UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – II deo

Lekcija 06

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 06

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE – II DEO

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive.

U ovoj lekciji ćemo obraditi sledeće:

- Tejlorov polinom funkcije dve promenljive,
- Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive,
- Apsolutni ekstremi – određivanje najmanje i najveće vrednost funkcije dve promenljive na zatvorenoj oblasti,
- Implicitno zadate funkcije,
- Tangentna ravan i normala površi,
- Kanoničke jednačine površi drugog reda.

Poglavlje 1

Tejlorov polinom funkcije dve promenljive

TOTALNI DIFERENCIJAL n -TOG REDA

Pojam totalnog diferencijala se koristi prilikom definisanja Tejlorovog polinoma za realnu funkciju dve realne promenljive.

Pretpostavimo da je $z=f(x,y)$ realna funkcija dve promenljive definisana u nekoj $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Ako pretpostavimo da u toj oblasti posmatrana funkcija ima sve moguće parcijalne izvode, tada su svi oni neprekidni u oblasti D, pa funkcija u posmatranoj oblasti ima sve moguće diferencijale $d^n f, n=0,1,2,\ldots$ Stoga, za prozvoljnu fiksiranu tačku $M(x_0,y_0)\in D$ i prozvoljnu tačku $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, možemo da uočimo n-ti diferencijal u tački M , u oznaci $d^n f(M), n=0,1,2,\ldots$ definisan sa

$$d^0 f(M)=f(M),$$

$$d^1 f(M)=f'_x(M)(x-x_0)+f'_y(M)(y-y_0),$$

$$d^2 f(M)=f''_{xx}(M)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(M)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(M)(y-y_0)^2,$$

$$\vdots$$

$$d^n f(M)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(M)(x-x_0)^{n-k}(y-y_0)^k.$$

Kako je D otvoren skup tačaka i tačka $M_1(x_1,y_1)\in D$, postoji neko $\varepsilon>0$, tako da cela okolina

$$U_\varepsilon(M_1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x-{x_1}^2+y-{y_1}^2}<\varepsilon\right\}$$

sadržana u oblasti D . Dalje, za proizvoljne tačke $P(x_1,y_1$) i $Q(x_2\ ,\ y_2$) u ravni $\mathbb{R}^2$ označimo sa (P,Q) otvorenu duž koja spaja te tačke i definišimo je na sledeći način

$$(P,Q)=\{(x_{1,}y_1)+t\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)\mid 0<t<1\}.$$

TEJLOROV POLINOM

Datim stavom se uvodi Tejlorova formula za funkciju dve promenljive.

Stav. Ako funkcija $z=f(x,y)$ ima sve potrebne parcijalne izvode na oblasti D, tačka $M_0(x_0,y_0)\in D$ i tačka $M(x,y)\in U_\varepsilon(M_0)$, tada postoji izvesna tačka A na otvorenoj duži ($M_0M)$, takva da važi

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^kf(M_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(A)}{(n+1)!}$$

za svako $n\in\mathbb{N}$.

Pritom, za svako $n=0,1,2,\ldots$ imamo da je

$$d^{n+1}f(A)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n+1-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(A)(x-x_0)^{n+1-k}(y-y_0)^k.$$

Polinom stepena $n\in\mathbb{N}$ oblika

$$T_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^kf(M_0)}{k!},$$

naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena koji odgovara funkciji $z=f(x,y)$ i fiksiranoj tački $M_0(x_0,y_0)\in D$.

Može se uočiti da je

$$T_n(M_0)=f(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial T_n(M_0)}{\partial x}=f'_x(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial T_n(x,y)(M_0)}{\partial y}=f'_y(x_0,y_0),\ldots$$

ANALITIČKA FUNKCIJA

Sve elementarne funkcije dve promenljive su analitičke funkcije u svojim oblastima definisanosti, tako da se u praksi najčešće srećemo sa analitičkim funkcijama.

Kaže se da je funkcija $f(x,y)$ analitička funkcija u oblasti D ukoliko za bilo koju tačku $M_0(x_0,y_0)\in D$ postoji neka okolina $U_\varepsilon(M_0)$ takva da za proizvoljnu tačku $(x,y)\in U_\varepsilon(M_0)$ izraz $R_n(x,y)=f(x,y)-T_n(x,y)\to 0$, kada $n\to\infty$, tj. $T_n(x,y)\to f(x,y)$, kada $n\to\infty$. Prethodni uslov označava da se funkcija $z=f(x,y)$ u nekoj okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$ može razviti u tzv. Tejlorov red, tj. da za svako $(x,y)\in U_\varepsilon(M_0)$ važi jednakost

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^kf(M_0)}{k!}.$$

Dakle, po definiciji svaka funkcija dve promenljive $z=f(x,y)$ je analitička funkcija u nekoj oblasti D, ako se u nekoj okolini proizvoljne tačke $(x_0,y_0)\in D$ može razviti u red dat prethodnom formulom. Ako se posmatra tačka $M_0(0,0)\in D$, tada se odgovarajući Tejlorov red naziva Maklorenov red, a odgovarajući razvoj analitičke funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(0,0) \in D$ se naziva Maklorenov razvoj i on glasi

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(0,0)}{k!}.$$

PRIMER

Određivanje Tejlorovog polinoma.

Razviti funkciju $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ u okolini tačke $(1,3)$ u Tejlorov polinom drugog stepena.

Rešenje. Prvo ćemo odrediti parcijalne izvode funkcije $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ prvog i drugog reda. Tada imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+2)x^{y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+2} \ln x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+2)(y+1)x^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^{y+2} \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y+1}(1 + (y+2)\ln x),$$

pa dobijamo da je

$$f(1,3) = 1, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial x} = 5, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x^2} = 20, \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial y^2} = 0.$$

Tada Tejlorov polinom drugog reda glasi

$$x^{y+2} = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + R_2.$$

Veličina R_2 predstavlja grešku koja se čini prilikom razvoja početne funkcije u polinom.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive

LAGRANŽEV METOD MULTIPLIKATORA

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode je bazirano na znaku drugog diferencijala u tački koja je kandidat da u njoj bude lokalni ekstrem.

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $E \subseteq \mathbb{R}^2$ i uočimo zatvorenu oblast $\overline{E} = E \cup \partial E$. Takođe, neka je implicitno zadata funkcija $\varphi(x, y) = 0$ u $\overline{E}$. Pretpostavimo da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i funkcija φ. Posmatrajmo sledeću funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Funkcija F naziva se Lagranževa funkcija sa multiplikatorom λ i ona nam je osnov za izračunavanje uslovnih ekstrema funkcije f, pri datom uslovu $\varphi(x, y) = 0$ na datoj oblasti. Lagranževa funkcija zavisi od tri nepoznate i to x, y i λ. Veličina λ je novouvedena nepoznata koju nazivamo multiplikator. Određivanja uslovnih ekstrema funkcije f, pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$ se svodi na određivanje lokalnih ekstrema funkcije F.

Prvo formirajmo sistem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0, \end{aligned} \qquad \text{odnosno} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo kandidate za uslovne ekstreme. Tada, za svaki od tih kandidata sprovedemo selekciju po pitanju analize znaka d^2F. U slučaju da je tačka $M(x_0, y_0, \lambda)$ lokalni ekstrem za F, tada je tačka $M(x_0, y_0)$ uslovnog ekstrema funkcije f pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$ na $\overline{E}$. U zavisnosti od znaka drugog diferencijala u tački $M(x_0, y_0)$ za uslovni ekstrem imamo dve mogućnosti:

1° za $d^2F(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni minimum,

2° za $d^2F(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni maksimum.

Ponekad je potrebno odrediti dodatne veze između dx i dy diferencijacijom uslova $\varphi(x,y)=0$, kako bi se odredio znak drugog diferencijala u tački $M_0(x_0,y_0)$.

Napomena. Za $d^2F(M_0)=0$ ne može se ništa zaključiti o lokalnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.

Napomena. U slučaju da je funkcija f realna funkcija od tri ili više promenljivih, potpuno istom metodologijom možemo tražiti uslovne ekstreme. Pritom,možemo imati više od jednog uslova, pri čemu je njihov broj manji od broja promenljivih u polaznoj funkciji.

PRIMER – 1. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – određivanje stacionarnih tačaka i drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y)=x\cdot y$, pri uslovu $x^2+y^2=2$.

Rešenje. Formirajmo Lagranževu funkciju

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=y+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=x+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ x+2\lambda(-2\lambda x)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ x(1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Poslednji sistem se raspada na sledeća dva sistema:

$$\left.\begin{aligned}x&=0,\\ y&=0,\\ 0&=2.\end{aligned}\right\}\quad\vee\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ (1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Prvi sistem je nemoguć, a iz druge jednačine drugog sistema dobijamo da je $\lambda_{1/2}=\pm\dfrac{1}{2}$.

<u>Za $\lambda=-\dfrac{1}{2}$</u> : iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke

$M_1(1,1)$ i $M_2(-1,-1)$ za $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Za $\lambda=\dfrac{1}{2}$: iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=-x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke $M_3(1,-1)$ i $M_4(-1,1)$ za $\lambda=\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Sada određujemo

$$F''_{x^2}=2\lambda,\quad F''_{xy}=1,\quad F''_{y^2}=2\lambda.$$

Dalje, imamo da je

$$d^2F=2\lambda dx^2+2dxdy+2\lambda dy^2.$$

PRIMER – 2. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – diskusija da li dobijene stacionarne tačke jesu uslovni ekstremi.

U tačkama $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=d^2F(M_2')=-dx^2+2dxdy-dy^2=-(dx-dy)^2\le0, \qquad (*)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2+y^2=2$ imamo da je $2xdx+2ydy=0$, tj. $xdx+ydy=0$.

Za tačku $M_1(1,1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $1\cdot dx+1\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\ne0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_1(1,1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.

Za tačku $M_2(-1,-1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $(-1)\cdot dx+(-1)\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\ne0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_2')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_2(-1,-1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.
U tačkama $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_3')=d^2F(M_4')=dx^2+2dxdy+dy^2=(dx+dy)^2\ge0, \qquad (**)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2+y^2=2$ imamo da je $2xdx+2ydy=0,$ tj. $xdx+ydy=0.$

Za tačku $M_3(1,-1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $1\cdot dx+(-1)\cdot dy=0,$ tj. $dy=dx\neq 0.$ Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_3')=4dx^2>0,$$

Dakle, tačka $M_3(1,-1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x,y).$

Za tačku $M_4(-1,1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $(-1)\cdot dx+1\cdot dy=0,$ tj. $dy=dx\neq 0.$ Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_4')=4dx^2>0,$$

Dakle, tačka $M_4(-1,1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x,y).$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

METOD ELIMINACIJE

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive.

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive. To je slučaj kada se iz datog uslova može jedna promenljiva izraziti preko one druge, a onda se njenom eliminacijom iz date funkcije, ova svodi na funkciju jedne promenljive. Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=2x^2+y^2,$ pri uslovu $x-y+4=0.$

Rešenje. Iz uslova $x-y+4=0$ imamo $y=x+4.$ Tada funkcija $f(x,y)=2x^2+y^2,$ posle eliminacije promenljive y iz nje postaje

$$f(x)=2x^2+(x+4)^2=3x^2+8x+16.$$

Sada, potražimo $f'(x) = 6x + 8$, pa je moguća lokalna ekstremna vrednost za $f'(x) = 0$ i to je tačka $x_0 = -\frac{4}{3}$. Kako je $f''(x) = 6 > 0$, posmatrana funkcija $f(x, y)$ ima lokalni minimum u tački $M_0\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, gde je $y_0 = x_0 + 4 = \frac{8}{3}$.

Napomena. Funkcija dve promenljive može imati najviše jedan uslov tako da se ovaj metod kod njih često primenjuje, pod uslovom da je moguće y eksplicitno izraziti u funkciji od x ili obrnuto.

Napomena. Primer koji smo rešavali Lagranževom metodom i gde je trebalo odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = x \cdot y$, pri uslovu $x^2 + y^2 = 2$ se takođe može rešavati metodom eliminacije. Tada treba voditi računa da iz $x^2 + y^2 = 2$ imamo da je $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$, tako da u jednom slučaju treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$, a u drugom treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = -x \cdot \sqrt{2 - x^2}$.

Poglavlje 3

Apsolutni ekstremi

POSTUPAK ODREĐIVANJA APSOLUTNIH EKSTREMA NA ZATVORENOJ OBLASTI

Od lokalnih ekstrema unutar posmatrane oblasti i uslovnih ekstremima sa granice te oblasti bira se, najveća, odnosno najmanja vrednost.

Postupak određivanja apsolutnih ekstrema (najveću i najmanju vrednost) neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj zatvorenoj oblasti $\overline{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\overline{E} = E \cup \partial E,$)je sledeći:

- Odredimo sve moguće stacionarne tačke funkcije $z = f(x, y)$ i izdvojimo one koje se nalaze unutar otvorene oblasti E i izračunamo vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tako dobijenim tačkama.

- Posebno na granici te oblasti E (tj. na ∂E) , odredimo ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ i izračunamo vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tako dobijenim tačkama – dakle, treba odrediti sve uslovne ekstreme funkcije $z = f(x, y)$, a uslov je da se oni nalazi na granici te oblasti koja je sastavljena od jedne ili više krivih oblika $\varphi(x, y) = 0,$

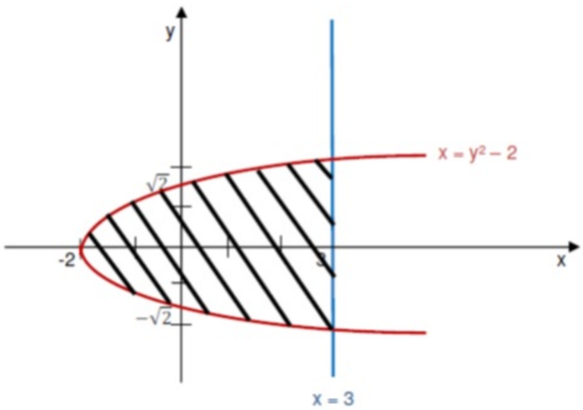
- Na kraju od svih ovako dobijenih vrednosti za funkciju $z = f(x, y)$, izdvojimo najveću, odnosnu najmanju vrednost funkcije na toj zatvorenoj oblasti $\overline{E}$. Svakako, takvih vrednosti može biti i više od jedne.

PRIMER – 1. DEO

Grafičko predstavljanje oblasti.

Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije $z(x, y) = 2y^2 - x^2 + 2x + 1$ na oblasti $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2 \leq x \leq 3\}$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Najpre ćemo grafički predstaviti zatvorenu oblast $\overline{E}$. Ona je ograničena kvadratnom parabolom $x = y^2 - 2$ i pravom $x = 3$. Zatvorena oblast $\overline{E}$ je šrafirana na datoj slici, koja uključuje i njenu granicu određenu delom parabolom $x = y^2 - 2$ (crvena linija na slici) i delom prave $x = 3$ (plava linija na slici).



Slika 3.1 Grafički prikaz zatvorene oblasti na kojoj tražimo apsolutne ekstreme.

Zatvorenu oblast $\overline{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2\le x\le 3\}$ ćemo podeliti na otvorenu oblast $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2<x<3\}$ i granicu oblasti $\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2=x\wedge x=3\}$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje apsolutnih ekstrema.

Odredimo, najpre, lokalne ekstremne vrednosti unutar otvorene oblasti E. Stoga je potrebno rešiti sistem

$$\begin{aligned} f'_x&=0 \\ f'_y&=0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} -2x+2&=0. \\ 4y&=0. \end{aligned}$$

Dakle, stacionarna tačka je $S(1,0)$. Ona se očigledno nalazi unutar otvorene oblasti E i važi $z(S)=2$.

Granicu oblasti E, u oznaci ∂E, čine prava $x-3=0$, kao i parabola $y^2-x-2=0$.

Najpre, ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x,y)=2y^2-x^2+2x+1$, pri uslovu $x-3=0$. Ovde ćemo primeniti metod eliminacije, jer je $x=3$, pa treba odrediti lokalne ekstreme funkcije jedne promenljive $z(y)=2y^2-2$. Sada je $z'(y)=4y$, pa se lokalna ekstremna vrednost za poslednju funkciju postiže za $y=0$, tj. lokalni ekstrem početne funkcije treba tražiti i u tački $A(3,0)$. Tada je $z(A)=-2$.

Na kraju ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x,y)=2y^2-x^2+2x+1$, pri uslovu $y^2-x-2=0$. Ovde ćemo, takođe, primeniti metod eliminacije. Ako uslov $x=y^2-2$ zamenimo u polaznoj funkciji ona postaje funkcija jedne promenljive $z(y)=-y^4+8y^2-7$. Lokalne ekstreme poslednje funkcije tražimo iz njenog prvog izvoda. Tada dobijamo $z'(y)=-4y^3+16y=-4y(y^2-4)$. Dakle, mogući ekstremi se postižu za $y=0$ ili $y=2$ ili $y=-2$. Ovo znači da za moguće ekstreme početne funkcije treba uzeti u obzir tačke $B(-2,0), C(2,2)$ i $D(2,-2)$. Sada imamo da je $z(B)=-7, z(C)=z(D)=9$.

Dakle, najveća vrednost na zatvorenoj oblasti $\overline{E}$, postiže se u tačkama C i D, a najmanja u tački B.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Implicitno zadate funkcije

UVOD

Implicitno zadate funkcije dve realne promenljive.

Kada smo govorili o realnim funkcijama jedne realne promenljive uveli smo pojam izvoda implicitno zadate funkcije jedne promenljive. Naime, ako je neka realna funkcija jedne realne promenljive zadata u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$ i ako je funkcija $F(x, y)$ diferencijabilna u svim tačkama (x, y) neke oblasti $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, tada se na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji, izvodna funkcija $y'(x)$ može odrediti po formuli

$$y\acute{}_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Izvodi višeg reda se mogu dobiti uzastopnim diferenciranjem prethodne formule.

Realna funkcija dve realne promenljive je zadata u implicitnom obliku, ako je zadata jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je $F(x, y, z)$ data funkcija tri promenljive u nekoj oblasti $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Da bi funkcija dve promenljive bila definisana na ovaj način na nekoj oblasti, potrebno je da u toj oblasti jednačina $F(x, y, z) = 0$ ima jednistveno rešenje po nezavisno promenljivoj.

Primer. Ako posmatramo sferu u prostoru $\mathbb{R}^3$, čiji je centar u koordinatnom početku i poluprečnik R, tada njena jednačina glasi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.Razmotrimo, sada, broj rešenja ove jednačine po z. Imamo da je

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Svakako, u ovom slučaju mora da važi da je $x^2 + y^2 \leq R^2$, tj. izbor tačaka (x, y) mora biti takav da je

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

tj. tačke (x, y) se moraju izabrati tako da zadovoljavaju uslov $x^2 + y^2 < R^2$ (tj. da pripadaju unutrašnosti kruga) ili da zadovoljavaju uslov $x^2 + y^2 = R^2$ (tj. da se nalaze na kružnici). Za svaku tačku iz unutrašnosti kruga posmatrana jednačina ima po dva rešenja z_1 i z_2, od kojih je jedno pozitivno (na primer z_1) za koje važi $0 < z_1 < R$, a drugo negativno (na primer z_2) za koje važi $-R < z_2 < 0$. S druge strane, ako se tačka (x, y) izabere sa kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, tada dobijamo jedinstveno rešenje $z = 0$. Dakle, da bismo jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ implicitno definisali funkciju, potrebno je da uvedemo još neko dodatno ograničenje kako bi ona uvek imala jedinstveno rešenje. U ovom slučaju bismo mogli da stavimo da je $z \geq 0$ (ili analogno $z \leq 0$). Na ovaj način postižemo da jednom originalu (u ovom slučaju tački iz ravni) odgovara tačno jedna slika (u ovom slučaju broj).

STAV

Stav o implicitno zadatoj funkciji.

Stav. Pretpostavimo da je funkcija $F(x,y,z)$ diferencijabilna u oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^3$, izvod F'_z je neprekidan i različit od nule u celoj oblasti D. Neka je dalje D' projekcija oblasti D u $\mathbb{R}^2$. Tada, za proizvoljnu tačku (x_0,y_0,z_0) iz $\mathbb{R}^3$, postoji neko $\varepsilon > 0$, tako da u okolini $U_\varepsilon > (x_0,y_0)$ postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $z = f(x,y)$ takva da je $|f(x,y) - z_0| < \varepsilon$ i osim toga važi

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0,$$

za proizvoljnu tačku $(x_1,y_1) \in U_\varepsilon(x_0,y_0)$.

Napomena. Za neku proizvoljnu oblast D iz $\mathbb{R}^3$, skup svih tačaka (x,y) iz $\mathbb{R}^2$, u oznaci D', takvih da postoji bar jedna realna vrednost z, takva da tačka $(x,y,z) \in D$, predstavlja takođe oblast u $\mathbb{R}^2$ i D' predstavlja projekciju oblasti D u prostor $\mathbb{R}^2$.

PRVI I DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Postupak za određivanje prvih i drugih parcijalnih izvoda funkcije zadate implicitno.

Ako prepostavimo da jednačina $F(x,y,z) = 0$ zadovoljava uslove prethodne teoreme, tada njenim diferenciranjem po promenljivoj x dobijamo $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$odakle je

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Slično, ako izvršimo diferenciranje po y dobijamo $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$odakle je

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Dalje, odgovarajućim diferencijaranjem dobijamo

$$z''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xz} \cdot z'_x) \cdot F'_z - (F''_{zx} + F''_{zz} \cdot z'_x) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{(F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{(F''_{yy} + F''_{yz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_y}{(F'_z)^2}.$$

Ako u prethodnim formulama izvršimo deljenje brojioca i imenioca sa F'_z, a zatim iskoristimo dobijene izraze za z'_x i z'_y, tada ove formule možemo zapisati na sledeći način

$$z''_{xx} = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xz} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot (z'_x)^2}{(F'_z)^3},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y + F''_{zy} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot z'_x \cdot z'_y}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{F''_{yy} + 2F''_{yz} \cdot z'_y + F''_{zz}(\cdot z'_y)^2}{(F'_z)^2}.$$

Napomena. Diferencijal prvog i višeg reda se kod funkcija zadatih implicitnim jednačinama određuje na istovetan način kao i kod funkcija dve promenljive koje su zadate u eksplicitnom obliku. Takođe, određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti se sprovodi po istom postupku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

4.1 Određivanja lokalnih ekstrema implicitno zadate funkcije

PRIMER – 1. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – prvi parcijalni izvodi i stacionarne tačke.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije $z^3 + z^2 y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0, \;\; z \neq 0.$

Rešenje. Primenićemo Silvesterov kriterijum. Dakle, potrebno je odrediti prve parcijalne izvode, kako bismo našli stacionarne tačke. Ako izvršimo, najpre, diferenciranje polazne jednačine po x, dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_x + 2zy \cdot z'_x - 2x + 4 = 0,$$

odakle dobijamo

$$z'_x = \frac{2x-4}{3z^2+2zy}(*).$$

Slično, ako potražimo prvi parcijalni izvod po y dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_y + 2zy \cdot z'_y + z^2 - 2y = 0,$$

pa imamo

$$z'_y = \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy}(**).$$

Stacionarne tačke se odredjuju iz sledećeg sistema

$$z'_x = 0 \wedge z'_y = 0 \wedge F(x,y,z) = 0,$$

tj.

$$\frac{2x-4}{3z^2+2zy} = 0 \wedge \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy} = 0 \wedge z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0.$$

Iz prve jednačine sistema dobijamo da je $x = 2$, a iz druge imamo da je $y = \frac{z^2}{2}$. Zamenom ovih vrednosti u treću jednačinu sistema, dobijamo

$$z^3 + \frac{z^4}{2} - 4 - \frac{z^4}{4} + 8 - 4 = 0, \quad z \neq 0,$$

tj.

$$\frac{z^4}{4} + z^3 = 0, \quad z \neq 0.$$

Odavde dobijamo da je $z = -4$. Dakle, stacionarna tačka je $S(2,8)$, pri čemu je $z(S) = -4$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – drugi parcijalni izvodi i primena Silvesterovog kriterijuma.

Sada treba odrediti druge parcijalne izvode polazne implicitno zadate funkcije kako bismo proverili, primenom Silvesterovog kriterijuma, da li je tačka S lokalni ekstrem. Diferenciranjem formule (*) po promenljivoj x , odnosno y dobijamo:

$$6zz'_xz'_x + 3z^2z''_{x^2} + 2yz'_xz'_x + 2zyz''_{x^2} - 2 = 0,$$

odnosno

$$6zz'_yz'_x + 3z^2z''_{xy} + 2yz'_yz'_x + 2zz'_x = 0,$$

tj.

$$z''_{x^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_x}^2 + 2}{3z^2 + 2yz}$$

$$z''_{xy} = \frac{-6z \cdot z'_y - 2y \cdot z'_y + 2z \cdot z'_x}{3z^2}.$$

S druge strane, ako diferenciramo formulu (**) po promenljivoj y dobijamo

$$6zz'_y z'_y + 3z^2 z''_{y^2} + 2yz'_y z'_y + 2zyz''_{y^2} - 2zz'_y - 2 = 0.$$

Odavde je

$$z''_{y^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_y}^2 - 4z \cdot z'_y + 2}{3z^2 + 2yz}.$$

Kako važi da je $z'_x(S) = z'_y(S) = 0$ i $z(S) = -4$, tada za tačku $S(2,8)$ imamo $A = z''_{x^2}(S) = -\frac{1}{8}, B = z''_{xy}(S) = 0,$ i $C = z''_{y^2}(S) = -\frac{1}{8}$.Konačno je

$$\gamma = A \cdot C - B^2 = \frac{1}{64} > 0 \quad \text{i} \quad A = -\frac{1}{8} < 0,$$

pa je tačka $S(2,8)$ na osnovu Silvesterovog kriterijuma tačka lokalnog maksimuma i $z_{max} = -4$.

Poglavlje 5

Kanoničke jednačine površi drugog reda

UVOD

Jednačina površi drugog reda koja se dobija transformacijom koordinatnog sistema u novi u kome ona ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa je kanonički oblik jednačine površi.

Pod površima drugog reda u $\mathbb{R}^3$ podrazumevaju se površi koji predstavljaju grafike realnih funkcija dve realne promenljive zadate implicitnom jednačinom

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

gde su $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule. Postoji postupak kojim se jednačina neke površi data prethodnom formulom prevodi na tzv. kanonički oblik jednačine površi drugog reda . Naime, rotacijama i translacijama koordinatnog sistema u kome je, prvobitno, površ zadata prethodnom jednačinom, moguće je izabrati novi koordinantni sistem u kome ova jednačina ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa. Takav zapis se naziva kanonički oblik jednačine površi . O ovom postupku transformacije koordinatnog sistema ovde neće biti reči.

Za jednačinu površi drugog reda se kaže da je u kanonskom obliku ukoliko ona zadovoljava sledeća četiri uslova:

- nema mešovitih članova, tj. u takvoj jednačini se ne javljaju niti jedan od članova $xy,\ xz,\ yz$;

- nijedna koordinata $x,\ y$ ili z ne sme da se javlja istovremeno i sa kvadratom i kao linearan član (npr. u takvoj jednačini ne sme da se javlja x^2 i x istovremeno);

- linearnih članova ne sme da ima više od jednog (dakle u njoj sme da se javlja samo x ili samo y ili samo z);

- ukoliko se javlja neki linearan član onda ne sme da se javlja slobodan član, tj. slobodan član mora biti jednak nuli.

KLASIFIKACIJA POVRŠI DRUGOG REDA

U odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem iz opšte jednačine površi drugog reda može se dobiti 17 različitih površi drugog reda u kanonskom obliku.

Može se pokazati da jednačina površi drugog reda

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0,$$

gde su $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule, u odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem opisuje jednu od 17 sledećih površi u kanonskom obliku:

1. $x^2+y^2+z^2=1$– elipsoid (sfera);

2. $x^2+y^2+z^2=-1$– imaginarni elipsoid;

3. $x^2+y^2-z^2=1$– jednokrilni hiperboloid;

4. $x^2+y^2-z^2=-1$– dvokrilni hiperboloid;

5. $x^2+y^2-z^2=0$– realni konus;

6. $x^2+y^2+z^2=0$– imaginarni konus;

7. $x^2+y^2=2z$– eliptički paraboloid;

8. $x^2-y^2=2z$– hiperbolički paraboloid;

9. $x^2+y^2=1$– realni eliptički (kružni) cilindar;

10. $x^2+y^2=-1$– imaginarni eliptički cilindar;
11. $x^2-y^2=1$– hiperbolički cilindar;

12. $x^2+y^2=0$– dve imaginarne ravni koje se seku;

13. $x^2-y^2=0$– dve realne ravni koje se seku;

14. $x^2=2y$– parabolički cilindar;

15. $x^2=1$ – dve realne paralelne ravni;

16. $x^2=-1$ – dve imaginarne paralelne ravni;

17. $x^2=0$ – dve ravni koje se poklapaju.

Napomena. Imaginarne površi predstavljaju prazne skupove tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$ (tj. one realno ne postoje).

Ovde ćemo navesti neke od kanoničkih oblika površi drugog reda i dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Ove površi, kao i njihove geometrijske interpretacije će nam biti bitne za dalje izlaganje gradiva.

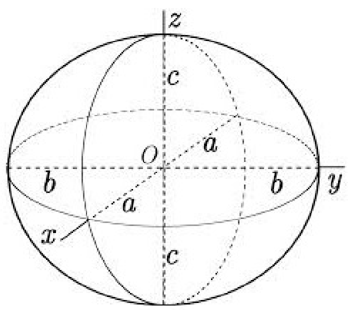
ELIPSOID

Kanonička jednačina elipsoida.

Površ čija je kanonička jednačina

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a\cdot b\cdot c\neq 0,$$

naziva se elipsoid, gde su a, b i c pozitivni realni brojevi koju predstavljaju poluose elipsoida. Ovaj elipsoid se naziva centralni elipsoid, jer mu je centar u koordinatnom početku.



Slika 5.1 Elipsoid.

Često se u zadacima javlja i jedan nekanonički oblik elipsoida

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}=1,\quad a\cdot b\cdot c\neq 0.$$

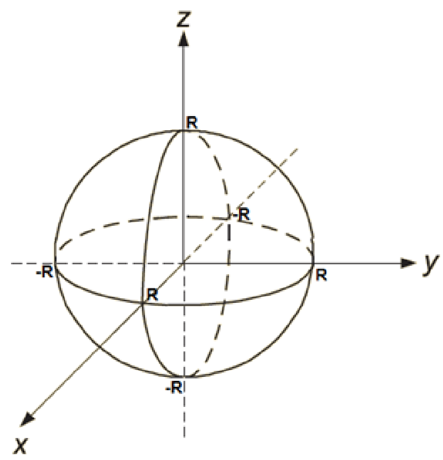
U ovom slučaju se centar elipsoida ne nalazi u koordinatnom početku, već u tački $C(p,\ q,\ r)$. Njegove poluose su i dalje, dužina a, b i c respetivno.

SFERA

Kanonička jednačina sfere.

Kanonička jednačina sfere je specijalan slučaj kanoničke jednačine elipsoida, gde je $a=b=c$. Centar ove sfere je u koordinatnom početku, pa se ona naziva centralna sfera, poluprečnika R. Njena jednačina je

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$



Slika 5.2 Centralna sfera.

Specijalan slučaj elipsoida kome centar nije u koordinatnom početku, za $a=b=c$, jeste sfera,

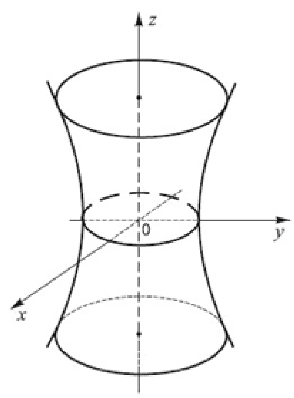
$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2,$$

čiji je centar tačka $C(p,\ q,\ r)$ i poluprečnik R .

JEDNOKRILNI (JEDNOLISNI) HIPERBOLOID

Kanonička jednačina jednokrilnog (jednolisnog) hiperboloida.

Jednokrilni ili jednolisni hiperboloid, ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

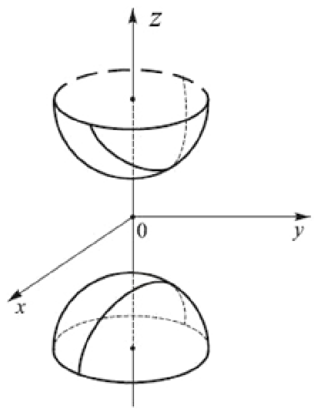


Slika 5.3 Jednokrilni (jednolisni) hiperboloid.

DVOKRILNI (DVOLISNI) PARABOLOID

Kanonička jednačina dvokrilnog (dvolisnog) paraboloida.

Dvokrilni ili dvolisni hiperboloid, je površ koja ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \ \ a\cdot b\cdot c\neq 0.$

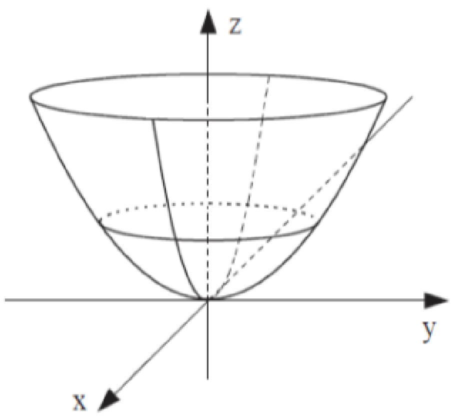


Slika 5.4 Dvokrilni (dvolisni) paraboloid.

ELIPTIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina eliptičkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \ \ p,q>0$,naziva se eliptički paraboloid.



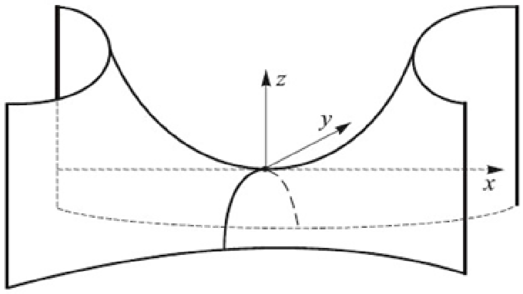
Slika 5.5 Eliptički paraboloid.

Svakako, ovaj paraboloid može biti kružni. Primer jednačine kružnog paraboloida glasi $x^2+y^2=z$.

HIPERBOLIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina hiperboličkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$,naziva se hiperbolički paraboloid. Često se u literaturi ova površ naziva sedlo.

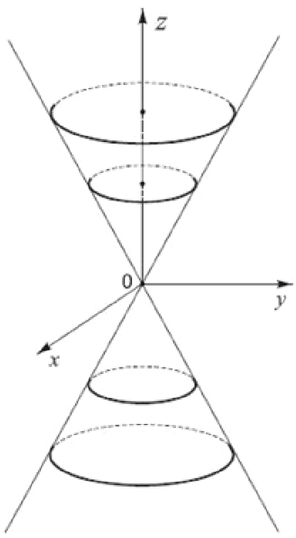


Slika 5.6 Hiperbolički paraboloid.

KONUS DRUGOG REDA

Kanonska jednačina konusa drugog reda.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \cdot b \cdot c \neq 0$,naziva se eliptički konus drugog reda.



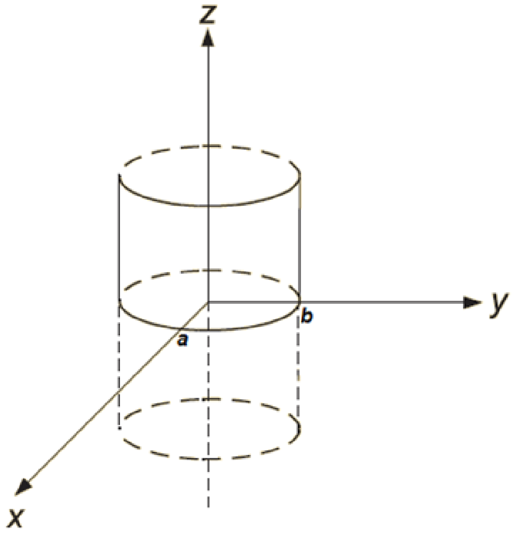
Slika 5.7 Konus drugog reda.

Specijalno, ako je $a = b = c$, tada dobijamo površ čija je jednačina $x^2 + y^2 - z^2 = 0$i koja se naziva kružni konus drugog reda.

ELIPTIČKI CILINDAR

Kanonaska jednačina eliptičkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$,naziva se eliptički cilindar.



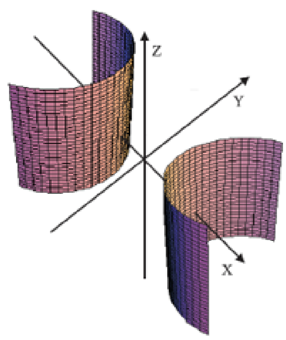
Slika 5.8 Eliptički cilindar.

Specijalan slučaj, za $a = b$, predstavlja kružni cilindar čija je jednačina $x^2 + y^2 = R^2$.

HIPERBOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina hiperboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$,naziva se hiperbolički cilindar.

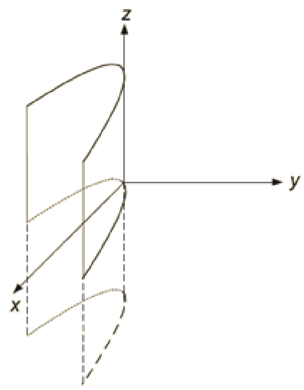


Slika 5.9 Hiperbolički cilindar.

PARABOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina paraboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $y^2 = 2px$, naziva se parabolički cilindar.

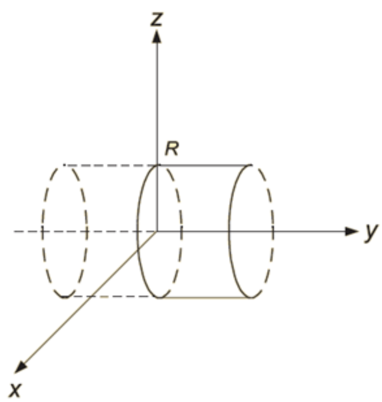


Slika 5.10 Parabolički cilindar $y^2 = 2px, p > 0.$

NAPOMENA 1

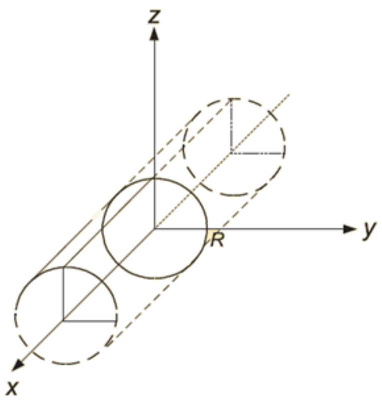
Prethodnim jednačinama su dati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$ ili $y^2 + z^2 = R^2$.

Prethodnim jednačinama su zadati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i sledećom jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$.Tada ova površ ima grafik dat na narednoj slici.



Slika 5.11 Kružni cilindar.

Slično, površ $y^2 + z^2 = R^2$predstavlja kružni cilindar čiji je grafik dat na sledećoj slici.

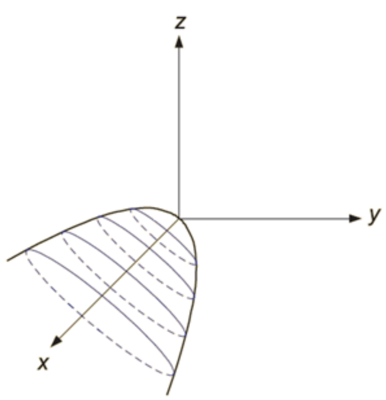


Slika 5.12 Kružni cilindar.

NAPOMENA 2

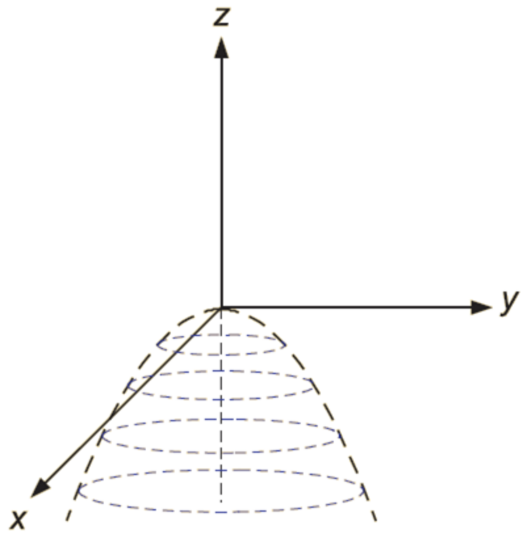
Prethodnim jednačinama su dati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, eliptički paraboloid može biti zadat i datim jednačinama.

Slično, eliptički paraboloid $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,\ p,q>0,$ima grafik dat na sledećoj slici.



Slika 5.13 Eliptički paraboloid.

Moguće je, takođe, da važi $p,q<0$. Tada, površ $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q<0,$ ima oblik dat na sledećoj slici.



Slika 5.14 Eliptički paraboloid.

Poglavlje 6

Tangentna ravan i normala površi

TANGENTNA RAVAN

Jednačina ravni koja dodiruje (tangira) datu površ u datoj tački.

Funkcija $z = f(x, y)$ definiše neku površ u prostoru $\mathbb{R}^3$ koju čine tačke $M(x, y, f(x, y))$, odnosno tačke koje zadovoljavaju jednačinu $f(x, y) - z = 0$. Ako je ova funkcija diferencijabilna u tački (x_0, y_0) onda svaka kriva kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$ koja se dobija presecanjem te površi sa ravni upravnom na koordinatnu ravan Oxy ima u toj tački svoju tangentu, a sve te tangente leže u jednoj ravni čija je jednačina

$$z - z_0 = p\left(x - x_0\right) + q\left(y - y_0\right)$$

gde je $p = \partial z / \partial x$ i $q = \partial z / \partial y$. Ova ravan se naziva *tangentna ravan* površi $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i ona je dodirna tačka površi i tangentne ravni.

Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$\left(F_x^{'}\right)^2 + \left(F_y^{'}\right)^2 + \left(F_z^{'}\right)^2 > 0,$$

u svakoj tački $M(x, y, z)$, tada se pokazuje da je jednačina njene tangentne ravni u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ data sa:

$$F_x^{'}\left(M_0\right)\left(x - x_0\right) + F_y^{'}\left(M_0\right)\left(y - y_0\right) + F_z^{'}\left(M_0\right)\left(z - z_0\right) = 0.$$

NORMALA POVRŠI

Prava koja je normalna na tangentnu ravan u datoj tački, naziva se normala površi.

Prava koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i normalna je na tangentnu ravan naziva se normala površi $z = f(x, y)$. Njena jednačina glasi

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$\left(F_x^{'}\right)^2 + \left(F_y^{'}\right)^2 + \left(F_z^{'}\right)^2 > 0,$$

u svakoj tački $M(x, \ y, \ z)$, tada se pokazuje da je jednačina normale u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{F_x^{'}(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y^{'}(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z^{'}(M_0)}.$$

Poglavlje 7

Vežba

ZADATAK 1

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje uslovnog ekstrema.

Odredi uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ pri uslovu $x + y = 1$.

Rešenje. Imamo da je $\varphi(x, y) = x + y - 1$, pa Lagranževa funkcija glasi:

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1)$.

Odredimo prve parcijalne izvode Lagranžove funkcije

$$F_x' = 2x + \lambda$$

$$F_y' = 2y + \lambda$$

$$F_\lambda' = x + y - 1$$

Rešimo sistem

$$2x + \lambda = 0$$

$$2y + \lambda = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

Rešenje sistema je $\lambda = -1, \quad x = \frac{1}{2} \;\text{ i }\; y = \frac{1}{2}$ i to je stacionarna tačka funkcije. Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka minimuma ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam parcijalni izvodi:

$F_{xx}'' = 2, \quad F_{xy}'' = F_{yx}'' = 0, F_{yy}'' = 2.$

Dobijamo totalni diferencijal drugog reda

$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 = 2\left(dx^2 + dy^2\right).$

Totalni diferencijal uslova daje:

$dx + dy = 0 \Longrightarrow dx = -dy.$

pa imamo:

$d^2F = 4 \; dx^2 > 0.$

Funkcija ima uslovni minimum u tački $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i on iznosi

$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

Napomena. Zadatak se može rešiti i primenom metode eliminacije i tada imamo, iz uslova, da je: $y = 1 - x$, pa zamenom ovog u polaznoj funkciji dobijamo da je $f(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Tada je $f'(x) = 2x - 1$. Dakle, tačka $x = \frac{1}{2}$ je stacionarna tačka. Kako je $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ u toj tački se postiže lokalni minimum. Iz uslova $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, vidimo da je tačka $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ uslovni ekstrem polazne funkcije, kao što je to dobijeno i Lagranževom metodom multiplikatora.

ZADATAK 2 – 1. DEO

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje stacionarnih tačaka i totalnog diferencijal drugog reda za funkciju F.

Odredi uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ pri uslovu $x^2 + y^2 = 1$.

Rešenje. Imamo da je $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, pa Lagranževa funkcija glasi:

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Odredimo prve parcijalne izvode Lagranžove funkcije

$$F'_x = -4 + 2\lambda x$$
$$F'_y = -3 + 2\lambda y$$
$$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

Rešimo sistem

$$-4 + 2\lambda x = 0$$
$$-3 + 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Iz prve i druge jednačine izrazimo x i y preko λ, tako da dobijamo

$$x = \frac{4}{2\lambda}, \ y = \frac{3}{2\lambda}$$

i uvrstimo ih u treću:

$$\left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1, \ (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \pm \frac{5}{2}.$$

Odavde dobijamo da je:

- Za $\lambda = \frac{5}{2}$ imamo da je $x = \frac{4}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$ i $y = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$, pa je $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ stacionarna tačka funkcije F;
- Za $\lambda = -\frac{5}{2}$ imamo da je $x = \frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{4}{5}$ i $y = \frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{3}{5}$, pa je $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ stacionarna tačka funkcije F.

Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka tačka minimuma ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam drugi parcilajni izvodi:

$F''_{xx} = 2\lambda,\ F''_{xy} = F''_{yx} = 0,\ F''_{yy} = 2\lambda$

Dobijamo totalni diferencijal drugog reda

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Izračunajmo totalni diferencijal uslova. Tada imamo da je:

$$2xdx + 2ydy = 0 \Leftrightarrow xdx + ydy = 0.$$

ZADATAK 2 – 2. DEO

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje da li su dobijene stacionarne tačke i uslovni ekstremi.

Za tačku $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, pri čemu je $\lambda = \frac{5}{2}$, imamo da je

$$d^2F\Big|_{S_1} = 2 \cdot \frac{5}{2}\left(dx^2 + dy^2\right) = 5\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Iz

$$xdx + ydy = 0$$

za tačku $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ imamo da je

$$\frac{4}{5}dx + \frac{3}{5}dy = 0 \Leftrightarrow 4dx + 3dy = 0 \Leftrightarrow dx = -\frac{3}{4}dy.$$

Tada imamo da je:

$$d^2F\Big|_{S_1} = 5\left(\frac{9}{16}dy^2 + dy^2\right) = \frac{125}{16}dy^2 > 0.$$

Zaključujemo da je tačka $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ uslovni minimum i on iznosi:

$$f_{min} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

Za tačku $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, pri čemu je $\lambda = -\frac{5}{2}$, imamo da je

$d^2F\Big|_{S_2} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)\left(dx^2 + dy^2\right) = -5\left(dx^2 + dy^2\right).$

Iz

$xdx + ydy = 0$

za tačku $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ imamo da je

$-\frac{4}{5}dx - \frac{3}{5}dy = 0 \Leftrightarrow -4dx - 3dy = 0 \Leftrightarrow dx = -\frac{3}{4}dy.$

Tada imamo da je:

$d^2F\Big|_{S_1} = -5\left(\frac{9}{16}dy^2 + dy^2\right) = -\frac{125}{16}dy^2 < 0.$

Zaključujemo da je tačka $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ uslovni maksimum i on iznosi:

$f_{max} = f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 6 + 4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 11.$

Napomena. I u ovom zadatku se može primeniti metod elimincije, ali treba voditi računa da z uslova imamo da je

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$

ZADATAK 3

Metod eliminacije za određivanje uslovnih ekstrema.

Odrediti uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2xy$, pri uslovu $x + y = 1$.

Rešenje. Iz uslova imamo da je $y = 1 - x$, pa tada data funkcija postaje:

$f(x) = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2.$

Odredimo prvi izvod funkcije i stacionarnu tačku:

$f'(x) = 2 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

Odredimo znak drugog izvoda

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -4 < 0.$

Tada imamo da je $x = \frac{1}{2}$ tačka lokalnog maksimuma funkcije $f(x)$ za koju je $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dakle, funkcija ima uslovni maksimum u tački $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i on iznosi

$f_{max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Odrediti uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = (x - 5)(y + 2)$ pri uslovu $x - y = 1$.

Rešenje. Iz uslova imamo da je $y = x - 1$, pa tada data funkcija postaje:

$f(x) = (x-5)(x-1+2) = (x-5)(x+1) = x^2 + 4x - 5.$

Odredimo prvi izvod funkcije i stacionarnu tačku:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2.$

Odredimo znak drugog izvoda

$f''(-2) = 2 > 0.$

Tada imamo da je $x = -2$ tačka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$ za koju je $y = -2 - 1 = -3$.

Dakle, funkcija ima uslovni minimum u tački $S(-2, -3)$ i on iznosi

$f_{min} = f(-2, -3) = (-2-5)(-3+2) = 7.$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 4

Određivanje Tejlorovog polinoma drugog reda.

Odrediti Tejlorov polinom drugog stepena koji aproksimira funkciju

$f(x, y) = e^{x+y}(2x + y)$

u okolini tačke $A(1, 1)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, prve i druge parcijalne izvode date funkcije u datoj tački:

$$f'_x = e^{x+y}(2x + y + 2)$$

$$f'_y = e^{x+y}(2x + y + 1)$$

$$f''_{x^2} = e^{x+y}(2x + y + 4)$$

$$f''_{xy} = e^{x+y}(2x + y + 3)$$

$$f''_{y^2} = e^{x+y}(2x + y + 2)$$

$$f'_x(1,1) = 5e^2$$

$$f'_y(1,1) = 4e^2$$

$$f''_{xy}(1,1) = 6e^2$$

$$f''_{x^2}(1,1) = 5e^2$$

$$f''_{y^2}(1,1) = 7e^2$$

$$T_2(x,y) = e^2\left(3 + 5(x-1) + 4(y-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + \frac{5}{2}(y-1)^2\right)$$

ZADATAK 5

Određivanje Tejlorovog polinoma drugog reda

Odrediti Tejlorov polinom drugog stepena koji aproksimira funkciju

$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2$

u okolini tačke $A(0,1)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, prve i druge parcijalne izvode date funkcije u datoj tački:

$$f'_x = 2x + y^2 \qquad f'_x(0,1) = 1$$

$$f'_y = 2xy + 3y^2 \qquad f'_y(0,1) = 3$$

$$f'_{x^2} = 2 \qquad f'_{xy}(0,1) = 2$$

$$f'_{xy} = 2y \qquad f'_{y^2}(0,1) = 6$$

$$f'_{y^2} = 2x + 6y \qquad f'_{x^2}(0,1) = 2$$

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[x - x_0\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} + y - y_0\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[x - x_0\right|^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} + 2[x-x_0][y-y_0] + y - y_0\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M}$$

$$T_2(x,y) = 1 + [x + 3[y-1]] + \frac{1}{2!}\left[2x^2 + 4x[y-1] + 6[y-1]^2\right]$$

ZADATAK 6

Apsolutni ekstremi.

Odredi najmanju i najveću vrednost funkcije

$f(x, y) = x^2 - y^2$

na skupu $D = \{\{x, y\} : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Rešenje. Dakle, potrebno je odrediti lokalne ekstremne vrednosti unutar oblasti D (1. korak), a nakon toga i uslovne ekstreme na samom rubu, tj. kružnici $x^2 + y^2 = 4$, za datu funkciju. Najveća vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ u tako dobijenim ekstremima predstavlja apsolutni maksimum funkcije, a najmanja vrednost predstavlja apsolutni minimum funkcije. Svakako, može se desiti da postoji više ovakvih apsolutnih ekstrema.

1. Korak Određivanje stacionarnih tačaka.

Rešavamo sistem:

$$f'_x(x, y) = 0$$
$$f'_y(x, y) = 0$$

$$f'_x(x, y) = 2x$$
$$f'_y(x, y) = -2y$$

stacionarna tačka je $A(0, 0)$.

2. Korak Pravimo Lagranževu funkciju poštujući navedeni uslov $x^2 + y^2 = 4$

$$L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$
$$L'_x(x, y) = 2x + 2\lambda x$$
$$L'_y(x, y) = -2y + 2\lambda y$$
$$L'_\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

$$2x(1 + \lambda) = 0$$
$$2y(-1 + \lambda) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \text{I slučaj} & \text{II slučaj} \\ x = 0 & y = 0 \\ 1 + \lambda = 0 & -1 + \lambda = 0 \\ \lambda = -1 & \lambda = 1 \\ y = \pm 2 & x = \pm 2 \end{array}$$

$$B(0, 2) \quad C(0, -2) \quad D(-2, 0) \quad E(2, 0)$$

$$f(A) = 0 \quad f(B) = -4 \quad f(C) = -4 \quad f(D) = 4 \quad f(E) = 4$$

Dakle, B i C su tačke u kojima funkcija ima najmanju vrednost. U tačkama D i E funkcija ima najveću vrednost.

ZADATAK 7

Određivanje totalnog diferencijala prvog reda implicitno zadate funkcije.

Izračunati prvi totalni diferencijal implicitno zadate funkcije

$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$

Rešenje: Totalni diferencijal

$$dz = z_x' dx + z_y' dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \Big/_x'$$

$$2x + 0 + 2zz_x' = 2$$

$$2zz_x' = 2 - 2x$$

$$z_x' = \frac{1 - x}{z}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \Big/_y'$$

$$0 + 2y + 2zz_y' = 0$$

$$2zz_y' = -2y$$

$$z_y' = \frac{-y}{z}$$

$$dz = \frac{1 - x}{z}dx - \frac{y}{z}dy$$

ZADATAK 8

Određivanje totalnog diferencijala drugog reda implicitno zadate funkcije.

Izračunati drugi totalni diferencijal zadate funkcije

$f(x, y, z) = 2x^3 - 3y^3 + x^2yz - z^2 + xyz$

Rešenje:

$$f_x' = 6x^2 + 2xyz + yz$$
$$f_y' = -9y^2 + x^2z + xz$$
$$f_z' = x^2y - 2z + xy$$
$$f_{xx}'' = 12x + 2yz$$
$$f_{yy}'' = -18y$$
$$f_{zz}'' = -2$$
$$f_{xy}'' = 2xz + z$$
$$f_{xz}'' = 2xy + y$$
$$f_{yz}'' = x^2 + x$$

$$d^2f = (12x + 2yz)dx^2 - 18ydy^2 - 2dz^2 + 2\Big((2xz + z)dxdy + (2xy + y)dxdz + \left(x^2 + x\right)dydz\Big)$$

ZADATAK 9 – 1. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – određivanje stacionarnih tačaka.

Odrediti lokalne ekstreme implicitno zadate funkcije

$F(x, y, z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8.$

1. Korak rešenja Određivanje stacionarnih tačaka. Rešavamo sistem:

$$z_x' = 0,$$
$$z_y' = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0.$$

$$z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{yz + 2x}{3z^2 + xy} = 0,$$
$$z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{xz + 4y}{3z^2 + xy} = 0,$$
$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

$$yz + 2x = 0, \quad 3z^2 + xy \neq 0$$
$$xz + 4y = 0, 3z^2 + xy \neq 0$$
$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0$$

Iz prve jednačine sistema imamo da je $x = -\frac{yz}{2}$. Zamenom ovog u drugoj jednačini imamo $-\frac{yz^2}{2} + 4y = 0$, odakle dobijamo da je

$$-\frac{yz^2}{2} + 4y = 0 \Leftrightarrow y\left(-\frac{z^2}{2} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee z^2 = 8.$$

Za $y = 0$, imamo da je $x = 0$, pa zamenom ovih vrednosti u trećoj jednačini sistema:

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0,$$

dobijamo da je $z^3 + 8 = 0$, tj. $z = -2$. Kako važi da je $3z^2 + xy \neq 0$, za ovako dobijene vrednosti x, y i z, imamo da je $S_1(0, 0)$ stacionarna tačka.

Za $z = 2\sqrt{2}$, imamo, iz prve jednačine sistema, da je $x = -\sqrt{2}y$, pa zamenom ovih vrednosti u trećoj jednačini sistema:

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0,$$

ona postaje

$$16 + 8\sqrt{2} - 4y^2 + 2y^2 + 2y^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 24 + 8\sqrt{2} = 0,$$

što je nemoguće.

Slično imamo i za $z = -2\sqrt{2}$

Dakle, postoji samo jedna stacionarna tačka $S_1(0, 0)$, za $z = -2$. Proverimo da li je ona i lokalna ekstremna vrednost.

ZADATAK 9 – 2. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma.

2. korak rešenja: Primena Silvesterovog kriterijuma:

Odredimo druge parcijalne izvode implicitno zadate funkcije:

$$z''_{xx} = -\frac{2\left(3z^2+xy\right)-y(yz+2x)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{6z^2-y^2z}{\left(3z^2+xy\right)^2},$$

$$z''_{xy} = -\frac{z\left(3z^2+xy\right)-x(yz+2x)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{3z^3-2x^2}{\left(3z^2+xy\right)^2},$$

$$z''_{yy} = -\frac{4\left(3z^2+xy\right)-x(xz+4y)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{12z^2-x^2z}{\left(3z^2+xy\right)^2}.$$

Za $S_1(0,0)$ i za $z=-2$ imamo da je $z'_x(0,0)=0$ i $z'_y\left(0,0\right)=0$, a takođe i

$$A = z''_{xx}(0,0) = -\frac{6\cdot 2^2-0\cdot 2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{6},$$

$$B = z''_{xy}(0,0) = -\frac{3\cdot 2^3-2\cdot 0^2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{6},$$

$$C = z''_{yy}(0,0) = -\frac{12\cdot 2^2-0^2\cdot 2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0.$$

Kako je

$$A = -\frac{1}{6} < 0,$$

tačka $S_1(0,0)$ je tačka lokalnog maksimuma.

ZADATAK 10 – 1. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – određivanje stacionarnih tačaka

Odrediti lokalne ekstremume implicitno zadate funkcije

$5x^2+5y^2+5z^2 \;-2xy-2xz-2zy=72.$

1. <u>Korak rešenja</u>: Određivanje stacionarnih tačaka. Rešavamo sistem:

$z_x^{'}=0,$

$z_y^{'}=0,$

$F(x,y,z)=0.$

$z_x^{'}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}=-\frac{10x-2y-2z}{10z-2x-2y}=0,$

$z_y^{'}=-\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}=-\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y}=0,$

$5x^2+5y^2+5z^2 \;-2xy-2xz-2zy=72.$

$10x-2y-2z=0,$

$10y-2x-2z=0,$

$5x^2+5y^2+5z^2 \;-2xy-2xz-2zy-72=0.$

Iz prve jednačine imamo da je $x=\frac{y+z}{5}$. Zamenom u drugoj jednačini je $z=4y$, a onda iz prve jednačine imamo $x=y$.

Zamenom ovih vrednosti u treću jenačinu dobijamo da je

$5y^2+5y^2+80y^2 \;-2y^2-8y^2-8y^2=72,$

tj. $y=1 \vee y=-1.$

Dobijamo da su stacionarne tačke: $S_1(1,1)$, za $z=4$ i $S_2(-1,-1)$, za $z=-4$.

ZADATAK 10 – 2. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma

<u>2. Korak primena Silvesterovog kriterijuma:</u>

Odredimo druge parcijalne izvode:

$$z''_{xx} = \frac{-5 - 5z'^2_x + 2z'_x}{5x - x - y},$$

$$z''_{xy} = \frac{-5z'_x z'_y + 1 - z'_x - z'_y}{5x - x - y},$$

$$z''_{yy} = \frac{-5 - 55z'^2_y + 2z'_y}{5x - x - y}.$$

Za tačku $S_1(1,\ 1)$, za $z = 4$, je

$$z'_x(1,\ 1) = \frac{1+4-5}{20-1-1} = 0,\ z'_y\left(1,\ 1\right) = \frac{1+4-5}{20-1-1} = 0$$

$$A = z''_{xx}(1,\ 1) = -\frac{5}{18},\ B = z''_{xy}(1,\ 1) = \frac{1}{18},\ C = z''_{yy}(1,\ 1) = -\frac{5}{18}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{2}{27} > 0.$$

Kako je $A = -\frac{5}{18} < 0$, Tačka $S_1(1,\ 1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

Za tačku $S_2(-1-,\ 1)$, za $z = -4$, je

$$z'_x(-1,\ -1) = 0,\ z'_y\left(-1,\ -1\right) = 0,$$

$$A = z''_{xx}(-1,\ -1) = \frac{5}{18},\ B = z''_{xy}(-1,\ -1) = -\frac{1}{18},\ C = z''_{yy}(-1,\ -1) = \frac{5}{18}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{2}{27} > 0.$$

Kako je $A = \frac{5}{18} > 0$, tačka $S_2(-1,\ -1)$ je tačka lokalnog minimuma.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = x^2 + 3y^2$ ako između promenljivih x i y postoji veza $4x + y - 7 = 0$.

rešenje: $z_{min}\left(\frac{12}{7},\ \frac{1}{7}\right) = 3$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = 2\ln y + \ln x - 8$ ako između promenljivih x i y postoji veza $\frac{2}{y} + \frac{1}{x} - 6 = 0$.

rešenje: $z_{min}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = -\left(8 + \ln 8\right)$

Izračunati parcijalne izvode prvog reda implicitno zadate funkcije $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

rešenje: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3\left(xy - z^2\right)}$

Izračunati parcijalne izvode prvog i drugog reda implicitno zadate funkcije $x^2z + yz^2 + 1 = 0$.

rešenje:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{x^2 + 2yz}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{x^2 + 2yz}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6x^4z - 8y^2z^3}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x^2z^2 + 6yz^4}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6x^3z^2 + 8xyz^3}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}$

Odrediti drugi totalni diferencijal funkcije $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3$.

rešenje: $d^2z = (6x + 4)dx^2 + 2(4x + 6y)dxdy + (6x + 6y)dy^2$

Odrediti Tejlorov polinom trećeg stepena koji aproksimira funkciju $z = e^x \ln(1 + y)$ u okolini tačke $(0, 0)$.

rešenje: $z = y + \frac{1}{2}\left(2xy - y^2\right) + \frac{1}{6}\left(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3\right)$

Odrediti Tejlorov polinom trećeg stepena koji aproksimira funkciju $z = 2x^3 + y^2 + 3x^2y^2$ u okolini tačke $(-1, 2)$.

rešenje:

$z = 14 - 18(x + 1) + 16(y - 2) + 6(x + 1)^2 - 24(x + 1)(y - 2) + 13(y - 2)^2 + 12(x + 1)^2\left(y - 2\right)$

Zaključak za lekciju 05

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE

Domen, granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremi funkcije dve promenljive.

Realna funkcija dve realne promenljive je veoma bitna za opisivanje pojmova iz prirodnih i tehničkih nauka. Znanje kojim ste ovladali će biti od značaja za kako za praćenje daljeg gradiva, tako i za razumevanje i opisivanja matematičkih modela u tehničkim naukama.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.