UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Furijeovi redovi

Lekcija 11

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 11

FURIJEOVI REDOVI

Uvod

UVOD

Furijevi redovi

Kao što smo videli iz prethodne dve lekcije, osnovna primena Teorije redova je u tome da se njima može približno izraziti neka funkcija odgovarajućim polinom, ili približno izračunati neka vrednosti uz kontrolu greške koju pritom činimo.

Ideja francuskog matematičara Furijea je bila da polazeći od funkcija $f(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ koje su neparne funkcije (tj. $\sin(-nx) = -\sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), periodične funkcije (tj. $\sin(nx + 2\pi) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) i za koje važi $\sin n\pi = \sin 0\pi = 0$, posmatramo beskonačnu sumu njihovih linearnih kombinacija

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots b_n \sin nx + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

On je dokazao da, pod određenim uslovima za koeficijente $b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, prethodna beskonačna suma ima konačni zapis u obliku funkcije $S(x)$. Štaviše, za ovu funkciju će, takođe, važiti da je $S(-x) = S(x)$, $S(x + 2\pi) = S(x)$ i $S(0) = S(\pi) = 0$. To dalje znači da se bilo koja funkcija koja ima prethodno pomenute tri osobine može razviti u red po sinusnim funkcijama. Ovaj rezultat je izazvao veliko interesovanje, tako da je ova oblast intenzivno izučavana poslednjih 200 godina. Danas, Furijeovi redovi predstavljaju beskonačne sume linearnih kombinacija po kosinusnim i sinusnim funkcijama i zbog toga se nazivaju trigonometrijskim redovi. Šire gledano, oni spadaju u funkcionalne redove. Trigonometrijski redovi predstavljaju izuzetno važan pojam u matematici i tehničkim naukama i glavni su objekti čuvene Furijeove analize. Za njih važi sve izneto iz opšte teorije funkcionalnih redova, kao i neki specifičnosti koje ćemo u ovoj lekciji razmatrati.

Glavni deo razmatranja u ovoj lekciji biće posvećen funkcijama koje su sa osnovnom periodom 2π. Neka manja razmatranja daćemo i za funkcije sa drugačijom osnovnom periodom.

Na kraju ove lekcije ćemo se upoznati sa Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje – granični slučaj Furijeovih redova, kao i sa inverznom Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje Furijeovih koeficijenata.

Kroz celu ovu lekciju će se provlačiti pojmovi periodičnost funkcije, kao i pojam ortogonalnost funkcija. Najpre, ćemo se podsetiti pojma periodičnosti funkcije (sa kojim ste se susretali u dosadašnjem školovanju), a onda uvesti i pojam ortogonalnih funkcija.

Poglavlje 1

Periodične funkcije

POJAM

Trigonometrijski redovi su poseban oblik funkcionalnih redova.

Mnogi procesi u prirodi su periodičnog karaktera. Oni se u pravilnim vremenskim razmacima ponavljaju, a opisuju se periodičnim funkcijama.

Definicija. Neka je data funkcija $y = f(x)$, za $x \in D_f$, gde je D_f domen date funkcije. Za f kažemo da je periodična funkcija ako postoji $T > 0$, tako da je

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x),$$

za svako $x \in D_f$. Primećujemo da domen D_f kod periodične funkcije ne može biti ograničen ni odozdo, niti odozgo.

Veličina T iz prethodne definicije se naziva perioda funkcije f. Ako je T perioda funkcije, tada je i nT, $n \in \mathbb{Z}$ takođe perioda te funkcije. Prema tome, svaka periodična funkciju ima beskonačno mnogo perioda. Prirodno se postavlja sledeće pitanje: da li svaka periodična funkcija ima najmanju pozitivnu periodu? Odgovor je u opštem slučaju negativan. O tome pod kojim uslovom neka periodična funkcija ima najmanju periodu govori naredni stav.

Stav. Ako je neprekidna periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ različita od konstantne funkcije, tada ona ima najmanju periodu.

Najmanja pozitivna perioda neke funkcije naziva se osnovna perioda funkcije f, u oznaci T_0 i definiše se na sledeći način

$$T_0 = \inf\{T \mid T \text{ je perioda od } f\}.$$

Stav. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična sa osnovnom periodom T_0. Ako je funkcija f integrabilna u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[0, T_0]$, tada je ona integrabilna na svakom konačnom segmentu realne prave. Pri tome važi

$$\int_a^{a+T_0} f(x)dx = \int_0^{T_0} f(x)dx,$$

za svako $a \in \mathbb{R}$.

Poglavlje 2

Ortogonalnost funkcija

POJAM

Ortogonalnost funkcija je bitan pojam prilikom definisana Furijeovih redova.

Sada ćemo uvesti pojam ortogonalnost funkcija.

Posmatrajmo funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$, za $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$. Za funkcije f i g kažemo da su međusobno ortogonalne ako su one neprekidne funkcije na $[a,b]$ i ako važi:

$$1. \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=0,$$

$$2. \int_a^b f^2(x)\neq 0 \text{ i } \int_a^b g^2(x)\neq 0.$$

Posmatrajmo niz funkcija $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N},}$ za $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$. Za taj niz kažemo da čini sistem međusobno ortogonalnih funkcija ako je:

$$1. \int_a^b f_i(x)\cdot f_j(x)dx=0, \text{ za } i\neq j,\ i,j\in\mathbb{N},$$

$$2. \int_a^b f_i^2(x)\neq 0, \ \text{ za svako } i\in\mathbb{N}.$$

SISTEM ORTOGONALNIH FUNKCIJA

Sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$, je sistem ortogonalnih funkcija na svakom intervalu dužine 2π.

Sistem ortogonalnih funkcija na nekom intervalu, jeste skup linearno nezavisnih funkcija kod koga su svake dve funkcije tog sistema ortogonalne na posmatranom intervalu.

Istorijski gledano, prvi i najvažniji ortogonalni sistem funkcija je sistem $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,$ ..., za $x \in [-\pi, \pi]$. Da je on zaista ortogonalan važi iz sledećeg

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

za $m \neq n$. Slično, može se pokazati da važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0,$$

za $m \neq n$.

Može se pokazati da je sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$ ortogonalan i na intervalu $x \in [0, 2\pi]$ ili još opštije on je ortogonalan na svakom intervalu dužine 2π.

Dalje, ako svaku od funkcija $\cos x$, $\sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,$ ..., za $x \in [-\pi, \pi]$, rastegnemo ili sabijemo duž x -ose sa koeficijentom $\frac{l}{\pi},\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dobijamo sistem funkcija

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots,$$

za $x \in [-l, l]$, koji je na ovom intervalu ortogonalan.

Osobinu ortogonalnosti imaju mnogi sistemi funkcija, ali o tome ovde neće biti reči.

Napomena. Od bilo kog sistema linearno nezavisnih funkcija, može se konstruisati sistem ortogonalnih funkcija koji zadovoljava prethodno date uslove $1.$ i $2.$ Taj postupak se naziva ortogonalizacija sistema funkcija.

REDOVI ORTOGONALNIH FUNKCIJA

Uslovi pod kojima je moguće određenu funkciju razviti u red po ortogonalnim funkcijama.

Neka je dati sistem funkcija

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

ortogonalan na intervalu $x \in (a, b)$. Može se postavi pitanje da li se proizvoljna funkcija $f(x)$ može razviti u red na zadatom intervalu po prethodno datim funkcijama, tj. razviti u konvergentan red oblika

$$f(x)=a_1g_1(x)+a_2g_2(x)+\ldots+a_ng_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_ng_n(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ realni ili kompleksni brojevi. Tada se postavljaju i dva dodatna pitanja, da li je moguće svaku funkciju $f(x)$ razviti na ovaj način i kako odrediti koeficijente $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$,tako da ovaj razvoj važi. Radi jednostavnosti izlaganja pretpostavimo da je interval (a,b) konačan (tj. $a,b\in\mathbb{R},a<b$) i da su sve posmatrane funkcije konačne na njemu.

Ako je prethodni razvoj moguć za svaku funkciju $f(x)$, tada se sistem $g_1(x),g_2(x),\ldots,g_n(x),\ldots$ naziva potpun sistem. Može se dokazati da je svaki ortogonalni sistem funkcija potpun sistem.

Nalaženje koeficijenata $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$se obavlja tako što izraz

$$f(x)=a_1g_1(x)+a_2g_2(x)+\ldots+a_ng_n(x)+\ldots$$

pomnoži sa $g_n(x)$ (pod pretpostavkom da je $g_n(x)\neq 0$, za $n=1,2,3,\ldots$). Tada integraljenjem dobijene jednačine na intervalu (a,b) dobijamo da je

$$\int_a^b f(x)g_n(x)dx=a_1\int_a^b g_1(x)g_n(x)dx+a_2\int_a^b g_2(x)g_n(x)dx+\ldots+a_n\int_a^b g_n(x)g_n(x)dx+\ldots=$$
$$=a_n\int_a^b g_n(x)g_n(x)dx,$$

zbog ortogonalnosti funkcija $g_1(x),g_2(x),\ldots,g_n(x),\ldots$ Tada imamo da je

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)g_n(x)dx}{\int_a^b g_n(x)g_n(x)dx},\ n=1,2,3,\ldots$$

Poglavlje 3

Furijeov red periodične funkcije sa periodom 2π

TRIGONOMETRIJSKI REDOVI

Razvoj funkcije u trigonometrijski red.

Posmatrajmo ponovo sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Proizvoljnu konačnu funkciju $f(x)$ definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$ možemo da razvijemo u red oblika

$$f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos 2x + a_3 \sin 2x + \ldots$$

Kako bismo olakšali rad, promenićemo oznake koeficijentima u prethodnom razvoj i predstaviti ih na sledeći način

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Ove koeficijente određujemo na sledeći način

$$a_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gde je

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

Neka red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira u nekoj oblasti $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ i označimo njegova suma data $S(x)$, za $x \in A$. Pošto je $S(x)$, $x \in A$, zbirna funkcija ovog reda, ona mora takođe biti 2π -periodična (jer su takvi svi sabirci u datom trigonometrijskom redu). Odnosno, mora da važi $S(x+2\pi) = S(x-2\pi) = S(x)$, za $x \in A$, pa skup A ne može biti ograničen skup (niti odozgo, niti odozdo) u $\mathbb{R}$. Kažemo da se neka funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ može razviti u trigonometrijski red, ako postoji red prethodno datog oblika koji konvergira na celoj realnoj osi $\mathbb{R}$ i čiji je zbir jednak datoj funkciji $f(x)$.

Stav. Ako su brojni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergentni, tada je trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

apsolutno i uniformno konvergentan funkcionalni red, za svako $x \in \mathbb{R}$.

FURIJEOV RED PERIODIČNE FUNKCIJE SA PERIODOM 2π

Za 2π -periodičnu funkciju dat je postupak kako se ona može razviti u trigonometrijski red.

Stav. Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Takođe, neka je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ i neke realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ i $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ Takođe, pretpostavimo da trigonometrijski red iz datog razvoja uniformno konvergira za $[-\pi, \pi]$. Tada je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, ako posmatramo funkciju $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, koja je 2π -periodična i neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, za koju važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

tada se trigometrijski red, dat na desnoj strani prethodne formule, naziva Furijeov red funkcije $f(x)$. Koeficijenti a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ i b_n $(n \in \mathbb{N})$ koji se jednoznačno određuju formulama datim u prethodnom stavu, tako da ovaj razvoj važi, nazivaju se Furijeovi koeficijenti .

Furijeova konstrukcija za određivanje koeficijenata $a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $b_n,\ n \in \mathbb{N}$ iz prethodnog stava jedino ima smisla za formiranje odgovarajućeg trigonometrijskog reda (Furijeovog reda) ako želimo da razmatramo pitanje razvoja polazne funkcije f u taj trigonometrijski red.

Za egzistenciju Furijeovih koeficijenata određenih datim formulama dovoljno je da funkcija f bude apsolutno integrabilna na segmentu $[-\pi, \pi]$. Pri tome se za svaku apsolutno integrabilnu funkciju smatra da je integrabilna u svojstvenom smislu na svakom konačnom intervalu koji ne sadrži tačke u odnosu na koje je taj integral nesvojstven.

ŽORDAN-DIRIHLEOV KRITERIJUM

Za razvoj 2π -periodične funkcije $y = f(x)$ u Furijeov red, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova.

Ako za polaznu funkciju kreiramo njoj odgovarajući Furijeov red, postavlja se pitanje da li se taj trigonometrijski red mora poklopiti sa polaznom funkcijom za svako $x \in \mathbb{R}$, ili ne, tj. da li će važiti $S(x) = f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Odgovor na ovo pitanje ne mora biti potvrdan bez dodatnih uslova.

Za pitanje razvoja 2π -periodične funkcije f u odgovarajući Furijeov red na skupu $\mathbb{R}$, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova. U daljem razmatranju navešćemo jedan od njih.

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je deo po deo monotona na intervalu $[-\pi, \pi]$ ako postoji konačan broj tačaka x_0, x_1, ... , x_n, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je

$$-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \pi,$$

pri čemu je funkcija f monotona, tj. nerastuća ili neopadajuća na intervalima oblika $[x_i, x_{i+1})$, za $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Stav (Žordan-Dirihleov kriterijum). Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je deo po deo monotona i ograničena na $[-\pi, \pi]$. Tada njen Furijeov red konvergira u svakoj tački tog integrala. Zbir odgovarajućeg Furijeovog reda

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ispunjava sledeće uslove

1. ako je funkcija f neprekidna u tački $x \in (-\pi, \pi)$, tada je $f(x) = F(x)$;

2. ako funkcija f ima prekid prve vrste u tački $x \in (-\pi, \pi)$, tada je

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x_+} f(x) + \lim_{t \to x_-} f(x) \right);$$

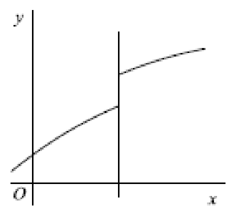
3. važi da je

$$F(\pi)=F(-\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\pi_+} f(x)+\lim_{t\to\pi_-} f(x)\right).$$

BITNE NAPOMENE

Prethodni stav predstavlja osnovni alat za rešavanje zadataka – naročito primena dela tvrđenja pod 1.

Uslov iskorišćen u prethodnom stavu (da je funkcija $y=f(x)$ deo po deo monotona funkcija) je specijalan slučaj uslova ograničene varijacije posmatrane funkcije. Posmatrani uslov (deo po deo monotona funkcija) nam ukazuje na to da posmatranu funkciju možemo integraliti u formulama za određivanje koeficijenata $a_n(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ i $b_n(n\in\mathbb{N})$ i ukazuje na to da funkcija može imati samo prekide prve vrste (videti sliku).



Slika 3.1 Primer funkcije koja ima prekid prve vrste.

Žordan-Dirihleov kriterijum ništa ne govori o funkciji $y=f(x)$ van segmenta $[-\pi,\pi]$, tj. ona ne mora biti $2\pi-$ periodična funkcija, čak ne mora biti ni definisana van ovog intervala. Govorili smo već tome da se u ovom slučaju može napraviti ekstenzija funkcije $f(x)$ tako da postane $2\pi-$ periodična funkcija. Ako funkciju $f(x)$ periodično produžimo tako da ona postane $2\pi-$ periodična, Žordan-Dirihleov kriterijum tada važi za svako $x\in\mathbb{R}$. Da bi produženje bilo jednoznačno, funkcija $f(x)$ se najčešće ne zadaje na segmentu $[-\pi,\pi]$, nego na intervalima $(-\pi,\pi]$, $[-\pi,\pi)$, ili $(-\pi,\pi)$, tim pre što u opštem slučaju važi $F(\pi)\neq f(-\pi)$. Žordan-Dirihleov kriterijum može se analogno sprovesti za bilo koju $l-$ periodičnu funkciju $(l>0)$, o čemu ćemo govoriti kasnije.

FURIJEOV RAZVOJ PARNIH I NEPARNIH 2π - PERIODIČNIH FUNKCIJA

Specijalni slučajevi za određivanje koeficijenata u Furijeovom razvoju se dešavaju kada je posmatrana funkcija parna ili neparna.

Specijalni slučajevi prethodno navedenih formula za određivanje koeficijenata $a_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ i $b_n,\ n\in\mathbb{N}$, prilikom razvoja neke funkcije u Furijeov red na segmentu $[-\pi,\pi]$ nastaju kada je $f(x)$ parna, odnosno neparna funkcija.

Neka je $f(x)$ parna funkcija na segmentu $[-\pi,\pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x)\cdot\cos nx$ parna, a $f(x)\cdot\sin nx$ neparna, pa imamo da važi

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj parne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gde se koeficijenti a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov kosinusni red.

Neka je, sada, $f(x)$ neparna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x) \cdot \cos nx$ neparna, a $f(x) \cdot \sin nx$ parna, pa imamo da važi

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj neparne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

gde se koeficijenti b_n $(n \in \mathbb{N})$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov sinusni red.

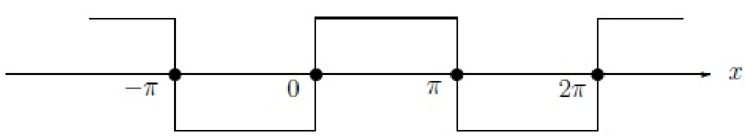
PRIMER

Primena Furijeovog sinusnog reda.

Jedan od najvažnijih primena Furijeov sinusnog reda, jeste razvoj funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi. \end{cases}$$

u njega. Ova funkcija se naziva " neparni kvadratni talas " (odd square wave) i njen grafik je prikazan na sledećoj slici.



Slika 3.2 Neparni kvadratni talas.

Odredimo koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$ za razvoj funkcije f u Furijeov sinusni red. Tada je

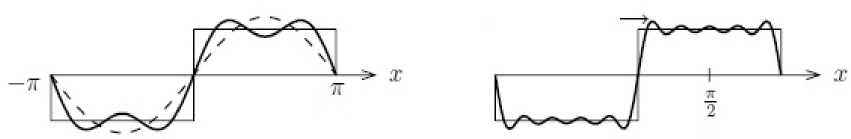
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tada dobijamo da je

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots\right)$$

Kao što smo ranije govorili, što uzimamo više članova reda iz dobijene sume, time je aproksimacija sve tačnija i tačnija, što je prikazano na narednoj slici. Na slici levo isprekidanom linijom je aproksimirana funkcija f izrazom $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin x}{1}$, dok je punom linijom predstavljena njena aproksimacija sa $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3}\right)$ .Na datoj slici desno, aproksimacija je izvršena izrazom $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9}\right)$.



Slika 3.3 Aproksimacija funkcije Furijeovim redom

U vezi sa aproksimaranjem prekidnih funkcija (tačnije rečeno onih koje imaju prekid prvog reda) Furiovim redom, javlja se tzv. Gibsov fenomen. On se javlja u okolini tačke u kojoj funkcija ima prekid, u smislu da aproksimacija ima najveće odstupanje u okolini te tačke u odnosu na posmatranu funkciju. To odstupanje nekada može biti značajno, čak i kada se aproksimacija vrši većim brojem članova u parcijanoj sumi. Na datoj slici desno na Gibsov fenomen je ukazano strelicom.

Poglavlje 4

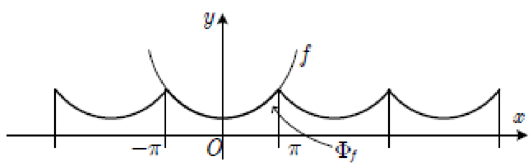
Furijeov razvoj drugih tipova funkcija

RAZVOJ FUNKCIJE KOJA NIJE 2π PERIODIČNA FUNKCIJA

2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi,\pi)$ na skup $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je data funkcija $y=f(x),\ x\in R$, koja nije 2π -periodična. Za takvu funkciju ne može se sprovesti Furijeova konstrukcija direktno, ali se može uraditi sledeće: za funkciju f na intervalu $[-\pi,\pi)$ se formira funkcija $\Phi_f(x),\ x\in\mathbb{R}$, tako da je $\Phi_f(x)=f(x)$ za $x\in[-\pi,\pi)$ i da je $\Phi_f(x)$ za $x\in\mathbb{R}$, 2π -periodična funkcija (videti sliku). Funkcija $\Phi_f(x),\ x\in\mathbb{R}$, naziva se " 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi,\pi)$ ".

Za ovakvu ekstenziju možemo sprovesti kompletnu Furijeovu konstrukciju. Ako iz ove konstrukcije dobijemo razvoja funkcije $\Phi_f(x)$ preko Furijeovog reda, to će biti razvoj i za funkciju f u intervalu $[-\pi,\pi)$.



Slika 4.1 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi,\pi)$ na skup $\mathbb{R}$.

RAZVOJ U FURIJEOV RED FUNKCIJE NA INTERVALU $[0,\pi]$

Parno i neparno produženje funkcije.

Videli smo da je Furijeov razvoj neke funkcije kosinusni, ako je ta funkcija parna, a sinusni ako je ona neparna na segmentu $[-\pi,\pi]$. Zato zadatu funkciju $f(x)$ treba produžiti na $[-\pi,0)$, tako da nova funkcija bude parna, odnosno neparna.

Parno produženje funkcije $f(x)$ je funkcija

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi], \\ f(-x), & x\in[-\pi,0). \end{cases}$$

i tako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo kosinuse.

Neparno produženje funkcija $f(x)$ je funkcija

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo sinuse.

FURIJEOV RED FUNKCIJE PROIZVOLJNE PERIODE

Moguće je funkciju koja je periodična, sa nekom periodom $2l$, razviti u Furijeov red.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ periodična funkcija sa periodom $2l$ $(l > 0)$. Da bismo ovu funkciju razvili u Furijeov red na intervalu $[-l, l]$, izvršićemo smenu promenljive tako da je $x = \frac{lt}{\pi}$. Tada je funkcija $F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ periodična po promenljivoj t i njena perioda je je jednaka 2π. Naime, imamo da je

$$F(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = F(t).$$

Stoga, funkcija $F(t)$ se pod uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma može razviti u Furijeov red na interval $[-\pi, \pi]$. Tada je

$$F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

pri ovome važi da je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ako vratimo promenljivu x, tj. izrazimo t iz date smene, imamo $t = \frac{\pi x}{l}$, tj. $dt = \frac{\pi dx}{l}$, pa ukupno dobijamo da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Napomena. U ovom slučaju se, zapravo, koristi ortogonalni sistem funkcija $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}$, ..., prilikom kreiranja trigonometrijskog reda.

Napomena. U ovom slučaju se može desiti da posmatrana funkcija $2l$ -periodična bude parna ili neparna funkcija, pa se mogu konstruisati Furijeovi koeficijenti za takve slučajeve, na potpuno analogan način kao što smo to uradili za 2π -periodične funkcije.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Furijeov red za funkciju periode 2.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOV RAZVOJ FUNKCIJE NA PROIZVOLJNOM INTERVALU

Uopštavanjem prethodno datog razvoja, može se izvršiti razvoj funkcije na proizvoljnom intervalu.

Opštije, analognim postupkom se može dobiti Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ na proizvoljnom intervalu $[\alpha, \beta]$. Tada važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} \right)$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poglavlje 5

Furijeova transformacija

UVOD

Furijeova transformacija ima primenu mnogim oblastima nauke i inženjerstva.

Sada ćemo proučiti Furijeovu transformaciju i njen inverz. Furijeova transformacija se može shvatiti kao neprekidni oblik Furijeovog reda. Naime, Furijeov red razlaže funkciju definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$, na komponente koje osciluju s celobrojnom periodom. S druge strane, Furijeova transformacija razlaže funkciju definisanu na celoj realnoj pravoj, na komponente s periodama koje mogu biti bilo koji realni ili kompleksni broj.

Metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inženjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa. Sem toga, može pomoći u rešavanju diferencijalnih jednačina ili u praćenju dinamike tržišta i berze.

KOMPLEKSAN OBLIK FURIJEOVOG REDA

Sa datog oblika Furijeovog reda može se preći na njegov kompleksan oblik.

Za periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom $2l$ $(l > 0)$, sada ćemo, najpre, dati njen kompleksan oblik. Da bismo dobili kompleksan oblik Furijeovog reda ove funkciju na intervalu $[-l, l]$, iskoristićimo poznatu Ojlerovu formulu,

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos x &= \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) - \frac{ib_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right). \end{aligned}$$

Ako uvedimo oznake

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \alpha_n = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}, \alpha_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tada možemo dati kompleksan oblik Furijeovog reda za posmatranu funkciju $f(x)$, na intervalu $[-l, l]$ na sledeći način

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}} + \alpha_{-n} e^{-\frac{inx\pi}{l}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}}.$$

Koeficijente ovako definisanog Furijeovog reda određujemo iz formule:

$$\alpha_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{int\pi}{l}} dt.$$

Članovi $e^{\frac{inx\pi}{l}}$ se nazivaju kompleksni harmonici, dok se članovi α_n nazivaju kompleksne amplitude.

FURIJEOV INTEGRAL

Odgovarajuća suma koja se javlja u Furijeovom razvoju predstavlja odgovarajuću integralnu sumu, kada se intervala $[-l, l]$ pređe na $\mathbb{R}$, tj. kada se pusti da $l \to +\infty$.

Sada ćemo u Furijeovom redu funkcije f, definisane na čitavom skupu $\mathbb{R}$, koja je data u kompleksnom obliku pustiti da parametar l teži u beskonačnost i razmotriti šta će se u tom slučaju događati sa navedenim formulama. Zato ćemo u Furijeov red dat u komplesnom obliku uvrstiti izraz za α_n. Tada dobijamo

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{l}} dt \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} \right] =$$
$$= \lim_{l \to \infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi(x-t)}{l}} dt \right).$$

Uvedimo sada oznaku $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, kao i $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$,za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tada je

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{\lambda_n i(x-t)} dt \right] \Delta\lambda. \qquad (*)$$

Neka je sada

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

Tada sumu u formuli $(*)$ možemo zapisati

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(\lambda_n) \Delta\lambda_n.$$

Odavde se može videti da prethodna suma predstavlja zapravo integralnu sumu kada $l \to +\infty$, tj. tada $\Delta\lambda \to 0$, pa imamo da se $(*)$ može zapisati kao

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} F_l(\lambda) d\lambda.$$

Dalje, $F_l(\lambda)$ formalno postaje integral

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt$$

kada $l \to +\infty$. Tada imamo da je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda,$$

pri čemu se prethodno dobijeni integral se naziva Furijeov integral.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Furijeova transformacija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOVA I INVERZNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija u kompleksnom obliku.

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija u kompleksnom obliku je data sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Za unutrašnji integral uvedimo oznaku

$$\widehat{f}\,(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Ova funkcija se naziva Furijeova transformacija funkcije f u kompleksnom obliku. Tada imamo da je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda.$$

Poslednja formula se naziva inverzna Furijeova transformacija funkcije f.
Ako uvedemo oznaku $F[f]$ za Furijeovu transformaciju funkcije f, kao i oznaku $F^{-1}[f]$ za inverznu Furijeovu transformaciju. Tada možemo navesti neke od osobina Furijeove transformacije:

$$F[f \pm g] = F[f] \pm F[g],\ F[c \cdot f] = c \cdot F[f]$$
$$F^{-1}[f \pm g] = F^{-1}[f] \pm F^{-1}[g],\ F^{-1}[c \cdot f] = c \cdot F^{-1}[f]$$

Na osnovu prethodnog možemo uvideti da je Furijeova transformacija, kao i inverzna Furijeova transformacija linearni operator.

Napomena. Za egzistenciju Furijeove transformacije funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno je:

$1.$ da je ona apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tj. da važi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

$2.$ da ona ima konačan broj ekstremnih vrijednosti (minimuma i maksimuma) u proizvoljno odabranom konačnom intervalu;

$3.$ da ona ima konačan broj prekida (prekida prve vrste) u proizvoljno odbranom konačnom intervalu.

Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma kod Furijeovog reda. Uslov apsolutne integrabilnosti je dovoljan za egzistenciju Furijeove transformacije većine realnih funkcija. Međutim, uslov apsolutne integrabilnosti nije i potreban uslov, jer postoje realne funkcije koji nisu apsolutno integrabilni, ali se za njih, ipak, može odrediti Furijeova transformacija.

PRIMER 1

Određivanje Furijeove transformacije za datu funkciju.

Neka je zadata funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \notin (-1, 1) \\ 1, & \text{za } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Odrediti njenu Furijeovu transformaciju.

Rešenje. Važi da je

$$\begin{aligned}
F(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-i\lambda t} dt + \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-i\lambda t} dt + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\lambda t} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (\cos(-\lambda t) + i \sin(-\lambda t))\, dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (\cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t))\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \bigg|_{-1}^{1} + i \cdot \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \bigg|_{-1}^{1} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} - \frac{\sin(-\lambda)}{\lambda} + i \cdot \left(\frac{\cos \lambda}{\lambda} - \frac{\cos(-\lambda)}{\lambda} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Poglavlje 6

Vežba

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: motivacija

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 1

Razvoj funkcije u Furijeov red.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x$ u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje:

Odgovarajući koeficijenti $a_n, \; b_n$ Furijeovog reda su

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}2\pi^2 = 2\pi,$$

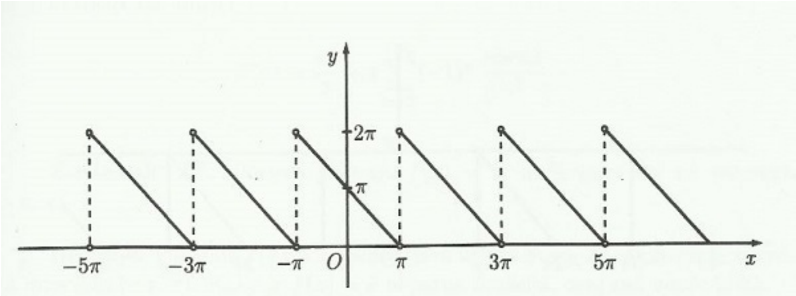
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx \; dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx \; dx = \frac{2(-1)^n}{n},$$

Pa je Furijeov red funkcije

$$S(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Na sledećoj slici prikazan je grafik funkcije $F(x)$, koja predstavlja periodično produženje funkcije $f(x) = \pi - x$ na skup R.



Slika 6.1 Grafik funkcije F(x), koja predstavlja periodično produženje funkcije fx=π−x na skup R.

ZADATAK 2 – 1. DEO

Razvoj funkcije u Furijeov red na intervalu 2π.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Rešenje:

Data funkcija očigledno zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, pa se može razviti u Furijeov red. Pritom nije ni parna ni neparna, i njene koeficijente a_n, b_n nalazimo po formuli

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Imaćemo da je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2 \, dx + \int_{0}^{\pi} 1 \, dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(2\pi + \pi) = 3,$$

odakle je $a_0 / 2 = 3 / 2$, i

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx \, dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\sin(-n\pi)}{n} + \frac{\sin n\pi}{n}\right) = 0,$$

ZADATAK 2 – 2. DEO

Razvoj funkcije u Furijeov red na intervalu 2π

Dalje je, za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}(1-\cos n\pi) - \frac{\cos n\pi - 1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)(1-\cos n\pi) = -\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi) = -\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & n = 2k-1,\ k = 1, 2, \ \dots \\ 0, & n = 2k,\ k = 1, 2, \ \dots \end{cases}$$

Stoga je

$$S(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Pritom je na osnovu Dirihleove teoreme $S(0) = \frac{3}{2}$ i $S(\pm\pi) = \frac{3}{2}$.

ZADATAK 3

Razvoj parne funkcije u Furijeov red.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \sin^2 x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešenje:

Data funkcija je parna, pa njen razvoj u Furijeov red sadrži samo kosinuse. U posmatranom slučaju ovaj se razvoj može naći neposredno. Naime, imaćemo da je

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

odakle je $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_n = 0 \quad (n = 1, 3, 4, \ \dots)$.

ZADATAK 4

Razvoj parne funkcije u Furijeov red

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešenje:

Kako je funkcija $f(x) = x^2$ parna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, njen Furijeov red ima oblik

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

Pritom je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

pa je Furijeov red funkcije

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

ZADATAK 5

Razvoj neparne funkcije u Furijeov red.

Razviti funkciju $f(x) = x$ u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje:

Funkcija $f(x) = x$ zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, pa se može razviti u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$. Kako je pritom i neparna funkcija, ovaj red imaće oblik

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

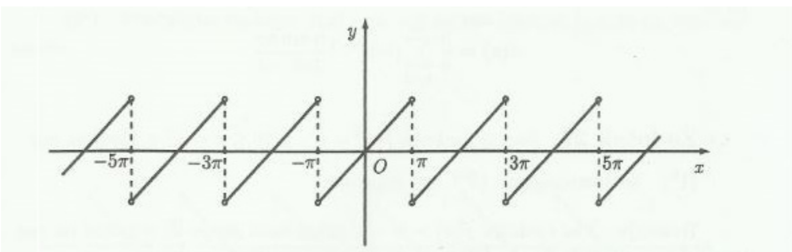
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \qquad (n \in N),$$

pa je odgovarajući Furijeov red funkcije

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Ova relacija važi za svako $x \in (-\pi, \pi)$. U tačkama $x = \pm\pi$ suma $S(x)$ se ne poklapa sa vrednostima funkcije $f(x) = x$, $\quad S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = 0$.

Izvan intervala $[-\pi, \pi]$ suma $S(x)$ je periodično produženje funkcije $f(x) = x$. Njen grafik prikazan je na sledećoj slici.



Slika 6.2 Produženje funkcije f(x) = x na skup R.

ZADATAK 6

Razvoj funkcije u Furijeov red po kosinusima.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x, \quad (0 \le x \le \pi)$ u Furijeov red po kosinusima.

Rešenje:

Ako funkciju $f(x) = \pi - x$ produžimo parno ili neparno na ceo interval $[-\pi, \pi]$, tada će ona biti ograničena i deo po deo monotona.

Produžimo funkciju $f(x)$ na intervalu $[-\pi, 0]$ kao parnu funkciju (videti sliku). Tada je

$$\pi - x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

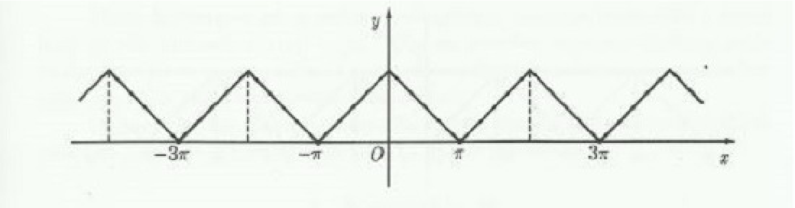
pri čemu je

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx \quad dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \ \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ \ldots \end{cases},$$

pa je Furijeov red funkcije

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad (0 \le x \le \pi).$$



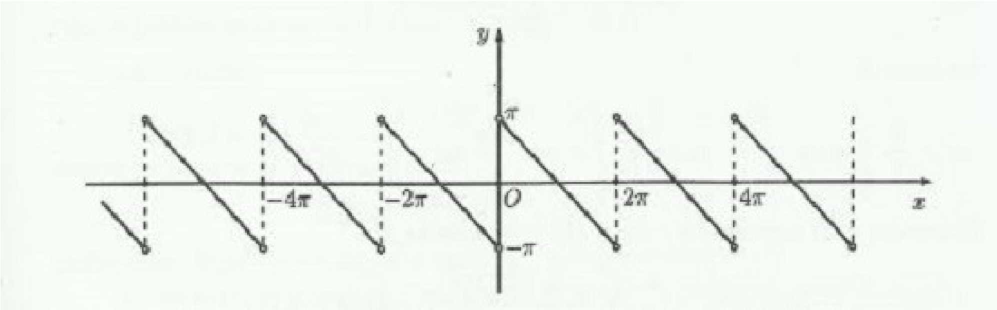
Slika 6.3 Produženje funkcije funkciju f(x) = π – x, kao parne funkcije na R.

ZADATAK 7

Razvoj funkcije u Furijeov red po sinusima.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x, \quad (0 \le x \le \pi)$ u Furijeov red po sinusima.

Rešenje. Produžimo funkciju $f(x) = \pi - x$ na ceo interval $[-\pi, \pi]$ kao neparnu funkciju (videti sliku).



Slika 6.4 Produženje funkcije funkciju f(x) = π – x, kao neparne funkcije na R.

Tada je:

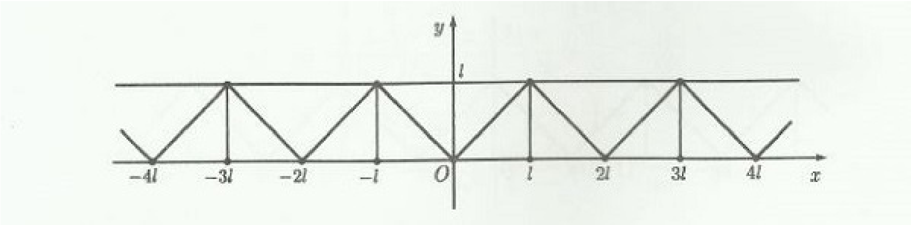
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi - x\right)\sin nx \quad dx = \frac{2}{n}$$

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0 \le x \le \pi).$$

ZADATAK 8

Furijeov red funkcije proizvoljne periode.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = |x|$ sa periodom $2l$ na intervalu $[-l, l]$.



Slika 6.5 Produženje funkcije f(x) = |x| na R.

Rešenje:

Kako je funkcija $f(x) = |x|$ parna na intervalu $[-l, l]$, njen Furijeov red ima oblik

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

pri čemu je

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} x \quad dx = l,$$

dok je

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^2}, & n = 1, 3, 5, \ \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ \dots \end{cases}$$

Odakle dobijamo da je

$$S(x) = \frac{l}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2} \qquad \left(x \in [-l, l]\right).$$

ZADATAK 9

Određivanje Furijeove transformacije za datu funkciju

Neka je zadata funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3t, & \text{za } x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti njenu Furijeovu transformaciju.

Rešenje. Data funkcija je neparna funkcija na intetrvalu $(-\pi, \pi)$, pa imamo da je

$$\begin{aligned} F(f) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\lambda t)dt = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\cdot\sin\lambda t dt = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(\cos(3-\lambda)t - \cos(3+\lambda)t\big)dt = \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin(3-\lambda)t}{(3-\lambda)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(3+\lambda)t}{(3+\lambda)}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin(3-\lambda)\pi}{(3-\lambda)} - \frac{\sin(3+\lambda)\pi}{(3+\lambda)}\right) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\lambda\pi}{(3-\lambda)} + \frac{\sin(\lambda\pi)}{(3+\lambda)}\right) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{6\cdot\sin\lambda\pi}{9-\lambda^2} = \\ &= -\frac{3\sqrt{2}i\sin\lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}. \end{aligned}$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} c_1, & -\pi < x \le 0 \\ c_2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$, $c_1, c_2 \in R$.

Rezultat: $S(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$

Zadatak 2. Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Rezultat: $S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

Zadatak 3. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rezultat: $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

Zadatak 4. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} -x-2, & -\pi < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

Rezultat: $S(x) = \frac{\pi - 1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{3}{2n-1} \sin(2n-1)x \right)$

Zadatak 5. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = |x| - 1$, na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rezultat: $S(x) = \frac{\pi - 2}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Zadatak 6. Razviti funkciju $f(x) = x^2$, $0 \le x \le \pi$ u Furijeov red

1. po kosinusima

2. po sinusima.

Rezultat:

1. $S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

2. $S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n-1} - \frac{4}{(2n-1)^3 \pi} \right) \sin(2n-1)x - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx$

Zaključak za lekciju 11

FURIJEOVI REDOVI

Funkcionalni red, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, uniformna konvergencija, divergencija, stepeni red, radijus konvergencije, razvoj funkcije u red.

U ovoj lekciji smo obradili Furijeove redove i u vezi sa time:

- Furijeove redove periodične funkcije sa periodom 2π,
- Neke dovoljne uslove za razvoj funkcije u Furijeov red,
- Furijeov razvoj parnih i neparnih funkcija,
- Razvoj u Furijeov red funkcije na intervalu [0, π],
- Furijeov red funkcije proizvoljne periode.
- Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija.

Istaknimo da metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inženjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.