok se kod funkcija dve ili više promenljivih posmatra neprekidnost funkcije u odgovarajućoj oblasti na analogan način i sa analognim stavovima.

Poznajući pojam dvodimenzionalne oblasti možemo definisati neprekidnosti funkcije na oblasti u $\mathbb{R}^2$.

Pri definisanju pojma neprekidnosti na zatvorenoj oblasti zahteva se neprekidnost u svakoj tački te oblasti, pri čemu se podrazumeva da je funkcija neprekidna u graničnoj tački A, ako je ispunjena jednakost

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

gde tačke (x, y) teže ka tački $A(x_0, y_0)$ po tačkama iz te oblasti.

Za funkcije neprekidne u ograničenoj zatvorenoj oblasti D važi da su u toj oblasti:

1. ograničene,

2. dostižu u toj oblasti najveću i najmanju vrednost,

3. dostižu u toj oblasti svaku vrednost između najveće i najmanje vrednosti.

PRIMERI

Provera neprekidnosti funkcije u tački.

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] \qquad 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Proverimo šta se dešava u njoj. Za $x=y$ imamo da je

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

dok za $x=-y$ važi

$$f(x,-x)=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$$

ne postoji, pa je funkcija $f(x,y)$ prekidna u tački $(0,0)$.
Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] \qquad 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Kako važi

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}=x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\quad \text{i}\quad 0\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1,$$

imamo da je

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0).$$

Poslednje važi, jer predstavlja proizvod beskonačno male veličine (to je x) i ograničene funkcije (to je $\frac{x^2}{x^2+y^2}$).
Dakle, posmatrana funkcija je neprekidna na celom $\mathbb{R}^2$.

Poglavlje 4

Prvi parcijalni izvodi

TOTALNI PRIRAŠTAJ

Korišćenjem pojmova totalni priraštaj funkcije i parcijalni priraštaj funkcije po odgovarajućoj promenljivoj, mogu se uvesti pojmovi parcijalni izvod funkcije po odgovarajućoj promenljivoj.

Kao što smo rekli, pod pojmom funkcije dve promenljive definisane na $\mathcal{D}$ (što će najčešće biti oznaka za domen) podrazumevamo jednoznačno dodeljivanje

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

gde $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Formulom (1) zadat je pojam navedene funkcije čije vrednosti na $\mathcal{D}$ se generišu pravilom f i ona može biti data u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku. Mi ćemo u većini razmatranja koristiti eksplicitan oblik zadavanja, a analogne teorije postoje i za druga dva oblika.
Grafik generisan formulom (1) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ. Znači, ubuduće imamo posla sa funkcijama oblika

$$z = f(x, y), \quad \text{za } (x, y) \in \mathcal{D}\,.$$

Da ponovimo, kod ovakvih funkcija veličine x i y su nezavisne promenljive, a veličina z je zavisna realna promenljiva.
Neka je data oblast $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data tačka $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka je na D data funkcija $z = f(x, y)$.

Definicija. Totalni priraštaj funkcije f u tački A (sa priraštajima argumenata Δx i Δy), u oznaci Δf, je veličina

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)\,, \tag{2}$$

gde su Δx i Δy realne veličine različite od nule.

U slučaju kada u (2) važi da je:

1° $\Delta y = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)$ nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po prvoj promenljivoj (po x) i označavamo sa $\Delta_x f$.

2° $\Delta x = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po drugoj promenljivoj (po y) i označavamo sa $\Delta_y f$.

PARCIJALNI IZVODI FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Parcijalni izvod neke funkcije može da postoji ili ne u $\mathbb{R}$ u $\pm\infty$.

Koristeći 1° i 2° kreirajmo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}. \tag{3.2}$$

Granične vrednosti (3.1) i (3.2) mogu postojati ili ne u $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ako su konačne, nazovamo ih parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački $A \in \mathcal{D}$ po prvoj, odnosno po drugoj promenljivoj, respektivno. U tom slučaju koristimo jednu od sledećih oznaka

$$f'_x(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ili} \quad f'_x(A),$$

$$f'_y(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{ili} \quad f'_y(A).$$

Za ova dva parcijalna izvoda prvog reda možemo kreirati funkcije tih parcijalnih izvoda

$$\begin{aligned} f'_x(x,y), &\quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}, \\ f'_y(x,y), &\quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Prethodno date funkcije su opet funkcije po promenljivim x i y.

NapomenaPraktično nalaženje funkcija koje su parcijalni izvodi početne funkcije se može uraditi na sledeći način:
- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po x (y smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_x(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$,

- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po y (x smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_y(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$.

PRIMER

Određivanje prvih parcijalnih izvoda.

Naći odgovarajuće parcijalne izvode funkcija:

$$a)\; z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \qquad b)\; z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ u tački } A(1,1).$$

Rešenje.
a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tada je: $z'_x(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $z'_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PRVI PARCIJALNI IZVODI SLOŽENE FUNKCIJE

Pravilo za određivanje prvih parcijalnih izvoda u situaciji kada funkcija složena. Analogno pravilo smo dali i prilikom određivanje prvog izvoda funkcije jedne promenljive.

Funkcije više promenljivih mogu biti složene, pa tako ako je $z=f(u,v)$ funkcija od u i v, pri čemu su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ funkcije od x i y, onda je z složena funkcija od x i y

$$z=f(u(x,y),v(x,y))=g(x,y)$$

a njeni parcijalni izvodi po x i y se dobijaju kao

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Parcijalni izvodi višeg reda

DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Parcijalni izvodi drugog reda se dobijaju traženjem parcijalnih izvoda od parcijalnih izvoda prvog reda.

Za funkciju f u tački $A \in D$ možemo formirati parcijalne izvode drugog reda po jednoj, odnosno po drugoj promenljivoj na sledeći način: neka su date izvodne funkcije parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $z = f(x, \ y), \ (x, \ y) \in D$ sa

$$f'_x(x, y), \qquad f'_y(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Za njih je moguće (ponaosob) potražiti parcijalne izvode prvog reda u tački $A \in D$ (ako su za to obezbeđeni uslovi) i time dobijamo:

$$f'_x(x, y)\big|'_x\Big|_A, \ f'_x(x, y)\big|'_y\Big|_A, \ f'_y(x, y)\big|'_x\Big|_A, \ f'_y(x, y)\big|'_y\Big|_A,$$

gde je $A = (a1, a2) \in D$.

Standardne oznake za prethodno date parcijalne izvode su:

$$f''_{xx}(x, y)\big|_A, \ f''_{xy}(x, y)\big|_A, \ f''_{yx}(x, y)\big|_A, \ f''_{yy}(x, y)\big|_A$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Takodje, umesto oznaka

$$f''_{xx}(x, y)\big|_A, \ f''_{yy}(x, y)\big|_A$$

mogu se koristiti i oznake

$$f''_{x^2}(x, y)\Big|_A, \ f''_{y^2}(x, y)\Big|_A.$$

Parcijalni izvodi $f''_{xy}(x, y)|_A$ i $f''_{yx}(x, y)|_A$ se nazivaju mešoviti parcijalni izvodi drugog reda.

Umesto oznaka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

mogu se koristiti i oznake:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Napomena. Od posmatrane funkcije f (ako su obezbedjeni uslovi) možemo kreirati i parcijalne izvode k-tog reda ($k \geq 3$), na analogan način kao što smo formirali parcijalne izvode drugog reda. Oznake za takve parcijalne izvode i rasudjivanje o njima je potpuno analogno sa oznakama i rasudjivanjem kao kod parcijalnih izvoda drugog reda. Parcijalnih izvoda k-tog reda ima 2^k.

STAV O JEDNAKOSTI MEŠOVITIH PARCIJALNIH IZVODA DRUGOG REDA

Datistav će biti dosta korišćen u kasnijem radu.

Mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj tački A ne moraju biti jednaki u opštem slučaju. Za naš dalji rad će biti od interesa kada su oni jednaki. O tome govori naredni stav.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka ova funkcija na $\mathcal{D}$ ima parcijalne izvode prvog i drugog reda. Uočimo tačku $A(a_1, a_2) \in D$ i pretpostavimo da su $f''_{xy}(x, y)$ i $f''_{yx}(x, y)$ neprekidni (kao funkcije) na nekom krugu sa centrom u tački A pozitivnog poluprečnika koji ceo pripada oblasti $\mathcal{D}$.
Tada je

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

Napomena. Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Lokalni ekstremi funkcije dve promenljive

STACIONARNE TAČKE

Stacionarne tačke funkcije dve promenljive se određuju iz sistema čije jednačine predstavljaju prvi parcijalni izvodi te funkcije izjednačeni sa nulom.

Neka je data funkcija $z = f(x,y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada za tačku $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{D}$kažemo da je lokalni minimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_1$, gde je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_1, y_1) \leq f(x,y)$, za svako $(x,y) \in \mathcal{O}_1$. Takođe, za tačku $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni maksimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_2$, gde je $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_2, y_2) \geq f(x,y)$, za svako $(x,y) \in \mathcal{O}_2$. Tačke lokalnih minimuma i maksimuma se nazivaju i lokalni ekstremi funkcije f na $\mathcal{D}$.

U narednom razmatranju ćemo dati jedan postupak za određivanje tačaka lokalnih ekstrema posmatrane funkcije (ako ih ona uopšte ima).

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Za tačku $M_0 = (x_0, y_0) \in D$kažemo da je stacionarna tačka funkcije f ako je rešenje sistema:

$$f'_x(x,y) = 0\,,$$
$$f'_y(x,y) = 0\,,$$

na $\mathcal{D}$.

Skup rešenja prethodnog sistema označimo sa S. On može biti prazan ili neprazan.

Stav. Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup stacionarnih tačaka za tu funkciju na $\mathcal{D}$. Tada svaka tačka lokalnog ekstrema funkcije na oblasti D pripada skupu S .

Napomena. Iz prethodnog stava možemo zaključitida ako je $S = \varnothing$, tada funkcija f na $\mathcal{D}$ nema lokalne ekstreme.Međutim, onne važi u suprotnom smeru. To znači da sve tačke koje pripadaju skupu S ne moraju biti lokalni ekstremi. Stoga se nameće pitanje, ako je skup S neprazan,kako ćemo od svihtačaka koje mu pripadaju,izdvojiti one koje su lokalni ekstremi i kako ćemo znati da lisu one lokalni maksimumi ili minimumi. O tome govorimo u nastavku.

SILVESTEROVO PRAVILO

Primena ovog pravila omogućava jednostavno određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije dve promenljive. U slučaju da je $\gamma = 0$, ovo pravilo ne daje odgovor.

Naredno tvrđenje će nam omogućiti da iz skupa S izdvajamo one tačke koje predstavljaju lokalni maksimum ili minimum određene funkcije dve promenljive, uz pretpostavku da je skup S neprazan.

Stav (Silvesterovo pravilo) Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisan na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup njenih stacionarnih tačaka na $\mathcal{D}$ takav da je $S \neq \varnothing$. Dalje, neka je $M_0(x_0, y_0) \in S$. Takođe, neka je

$$f''_{x^2}(M_0) = A, \quad f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B, \quad f''_{y^2}(M_0) = C.$$

Označimo sa $\gamma = A \cdot C - B^2$. Tada

a) ako je $\gamma > 0$ i $A > 0$, tačka M_0 je lokalni minimum funkcije f na D;

b) ako je $\gamma > 0$ i $A < 0$, tačka M_0 je lokalni maksimum funkcije f na D;

c) ako je $\gamma < 0$, funkcija f u tački M_0 nema lokalnih ekstrema;

d) ako je $\gamma = 0$, za tačku M_0 nemamo nikakav odgovor po pitanju lokalnih ekstrema.

Napomena. 1) Silvesterovo pravilo je veoma značajan rezultat. Postoji opšta verzija ovog pravila za realne funkcije od k realnih promenljivih $(k \geq 2)$, iskazana preko pojma pozitivno definitne forme o kome ovde neće biti reči.

2) Nedostatak ovog pravila je da u slučaju pod d) ne možemo dobiti odgovor o postojanju lokalnog ekstrema funkcije f u posmatranoj tački M_0 . Ovaj nedostatak možemo prevazići analizom znaka drugog diferencijala funkcije f u okolini te tačke M_0 o kome ćemo govoriti u nastavku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Totalni diferencijal prvog reda

DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE U TAČKI

Kao i kod funkcije jedne promenljive diferencijabilnost funkcije u tački povlači i njenu neprekidnost u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Takođe, neka je $A(a_1, a_2) \in D$. Za funkciju f kažemo da je diferencijabilna u tački A ako je

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = \\ &= C \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \rho \cdot \alpha(t), \end{aligned}$$

gde je $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, a Δx i Δy su priraštaji argumenta x, odnosno y, tim redom, pri čemu su C i B dve realne fiksirane konstante i $\alpha(t) \to 0,$ kada $t \to 0.$
Iz prethodne formule kojom se zadaje diferencijabilnost funkcije f u tački A, vidimo da kod funkcija dve (iil više) promenljivih nemamo jedinstvenu numeričku veličinu koja će predstavljati njen izvod u tački A, što je bio slučaj kod funkcije jedne promenljive, već za to imamo dva različita kandidata C i B .

Pojam diferencijabilnost funkcije dve promenljive (kao i funkcije jedne promenljive), ravnopravan je sa činjenicom da je grafik posmatrane funkcije u toj tački gladak i za to imamo sledeće geometrijsko tumačenje: za funkciju f u tački A važi prethodna formula ako i samo ako Γ_f u tački $(a_1, a_2), f(a_1, a_2))$ ima jedinstvenu tangentnu ravan. Prva dva sabirka na desnoj strani prethodne formule čine glavni ili linearni deo posmatranog totalnog priraštaja, a treći sabirak njegov zanemarljiv deo.U slučaju funkcije dve promenljive, kao i u slučaju funkcije jedne promenljive, svojstvo diferencijabilnosti dato prethodnom formulom povlači svojstvo neprekidnosti te funkcije u tački A. Obrnuto ne mora da važi.
Stav. Funkcija $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna u tački $A(a_1, a_2)$ ako i samo ako u prethodno datoj formuli važi da je

$$C = f'_x(a_1, a_2) \text{ i } B = f'_y(a_1, a_2).$$

Napomena. Na osnovu prethodnog stava možemo zaključiti da diferencijabilna funkcija f u tački A poseduje parcijalne izvode u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

U narednom stavu navodimo dovoljan uslov pod kojim će činjenice iz prethodne napomene i u obrnutom smeru da važe.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $A(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka u tački A postoje parcijalni izvodi $f'_x(a_1, a_2)$ i $f'_y(a_1, a_2)$ i neka su neprekidni kao funkcije u tački $A(a_1, a_2)$ i neka su definisani na nekoj kružnoj okolini tačke A oblasti $\mathcal{D}$. Tada je funkcija f diferencijabilna u tački A.

TOTALNI DIFERENCIJAL PRVOG REDA U TAČKI

Iz pojma diferencijabilnosti funkcije u tački možemo izvesti pojam totalnog diferencijala u tački.

Iz formule

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = C \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \rho \cdot \alpha(t),$$

uočimo glavni deo

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot \Delta x + f'_y(a_1, a_2) \cdot \Delta y.$$

On se naziva totalni diferencijal prvog reda funkcije f u tački A.

Važi da je $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$, gde su dx i dy diferencijali funkcija $x = g(x)$ i $y = h(y)$ jedne realne promenljive (nezavisno po x i po y), pa totalni diferencijal prvog reda može zapisati i u obliku

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot dx + f'_y(a_1, a_2) \cdot dy.$$

Poglavlje 8

Totalni diferencijal višeg reda

TOTALNI DIFERENCIJAL DRUGOG REDA

Totalni diferencijal drugog reda se koristi za odrešivanje lokalnih ekstrema.

Posmatrajmo ponovo formulu

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot dx + f'_y(a_1, a_2) \cdot dy.$$

Možemo smatrati da je df funkcija dve nezavisne promenljive sa domenom u $\mathcal{D}$ i ponovo potražiti totalni diferencijal u tački A. Na taj način dobijemo totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački A, koji označavamo sa $d^2 f$. Tada je

$$\begin{aligned} d^2 f &= (df)'_x dx + (df)'_y dy = \\ &= (f''_{xx} dx + f''_{yx} dy) dx + (f''_{xy} dx + f''_{yy} dy) dy = \\ &= f''_{xx} (dx)^2 + 2 f''_{xy} (dx)(dy) + f''_{yy} (dy)^2. \end{aligned}$$

Obično se $(dx)^2$ označava sa dx^2 i $(dy)^2$ sa dy^2, pa prethodno možemo zapisati

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2.$$

Kao što smo već rekli drugi totalni diferencijal funkcije igra važnu ulogu prilikom određivanja da li je neka stacionarna tačka $M_0(x_0, y_0) \in S$ lokalni ekstrem, kada u Silvesterovom pravilu za tu tačku dobijemo da je $\gamma = 0$. Naime, ako je totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački M_0, odnosno

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)\, dx^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\, dx dy + f''_{yy}(M_0)\, dy^2.$$

stalnog znaka, nezavisno od dx i dy imamo da:
1) za $d^2 f(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni minimum,
2) za $d^2 f(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni maksimum,
3) za $d^2 f(M_0) = 0$ ne može se ništa zaključiti o lokalnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.
Ako je $d^2 f(M_0)$ menja znak, zavisno od promene dx i dy , tada početna funkcija nema lokalni ekstrem u tački M_0. Uočimo da u prethodnoj formuli veličine $f''_{xx}(M_0)$, $f''_{xy}(M_0)$ i $f''_{yy}(M_0)$ predstavljaju tim redom veličine A, B i C iz Silvesterovog kriterijuma.

PRIMER 1. DEO

Određivanje prvih parcijalnih izvoda funkcija, stacionarnih tačaka iz njih, kao i drugih parcijalnih izvoda funkcija. Provera za prve dve stacionarne tačke da li lokalni ekstremi.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y)=x^3-2y^3-3x+6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y)=3x^2-3=0,$$
$$f'_y(x,y)=6y^2-6=0,$$

imamo da je $x^2=1$ i $y^2=1,$ pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1),\ M_2(-1,1),\ M_3(1,-1),$ i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2}=6x,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{y^2}=-12y.$$

Provera za tačku M_1.

Imamo da je $A=f''_{x^2}(M_1)=6,\ B=f''_{xy}(M_1)=0$ i $C=f''_{y^2}(M_1)=-12.$ Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je

$$\gamma=AC-B^2=-72<0,$$

pa tačka M_1 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

Isto možemo zaključiti i ako posmatramo $d^2f(M_1)$. Tada imamo

$$d^2f(M_1)=6dx^2-12dy^2.$$

Ako je $dy=dx$ tada je $d^2f(M_1)=-6dx^2<0,$ dok za $dy=\frac{1}{2}dx$ imamo $d^2f(M_1)=3dx^2>0$. Kako je $d^2f(M_1)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
Provera za tačku M_2.

Imamo da je $A=f''_{x^2}(M_2)=-6,\ B=f''_{xy}(M_2)=0$ i $C=f''_{y^2}(M_2)=-12.$ Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je

$$\gamma=AC-B^2=72>0,$$

pa tačka M_2 je lokalni maksimum jer je $A<0$. Tada je $f_{max}(-1,1)=6.$

Isto možemo zaključiti i ako posmatramo $d^2(M_2)$. Tada imamo:

$$d^2f(M_2)=-6dx^2-12dy^2=-(6dx^2+12dy^2)<0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0,$ pa imamo lokalni maksimum.

PRIMER 2. DEO

Provera za druge dve stacionarne tačke da li su ekstremne vrednosti. Zadatak je rešavan paralelno primenom Silvesterovog kriterijuma i preko totalnog diferencijala drugog reda.

Provera za tačku M_3.

Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_3) = 6,\quad B = f''_{xy}(M_3) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_3) = 12.$ Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je:

$$\gamma = AC - B^2 = 72 > 0,$$

pa tačka M_3 je lokalni minimum jer je $A > 0$. Tada je $f_{min}(1, -1) = -6.$

Isto možemo zaključiti i ako posmatramo $d^2 f(M_3)$. Tada imamo:

$$d^2 f(M_3) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0,$ pa imamo lokalni minimum.
Provera za tačku M_4.

Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_4) = -6,\quad B = f''_{xy}(M_4) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_4) = 12.$ Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je

$$\gamma = AC - B^2 = -72 < 0,$$

pa tačka M_4 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$. Isto možemo zaključiti i ako posmatramo $d^2 f(M_4)$. Tada imamo

$$d^2(M_4) = -6dx^2 + 12dy^2.$$

Ako je $dy = dx$ tada je $d^2 f(M_4) = 6dx^2 > 0,$ dok za $dy = \frac{1}{2}dx$ imamo $d^2 f(M_4) = -3dx^2 < 0.$ Kako je $d^2 f(M_4)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

Poglavlje 9

Vežba

ZADATAK 1

Određivanje domena funkcije dve promenljive

Odrediti domen funkcije

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

Rešenje: Domen zadate funkcije je skup svih tačaka u ravni $\mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju uslov da je potkorena veličina $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Ovaj uslov se može zapisati kao:

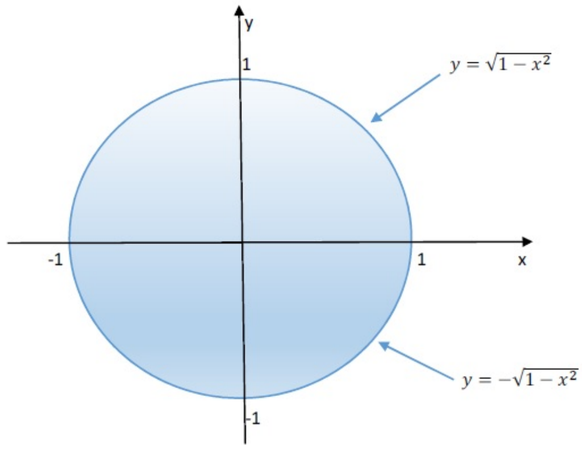
$x^2 + y^2 \leq 1.$

Skup tačaka koje zadovoljavaju navedeni uslov čini kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ i njenu unutrašnjost tj. $D = \left\{\{x, y\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

Skup tačaka u ravni ograničen nekom krivom, pravom i krivom, nekim krivima ili pravama i krivima se u najvećem broju slučajeva može predstaviti i tako što se jednoj od promenljivih u jednačini te krive (ili krivih) i prave (ili pravih) odredete brojne granice u kojima se kreće, a drugoj promenljivoj su, tada, granice u kojima se kreće funkcionalne tj. zavise od ove prve pormenljive. Ponekad je posmatrani skup tačaka u ravni dobijen presekom više krivih ili pravih, pa se u tom slučaju posmatrani skupa tačaka u ravni može predstaviti kao unija više disjunktnih skupova skupova čija unija čini početni skup tačaka. Ovo razbijanje se vrši zbog toga što se se granice početnog skupa tačaka menjaju, jer su dobijene presekom više pravih ili krivih.

U ovom primeru to možemo zapisati na sledeći način (videti sliku):

$D = \left\{\{x, y\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}.$



Slika 9.1 Grafičko predstavljanje domena funkcije.

Svakako, predstavljanje je moglo ići tako što se y predstavlja kao u brojnim granicama, a x u funkcionalnim. Tada imamo:

$$D=\left\{\{x,y\}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\leq y\leq 1,\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

ZADATAK 2

Određivanje domena.

Odrediti domen funkcije:

$$f(x,y)=\frac{2}{x-y}.$$

Rešenje:

Domen zadate funkcije je skup svih tačaka u ravni $\mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju uslov:

$$x-y\neq 0$$

tj. uslov se može zapisati kao

$$x\neq y$$

Skup tačaka koje ne zadovoljavaju navedeni uslov čini pravu $y=x$. Dakle, tada imamo:

$$D=\left\{\{x,y\}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\infty\leq x\leq\infty,\ y\neq x\right\}.$$

ZADATAK 3

Ispitivanje postojanja granične vrednosti funkcije u određenoj tački.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$.

Rešenje. a) Uvedimo smenu $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, gde je $\rho>0$ i $\theta\in(0,2\pi]$. Tada, dobijamo da $\rho\to 0$, kada $(x,y)\to(0,0)$, dok je θ proizvoljan ugao, takav da je $\theta\in(0,2\pi]$. Nakon uvođenja smene, u polazni limes dobijamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta\sin\theta,$$

gde je $\theta\in(0,2\pi]$. Očigledno je da ćemo za različite vrednosti ugla θ dobijati određene vrednosti iz intervala $[-1,1]$. To znaći da granična vrednost posmatrane funkcije u tački $(0,0)$ ne postoji, jer kada prilazimo tački $(0,0)$ iz različitih pravaca (tj. za različite vrednosti ugla θ) dobijamo razne vrednosti iz intervala $[-1,1]$.

b) Možemo pisati $\dfrac{\sin(xy)}{y} = \dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x$. Važi da je

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$$

gde smo uveli smenu $x\cdot y=t$, pri čemu $t\to 0$, kada $(x,y)\to(2,0)$.

Tada imamo

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to 2} x = 2.$$

c) Za $x\neq 0$ i $y\neq 0$ imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^4+y^4} \leq \frac{|x^3|+|y^3|}{x^4+y^4} = \\ &= \frac{|x^3|}{x^4+y^4} + \frac{|y^3|}{x^4+y^4} \leq \\ &\leq \frac{|x^3|}{x^4} + \frac{|y^3|}{y^4} = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \to 0, \text{ za } x\to+\infty, y\to+\infty. \end{aligned}$$

Tada je

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0.$$

ZADATAK 4

Ispitivanje neprekidnost funkcije u tački.

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje: Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y) \to 0$$

kad $(x, y) \to (0, 0)$. Prema tome, $f(x, y) \to 0$ kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

ZADATAK 5

Ispitivanje neprekidnost funkcije u tački

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 - xy^4}{x^2 + y^4}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje:

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| = \left|\frac{yx^2}{x^2 + y^4} - \frac{xy^4}{x^2 + y^4}\right| \leq \frac{|yx^2|}{x^2 + y^4} + \frac{|xy^4|}{x^2 + y^4} \leq \frac{|yx^2|}{x^2} + \frac{|xy^4|}{y^4} = |y| + |x| \to 0$$

kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Prema tome, $f(x, y) \to 0$ kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

ZADATAK 6

Ispitivanje neprekidnost funkcije.

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^4}} \sin \dfrac{1}{x^2 + y^4}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje:

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| \leq \frac{x^2|x - 3y|}{\sqrt{x^2 + y^4}} \leq \frac{x^2 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^4}}|x - 3y| = \sqrt{x^2 + y^4}|x - 3y| = g(x, y) \to 0$$

kad $(x, y) \to (0, 0)$.

Prema tome, $f(x, y) \to 0$ kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

Napomena: U ovom zadatku je korišćena nejednakost $\left|\sin \dfrac{1}{x^2 + y^4}\right| \leq 1$.

ZADATAK 7

Određivanje prvih parcijalnih izvoda

Odrediti prve parcijalne izvode za sledeće funkcije:
$1)\ \ z = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x}; \quad 2)\ \ z = \frac{x + y}{x - y}; \quad 3)\ \ z = x^y.$

Rešenje:

$$1)\ \ z'_x = \left(e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x}\right)'_x = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot \left(x^2 + y^2 - 5xy + 3x\right)'_x = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot (2x - 5y + 3)$$

$$z'_y = \left(e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x}\right)'_y = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot \left(x^2 + y^2 - 5xy + 3x\right)'_y = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot (2y - 5x)$$

$$2)\ \ z'_x = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)'_x = \frac{(x + y)'_x(x - y) - (x + y)(x - y)'_x}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y}{(x - y)^2} = \frac{-2y}{(x - y)^2}$$

$$z'_y = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)'_y = \frac{(x + y)'_y(x - y) - (x + y)(x - y)'_y}{(x - y)^2} = \frac{x - y + x + y}{(x - y)^2} = \frac{2x}{(x - y)^2}$$

$$3)\ \ z'_x = \left(x^y\right)'_x = y \cdot x^{y - 1}$$

$$z'_y = \left(x^y\right)'_y = x^y \cdot \ln x$$

ZADATAK 8

Određivanje prvih parcijalnih izvoda.

Odrediti prve parcijalne izvode za sledeće funkcije: $1)\quad z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right);\ 2)\quad z=x\sin y+xe^{\frac{y}{x}}$.

$$1)\quad z_x'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)_x'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)_y'=\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2)\quad z_x'=\left(x\sin y+xe^{\frac{y}{x}}\right)_x'=\sin y+e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{-x^2}=\sin y+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

$$z_y'=\left(x\sin y+xe^{\frac{y}{x}}\right)_y'=x\cos y+\quad xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x}=x\cos y+e^{\frac{y}{x}}$$

ZADATAK 9

Određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti druge parcijalne izvode funkcije:

$$z=\frac{x^2}{2-y}$$

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi su:

$$z_x'=\left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x'=\frac{2x}{2-y}\quad\wedge\ z_y'=\left(\frac{x^2}{2-y}\right)_y'=\frac{x^2}{(2-y)^2}.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z_{xx}''=\left(z_x'\right)_x'=\left(\frac{2x}{2-y}\right)_x'=\frac{2}{2-y}$$

$$z_{xy}''=\left(z_x'\right)_y'=\left(\frac{2x}{2-y}\right)_y'=\frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yx}''=\left(z_y'\right)_x'=\left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x'=\frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(\frac{x^2}{(2-y)^2}\right)'_y = \frac{2x^2}{(2-y)^3}$$

Primećujemo da je $z''_{xy} = z''_{yx}$ što važi uvek kada su parcijalni izvodi neprekidne funkcije.

ZADATAK 10

Određivanje drugih parcijalnih izvoda

Odrediti druge parcijalne izvode funkcija: $z = e^{xy^2} - x^2y^3$.

Rešenje: Prvi parcijalni izvodi su:

$$z'_x = \left(e^{xy^2} - x^2y^3\right)'_x = y^2e^{xy^2} - 2xy^3,$$

$$z'_y = \left(e^{xy^2} - x^2y^3\right)'_y = 2xye^{xy^2} - 3x^2y^2.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(y^2e^{xy^2} - 2xy^3\right)'_x = y^4e^{xy^2} - 2y^3$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \left(z'_x\right)'_y = \left(y^2e^{xy^2} - 2xy^3\right)'_y = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2} - 6xy^2$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(2xye^{xy^2} - 3x^2y^2\right)'_y = 2xe^{xy^2} + 4x^2y^2e^{xy^2} - 6x^2y$$

ZADATAK 11

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije.

Naći lokalne ekstreme funkcije: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Rešenje: Nađemo prve parcijalne izvode:

$$f'_x = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_x = 2x + y - 3$$

$$f'_y = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_y = x + 2y - 6$$

Rešimo sistem $f'_x = 0, \quad f'_y = 0$

$$2x + y - 3 = 0$$
$$x + 2y - 6 = 0$$

Rešenje sistema je $x = 0, \quad y = 3$ i to je stacionarna tačka funkcije. Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka minimuna ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam drugi parcijalni izvodi:

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = (2x + y - 3)'_x = 2$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(f'_x\right)'_y = (2x + y - 3)'_y = 1$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = (x + 2y - 6)'_y = 2$$

$$A = f''_{xx}(0, 3) = 2, \qquad B = f''_{xy}(0, 3) = f''_{yx}(0, 3) = 1, \qquad C = f''_{yy}(0, 3) = 2,$$

$$\gamma = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A > 0.$$

Na osnovu Silvesterovog kriterijuma dobijamo da funkcija ima lokalni minimum u tački (0,3).

$$f_{min} = f(0, 3) = \quad 0^2 + 0 \cdot 3 + 3^2 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 = -9.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youttube-a: lokalne ekstremen vrednosti

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 12 – 1. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – rešavanje sistema, određivanje stacionarne tačke i drugih parcijalnih izvoda.

Naći lokalne ekstreme funkcija: $f(x, y) = e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2\right)$.

<u>Rešenje.</u> Nađemo prve parcijalne izvode:

$$f'_x = \left(e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2\right)\right)'_x = e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x - y} \cdot 2x = e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)$$

$$f'_y = \left(e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2\right)\right)'_y = -e^{x - y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x - y} \cdot (-4y) = e^{x - y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right)$$

Dobijamo sistem:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ x = 2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4y^2 - 2y^2 + 4y = 0 \\ x = 2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2y(y+2) = 0 \\ x = 2y \end{array}$$

Rešenja sistema su: $x = 0, \quad y = 0$ i $x = -4, \quad y = -2$. Dakle, tačke $M(0, 0)$ и $N(-4, -2)$ su stacionarne tačke funkcije.

Drugi parcijalni izvodi

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)\right)'_x = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right) + e^{x-y}(2x+2) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 4x + 2\right)$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(f'_x\right)'_y = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)\right)'_y = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right) + e^{x-y}(-4y) = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x + 4y\right)$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = \left(e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right)\right)'_y = -e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right) + e^{x-y}(4y-4) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 8y - 4\right)$$

ZADATAK 12 – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma

Odredimo vrednosti drugih parcijalnih izvoda u tački M.

$$A = f''_{xx}(0,0) = e^{0-0}\left(0^2 - 2\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 2\right) = 2, \qquad B = f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0, \qquad C = f''_{yy}(0,0) = -4.$$

$$\gamma = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Zaključujemo da tačka $M(0, 0)$ nije tačka ekstremuma.

Odredimo vrednosti drugih parcijalnih izvoda u tački N.

$A = f''_{xx}(-4, -2) = e^{-4+2}\left((-4)^2 - 2\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-4) + 2\right) = -6e^{-2}$

$B = f''_{xy}(-4, -2) = f''_{yx}(-4, -2) = -e^{-4+2}\left((-4)^2 - 2\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-4) + 4\cdot(-2)\right) = 8e^{-2}$

$C = f''_{yy}(-4, -2) = e^{-4+2}\left((-4)^2 - 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 4\right) = -12e^{-2}$

$\gamma = AC - B^2 = (72-64)e^{-2} = 8e^{-2} > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(-4, -2) = -6e^{-2} < 0,$

zaključujemo da je tačka $N(-4, -2)$ tačka lokalnog maksimuma koji iznosi

$f_{max} = f(-4, -2) = e^{-4+2}\left((-4)^2 - 2\cdot(-2)^2\right) = 8e^{-2}.$

ZADATAK 13 – 1. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – rešavanje sistema, određivanje stacionarne tačke i određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odredi lokalne ekstremume zadate funkcije $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)$.

Rešenje: Određivanje stacionarnih tačaka

$$f'_x = 0$$
$$f'_y = 0$$

$$f'_x = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)(2x) = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) = 0$$

$$f'_y = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)(4y) = e^{-x^2-y^2}\cdot 2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) = 0$$

$$2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) = 0 \qquad (1)$$

$$2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) = 0 \qquad (2)$$

$(1) \Rightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad 1 - x^2 - 2y^2 = 0$

$(2) \Rightarrow \quad y = 0 \quad \lor \quad 2 - x^2 - 2y^2 = 0$

I slučaj	II slučaj	III slučaj	IV slučaj
$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$x^2 + 2y^2 = 2$
$y = 0$	$x^2 + 2y^2 = 2$	$x^2 + 2y^2 = 1$	$x^2 + 2y^2 = 1$
$S_1(0,\ 0)$	$y = \pm 1$	$x = \pm 1$	nema rešenja
	$S_2(0,\ -1)$	$S_4(-1,\ 0)$	
	$S_3(0,\ 1)$	$S_5(1,\ 0)$	

Odredimo druge parcijalne izvode

$$f''_{xx} = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right)\cdot(2x) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot(-2x)$$

$$f''_{xy} = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right)\cdot(-2y) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot(-4y)$$

$$f''_{yy} = e^{-x^2-y^2}\cdot 2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right)\cdot(-2y) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2y(-4y)$$

ZADATAK 13 – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma.

Primenjujemo Silvesterov kriterijum:

Tačka $\boldsymbol{S_1(0,\ 0)}$

$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 4$

$\gamma = 8 > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0,\ 0) = 2 > 0.$

Tačka $S_1(0,\ 0)$ je tačka lokalnog minimuma i $f_{min}\left(0,\ 0\right) = 0.$

Tačka $\boldsymbol{S_2(0,\ -1)}$

$A = -2\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = -8\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{16}{e^2} > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0,\ -1) = -2\frac{1}{e} < 0.$

Tačka $S_2(0,\ -1)$ je tačka lokalnog maksimuma i $f_{max}\left(0,\ -1\right) = 2e^{-1}.$

Tačka $S_3(0, 1)$

$A = -2\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = -8\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{16}{e^2} > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0, -1) = -2\frac{1}{e} < 0.$

Tačka $S_3(0, 1)$ je tačka lokalnog maksimuma i $f_{max}\left(0, 1\right) = 2e^{-1}$.

Tačka $S_4(-1, 0)$

$A = -4\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = 2\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{-8}{e^2} < 0.$

Tačka $S_4(-1, 0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

Tačka $S_5(1, 0)$

$A = -4\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = 2\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{-8}{e^2} < 0.$

Tačka $S_5(1, 0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

ZADATAK 14

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – bez primene Silvesterovog kriterijuma.

Odrediti lokalne ekstremume funkcije:

$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Rešenje:

$$f'_x = \frac{-2x}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}} \qquad x^2 + y^2 \neq 0, \quad \text{tj.} \quad (x, y) \neq \left(0, 0\right) \qquad (*)$$

$$f'_y = \frac{-2y}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}$$

Za dobijanje stacionarnih tačaka treba rešavati sistem: $\begin{array}{l} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{array}$

Kako je rešenje sistema tačka (0,0) koja je izbačena uslovom $(*)$ ona jedina predstavlja stacionarnu tačku.

Parcijalne izvode u tački (0,0) tražimo po definiciji

$$f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{2 - h^{\frac{2}{3}} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty$$

u (0,0) ne postoje parcijalni izvodi, pa je tačka (0,0) singularna tačka.

Međutim, tačka (0,0) je u domenu polazne funkcije, pa može biti lokalna ektremna vrednost. Kako za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi da je

$$f(x,y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2} \le 2 = f(0,0)$$

Imamo da je tačka (0,0) lokalni maksimum funkcije.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Odrediti domen funkcije

$z = x - \sqrt{x^2 - y^2 - 5}$ rešenje: $x^2 - y^2 \ge 5$

Odrediti domen funkcije

$z = \frac{2}{y} + x^2 + 3\ln y - y - 6x + 9$ rešenje: $\{\{x,y\} : x \in R, \quad y > 0\}$

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \{x, y = (0,0) \end{cases}$$ rešenje: neprekidna

Dokazati da funkcija $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ zadovoljava jednačinu $2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$

Izračunati vrednost parcijalnih izvoda prvog i drugog reda u tački $M(0,0)$ funkcije $z = x\sin y - x^2y^3 + x - 3y\cos 2x - 1.$

rešenje: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}(0,0) = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}(0,0) = 0.$

Zadatak Odrediti prve i druge parcijane izvode sledećih funkcija:
a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$
b) $z = \frac{x-y}{x+y}$
c) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$
d) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
e) $z = x^y$

Zadatak Data je funkcija $z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12$. Odrediti lokalne ekstreme ove funkcije i vrednost funkcije u tim tačkama.

Rezultat. Tačka $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ je lokalni maksimum i imamo da je $z_{max}(A) = -\frac{35}{2}$.

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

rešenje: $z_{min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

rešenje: $z_{max}(1, -1) = \sqrt{3}$

Zaključak za lekciju 05

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE

Domen, granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremi funkcije dve promenljive.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa realnom funkcijom dve realne promenljive, i ovladali pojmovima: granična vrednost, neprekidnosti, diferencijabilnosti, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremumi, realne funkcije dve realne promenljive. Uvedeni pojmovi se mogu proširiti i analogno važe za funkciju od tri ili više promenljivih.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.