UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Određeni i nesvojstveni integrali

Lekcija 04

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 04

ODREĐENI I NESVOJSTVENI INTEGRALI

UVOD

U ovoj lekciji ćemo uvesti pojam određenog integral, kao i njegove osnovne osobine. U ovoj lekciji će biti uveden i pojam nesvojstvenog integrala prve i druge vrste.

U ovoj lekciji ćemo uvesti pojam određenog integral, kao i njegove osnovne osobine. Biće ukazano na razliku između određene i neodređene integracije, ali i na to kako se oni mogu dovesti u vezu. Takođe, biće data geometrijska interpretacija određenog integrala, kao i njegova primena: na izračunavanje površine ravne figure, na izračunavanje dužine luka, na izračunavanje zapremine i površine obrtnog tela.
U ovoj lekciji će biti uveden i pojam nesvojstvenog integrala prve i druge vrste.

Poglavlje 1

Pojam određenog integrala

JEDAN OD PROBLEMA KOJI DOVODI DO POJMA ODREĐENOG INTEGRALA

Određivanje površine krivolinijskog trapeza je jedan od problema koji dovodi do pojma određenog integrala. U prirodnim i tehničkim naukama postoji čitav niz takvih problema.

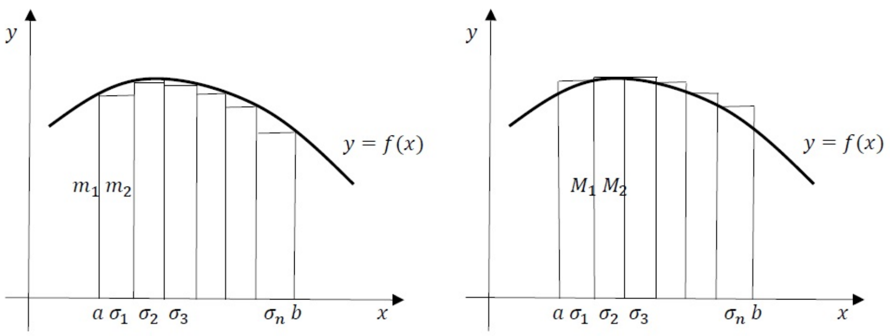
Neka je $y=f(x)$ neprekidna i nenegativna funkcija na segmentu $[a,b]$. Posmatrajmo figuru ograničenu delom grafika ove funkcije nad segmentom $[a,b]$ i pravama $x=a$ i $x=b$. Takvu figuru nazivamo krivilinijski trapez sa osnovom $[a,b]$. Postavlja se pitanje da li za ovakvu figuru možemo da izračunamo njenu površinu. Stoga, podelimo segment $[a,b]$ na n parcijalnih segmenata $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$, pri čemu ćemo sa $\sigma_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}$ označavati dužinu i -tog parcijalnog segmenta. Označimo sa $m_1,m_2,\ldots,m_n, n\in\mathbb{N}$,najmanje ordinate grafika na segmentima $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$,tim redom. Proizvodi $m_1\sigma_1,\ m_2\sigma_2,\ \ldots\ m_n\sigma_n, n\in\mathbb{N}$ prestavljaju površine "upisanih" pravougaonika u krivolinijski trapez. Zbir $m_1\cdot\sigma_1+m_2\cdot\sigma_2+\ldots+m_n\cdot\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\cdot\sigma_i$ predstavlja površinu stepenastog polinoma koji obrazuju upisani pravougaonici (videti sliku levo). Za svaku proizvoljnu podelu segmenta $[a,b]$ na parcijalne segmente postoji po jedan ovakav upisan poligon koji se sadrži u krivolinijskom trapezu.

Neka su $M_1,M_2,\ldots M_n, n\in\mathbb{N}$ najveće ordinate grafika funkcije $y=f(x)$ nad parcijalnim segmentima $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$. Zbir $M_1\cdot\sigma_1+M_2\cdot\sigma_2+\ldots+M_n\cdot\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot\sigma_i$predstavlja površinu stepenastog poligona opisanog oko posmatranog krivolinijskog trapeza za proizvoljnu podelu segmenta $[a,b]$ na parcijalne segmente $\sigma_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}$(videti sliku desno).

Ako sa P označimo površinu krivolinijskog trapeza, tada očigledno važi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \le P \le \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i .$$

Dakle, ako postoji jedinstveni broj P koji ispunjava prethodnu nejednakost, tada ovaj broj predstavlja površinu uočenog krivolinijskog trapeza.



Slika 1.1 Upisani stepenasti poligon u krivolinijski trapez (slika levo) i opisani stepenasti poligon oko krivolinijskog trapeza (slika desno).

Napomena. Problem određivanja rada promenljive sile pri pravolinijskom kretanju u slučaju kada se pravac puta poklapa sa pravcem sile bio bi još jedanod problema koji dovodi do pojma određenog integrala.

GORNJA I DONJA DARBUOVA SUMA

Skup svih gornjih (donjih) Darbuovih suma funkcije ograničene nekom segmentu je ograničen.

Neka je data ograničena funkcija $f(x)$ na ograničenom intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}, (a < b)$. Za sistem tačaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ koji ima osobinu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$se kaže da je podela P intervala $[a,b]$. Tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazivaju podeone tačke podele P, a segmenti

$$\sigma_1 = [a, x_1],\ \sigma_2 = [x_1, x_2],\ \sigma_3 = [x_1, x_2],\ \ldots,\ \sigma_n = [x_{n-1}, x_n],$$

se nazivaju podeoni segmenti podele P. Kao i do sada sa $\sigma_i, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ ćemo istovremeno označava dužine odgovorajućih podeonih intervala.

Neka su M i m tim redom, gornja i donja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$, a M_i i m_i tim redom, gornja i donja međa funkcije f na podeonom segmentu $\sigma_i, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Definicija. Suma proizvoda

$$\overline{S}(\sigma) = M_1 \cdot \sigma_1 + M_2 \cdot \sigma_2 + \ldots + M_n \cdot \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \sigma_i$$

naziva se gornja Darbuova suma funkcije f za datu podelu P segmenta $[a,b]$. Suma proizvoda

$$\underline{S}(\sigma) = m_1 \cdot \sigma_1 + m_2 \cdot \sigma_2 + \ldots + m_n \cdot \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sigma_i$$

naziva se donja Darbuova suma funkcije f za datu podelu P segmenta $[a,b]$.

Za svaku podelu P segmenta $[a,b]$ mogu se formirati gornja i donja Darbuova suma za datu ograničenu funkcije f na tom segmentu. Za skup ovih suma važi sledeći stav.

Stav. Skup svih gornjih i i skup svih donjih Darbuovih suma funkcije ograničene na segmentu $[a,b]$ su ograničeni skupovi.

Dokaz. Za proizvoljni podeoni segment σ_i važi proširena nejednakost $m \leq m_i \leq M_i \leq M$. Njenim množenjem σ_i dobijamo da važi $m \cdot \sigma_i \leq m_i \cdot \sigma_i \leq M_i \cdot \sigma_i \leq M \cdot \sigma_i$Sabiranjem ovih nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ dobijamo

$$m \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i \leq M \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Kako važi da je $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = b - a$,prethodna nejednakost postaje

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma) \leq M(b-a). \square$$

Napomena. $M \in \mathbb{R}$ je gornja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$ ($m \in \mathbb{R}$ je donja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$) ako važi da je

$$(\forall x \in [a,b]) \; f(x) \leq M \quad ((\forall x \in [a,b]) \; m \leq f(x)).$$

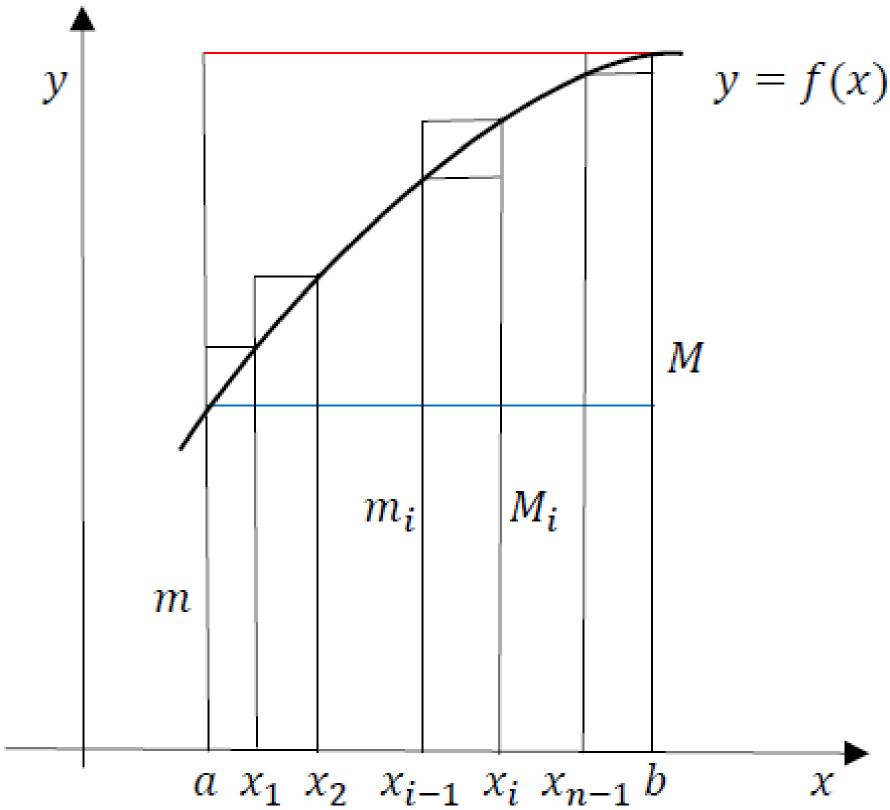
GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DATOG STAVA

Gornja i donja Darbuova suma, tim redom, predstavljaju površine opisanog, odnosno upisanog stepenastog poligona.

Darbuova suma $\overline{S}(\sigma)$ i $\underline{S}(\sigma)$, tim redom, predstavljaju površine opisanog, odnosno upisanog stepenastog poligona. Proizvodi $M(b-a)$ i $m(a-b)$ su površine pravougaonika čija je jedna stranica dužine $b-a$, a druga dužine M, odnosno m. Nejednakost

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma) \leq M(b-a)$$

označava da se gornja i donja Darbuova suma nalaze između površine upisanog i opisanog pravougaonika za uočeni krivolinijski trapez.



Slika 1.2 Geometrijska interpretacija datog stava.

INTEGRALNE SUME

Integralna suma predstavlja površinu poligona koja nije veća od površine opisanog i nije manja od površine upisanog stepenastog poligona.

Uočimo, za neku podelu P, skup parcijalnih segmenata $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n$segmenta $[a, b]$ i označimo sa $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n,$ tim redom proizvoljno odabrane tačke u odgovarajućim podeonim segmentima.

Definicija. Integralna suma (Rimanova suma) funkcije f jeste suma proizvoda dužina podeonih segmenata $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i vrednosti $f(\xi_1)$ funkcije f u tačkama $\xi_1 \in \sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\},$tj.

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i = f(\xi_1)\sigma_1 + f(\xi_2)\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n)\sigma_n.$$

Za datu funkciju f integralne sume su definisane ako je fiksirana podela P segmenta i izvršen izbor tačaka ξ_i na odgovarajućim podeonom segmentu $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

U opštem slučaju gornja i donja Darbuova suma ne moraju biti oblika $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i$, jer gornja i donja međa funkcije f na podeonom segmentu $\sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ne mora predstavljati vrednost funkcije f u nekoj tački ξ_i.

Međutim, za neprekidnu funkciju uvek se može naći par tačaka ξ_i i η_i iz podeonog segmenta $\sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takve da važi $f(\xi_i) = m_i$ i $f(\eta_i) = M_i$. Za proizvoljnu podelu P važi

$$\underline{S}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \overline{S}(\sigma),$$

jer je $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Integralna suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i$ predstavlja površinu stepenastog poligona sastavljenog od pravougaonika čija je jedna stranica dužine σ_i, a druga dužine $f(\xi_i)$. Površina tog poligona nije veća od površine opisanog i nije manja od površine upisanog stepenastog poligona.

DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA

Određeni integral predstavlja graničnu vrednost svih integralnih suma.

Definicija. Broj I se naziva granica integralnih suma funkcije f ograničene na segmentu $[a, b]$ ako za proizvoljan unapred dati broj $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$, takav da je nejednakost

$$|S - I| < \varepsilon$$

ispunjena za proizvoljnu integralnu sumu S obrazovanu pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[a, b]$, takvoj da je $\max \sigma_i < \delta$.

Ovo znači da ma kako bila izvršena podela segmenta $[a, b]$ i ma kako bio izvršen izbor tačaka ξ_i u odgovarajućim podeonim segmentima nejednakost

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i - I \right| < \varepsilon$$

ispunjena je ako su dijametri svakog od podeonih segmenata manji od δ.

Ovu činjenicu zapisujemo na sledeći način

$$\lim S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i = I.$$

Definicija. Funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$ je integrabilna na tom segmentu ako postoji granična vrednost njenih integralnih suma. Granica integralnih suma naziva se određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Oznaka za određeni integral je

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

U prethodnoj oznaci, segment $[a,b]$ se naziva interval integracije. Broj a se naziva donja granica, dok se broj b naziva gornja granica određenog integrala. Funkcija f se naziva podintegralna funkcija.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

USLOVI INTEGRABILNOSTI FUNKCIJE NA SEGMENTU

Gornje i donje sume ne zavise od izbora podele P iz skupa svih podela koje se mogu izvršiti na segmentu $[a,b]$.

Ako je funkcija f ograničena na segmentu $[a,b]$, tada se za nju može formirati po jedan skup gornjih i donjih suma. Ovi skupovi su ograničeni, te imaju konačnu gornju i donju među.

Stav (Darbuov stav) Za funkciju f ograničenu na segmentu $[a,b]$:

1° Postoji granična vrednost gornjih integralnih suma jednaka donjoj međi skupa svih gornjih suma, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \overline{I};$$

2° Postoji granična vrednost donjih integralnih suma jednaka gornjoj međi skupa svih donjih suma, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = \underline{I}.$$

Brojevi $\underline{I}$ i $\overline{I}$ ne zavise od izbora podele P iz skupa svih podela koje se mogu izvršiti na segmentu $[a,b]$.

Potrebni i dovoljni uslovi integrabilnosti neke funkcije dati su u narednom stavu.

Stav. Da bi funkcija f, koja je ograničena na segmentu $[a,b]$ bila integrabilna na tom segmentu potrebno je i dovoljno da granica gornjih suma bude jednaka granici donjih suma, tj. da je $\underline{I} = \overline{I}$.

KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Datim stavovima su uvedene klase funkcija koje su integrabilne na segmentu.

Stav. Ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ tada je i funkcija $|f|$ integrabilna na tom segmentu.

Stav. Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ integrabilna je na tom segmentu.

Napomena. Prethodni stav ne mora da važi u obrnutom smeru. Takođe, u prethodnom stavu u pretpostavci neprekidnosti je (prema Koši-Bolcanovom stavu) sadržana i pretpostavka ograničenosti funkcije f. Postoji Lebegov stav o Riman integrabilnosti koji je karakterizacionog tipa za klase svih ograničenih funkcija na datom ograničenom intervalu. Toj klasi pripadaju i prekidne i neprekidne funkcije.

Stav. Ako je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$ i na njemu ima konačno mnogo tačaka prekida, tada je ona integrabilna na tom segmentu.

Stav. Ako je funkcija ograničena i monotona na segmentu $[a, b]$, tada je ona integrabilna na tom segmentu.

PRIMER

Integracija funkcije $f(x) = e^x$ na segmentu $[a, b]$.

Integraliti funkciju $f(x) = e^x$ na segmentu $[a, b]$.

Rešenje. Podelimo segment $[a, b]$ na n jednakih delova, uzimajući da je $\frac{b-a}{n} = h$. Tada su parcijalni segmenti ovako izvršene podele dati na sledeći način

$$\sigma_1 = [a, a+h],\ \sigma_2 = [a+h, a+2h],\ \ldots,\ \sigma_{i+1} = [a+ih, a+(i+1)h],\ \ldots,\ \sigma_n = [a+(n-1)h, b].$$

Funkcija $f(x) = e^x$ je rastuća funkcija, pa je

$$\begin{aligned} &m_1 = e^a,\ m_2 = e^{a+h} = e^a \cdot e^h,\ \ldots,\ m_{i+1} = e^a \cdot e^{ih},\ \ldots,\ m_n = e^a \cdot e^{(n-1)h},\\ &M_1 = e^{a+h} = e^a \cdot e^h,\ M_2 = e^a \cdot e^{2h},\ \ldots,\ M_i = e^a \cdot e^{ih},\ \ldots,\ M_n = e^a \cdot e^{nh}. \end{aligned}$$

Donja Darbuova suma je data je data izrazom

$$\begin{aligned} \underline{S} &= he^a + he^a e^h + \ldots + he^a e^{ih} + \ldots he^a e^{(n-1)h} = \\ &= he^a(1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{ih} + \ldots + e^{n-1}h) = \\ &= he^a \cdot \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = h \cdot \frac{e^{a+nh} - e^a}{e^h - 1} = (e^b - e^a) \cdot \frac{h}{e^h - 1}. \end{aligned}$$

Gornja Darbuova suma je data je data izrazom

$$\begin{aligned}\overline{S} &= he^a(e^h + e^{2h} + \ldots + e^{ih} + \ldots + e^{nh}) = \\ &= he^a \cdot \frac{e^{nh} - e^h}{e^h - 1} = he^h \cdot \frac{e^{a+nh} - e^a}{e^h - 1} = (e^b - e^a)\frac{he^h}{e^h - 1}.\end{aligned}$$

Važi da je

$$\lim \underline{S} = (e^b - e^a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a$$

i

$$\lim \overline{S} = (e^b - e^a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{e^h - 1} = e^b - e^a.$$

Kako je

$$\lim \overline{S} = \lim \underline{S} = \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Poglavlje 2

Osnovne osobine određenog integrala

METOD LINEARNOST, METOD PARCIJALNE INTEGRACIJE I METOD SMENE ZA ODREĐENI INTEGRAL

U stavu su iskazane najvažnije osobine određenog integrala, izražene preko uvedene oznake.

Stav. Neka su date neprekidne funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Važi da je:

a) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

b) $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx;$

c) $\int\limits_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx;$

d) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, gde je $c \in [a,b]$;

e) $\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$ $-$ parcijalna integracija za određene integrale.

f) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_p^q f(x(t)) \cdot x'(t)dt,$ gde je $x = x(t),\ t \in [p,q] \subseteq \mathbb{R}$, jedna strogo monotona i diferencijabilna funkcija sa neprekidnom izvodnom funkcijom, gde je $a = x(p)$ i $b = x(q)$.

g) Ako je funkcija $y=f(x)$ neparna funkcija, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0;$

h) Ako je funkcija $y=f(x)$ parna funkcija, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$

Napomena. Osobine pod a) i pod b) su direktna posledica Rimanovog integrala.

Osobina c) se naziva linearnost određenog integrala po podintegralnoj funkciji.

Osobina d) (veoma važna osobina) naziva se svojstvo aditivnosti određenog integrala po domenu integracije.

Osobina e) je pravilo parcijalne integracije za određeni integral i u njemu pretpostavljamo dodatno da funkcije f i g imaju neprekidne izvodne funkcije. U e) važi

$$f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a).$$

Svojstvo f) je pravilo smene promenljive za određeni integral (ovde naročito treba voditi računa o promeni granica prilikom primene ovog svojstva).

POZITIVNOST I MONOTONOST ODREĐENOG INTEGRALA

U stavu je dato nekoliko bitnih svojstava određenog integrala u vezi sa poretkom na realnoj pravoj.

U narednom stavu zadaćemo nekoliko bitnih svojstava određenog integrala u vezi sa poretkom na realnoj pravoj.
Neka su date neprekidne funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$, za $x \in [a,b]$.

a) Ako je $f(x) \geq 0$, za $x \in [a,b]$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

b) Ako je $f(x) \leq g(x)$, za $x \in [a,b]$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

c) Važi da je $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$;

d) Ako je $M = \max\Big\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\Big\} \in \mathbb{R}$, tada je

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq M\cdot(b-a).$$

Svojstvo a) naziva se pozitivnost određenog integrala, a svojstvo b) naziva se monotonost određenog integrala.

Svojstvo d) se dobija iz činjenice

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

i

$$\int_a^b M\cdot dx = M\cdot\int_a^b dx = M\int_a^b 1\cdot dx,$$

a može se dokazati da je

$$\int_a^b 1\cdot dx = b-a.$$

ODREĐENI INTEGRAL SA PROMENLJIVOM GORNJOM GRANICOM. LAGRANŽEVA TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI

Lagranževa teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala dokazuje se uz primenu pravila za određenu integraciju sa promenljivom gornjom granicom.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y=f(x)$, za $x\in[a,b.]$ Posmatrajmo funkciju

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\qquad \text{za } x\in[a,b].$$

Tada je

$$\Phi'(x)=f(x),\qquad \text{za } x\in[a,b].$$

Prethodni stav predstavlja pravilo određene integracije sa promenljivom gornjom granicom.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y=f(x)$, za $x\in[a,b]$. Tada postoji neko $c\in[a,b]$, tako da je

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Ovaj stav se naziva Lagranževa teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala i dokazuje se primenom prethodnog stava.

Poglavlje 3

Veza između određene i neodređene integracije

UVOD

Određena i neodređena integracija nisu istog reda, ali se mogu dovesti u vezu preko Njutn-Lajbnicove formule.

Krajem 17. veka, Isak Njutn i Gotfrid Vilhem Lajbnic zasnovali su diferencijalni i integralni račun, nezavisno jedan od drugog. Takođe, oni su istovremeno formulisali i teoremu o određenoj integraciji sa promenljivom gornjom granicom. Uz pomoć te teoreme izvedena je Njutn-Lajbnicova formula koja omogućava jednostavniji rad sa određenim integralima.
Integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive obrađuje se u dva aspekta i to kao:

- neodređena integracija,
- određena integracija.

Ove dve vrste integracija nisu istog reda, ali se mogu dovesti u vezu preko Njutn-Lajbnicove formule. Zapravo, na osnovu ovog stava mnoga svojstva za određeni integral se mogu dobiti iz odgovarajućih pravila za neodređeni integral.

NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA

Primenom Njutn-Lajbnicove formule se računanje određenog integrala neke funkcije na nekom intervalu izvršava određivanjem njene primitivne funkcije.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, za $x \in [a, b]$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gde je F jedna (bilo koja) primitivna funkcija za funkciju f.

Dokaz. Neka su $F(x)$ i $\Phi(x)$ primitivne funkcije za $f(x)$ na $[a, b]$ koje se razlikuju za konstantu, tj. $\Phi(x) = F(x) + c$. Tada prema pravilu za određenu integraciju sa promenljivom gornjom granicom važi da je

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c. \qquad (*)$$

Ako u formulu $(*)$ stavimo da je $x = a$, dobijamo $0 = F(a) + c \Longrightarrow c = -F(a)$. Tada, formula $(*)$ se može zapisati u obliku

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ako sada stavimo u formulu (*) da je $x = b$ dobijamo da je

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

odnosno, ako se promenljiva u podintegralnom izrazu u formuli (*) označi sa x imamo da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

PRIMER 1

Primena Njutn - Lajbnicova formula i Metode linearnosti za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integrale:
a)

$$\int_{-1}^4 (8x^3 + 3x^2 + 1),$$

b)

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

Rešenje.
a)

$$\int_{-1}^4 (8x^3 + 3x^2 + 1)\, dx = \left(8\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + x \right)\Big|_{-1}^4 =$$
$$2 \cdot 4^4 + 4^3 + 4 - (2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)) = 580.$$

b)

$$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\left(-\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{2(-x)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{x}\right)\Big|_{-3}^{-1}=$$
$$\frac{1}{2(-1)^2}+\ln|-1|-\frac{2(1)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-1)}$$
$$-\left(-\frac{1}{2(-3)^2}+\ln|-3|-\frac{2(3)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-3)}\right)=\frac{17}{9}-\ln 3-3\sqrt[3]{3}+2\sqrt{3}.$$

PRIMER 2

Primena Njutn - Lajbnicova formula, Metode linearnosti i metode smene za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti sledeće integrale:

a) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3}\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx$; b) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg}x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx.$

Rešenje.

a)

$$\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx=\left(\frac{2}{3}e^{3x}+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+x\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{3}=$$
$$=\frac{2}{3}e^{3\cdot 3}+\operatorname{arctg}(3/3)+3-\frac{2}{3}e^{3\cdot\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)-\sqrt{3}=$$
$$=\frac{2}{3}\left(e^{9}-e^{3\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{12}+3-\sqrt{3}.$$

b)

$$\int_{0}^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg}x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left(-\cos x-\ln|\cos x|+4\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/3}=$$
$$=-\cos(\pi/3)-\ln|\cos(\pi/3)|+4\sin\frac{\pi/3}{2}+\cos 0+\ln|\cos 0|+4\sin\frac{0}{2}=\frac{5}{2}+\ln 2.$$

PRIMER 3

Primena Njutn - Lajbnicova formula i Metode parcijalne integracije za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx &= \begin{bmatrix} \text{parcijalna} & \text{integracija :} \\ u = x^2, & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
&+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \begin{bmatrix} \text{parcijalna} & \text{integracija :} \\ u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2} + 0^2 \cos 0 + 2\left(x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} - 0 \sin 0\right) - 2(-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \\
&= \pi + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

Koristili smo da je $\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$ i $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 1$.

PRIMER 4

Primena Njutn - Lajbnicova formula i smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

Rešenje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} = \begin{bmatrix} \text{smena} : \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2(2+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

PRIMER 5

Primena Njutn - Lajbnicova formula i smene $x = a\sin t$ za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Rešenje.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} \text{smena} : x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t dt \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin 0 = 0 \\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t dt =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot cos t dt = \begin{bmatrix} \text{važi da je} : \\ |\cos t| = \cos t, \ \text{za } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{bmatrix} =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\sin\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}.$$

Poglavlje 4

Geometrijska integracija određenog integrala

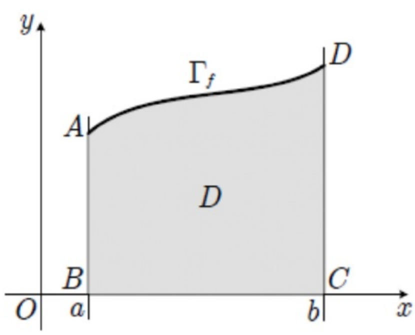
ODREĐIVANJE POVRŠINE OBLASTI U RAVNI PRIMENOM ODREĐENOG INTEGRALA U SLUČAJU DA JE GRAFIK FUNKCIJE IZNAD OX OSE ILI JE DODIRUJE

Geometrijski, određeni integral neke funkcije $y=f(x)$ na intervalu $[a,b]$ predstavlja površinu dela ravni ograničene pravama $y=0,\ x=a$ i $x=b$, kao i delom krive na tom intervalu.

Neka je data neprekidna funkcija $y=f(x)$, za $x\in[a,b]$ i neka je $f(x)>0$, za $x\in[a,b]$. Figura D na datoj slici naziva se "krivolinijski trapez", a Γ_f je grafik (kriva) funkcije f od tačke A do tačke D koji prestavlja jednu stranicu tog krivolinijskog trapeza. U nastavku će se govoriti o geometrijskoj interpretaciji i primenama određenog integrala.
Može se dokazati da je

$$P_{(D)}=\int_a^b f(x)dx.$$

gde je $P_{(D)}$ površina krivolinijskog trapeza D koji je dat na slici.



Slika 4.1 Krivolinijski trapez kada je $f(x)>0$, za $x\in[a,b]$.

Prethodna formula važi ako je $f(x)\geq 0$, za $x\in[a,b]$ (tj. ako za neko $x\in[a,b]$ važi da je $f(x)=0$). U tom slučaju se figura D, takođe, naziva krivolinijski trapez koji je dat u degenerativnom obliku. Na primer, figure date na sledećoj slici predstavljaju krivolinijske trapeze u degenerativnom obliku.

Slika 4.2 Degenerisani oblik krivolinijskog trapeza kada je $f(x) \geq 0,$ za $x \in [a,b].$

ODREĐIVANJE POVRŠINE OBLASTI U RAVNI PRIMENOM ODREĐENOG INTEGRALA U SLUČAJU DA JE GRAFIK FUNKCIJE ISPOD OX OSE

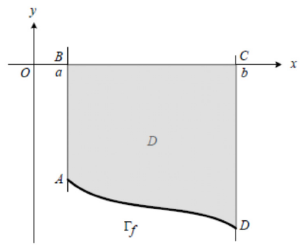
U ovom slučaju je interpretacija slična kao i u prethodnom slučaju, s tim što se ispred površine posmatrane figure stavlja predznak minus.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x),$ za $x \in [a,b],$ i da je $f(x) < 0,$ za $x \in [a,b].$

Figura D sa date slike je krivolinijski trapez i važi da je:

$$P(D) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Sve rečene o mogućim degenerisanim oblicima krivilinijskog trapeza u slučaju da je $f(x) \geq 0,$ važi i u slučaju da je $f(x) \leq 0.$



Slika 4.3 Krivoliniski trapez za $f(x) < 0,$ za x∈[a,b].

Ako je data neprekidna funkcija $y = f(x),$ za $x \in [a,b]$ takva da menja znak na svom domenu (barem jednom), na primer, kao na sledećoj slici

Slika 4.4 Krivolinijski trapez u situaciji kada funkcija y = f(x) menja znak za x∈[a, b].

U ovom slučaju se može postaviti pitanje izračunavanjem površine figure koja je ograničena krivom Γ_f , x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$. Koristeći prethodne slučajeve i svojstvo aditivnosti određenog integrala po domenu integracije ova površina se može izračunati na sledeći način

$$P_{(D)} = P_{(D_1)} + P_{(D_2)} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Prethodna tehnika se može primeniti i na izračunavanje komplikovanijih figura datih u ravni, a koje se pomoću pravih linija mogu podeliti na konačan broj slučajeva.

POVRŠINA DELA RAVNI ZAHVAĆENA KRIVAMA

Data je formula koja se primenjuje u ovim situacijama. Površina određena presekom dve sinusoide.

Ako su f i g neprekidne funkcije na $[a,b]$ i važi $f(x) \geq g(x),$ za sve $x \in [a,b]$, tada je površina ograničena krivama f i g i ordinatama u tačkama a i b jednaka

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Primer. Izračunati površinu između krivih $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ na intervalu $[0,\pi]$.

Rešenje. Na intervalu $[0,\pi]$ funkcije $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ imaju tri presečne tačke, koje se dobijaju kao rešenje jednačine $\sin x = \sin 2x$. Zaista, ako rešimo ovu jednačinu imamo

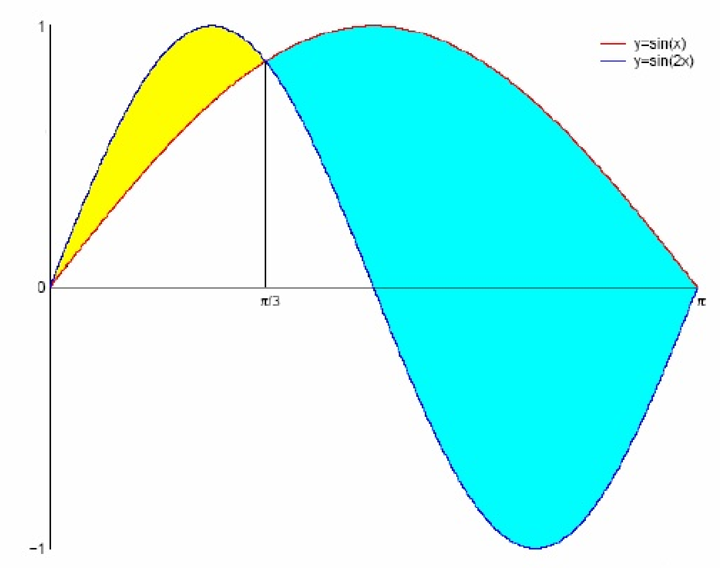
$$\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - 2\cos x) = 0.$$

Tada dobijamo da je $\sin x = 0 \vee 1 - 2\cos x = 0$. Na intervalu $[0,\pi]$ prethodne dve jednačine imaju tri rešenja $x = 0 \vee x = \pi \vee x = \frac{\pi}{3}$.

Na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ važi da je $\sin 2x \geq \sin x$, dok na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ važi da je $\sin x \geq \sin 2x$ (videti sliku).

Zbog toga je tražena površina

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)dx = \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Slika 4.5 Deo ravni ograničen datim sinusoidama.

PRIMER

Površina oblasti dobijena kao presek krive i dve prave.

Odrediti površinu ograničenu krivom $y = x^3$ i pravama $y = x + 6$ i $y = -\frac{x}{2}$.

Rešenje. Presek pravih $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ je tačka $A(-4, 2)$, a presek krive $y = x^3$ sa pravom $2y + x = 0$ je tačka $O(0, 0)$ (koordinatni početak), dok je presek krive $y = x^3$ sa pravom $y = 6 + x$ tačka $B(2, 8)$ (videti sliku). Svaka od ovih presečnih tačaka dobija se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina:

tačka $A: y = 6 + x \wedge 2y + x = 0,$

tačka $O: y = x^3 \wedge 2y + x = 0,$

tačka $B: y = 6 + x \wedge y = x^3.$

Tražena površina se dobija kao zbir $P = P_1 + P_2$,gde je

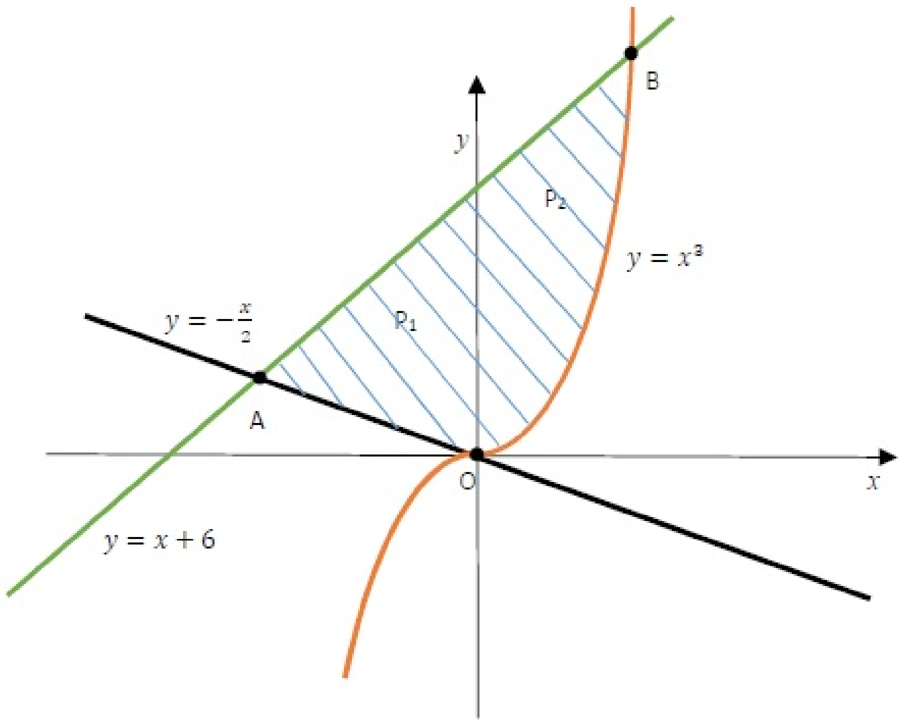
$$P_1 = \int_{-4}^{0} \left(6 + x - (-\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Big|_{-4}^{0} =$$

$$= 24 - 12 = 12,$$

$$P_2 = \int_{0}^{2} (6 + x - x^3)\, dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} = 12 + 2 - 4 = 10.$$

Prema tome je $P = P_1 + P_2 = 12 + 10 = 22.$



Slika 4.6 Deo ravni dobijen presekom date krive i datih pravih.

Poglavlje 5

Određivanje dužine luka krive primenom određenog integrala

FORMULA ZA ODREĐIVANJE DUŽINA LUKA KRIVE

Datom formulom se određuje dužina luke krive koja je zadata u eksplicitnom obliku. Pokazano je kako se može izvesti formula za obim kruga.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x), \;\; x \in [a, b]$. Takođe, neka postoji funkcija $y = f'(x)$, koja je neprekidna na $[a, b]$. Posmatrajmo krivu Γ_f datu funkcijom f.

Tada je

$$d_{(l)} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx,$$

gde je $l = \Gamma_f$, a $d_{(l)}$ dužina te krive.
Odredimo obim kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

$\mathbf{Rešenje.}$Posmatraćemo dužinu luka kružnica $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, u oznaci l, u prvom kvadrantu i ona predstavlja četvrtinu obima kruga. Tada imamo da je:

$$l = \int_0^r \sqrt{1 + \left((\sqrt{r^2 - x^2})'\right)^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$
$$\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Poslednji integral je dat kao tablični integral i imamo da je

$$l = r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = r \cdot (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{r\pi}{2},$$

gde je $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ i $\arcsin 0 = 0.$ Ako sa O označimo traženi obim kruga, tada imamo da je:

$$O = 4l = 2r\pi.$$

PRIMER

Određivanje dužine luka krive.

Odrediti dužinu luka krive $f(x)=3x^{2/3}-10$ od tačke $A(8,2)$ do tačke $B(27,17)$.

Rešenje.Kako je $f'(x)=2x^{-1/3}$, to je tražena dužina luka

$$l=\int_8^{27}\sqrt{1+(2x^{-1/3})^2}dx=\int_8^{27}\sqrt{1+\frac{4}{x^{2/3}}}dx=\int_8^{27}\frac{\sqrt{4+x^{2/3}}}{x^{1/3}}dx.$$

Poslednji integral se rešava smenom $t=x^{2/3}+4,\ dt=\frac{2}{3}x^{-1/3}dx,$ pri čemu je za $x=8$, $t=8$, a za $x=27$, $t=13$. Tako se dobija

$$l=\frac{3}{2}\int_8^{13}\sqrt{t}dt=t^{3/2}\Big|_8^{13}=\sqrt{13^3}-\sqrt{8^3}\approx 24,245\,.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - primer izračunavanja dužine luka krive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

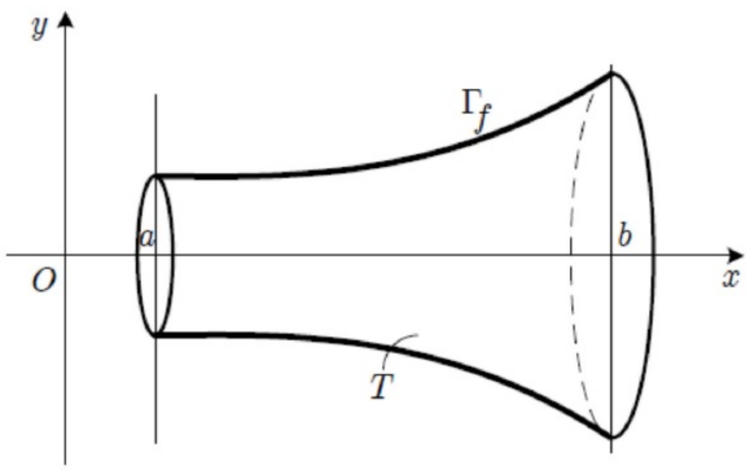
Poglavlje 6

Određivanje zapremine i površine rotacionog tela primenom određenog integrala

FORMULE ZA ODREĐIVANJE ZAPREMINE I POVRŠINE ROTACIONOG TELA

Ovde posmatramo slučaj kada deo neprekidne funkcije rotira oko x-ose. Analogno se mogu izvesti formule kada se rotacija vrši oko y-ose ili generalnije oko proizvoljne prave.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Pod rotacionim telom $T \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je u ovom slučaju generisano krivom $l = \Gamma_f$ podrazumeva se telo nastalo rotacijom te krive oko x-ose za 2π .



Slika 6.1 Rotaciono telo u slučaju y=f(x)>0 , za x∈[a,b].

Na potpuno analogan način mogu se posmatrati rotaciona tela nastala rotacijom oko y-ose. U generalnijem slučaju (koji ovde neće biti razmatran), rotaciono telo može nastati rotacijom krive oko bilo koje prave u $\mathbb{R}^2$, kao ose.

Za slučaj dat na prethodnoj slici biće date formule preko određenog integrala za izračunavanje zapremine tela T i površine omotača M. Pod omotačem tela T podrazumevamo površinu u $\mathbb{R}^3$ koja je nastala kao trag rotacije krive Γ_f. Za telo T, tada važi da se njegova zapremina računa prema formuli

$$V_{(T)} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Površina omotača M tela T se računa prema formuli

$$M_{(T)} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

Moguće je razmatrati slučajeve i kada je funkcija negativna, tj. $y = f(x) < 0$ ili ako funkcija uzima za neke vrednosti promenljive x vrednost nula ili menja znak na svom domenu, analogno ovom slučaju.

PRIMER - IZRAČUNAVANJE ZAPREMINE ROTACIONOG TELA

Izračunavanje zapremine torusa.

Odrediti zapreminu torusa koji se dobija obrtanjem kružnice $x^2 + (y-3)^2 = 4$oko $Ox-$ ose.

Rešenje. Označimo sa $f_1(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$ i $f_2(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$. Tada je tražena zapremina

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (f_1(x))^2\, dx - \pi \int_{-r}^{r} (f_2(x))^2\, dx.$$

Prema tome je

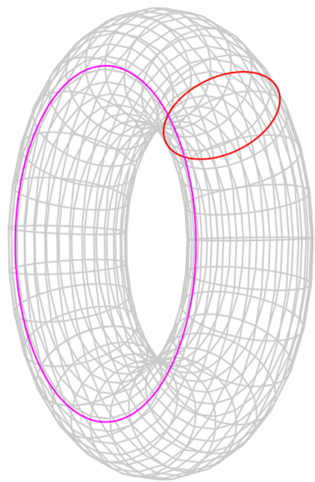
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} \left((3+\sqrt{4-x^2})^2 - (3-\sqrt{4-x^2})^2\right) dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \left(9 + 6\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2 - 9 + 6\sqrt{4-x^2} - 4 + x^2\right) dx = \\ &= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}. \end{aligned}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ parna funkcija, tada na osnovu ranije pomenute osobine za određeni integral važi

$$\begin{aligned} 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} &= 2 \cdot 12\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = \\ &= 24\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Poslednji integral se rešava smenom $x = 2\sin t$, gde je $dx = 2\cos t\, dt$. Za $x = 0$ nakon uvođenja smene donja granica postaje $t = 0$. Slično za $x = 2$ je $t = \frac{\pi}{2}$. Konačno imamo da je

$$V = 96\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 96\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= 96\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 24\pi^2.$$



Slika 6.2 Torus koji se dobija rotacijom kružnice čiji centar nije na Ox osi oko Ox ose.

PRIMER - ODREĐIVANJE POVRŠINE OMOTAČA ROTACIONOG TELA

Određivanje površine lopte.

Odrediti površinu lopte koja se dobije rotacijom kružnice $x^2 + y^2 = 4$ oko Ox -ose.

Rešenje. Rotiranjem gornjeg dela polukružnice zadate funkcijom $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ oko $Ox -$ ose dobija se lopta čija se površina izračunava po formuli

$$P = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{4 - x^2} \right)' \right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4\pi x|_{-2}^{2} = 16\pi.$$

Poglavlje 7

Nesvojstveni integral

POJAM

Ovde uvodimo novu vrste integracije koja predstavlja uopštenje određenog integrala realne funkcije jedne realne promenljive.

Prilikom definisanja određenog integrala imamo zahteve da je podintegralna funkcija ograničena na intervalu integracije i da je taj interval konačan. Oslobađajući se jednog od ovih zahteva dobijamo dva tipa nesvojstvenih integrala realnih funkcija jedne realne promenljive.

Izostavljanjem zahteva da je interval na kome vršimo integraciju konačan, dobijamo da određeni (svojstven) integral postaje nesvojstven integral prve vrste, dok izostavljanje zahteva ograničenosti podintegralne funkcije, dobijamo da određeni (svojstven) integral postaje nesvojstven integral druge vrste.

Postoje i nesvojstveni integrali kod kojih istovremeno pomenuta dva zahteva nisu ispunjena, ali takve slučajeve ovde nećemo razmatrati.

7.1 Nesvojstveni integral prve vrste

INTEGRAL SA BESKONAČNOM GORNJOM GRANICOM

Situacija kada je samo gornja granica integrala beskonačna.

Neka je dat interval $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, i neka je data funkcija $y = f(x)$ koja je ograničena na $[a, +\infty)$. Tada ima smisla posmatrati integral

$$\int_a^c f(x)dx, \qquad \text{za} \quad c \geq a,$$

i sledeći limes:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

Granična vrednost prethodnog limesa naziva se nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $+\infty$ i on može postojati u $\mathbb{R}$ ili ne (u zavisnosti da li ova granična vrednost konvergira ili ne). Shodno tome, za posmatrani nesvojstven integral se kaže da konvergira ili ne u $+\infty$.

U slučaju da integral konvergira u $\mathbb{R}$ ta vrednost se naziva istim imenom - nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $+\infty$. Ako posmatrani limes postoji postoji u $\mathbb{R}$, tada se on označava sa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Napomena. Da bi integrali u intervalu $[a, c]$ egzistirali, pretpostavka je da je funkcija f neprekidna; Prilikom zadavanja zadatka, poslednjom oznakom vrlo često se označava dati limes, ne znajući da li on postoji u $\mathbb{R}$ ili ne.

PRIMER 1

Rešavanje nesvojstvenog integrala sa beskonačnom gornjom granicom.

Odrediti vrednost integrala $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ je neprekidna za $x \geq 2$, ali kako je interval integracije beskonačan, polazni integral je nesvojstveni integral prve vrste. Tada je

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{c\to+\infty} \int_2^{c} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_2^c = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{c-1}{c+1}\right|\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{c\to+\infty}\left|\frac{c-1}{c+1}\right|\right) - \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 3) = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\lim_{c\to+\infty}\frac{c-1}{c+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 3 = \\ &= \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

Ovde je iskorišćeno da je

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{c-1}{c+1} = 1.$$

Dakle, posmatrani nesvojstveni integral konvergira.

VIDEO KLIP 1

Integral sa beskonačnom gornjom granicom - parcijalna integracija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

INTEGRAL SA BESKONAČNOM DONJOM GRANICOM

Situacija kada je samo donja granica integrala beskonačna.

Neka je dat interval $(-\infty, \ b]$, $b \in \mathbb{R}$ i neka je data funkcija $y = f(x)$ koja je ograničena na $(-\infty, \ b]$. Tada ima smisla posmatrati integral

$$\int_c^b f(x)dx, \qquad \text{za} \quad c \leq b,$$

i sledeći limes:

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Data granična vrednost naziva se nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $-\infty$ i on može postojati u $\mathbb{R}$, ili ne. Ako prethodni limes postoji u $\mathbb{R}$, tada se koristi oznaka

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

Napomena. U ovom slučaju ostaju na snazi svi komentari koji su dati u slučaju kada je gornja granica integrala beskonačna.

INTEGRAL SA BESKONAČNOM DONJOM I GORNJOM GRANICOM

Situacija kada je donja i gornja granica integrala beskonačna.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, $x \in (-\infty, \ +\infty) = \mathbb{R}$. Tada je za tu funkciju pretpostavka da je ograničena na $\mathbb{R}$.

Granična vrednost:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{c \to +\infty} \int_b^c f(x)dx$$

koja se označava i sa

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ c \to +\infty}} \int_a^c f(x)dx$$

ako postojati u $\mathbb{R}$, tada za nju kažemo da je nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $\mathbb{R}$. U tom slučaju se i za rezultat prethodne granične vrednosti kaže isto. U ovom slučaju se koristi oznaka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Napomena. Svi komentari koji su dati u vezi sa prethodnim slučajevima važe analogno i u ovom slučaju.

Odrediti vrednost integrala $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Rešenje. Imamo da je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{arctg} x\Big|_a^b =$$
$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Dakle, posmatrani integral konvergira.

VIDEO KLIP 2

Integral sa beskonačnom donjom i gornjom granicom

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

GLAVNA VREDNOST INTEGRALA

Ako granična vrednost u (2) ne postoji, ali postoji granična vrednost (1), tada za nju kažemo da je Košijev integral ili glavna vrednost integrala.

Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Posmatrajmo sledeću graničnu vrednost

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Ako granična vrednost (1) postojati u $\mathbb{R}$, tada za nju kažemo da je Košijev integral funkcije f u $\mathbb{R}$, odnosno glavna vrednost integrala

$$\lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{c\to+\infty} \int\limits_{b}^{c} f(x)dx \tag{2}$$

i označavamo

$$v.\,p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Napomena. Oznaka $\mathbf{v.p.}$ potiče od francuskog izraza *valeur principal*, što znači glavna vrednost. Integral dat sa (1) je specijalan slučaj integrala datog sa (2) i veoma je bitan objekat u matematici i drugim inženjerskim naukama.

7.2 Nesvojstveni integral druge vrste

INTEGRAL NEOGRANIČENE FUNKCIJE NA POSMATRANOM OGRANIČENOM INTERVALU

Nesvojstveni integral druge vrste se javlja kada je podintegralna funkcija neograničena u nekoj tački (ili tačkama) unutar intevala integracije ili u njegovim rubnim tačkama.

Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna funkcija na svakom intervalu $[a, b - \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ i neograničena u tački b. Tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Analogno je moguće definisati nesvojstveni integral druge vrste za neograničenu funkciju $y = f(x)$ u tački a i koja je neprekidna u svim tačkama intervala $[a+\delta, b]$, $(\delta > 0)$ na sledeći način:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

U slučaju da je funkcija $y = f(x)$ neograničena u tački $c \in (a, b)$, a neprekidna u svakoj tački intervala $[a, c - \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ i $[c+\delta, b]$, $(\delta > 0)$, tada važi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Kao i kod nesvojstvenog integrala prve vrste može se definisati glavna vrednost prethodnog integrala i to preko sledeće granične vrednosti:

$$\text{v.p.} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right).$$

Sve napomene koje su date kod nesvojstvenog integrala prve vrste analogno važe i ovde, samo što se ovde govori o neograničenim podintegralnim funkcijama na domenu integracije koji je ograničen.

PRIMER 1

Rešavanje nesvojstvenog integrala druge vrste.

Odrediti vrednost integrala $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ u tački $x = 1 \in [0, 2]$ ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 1$ jer je $\lim\limits_{x \to 1\pm} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Dakle, ova funkcija je neograničena u tački $x = 1$, ali je neprekidna na intervalima $[0, 1)$ i $(1, 2]$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) + \lim_{\delta \to 0+} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_{1+\delta}^2 \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} - 1 - 1 + \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{\delta} = \\
&= \infty - 1 - 1 + \infty = \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

U nekim situacijama se može desiti da podintegralna funkcija nije definisana u nekoj tački integracionog intervala koji je konačan, ali da ona nije neograničena u njenoj okolini. Tada posmatrani integral nije nesvojstven, već je integrabilan u Rimanovom smislu.

VIDEO KLIP

Integral neograničene funkcije na posmatranom ograničenom intervalu.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

Vežba

PRIMER - 1. DEO

Izračunavanje po definiciji određenog integrala – određivanje Darbuovih suma.

Po definiciji izračunati određeni integral

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Rešenje. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na segmentu $[0, 1]$, pa je integrabilna u Rimanovom smislu, tj. postoji limes integrabilne sume. Podelimo ovaj interval tako da je $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n)$. Dalje, neka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ i uzmimo da $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$,predstavljaju sredine ovih intervala, tj. da je

$$\alpha_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + x_{i-1} = \frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n} = \frac{2i-1}{2n}.$$

Integralna suma tada ima oblik

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3}\left(1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2\right).$$

Odredićemo, sada, čemu je jednaka suma $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$. Kako, na osnovu matematičke indukcije, važi da je

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

imamo da je

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}.$$

PRIMER - 2. DEO

Izračunavanje po definiciji određenog integrala – određivanje granične vrednosti koja predstavlja vrednost određenog integrala.

Takođe, važi da je

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=4(1^2+2^2+\ldots+n^2)=4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Konačno dobijamo da je

$$\begin{aligned}1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2&=1^2+2^2+\ldots+(2n)^2-\left(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2\right)=\\&=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i=\frac{1}{4n^3}\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^3}\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^3-n}{12n^3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Konačno dobijamo da je

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

NJUTN – LAJBNICOVA FORMULA I VAŽNIJE OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

Potrebno je usvojiti ove osobine jer se intenzivno koriste u rešavanju zadataka.

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0;$

b) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx;$

c) $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\big)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx;$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$ gde je $c\in[a,b]$;

e) $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$ $-$ parcijalna integracija za određene integrale;

f) $\int_a^b f(x)dx = \int_p^q f(x(t)) \cdot x'(t)dt,$ gde je $x = x(t),$ $t \in [p, q] \subseteq \mathbb{R}$, $a = x(p)$ i $b = x(q)$, monotona i diferencijabilna funkcija s neprekidnom izvodnom funkcijom;

g) Ako je funkcija $y = f(x)$ neparna funkcija, tada je $\int_{-a}^a f(x)dx = 0;$

h) Ako je funkcija $y = f(x)$ parna funkcija, tada je $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Stav (Njutn – Lajbnicova formula). Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, za $x \in [a, b]$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gde je F jedna (bilo koja) primitivna funkcija za funkciju f.

ZADATAK 1-1.DEO

Metod linearnosti

Izračunati naredne integrale

$$1)\quad \int_1^2 (x^2 - e^x)dx,$$

$$2)\quad \int_{-1}^1 (x^2 + 1)dx,$$

$$3)\quad \int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x^3}dx,$$

$$4)\quad \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \Big(\frac{1}{x(1-\sqrt{x})} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\Big)dx,$$

$$5)\quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2)dx.$$

Rešenje.

1)

$$\int_1^2 (x^2 - e^x)dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 e^x dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - (e^2 - e^1) = \frac{7}{3} - e^2 + e.$$

2)

$$\int_{-1}^1 (x^2+1)dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 + x\Big|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + 1 - (-1)$$
$$= \frac{8}{3}.$$

3)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x^3}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}dx - 2\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{-1} + 2\cdot\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1} =$$
$$= -\Big(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2}\Big) + \Big(\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(-2)^2}\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}.$$

4)

$$\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \Big(\frac{1}{x(1-\sqrt{x})} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\Big)dx = \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \Big(\frac{1+\sqrt{x}}{x(1-x)} - \frac{\sqrt{x}+x}{x(1-x)}\Big)dx = \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1-x}{x(1-x)}dx =$$
$$= \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} = \ln\frac{3e}{2} - \ln\frac{e}{2} = \ln\frac{\frac{3e}{2}}{\frac{e}{2}} = \ln 3.$$

ZADATAK 1-2.DEO

Nastavak rešavanja prvog zadatka - metod linearnosti.

5) Imamo da je

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + 2x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}) + 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

ZADATAK 2

Metod smene u određenom integralu

Koristeći metod smene promenljive, izračunati sledeće integrale:

$$1)\quad \int_0^3 \frac{1}{x+2}dx \qquad\qquad 2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx.$$

Rešenje.1) Prikažimo dva načina na koja je moguće odrediti ovaj integral.
Prvi način Rešimo odgovarajući neodređeni integral metodom smene

$$\int \frac{1}{x+2}dx = \left| \begin{array}{c} Smena: \\ x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|x+2| + C.$$

Zatim, u dobijeno rešenje, uvrstimo granice:

$$\int_0^3 \frac{1}{x+2}dx = \ln|x+2| \Big|_0^3 = \ln 5 - \ln 2.$$

Drugi način Uvešćemo smenu $t = x+2, dt = dx$, i odmah ćemo zameniti granice. Za donju granicu, kada je $x = 0$, dobijamo da je $t = 0+2 = 2$. Za gornju granicu, na osnovu $x = 3$, sledi da je $t = 3+2 = 5$.

$$\int_0^3 \frac{1}{x+2}dx = \left| \begin{array}{c} Smena: \\ t=x+2 \\ dt=dx \\ 0 \to 2 \\ 3 \to 5 \end{array} \right| = \int_2^5 \frac{1}{t}dt = \ln|t| \Big|_2^5 = \ln 5 - \ln 2.$$

2) Ovaj integral ćemo odrediti na drugi od prethodna dva načina.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} Smena: \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ 0 \to 1 \\ \frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{t}\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

ZADATAK 3

Metod parcijalne integracije

Koristeći metod parcijalne integracije, rešiti sledeće integrale:

$$1) \quad \int_0^{\ln 2} xe^x dx; \qquad\qquad 2) \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$$

Rešenje.

$$1) \quad \int_0^{\ln 2} xe^x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| = xe^x \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2\ln 2 - e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 2$$

$$2)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{36}\sin\frac{\pi}{6} - 2\left(-x\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{72} - 2\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right)$$

$$= \frac{17\pi^2}{72} - 2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{17\pi^2}{72} - 2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{17\pi^2}{72} - 2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{17\pi^2}{72} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1.$$

PRIMENA ODREĐENOG INTERVALA

Potrebno je usvojiti ove formule jer se intenzivno koriste u rešavanju zadataka.

Površina figure ograničene x -osom, pravama $x = a$ i $x = b$ i grafikom nenegativne funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{P} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}.$$

Površina figure ograničene x -osom, pravama $x = a$ i $x = b$ i grafikom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{P} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f(x)}|\mathbf{dx}.$$

Površina figure ograničene x -osom, pravama $x = a$ i $x = b$ i graficima funkcija $f(x)$ i $g(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{P} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f(x) - g(x)}|\mathbf{dx}.$$

Dužina luka krive $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\ell = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \sqrt{\mathbf{1 + (f'(x))^2}}\mathbf{dx}.$$

Zapremina tela koje se dobija rotacijom krive $y = f(x)$ oko x -ose na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{V} = \pi \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\mathbf{f(x)})^{\mathbf{2}} \mathbf{dx}.$$

Površina omotača tela koje se dobija rotacijom krive $y = f(x), f(x) \geq 0$, oko x -ose na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{M} = \mathbf{2}\pi \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)} \sqrt{\mathbf{1} + (\mathbf{f'(x)})^{\mathbf{2}}} \mathbf{dx}.$$

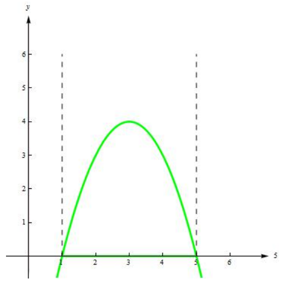
Površina omotača tela koje se dobija rotacijom krive $y = f(x)$ oko x -ose na intervalu $[a, b]$

$$\mathbf{M} = \mathbf{2}\pi \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f(x)}| \sqrt{\mathbf{1} + (\mathbf{f'(x)})^{\mathbf{2}}} \mathbf{dx}.$$

ZADATAK 4

Izračunavanje površine ravnih likova.

Izračunati površine ravnih figura ogranienih:
1) Parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i x -osom.
2) Krivom $y = e^x$ i pravama $x = 1, x = 4$ i $y = 0$.
Rešenje. 1) Na datoj slici vidimo da je posmatrana ravna figura ograni\v cena grafikom funkcije $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, x -osom i vertikalnim pravama $x = x_1$ i $x = x_2$, gde su $x_{1,2}$ realni brojevi takvi da je $f(x_1) = f(x_2) = 0$.



Slika 8.1 Grafički prikaz tražene površine

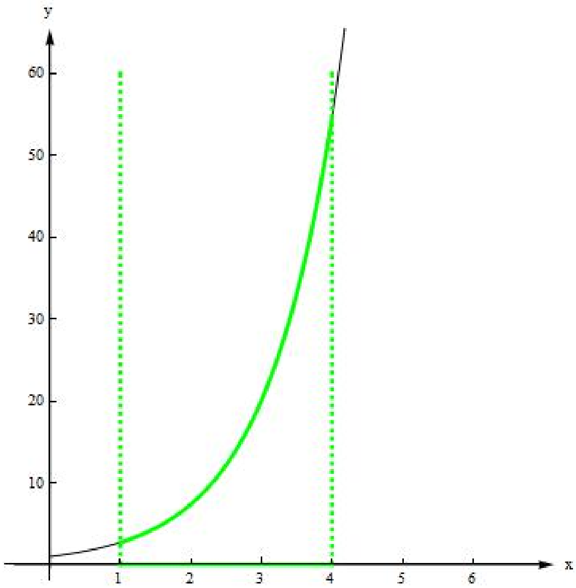
Jasno je da je

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \quad \text{tj.} \quad x_1 = 1, x_2 = 5.$$

Tražena površina je jednaka

$$\mathbf{P}=\int_1^5(-x^2+6x-5)dx=\Big(-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\Big)\Big|_1^5=-\frac{125}{3}+75-25+\frac{1}{3}-3+5$$
$$=\frac{32}{3}.$$

2) Na datoj slici primećujemo da je figura, čiju površinu treba da odredimo, ograničena grafikom funkcije $f(x)=e^x$, pravama $x=1$ i $x=4$ kao i pravom $y=0$, tj. x -osom.



Slika 8.2 Grafički prikaz tražene površine

Tražena površina je

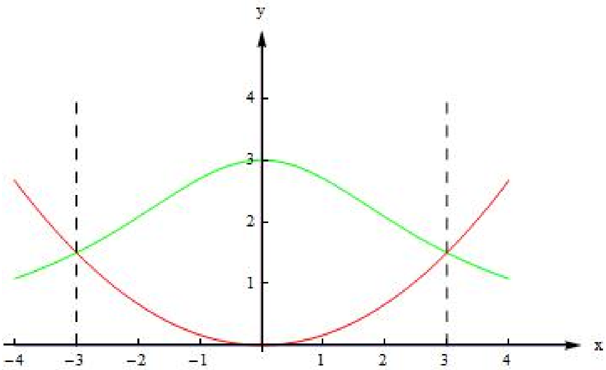
$$\mathbf{P}=\int_1^4 e^x dx=e^x\Big|_1^4=e^4-e.$$

ZADATAK 5

Izračunavanje površine figure određene kao presek dve krive.

Izračunati površinu figure ograničene krivama $f_1(x)=\dfrac{27}{x^2+9}$ i $f_2(x)=\dfrac{1}{6}x^2$.

Rešenje. Figura, čija se površina traži, predstavljena je na datoj slici.



Slika 8.3 Figura određena datim krivama.

Tačke preseka ovih krivih su rešenja sistema

$$\begin{cases} y = \frac{27}{x^2+9} \\ y = \frac{x^2}{6} \end{cases}$$

Iz druge jednačine sistema imamo da je $x^2 = 6y$.

Zamenom ovog rezultata u prvu jednačinu sistema dobijamo da je

$$y = \frac{27}{6y+9} \quad \text{tj.} \quad 6y^2 + 9y - 27 = 0$$

Rešenja poslednje jednačine su

$$y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-27)}}{2 \cdot 6} = \frac{-9 \pm 27}{12} \quad \text{tj.} \quad y_1 = -3 \ \vee \ y_2 = \frac{3}{2}.$$

Kako se krive f_1 i f_2 nalaze iznad x -ose, to sledi da je y -koordinata obe presečne tačke prethodno dobijeno y_2 . Odatle pak sledi da su presečne tačke ovih krivih $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ i $\left(3, \frac{3}{2}\right)$. Kako se, za $-3 \leq x \leq 3$, kriva l_1 nalazi iznad krive l_2 tražena površina je jednaka

$$\mathbf{P} = \int_{-3}^{3} \left| \frac{27}{x^2+9} - \frac{1}{6}x^2 \right| dx = \int_{-3}^{3} \frac{3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx \left| \begin{array}{cc} \textbf{Smena:} & \\ \frac{x}{3} = t, & \frac{1}{3}dx = dt \\ -3 \to -1, & 3 \to 1 \end{array} \right| - \int_{-3}^{3} \frac{1}{6}x^2 dx =$$

$$= 9 \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1} dt - \frac{1}{6} \int_{-3}^{3} x^2 dx = 9 \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{18} x^3 \Big|_{-3}^{3} = 9\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{18}\left(3^3 - (-3)^3\right) = \frac{9}{2}\pi - 3.$$

ZADATAK 6

Određivanje dužine luka krive primenom određenog intgrala.

1) Izračunati dužinu duži od $x=0$ do $x=5$, na pravoj $y=x$.
2) Izračunati dužinu luka krive $y=\ln x$ od $x_1=\sqrt{3}$ do $x_2=\sqrt{8}$.

Rešenje.
1) Imamo da je

$$\ell=\int_0^5\sqrt{1+\left((x)'\right)^2}dx=\int_0^5\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}\int_0^5 dx=\sqrt{2}x\Big|_0^5=5\sqrt{2}.$$

2) Imamo da je

$$\ell=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left((\ln x)'\right)^2}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}dx=$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}dx\left|\begin{array}{c}\textbf{SMENA:}\\ \sqrt{1+x^2}=t\\ x=\sqrt{t^2-1}\\ dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt\\ \sqrt{3}\to 2\\ \sqrt{8}\to 3\end{array}\right|=$$

$$=\int_2^3\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\cdot t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3 dt+\int_2^3\frac{1}{t^2-1}dt=$$

$$=\int_2^3 dt+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{t+1}dt=t\Big|_2^3+\frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^3-\frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_2^3=1$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

ZADATAK 7

Određivanje obima kružnice.

Izračunati obim centralne kružnice poluprečnika r .

Rešenje. Jednačina kružnice poluprečnika r sa centrom u koordinatnom početku je $x^2+y^2=r^2$. Dužina luka krive $y=\sqrt{r^2-x^2}$, u prvom kvadrantu, jednaka je

$$\ell_1 = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'\right)^2} dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx \left| \begin{array}{c} \textbf{SMENA:} \\ \frac{x}{r} = t \\ \frac{dx}{r} = dt \\ 0 \to 0 \\ r \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = r\left(\arcsin x\Big|_0^1\right) = \frac{r\pi}{2}.$$

Odatle sledi da je obim kružnice jednak

$$O = 4\ell_1 = 2r\pi.$$

ZADATAK 8

Izvođenje formule za zapreminu lopte primenom određenog integrala.

Izračunati zapreminu lopte, koja se dobija roracijom kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ oko Ox ose.

Rešenje.

Loptu dobijamo tako što, na primer, gornja polukružnica rotira oko x-ose. Jednačina gornje polukružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Tada je

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4r^3\pi}{3}$$

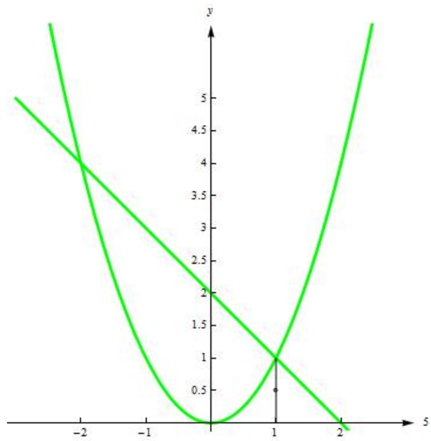
ZADATAK 9

Određivanje zapremine rotacionog tela.

Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotiranjem oko x -ose:
1) Krive $y = e^x$ na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$.
2) Figure koju ograničavaju kriva $y = x^2$ i prave $y = -x + 2, y = 0$ i koja sadrži tačku $A(1, 0.5)$.
Rešenje.1) U ovom slučaju važi da je

$$V = \pi \int_{\ln 2}^{\ln 7} \left(e^x\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} e^{2x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 7} = \frac{45\pi}{2}.$$

2) Na datoj slici možemo primetiti da se figura koja rotira nalazi ispod grafika funkcija $y = x^2$ i $y = -x + 2$ a iznad x -ose. Grafik funkcije $y = x^2$ dodiruje x -osu u tački $(0, 0)$ a prava $y = -x + 2$ seče x -osu u tački $(2, 0)$.



Slika 8.4 Grafički prikaz figure koja rotira oko Ox ose.

Traženu zapreminu ćemo odrediti tako što ćemo površinu koja rotira podeliti na dva dela: deo I za $0 \leq x \leq 1$ i deo II za $1 \leq x \leq 2$. Zapremina V_1 tela nastalog rotacijom dela figure I jednaka je zapremini tela dobijenog rotacijom krive $y = x^2$ oko x -ose na segmentu $[0, 1]$. Zapremina V_2 tela nastalog rotacijom dela figure II jednaka je zapremini tela dobijenog rotacijom prave $y = -x + 2$ oko x -ose na segmentu $[1, 2]$.

Zapremina tela, u ovom zadatku, jednaka je

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx + \pi \int_1^2 (-x+2)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 + \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8\pi}{15}.$$

ZADATAK 10

Određivanje površine figure i zapremine rotacionog tela.

Odrediti površinu figure ograničene krivom $y = x^2 + \dfrac{9}{x^2}$, x -osom i pravama $x = 1$ i $x = 3$. Odrediti zatim zapreminu tela koje nastaje kada opisana površ rotira oko x -ose.

Rešenje. Površina posmatrane figure je jednaka

$$\mathbf{P} = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) dx = \int_1^3 x^2 dx + 9 \int_1^3 x^{-2} dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^3 - \frac{1}{x}\Big|_1^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 9 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot 1 = \frac{44}{3}.$$

Tražena zapremina je

$$\mathbf{V} = \pi \int_1^3 \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \left(x^4 + 18 + 81x^{-4}\right) dx = \frac{\pi}{5}x^5\Big|_1^3 + \pi \cdot 18x\Big|_1^3 - \pi \cdot 27x^{-3}\Big|_1^3$$

$$= \pi\left(\frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} + 18 \cdot 3 - 18 \cdot 1 - \frac{27}{3^3} + \frac{27}{1^3}\right) = \frac{552\pi}{5}.$$

ZADATAK 11-1.DEO

Izračunavanje zapremine tela dobijenog tako što fiigura definisana presekom dve krive rotira oko Ox ose.

Krive $y = \sqrt{8x}$ $y = (x-4)^{\frac{3}{2}}$ rotiraju oko x -ose. Izračunati zapreminu rotirajućeg tela ograničenog ovim krivama.

Rešenje. Primetimo, najpre, da je figura $y = \sqrt{8x}$ definisana za $x \geq 0$, a figura $y = (x-4)^{\frac{3}{2}}$ definisana za $x \geq 4$. Telo, čiju zapreminu nastojimo da odredimo, određeno je rotacijom ove dve krive za $0 \leq x \leq x_0$, gde je x_0 apsicisna koordinata preseka te dve krive (videti sliku - kriva $y = \sqrt{8x}$ obojena je zelenom, a kriva $y = (x-4)^{\frac{3}{2}}$ crvenom bojom). Koordinate presečne tačke ove dve krive jesu rešenje sistema jedna\v cina

$$\begin{cases} y = \sqrt{8x} \\ y = (x-4)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

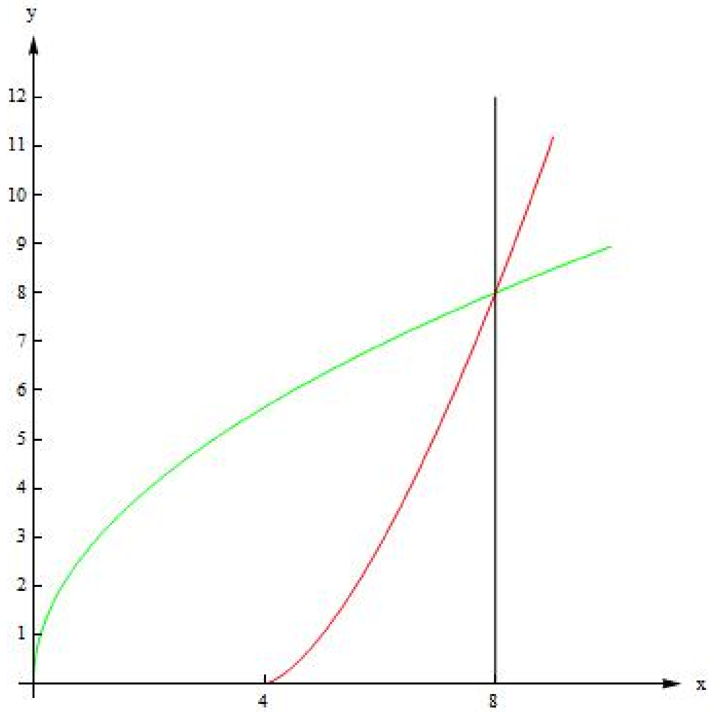
Kvadriranjem obe jednačine ovog sistema dolazimo do zaključka da je

$$(x-4)^3 - 8x = 0$$

Sređivanjem ove jednačine, dobijamo da je

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - 8x = (x-8)(x^2 - 4x + 8) = 0.$$

Kako je, za $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 > 0$ to sledi da je $x = 8$ jedino rešenje posmatranog sistema po x .



Slika 8.5 Grafički prikaz problema.

Možemo zaključiti da je problem, koji razmatramo, ekvivalentan problemu određivanja zapremine tela nastalog rotacijom krive $y=\sqrt{8x}$, za $0\leq x\leq 8$, umanjenoj za zapreminu krive $y=(x-4)^{\frac{3}{2}}$, za $4\leq x\leq 8$.

ZADATAK 11-2.DEO

Određivanje zapremina tela određenih rotacijom pojedinačnih kriva oko Ox ose.

Zapremina V_z , određena rotacijom krive $y=\sqrt{8x}$, za $0\leq x\leq 8$, jednaka je

$$V_z=\pi\int_0^8\left(\sqrt{8x}\right)^2dx=\pi\int_0^8 8xdx=4x^2\Big|_0^8=4\cdot 8^2-4\cdot 0=256.$$

Zapremina V_c , određena rotacijom krive $y=(x-4)^{\frac{3}{2}}$, za $4\leq x\leq 8$, jednaka je

$$V_c=\pi\int_4^8\left((x-4)^{3/2}\right)^2dx=\left|\begin{array}{c}x-4=t\\ dx=dt\\ 4\to 0\\ 8\to 4\end{array}\right|=\pi\int_0^4 t^3dt=\frac{\pi}{4}t^4\Big|_0^4=64\pi$$

Konačno, tražena zapremina je jednaka

$$V=V_z-V_c=256\pi-64\pi=192\pi.$$

ZADATAK 12

Određivanje površine omotača rotacionog tela.

Odrediti površinu omotača tela koje nastaje obrtanjem krive $y^2 = 12x$ oko Ox –ose nad intervalom $[0,3]$.

Rešenje. Kako je $2yy' = 12$, tj. $y' = 6/y$, to je tražena površina jednaka

$$M = 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi \int_0^3 y\frac{\sqrt{36+y^2}}{y}dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 \sqrt{36+12x}dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{(36+12x)^{3/2}}{3}\bigg|_0^3 =$$

$$= 24(2\sqrt{2}-1)\pi.$$

ZADATAK 13

Određivanje površine omotača rotacionog tela

Odrediti površinu omotača tela koje nastaje rotacijom oko Oy -ose krive $x = y^3$ od tačke $x = 0$ do tačke $x = 8$.

Rešenje. Odgovarajuće vrednosti za $x = 0$ i $x = 8$ su redom $y = 0$ i $y = 2$, pa je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{1+(x_y')^2}dy = \\ &= 2\pi \int_0^2 y^3\sqrt{1+9y^4}dy = \\ &= \frac{2\pi}{36}\int_1^{145}\sqrt{u}du = \\ &= \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{145^3}-1\right). \end{aligned}$$

ZADATAK 14

Određivanje površine lopte poluprečnika 2.

Izračunati površinu lopte poluprečnika $r = 2$.

Rešenje. Rotiranjem gornje polovine kružnice $y=\sqrt{2^2-x^2}$ oko x -ose dobija se lopta. Imamo da je

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{2^2-x^2}\right)'\right)}dx=2\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx=$$
$$=2\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\pi x\Big|_{-2}^{2}=16\pi.$$

ZADATAK 15-1.DEO

Određivanje površine figure i površine omotača rotacionog tela.

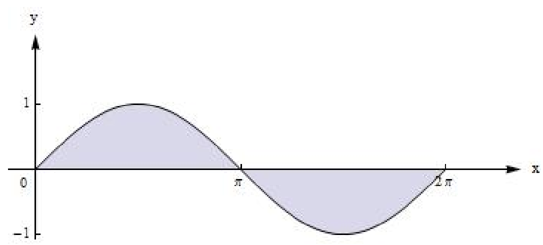
Odrediti površinu geometrijske figure odrešene krivom $y=\sin x$ i x -osom za $0\le x\le 2\pi$. Nakon toga, odrediti površinu omotača tela dobijenog rotacijom krive $y=\sin x$ oko x -ose za $0\le x\le 2\pi$.

Rešenja. Tražena površina se računa prema sledećoj formuli

$$\mathbf{P}=\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int\limits_0^{\pi}\sin x dx-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=$$
$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=4.$$

Napomena. Korišćena je prethodna formula jer je grafik funkcije promenljivog znaka na intervalu integracije (videti sliku.) Stoga smo koristili da je

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi],\\ -\sin x, & x\in(\pi,2\pi].\end{cases}$$



Slika 8.6 Sinusoida na intervalu $0\le x\le 2\pi$.

Shodno datoj napomeni postupamo i prilikom određivanja površine omotača dobijenog rotacionog tipa. Tada je

$$M = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = 2\pi \int_0^{2\pi} |\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$\left| \begin{array}{c:c} \textbf{Smena int. 1:} & \textbf{Smena int. 2} \\ \cos x = t & \cos x = t \\ -\sin x dx = dt & -\sin x dx = dt \\ 0 \to 1 & \pi \to -1 \\ \pi \to -1 & 2\pi \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}dt - 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt = 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt.$$

Odredimo, sada, integral

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt.$$

ZADATAK 15-2.DEO

Određivanje potrebnog integrala za dobijanje konačnog rezultata.

Na prethodnim predavanja smo videli da je

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\Big(t\cdot\sqrt{t^2+1} + \ln|t+\sqrt{t^2+1}|\Big) + c.$$

Tada je

$$I = \frac{1}{2}\Big(t\cdot\sqrt{t^2+1} + \ln|t+\sqrt{t^2+1}|\Big)\Big|_{-1}^{1},$$

pa dobijamo da je

$$M = 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi\left(t\cdot\sqrt{t^2+1} + \ln|t+\sqrt{t^2+1}|\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi\Big(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) - \big(-\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)\big)\Big) =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

ZADATAK 16

Nesvojstveni integral prve vrste.

Odrediti naredne integrale:

$$1)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx, \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} 3^{-x}dx, \qquad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

Rešenje.

$$1) \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$$

$$2) \qquad \int_0^{+\infty} 3^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} 3^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{3^b\ln 3}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln 3}.$$

$$3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx = \lim_{\substack{b\to-\infty\\ c\to+\infty}}\int_b^{c} \frac{x}{(1+x)^3}dx = \lim_{\substack{b\to-\infty\\ c\to+\infty}}\left(\frac{1}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_b^c$$
$$= 0$$

Napomena. Važi da je

$$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \left|\begin{array}{c}\textbf{SMENA:}\\ 1+x=t\\ dx=dt\end{array}\right| = \int \frac{t-1}{t}dt = -\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+C = \frac{1}{2(1+x)^2}$$
$$-\frac{1}{1+x}+C.$$

ZADATAK 17

Nesvojstveni integral druge vrste.

Odrediti naredne integrale: $1)\ \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx, \qquad 2)\ \int_{-2}^{1} \frac{1}{x}dx, \qquad 3)\ \int_0^1 \ln x dx.$

Rešenje.
1) Podintegralna funkcija nije definisana za $x=4$. Takođe, podintegralna funkcija je definisana za $x\le 4$. Zato je

$$\int_0^4 \frac{1}{4-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 4^+}\int_0^{4-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{4-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -2\sqrt{4-x}\Big|_0^{4-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-2\sqrt{4-4+\varepsilon}+2\sqrt{4}) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-2\sqrt{\varepsilon}+4) = 4.$$

2) Podintegralna funkcija nije definisana za $x = 0$, pa je

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|x|\big|_{-2}^{-\varepsilon} + \ln|x|\big|_{\varepsilon}^{1}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|-\varepsilon| - \ln|-2| + \ln|1| - \ln|\varepsilon|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 2\right) = -\ln 2.$$

3) Podintegralna funkcija nije definisana za $x = 0$, a definisana je za $x > 0$, pa je

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(x\ln|x| - x\right)\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1\ln|1| - 1 - \varepsilon\ln|\varepsilon| + \varepsilon\right) =$$
$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln|\varepsilon| + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln|\varepsilon|}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon =$$
$$-1.$$

ZADATAK 18

Rešavanje nesvojstvenog integrala druge vrste – glavna vrednost.

Naći vrednost integrala:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^3}.$$

Rešenje. Kako je $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$, za $x = 2 \in [0,\ \ 3]$ prekidna funkcija, tj. $\lim\limits_{x\to 2\pm}\frac{1}{(x-2)^3} = \pm\ \infty$,

ovaj integral je nesvojstveni integral druge vrste. Tada je:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^3} + \lim_{\delta\to 0+}\int_{2+\delta}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{2(x-2)^2}\Bigg|_0^{2-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0+}\left(-\frac{1}{2(x-2)^2}\Bigg|_{2+\delta}^{3}\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{8}\right) + \lim_{\delta\to 0+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\delta^2}\right) = -\ \infty\ -\frac{3}{8} + \ \infty\ =\ \infty\ -\ \infty\ .$$

Dobijena je neodređenost oblika $\infty\ -\ \infty$. U ovakvim slučajevima se određuje glavna vrednost integrala:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^3} + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{2(x-2)^2} \Bigg|_0^{2-\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{2(x-2)^2} \Bigg|_{2+\varepsilon}^3 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) = -\frac{3}{8}.$$

Dakle, posmatrani integral je konvergentan.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba dodatno da provežbaju.

Izračunati integrale

$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$ rešenje: $\ln 3$

$\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ rešenje: 1

$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ rešenje: $\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right)$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ rešenje: $\frac{\pi}{2}$

$\int_{-1}^{+\infty} e^{-kx} dx, \qquad k > 0$ rešenje: $\frac{e^k}{k}$

Odrediti dužinu luka na paraboli $y^2 = 2x + 1$ koji odseca prava $x - y = 1$. rešenje: $\frac{1}{2}\left(3\sqrt{10} + \sqrt{2} + \ln \frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\right)$

Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene krivama $y = e^x, \quad x = 0, \quad y = 0$ oko x ose. rešenje: $\frac{\pi}{2}$

Zaključak za lekciju 04

ODREĐENI I NESVOJSTVENI INTEGRALI

U ovoj lekciji je obrađena određena integracija, njene primene, kao i nesvojstvena integracija koja predstavlja generalizaciju određene integracije.

Pojam određenog integral se razlikuje od pojma neodređenog integrala, ali se oni dovode u vezu Njutn-Lajbnicovom formulom. Geometrijska interpretacija određenog integral jeste da on predstavlja površinu određenog krivolinijskog trapeze. Međutim, on se može koristiti i za izračunavanje površine proizvoljne figure, izračunavanje dužine luka krive, izračunavanje zapremine i površine obrtnog tela.

Pojam nesvojstvenog integral predstavlja proširenje pojma određenog integrala i to u slučaju kada je jedna ili su obe granice integrala beskonačne ili u slučaju kada je podintegralna funkcija neograničena na interval integracije.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.