UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Trojni integrali

Lekcija 13

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 13

TROJNI INTEGRALI

- Trojni integrali
- Poglavlje 1: Pojam
- Poglavlje 2: Izračunavanje trojnog integrala
- Poglavlje 3: Smena promenljivih
- Poglavlje 4: Primena trojnog integrala
- Poglavlje 5: Vežbe
- Zaključak za lekciju 13

Uvod

UVOD

Trojni integrali

Oblast integracije višestrukih integrala je višedimenzionalna oblast D. Generalni slučaj višestrukih integrala, kada je $D \subset \mathbb{R}^n$, nećemo razmatrati na ovom kursu, već ćemo se zadržati samo na specijalnim slučajevima. To su dvojni i trojni integrali, kod kojih je oblast integracije $D \subset \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalna (ravna) i $D \subset \mathbb{R}^3$ trodimenzionalna (prostorna) oblast, tim redom.

Sa dvojnim integralima smo se upoznali na prethodnom predavanju i istakli da dvojni integrali predstavljaju generalizaciju određenog (Rimanovog) integrala. Ideja uvođenja trojnog integrala, takođe, je analogna ideji uvođenja određenog Rimanovog integrala, samo što prilikom uvođenja trojnih integrala umesto intervala, oblast integracije postaje neka oblast u prostoru, tj. zatvorena površ.

Poglavlje 1

Pojam

EGZISTENCIJA TROJNOG INTEGRALA

Datim stavom je uveden dovoljan uslov integrabilnosti funkcije f. On nije i potreban uslov, jer postoje i prekidne funkcije koje su integrabilne u ovom smislu.

Napomenimo na samom početku da u uvođenju dvojnih i trojnih integrala postoji potpuna analogija, pri čemu je jedina razlika što je u ovom slučaju oblast integracije trodimenzionalna, a podintegralna funkcija je realna funkcija tri realne promenljive.

Neka je u oblast u $\mathbb{R}^3$ dato ograničeno telo T koje je merljivo (ima svoju zapreminu). Neka je na T definisana ograničena funkcija $u = f(x, y, z)$, za $(x, y, z) \in T$. Analogno metodologijom kao i kod ostalih integrala Rimanovog tipa (tj. pomoću Darbu-Rimanovih suma) možemo uvesti integraciju posmatrane funkcije f po telu T. Ta vrsta integracije naziva se trojni integral funkcije f po oblasti T i označava sa

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz,$$

gde je $dxdydz = dt$ i naziva se zapreminski element tela T. Svakako, ovaj integral može postojati ili ne. Jedan uslov kada ovakav integral postoji daje sledeći stav.

Stav. Neka je dato zatvoreno telo T iz $\mathbb{R}^3 (T \subset \mathbb{R}^3)$ koje je merljivo (ima svoju zapreminu) i neprekidna funkcija $f(x, y, z)$ na T. Tada je ova funkcija integrabilna na T, tj. postoji njen trojni integral.

Napomena. Slično kao što za jednostruke integrale mogu da se definišu nesvojstveni integrali prvog i drugog tipa, to se može uraditi i za dvojne i trojne integrale, ali time se ovde nećemo baviti.

OSNOVNE OSOBINE

U okviru datog stava izložene su najbitnije osobine trojnog integrala.

Stav. Neka su $u = f(x,y,z)$ i $v = g(x,y,z)$ integrabilne funkcije na $T \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi

$$\iiint\limits_T [\alpha \cdot f(x,y,z) \pm \beta \cdot g(x,y,z)]dxdydz = \alpha \cdot \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \pm \beta \cdot \iiint\limits_T g(x,y,z)dxdydz.$$

Ova osobina se naziva osobina linearnosti.

2. Ako je $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, za $(x,y,z) \in T$, tada je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_T g(x,y,z)dxdydz$$

3. Ako je $f(x,y,z) \equiv 1$, za svako $(x,y,z) \in T$, tada je

$$\iiint\limits_T dxdydz = V,$$

gde je V zapremina tela T.
4. Ako je $m \leq f(x,y,z) \leq M$, za $(x,y,z) \in T$, tada važi

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot V$$

gde je V zapremina tela T.

5. Neka je telo T podeljeno na dva tela, tj. $T = T_1 \cup T_2,$ gde su T_1 i T_2 oblasti iz $\mathbb{R}^3$ takve da imaju zapreminu i da su disjunktne, tj. da važi $T_1 \cap T_2 = \emptyset.$ Tada je funkcija $f(x,y,z)$, za $(x,y,z) \in T$, integrabilna na oblasti T_1 i T_2 i važi

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Delovi T_1 i T_2 se dobijaju kada T ,,rasečemo" pomoću određenih ravni ili površi drugog reda. Na sličan način se može definisati prethodno pravilo za konačno mnogo disjunktnih skupova T_1, T_2, ..., T_n.

Ako su dve funkcije f i g integrabilne na nekoj oblasti T iz $\mathbb{R}^3$, tada su integrabilne i sledeće funkcije na oblasti T :
a) $f \cdot g$,
b) $|f|$,
c) $\dfrac{1}{f}$ uz uslov $|f(x,y,z)| \geq \alpha > 0$ za $(x,y,z) \in T$,
d) $\dfrac{f}{g}$ uz uslov $|g(x,y,z)| \geq c > 0$ za $(x,y,z) \in T$,

Poglavlje 2

Izračunavanje trojnog integrala

FUBINIJEV STAV

Osnovnu metodologiju za izračunavanje trojnog integrala, kao i kod dvojnog, daje Fubinijev stav.

Prethodno pomenute osobine daju kvalitativan doprinos teoriji trojnih integrala, ali je potrebno dati osnovnu metodologiji za njihovo izračunavanje koje se zasniva na rezultatu koji se naziva Fubinijev stav u trodimenzionalnom slučaju. Navedimo jednu varijantu Fubinijevog stava

Neka je u $\mathbb{R}^3$ dato telo T koje ima svoju zapreminu i posmatrajmo njegovu projekciju na ravan Oxy. Pretpostavimo da je ta projekcija oblast Dxy iz pomenute ravni (koja ima svoju površinu). Takođe, neka je T ograničeno telo u $\mathbb{R}^3$ i neka je njegov rub koji ga ograničava (i koji predstavlja površ) takav da je unija dva grafika neprekidnih funkcija $z = \varphi_1(x, y)$ i $z = \varphi_2(x, y)$ datih na zatvorenju oblasti Dxy, takvih da je $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, za $(x, y) \in Dxy$, i da je $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$, za $(x, y) \in \partial Dxy$, (tj. kada se tačke nalaze na rubu od Dxy). Neka je data neprekidna funkcija $u = f(x, y, z)$ na T. Tada, prema važi da je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_x y} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Iz prethodne formule se može videti da se trojni integral svodi na rešavanje odgovarajućeg dvojnog integrala. Dalje, ako pretpostavimo da je rub oblasti Dxy takav da je unija grafika dve funkcije $y = \alpha_1(x)$ i $y = \alpha_2(x)$, za $x \in [a, b]$, gde je $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$ za $x \in (a, b)$ i $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$, za $x = a$ ili $x = b$. Takođe, mora se pretpostaviti da su $y = \alpha_1(x)$ i $y = \alpha_2(x)$ neprekidne na $[a, b]$. Ovde je interval (a, b) projekcija oblasti Dxy na x -osu. Tada, prethodnu formulu možemo zapisati

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Napomena. Prilikom integracije funkcije $u = f(x, y, z)$ po promenljivim z, y i x, tim redom, u prethodnoj formuli primenjuje se parcijalna integraljenje, po svakoj od pomenutih promenljivih.

Napomena. Generalno govoreći, projekcija površi se može vršiti u bilo koju od koordinatnih ravni, samo je bitno daprojektovana oblastima površinu u njoj. Mi smoovde izneli samojednu od mogućnosti, kada seprojekcija vrši u Oxy ravan, pod datom pretpostavkom. Analagno se moževršiti projekcijau Oxz, odnosno Oyz ravan.

NAPOMENE

Najjednostavniji slučaj koji se može desiti prilikom trojne intracije jeste onaj kada je oblast integracije kvadar.

Najjednostavniji slučaj prilikom primene Fubinijevog stava, što se oblasti T tiče, je situacija kada ona predstavlja kvadar. Tada je

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f,\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$$

i imamo da je

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_e^f f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx.$$

Studenti najčešće biraju da projekciju oblasti vrše u Oxy ravan. Međutim,u određenim slučajevimaje granice trojnog integrala, kao i sam integral lakše odrediti ako se projekcija oblasti T izvrši u ravan Oxz ili Oyz. Tada se analogno prethodno rečenom određuju granice integrala, kao i redosled integracije.

U sledećem primeru se bavimo određivanjem granica za integraciju trojnog integrala, jer studentima taj korak najčešće pravi problem.Tunećemo konkretno zadati podintegralnu funkciju, jer nam trenutno nije cilj integracija, već samo određivanje granica u kojima je treba vršiti.

PRIMER 1

Određivanje granica za trojni integral ako je oblast T sfera.

Postaviti granice za integraciju u trojnom integralu

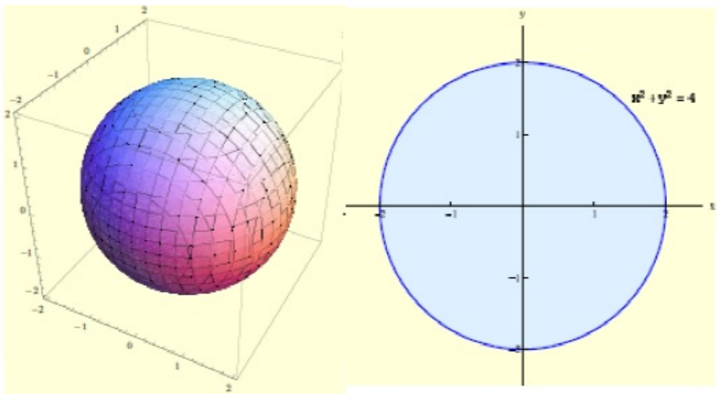
$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz,$$

ako je oblast T centralna sfera poluprečnika 2.

Rešenje. Centralna sfera poluprečnika 2 ima jednačinu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Ako se ovo telo projektuje u Oxy ravan, tada granicu ove projekcije čini kružnica $x^2 + y^2 = 4$ (videti sliku).



Slika 2.1 Centralna sfera i njena projekcija u Oxy ravan.

Tada imamo da je

$$\begin{gathered} -2 \le x \le 2, \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \end{gathered}$$

i prema prethodno datoj formuli za izračunavanje trojnog integrala važi

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$$

PRIMER 2

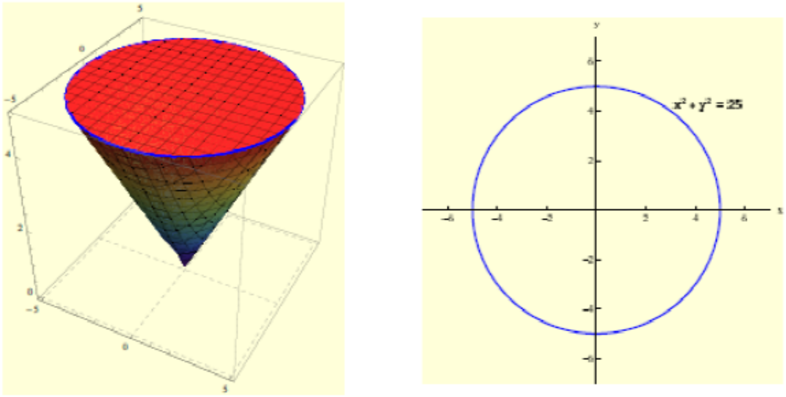
Određivanje granica za trojni integral ako je oblast T konus.

Postaviti granice za integraciju u trojnom integralu

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$$

ako je oblast T unutrašnjost konusa $x^2 + y^2 = z^2$,za $0 \le z \le 5$.

Projekcija konusa na ravan Oxy je unutrašnjost kružnice $x^2 + y^2 = 25$ (videti sliku).



Slika 2.2 Konus drugog reda i njena projekcija u Oxy ravan.

Tada imamo da je

$$\begin{gathered} -5 \leq x \leq 5, \\ -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 5 \end{gathered}$$

i prema prethodno datoj formuli za izračunavanje trojnog integrala važi:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-5}^{5} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} f(x,y,z)dz.$$

U narednim primerima ćemo ukazati i na to kako se vrši integracija u trojnom integralu.

PRIMER 3

Izračunavanje trojnog integrala, ako je oblast integracije kvadar.

Izračunati trojni integral

$$\iiint\limits_T e^{x+y+z} dxdydz,$$

ako je oblast $T = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

Rešenje. Imamo da je

$$\iiint\limits_T e^{x+y+z} dxdydz = \iiint\limits_T e^x e^y e^z dxdydz =$$
$$= \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^2 e^y dy\right)\left(\int_0^3 e^z dy\right) =$$
$$= (e-1)(e^2-1)(e^3-1).$$

Napomena. Ovo je najjednostavniji slučaj integracije, jer poredtoga štoje oblastintegracije kvadar, podingralnafunkcija se može zapisati u obliku $f(x) = e^{x+y+z} = e^x \cdot e^y \cdot e^z$, pa semože vršiti integracija po svakoj od promenljivih nezavisno.

PRIMER 4

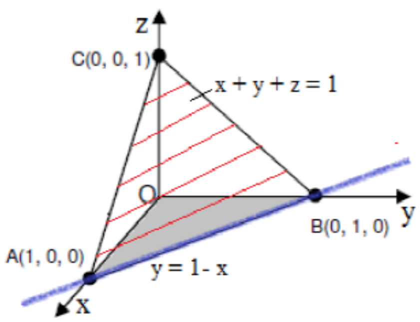
Izračunavanje trojnog integrala.

Izračunati trojni integral

$$\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz,$$

gde je oblast T predstavlja tetraedar sa temenima u tačkama $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$.

Rešenje. Tetraedar je omeđen ravnima OAB i ABC (videti sliku). Jednačina ravni OAB je $z=0$, dok iz segmentnom oblika jednačine ravni (ili iz jednačine ravni kroz tri tačke) dobijamo da je ravan ABC oblika $x+y+z=1$, odakle je $z = 1 - x - y$.



Slika 2.3 Tetraedar i njegova projekcija u Oxy ravan.

Projekcija tačaka A, B i C u ravan $z=0$ (ili Oxy ravan), se tim redom svode na tačke $A'(1,0)$, $B'(0,1)$ i $O'(0,0)$. Tada je

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x.\ 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

Sada imamo da je

$$\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)(1+x+y)dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x^2-2xy-y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2-2xy-y^2)\Big|_{y=0}^{1-x} dx = \ldots = \frac{1}{8}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: izračunavanje trojnog integrala.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Smena promenljivih

JAKOBIJAN

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje trojnog integrala jeste ona koja proističe iz teoreme o smeni promenljivih u trojnom integralu.

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje trojnog integrala jeste tehnika koja proističe iz teoreme o smeni promenljivih trojnog integrala. Kako na efektivno izračunavanje trojnog integrala, osim podintegralne funkcije, utiče i oblast u kojoj se vrši integracija cilj uvođenja smene promenljivih jeste da se prevaziđe bar jedan (ili oba) od opisanih problema koji se mogu javiti prilikom integracije. O tome govorimo u nastavku.

Pretpostavimo da je funkcija $u = f(x, y, z)$ neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti T i da su funkcije: $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$, neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima u zatvorenoj oblasti T^*. Dakle, oblast T^* je domen prethodno definisanom preslikavanju. Pretpostavimo, takođe, da se ovim funkcijama oblast T^* bijektivno preslikava u oblast T.

Napomena. U našem slučaju uvek će egzistirati barem jedno preslikavanje $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ sa navedenim osobinama.

Tada smenu promenljivih u trostrukom integralu zadajemo sledećom formulom

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))Jdudvdw,$$

gde je J Jakobijan funkcija $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ koji se određuje na sledeći način

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ponekad je pogodno uvesti smene, tako da se nove promenjive izražavaju u funkciji preko starih promenljivih. Tada je $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = t(x, y, z)$ i ovaj sistem treba rešiti tako da se iz njih izrazi $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$. Jakobijan, u ovom slučaju, se dobija iz relacije

$$J(x,y,z)=\frac{1}{J(u,v,w)}.$$

PRIMER 1 – 1. DEO

Uvođenje smene u trojni integral i određivanje Jakobijana.

Izračunati trojni integral

$$\iiint\limits_{T} dxdydz,$$

gde je telo T ograničeno površi

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}+\sqrt{\frac{z}{15}}=1.$$

Rešenje. Uvedimo smenu

$$u=\sqrt{\frac{x}{2}},v=\sqrt{\frac{y}{3}},w=\sqrt{\frac{z}{15}}.$$

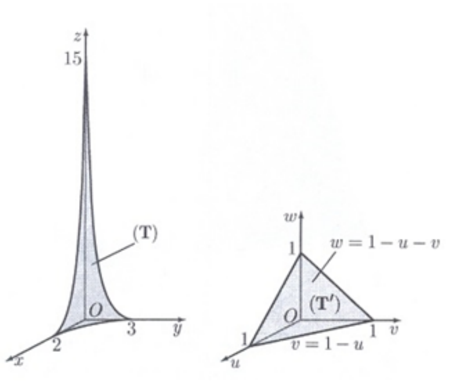
Imamo da je

$$x=2u^2,\ y=3v^2,\ z=15w^2,$$

pa Jakobijan glasi

$$J=\begin{vmatrix}4u & 0 & 0\\ 0 & 6v & 0\\ 0 & 0 & 30w\end{vmatrix}=720uvw.$$

Tada se telo T transformiše u telo $T':u+v+w=1,$ pri čemu zbog definicije korena važi $u\geq 0, v\geq 0$ i $w\geq 0,$ pa se radi o tetraedru u prvom oktantu (videti sliku).



Slika 3.1 Transformacija tela uvođenjem smene u trojni integral.

Oblast T' je određena relacijama

$$0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 1-u,\ 0\leq w\leq 1-u-v.$$

PRIMER 1 – 2. DEO

Izračunavanje trojnog integrala

$$\iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_{T^*} dudvdw = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{1-u-v} 720uvwdw =$$

$$= 720 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} u \cdot v \cdot \frac{w^2}{2}\Big|_0^{1-u-v} dv = 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} u \cdot v \cdot (1-u-v)^2 dv =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \left(u(1-u)^2 v - 2u(1-u)v^2 + uv^3\right) dv =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \left(u(1-u)^2 \frac{v^2}{2} - 2u(1-u)\frac{v^3}{3} + u\frac{v^4}{4}\right)\Big|_0^{1-u} du =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 u(1-u)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) du = 360 \int\limits_0^1 \frac{u(1-u)^4}{12} du =$$

$$= \ldots = 1.$$

Prema osobinama trojnog integrala koje smo dali, dobijena vrednost predstavlja zapreminu posmatranog tela.

U mnogim primerima kod trojnog integrala su veoma značajne smene promenljive nastale uvođenjem:

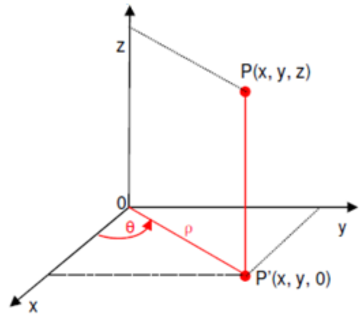
- cilindričnih koordinata i
- sfernih koordinata,

u prostor $\mathbb{R}^3$ gde je već zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$. O tome će biti reči u nastavku.

CILINDRIČNE KOORDINATE

Jedna od najčešćih smena koja se javlja u radu sa trojnim integralima jeste uvođenje cilindričnih koordinata.

Prilikom uvođenja ovih vrsta koordinata položaj tačke P određen je sa tri veličine ρ, θ i z, gde su ρ i θ polarne koordinate tačke P', koja predstavlja projekciju P u ravni Oxy. Veličine ρ, θ i z predstavljaju cilindrične koordinate (videti sliku).



Slika 3.2 Uvođenje cilindričnih koordinata.

Dakle, u cilindričnim koordinatama tačka P ima koordinate (ρ, θ, z), gde je ρ i θ predstavljaju polarne koordinate u ravni o kojima smo već govorimo u vezi sa dvojnim integralima, a z je aplikata (koordinata na Oz osi) tačke P.

Sledećim relacijama data je veza između pravouglih i cilindričnih koordinata:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z,$$

pri čemu važi da je

$$\rho > 0, 0 \le \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty.$$

Imamo da je Jakobijan J u ovom slučaju jednak

$$J = J(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

UOPŠTENE CILINDRIČNE KOORDINATE

Napomene u vezi sa korišćenjem cilindričnih koordinata i uvođenje uopštenih cilindričnih koordinata.

Napomena. Potrebno je uočiti da je po samoj strukturi cilindričnih koordinata svejedno da li se one u trojni integral direktno uvode ili se trojni integral prvo svede na dvojni integral, pa se u njega uvedu polarne koordinate. Stoga, može se zaključiti da je ovu vrstu smene korisno uvoditi u slučajevima kada oblast integracije, odnosno podintegralna funkcija zavise od kvadratne forme $x^2 + y^2$.

S obzirom da se cilindrične koordinate mogu svesti na polarne koordinate, tada se za njih mogu definisati uopštene cilindrične koordinate, analogno uvođenju uopštenih polarnih koordinata kod polarnih koordinata.

Njihov najopštiji oblik, sa polom u koordinatnom početku, je:

$$x = a \cdot \rho^{\alpha} \cdot \cos^{\beta}\theta,\ y = b \cdot \rho^{\alpha} \cdot \sin^{\beta}\theta,\ z = c \cdot z^{\gamma}.$$

pri čemu je Jakobijan u ovom slučaju

$$J = a \cdot b \cdot c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \rho^{2\alpha-1} \cdot z^{\gamma-1} \cdot \cos^{\beta-1}\theta \cdot \sin^{\beta-1}\theta.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: cilindrične koordinate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2 - 1. DEO

Ovim primerom ilustrujemo svrhu uvođenja cilindričnih koordinata. Najpre, primer rešavamo bez uvođenja ovih koordinata.

Izračunati

$$I = \iiint\limits_T ((x+y)^2 - z)dxdydz,$$

gde je telo T ograničena površima $z = 0$ i $(z–1)^2 = x^2 + y^2$.

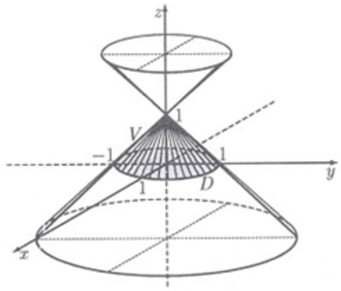
Rešenje. Zadatak se ćemo pokušati da rešimo bez uvođenja polarnih koordinata. Projekcijom datom tela na Oxy ravan, tj. za $z = 0$ imamo da je ona krug $x^2 + y^2 \leq 1$ (videti sliku). Tada je oblast T određena sledećim relacijama

$$-1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2},$$

pa imamo da je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)dz = \\ &= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left((x+y)^2 \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2} \right) dy. \end{aligned}$$

Rešavanje poslednjeg integrala se komplikuje, tako da ćemo ovde stati i pokušati da uradimo zadatak uvođenjem cilindričnih koordinata. Cilj njihovog uvođenja jeste da se dobijaju jednostavnije podintegralne funkcije, kao i granice integrala, kako bi se što više olakšala celokupna integracija. Studentu se preporučuje, radi uvežbavanja, da započeto integraljenje dovrši.



Slika 3.3 Određivanje oblasti integracije.

PRIMER 2 - 2. DEO

Uvođenje cilindričnih koordinata u trojni integral.

Uvedimo, sada, cilindrične koordinate: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z,$ pri čemu je $J=\rho$. Iz $x^2+y^2=1$ imamo da je $\rho^2=1$, tj. važi $0\le\rho\le1$, a kako nema ograničenja za θ, tada je $0\le\theta<2\pi$. Dalje, iz $(z-1)^2=x^2+y^2$ sledi da je $(z-1)^2=\rho^2$, pa je $|z-1|=\rho$, tj.

$$|z-1|=\begin{cases} z-1, & z\ge1,\\ 1-z, & z<1\end{cases}.$$

Kako se sa slike može videti da je T telo kod koga je $z<1$, tada je $1-z=\rho$, tj. $0\le z\le 1-\rho$. Tada imamo da je

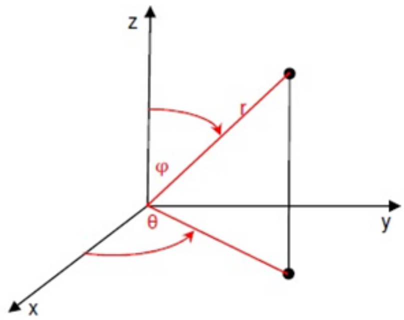
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} \rho\left((\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)^2-z\right)dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} \left(\rho^3(1+\sin 2\theta)-z\rho\right)dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^3(1+\sin 2\theta)z-\frac{z^2}{2}\rho\right)\Big|_0^{1-\rho} d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^3(1+\sin 2\theta)(1-\rho)-\frac{(1-\rho)^2}{2}\rho\right)d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\theta)-\frac{1}{24}\right)d\theta = \frac{\pi}{60}. \end{aligned}$$

SFERNE KOORDINATE

Pored cilindričnih koordinata, jedna od najčešćih smena koja se javlja u radu sa trojnim integralima jeste uvođenje sfernih koordinata.

Druga smena o kojoj ćemo govoriti jeste transformacija Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema u prostoru u sferne koordinate.

Prilikom uvođenja ovih vrsta koordinata položaj tačke P određen je sa tri veličine r, θ i φ, gde je r rastojanje tačke P do koordinatnog početka, θ je ugao između tačke P', koja predstavlja projekciju P u ravni Oxy i pozitivnog dela Ox ose, dok je φ ugao između pozitivnog dela Oz ose i radujus vektora OP. Veličine r, θ i φ tada predstavljaju sferne koordinate (videti sliku).



Slika 3.4 Uvođenje sfernih koordinata.

Veza između pravouglih i sfernih koordinata, što se sa date slike može uočiti, je

$$x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi,$$

Dakle, u sfernim koordinatama tačka P ima koordinate (ρ, φ, θ) za koje važi da je

$$\rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Napomena. U nekim situacijama može se posmatrati i slučaj kada je $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Jakobijan J je u ovom slučaju jednak:

$$J = J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi \cdot \cos\theta & \rho \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta & -\rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ \sin\varphi \cdot \sin\theta & \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta & \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho \cdot \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \sin\varphi.$$

UOPŠTENE SFERNE KOORDINATE

Napomene u vezi sa korišćenjem sfernih koordinata i uvođenje uopštenih sfernih koordinata

Uvođenje sfernih koordinata je pogodno kada je oblast integracije ili podintegralna funkcija zavisi od kvadratne forme $x^2+y^2+z^2$, jer važi da je $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Slično, kao i kod polarnih koordinata uvođenje sfernih koordinata se može uopštavati.

Na primer, prilikom javljanja kvadratne forme

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}$$

bilo u podintegralnoj funkciji, bilo u oblasti integraciji, tada se uvode uopštene sferne koordinate

$$x=p+a\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=q+b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=r+c\cdot\rho\cdot\cos\varphi,$$

pri čemu je u ovom slučaju

$$J=a\cdot b\cdot c\cdot\rho^2\cdot\sin\varphi.$$

Svakako, kao i kod cilindričnih koordinata, mogu se i dalje ove koordinate uopštavati do najopštijeg oblika

$$x=p+a\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\varphi\cdot\cos^\gamma\theta,\ y=q+b\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\varphi\cdot\sin^\gamma\theta,\ z=r+c\cdot\rho^\alpha\cdot\cos^\gamma\varphi,$$

pri čemu je Jakobijan

$$J=a\cdot b\cdot c\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot r^{3\alpha-1}\cdot\sin^{2\beta-1}\varphi\cdot\cos^{\beta-1}\varphi\cdot\sin^{\gamma-1}\theta\cdot\cos^{\gamma-1}\theta.$$

Napomena. Ako se u prethodnim uopštenim sfernim koordinatama stavi $p=q=r=0$, tada se radi o uopštenim sfernim koordinatama sa polom u tački $(0,0,0)$.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: sferne koordinate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 3

Uviđenje uopštenih sfernih koordinata u trojni integral

Izračunati integral

$$I=\iiint\limits_T xyzdxdydz,$$

gde je $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$.

Rešenje. Prelaskom na sferne uopštene koordinate

$$x = a \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,\ y = b \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \cdot\rho\cos\varphi,$$
$$J = abc\rho^2 \sin\varphi,$$

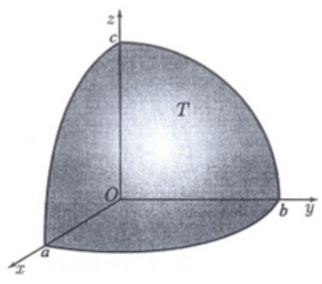
iz uslova

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$$

dobijamo da je (videti sliku)

$$0 < \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 a\rho\sin\varphi\cos\theta \cdot b\rho\sin\varphi\sin\theta \cdot \rho\cos\varphi \cdot abc\rho^2 \sin\varphi d\rho =$$
$$= a^2b^2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 d\theta =$$
$$= \frac{a^2b^2c^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi \cdot \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$
$$= \frac{a^2b^2c^2}{12} \cdot \frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{a^2b^2c^2}{48}.$$



Slika 3.5 Oblast integracije u prvom oktantu.

Poglavlje 4

Primena trojnog integrala

ODREĐIVANJE ZAPREMINE TELA

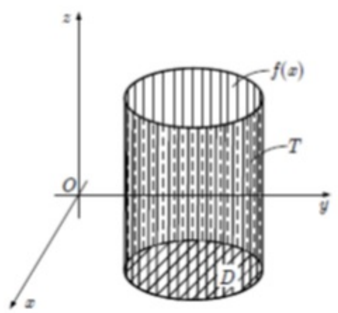
Trojni integral se može koristiti za određivanje zapremine tela.

Pokazali smo u prethodnoj lekciji kako se dvojni integral može primeniti na određivanje zapremine tela u prostoru.

Sada ćemo govoriti kako se trojni integral može upotrebiti za istu svrhu. Zapravo, prilikom izlaganja o osobinama trojnog integrala istakli smo da se zapremina nekog tela T može odrediti na sledeći način

$$\iiint_T dxdydz = V.$$

Ako je telo T ograničeno sa gornje strane nekom neprekidnom i ograničenom funkcijom $z = f(x,y)$ na ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f(x,y) \geq 0$, za $(x,y) \in D$. Na datoj slici uočimo cilindrično telo čije su baze (osnove) oblasti D i $f(D)$ i čiji je omotač takva površ koja nastaje kao trag (u $\mathbb{R}^3$) kretanja neke prave P (paralelne sa z osom) po rubu od oblasti D (tj. cilindrična površ – videti sliku).



Slika 4.1 Cilindarska površ.

Tada je $0 \leq z \leq f(x,y)$ za $(x,y) \in D$ i važi

$$V = \iiint_T dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{f(x,y)} dz.$$

U nastavku dajemo nekoliko karakterističnih primera u vezi sa primenom trojnog integrala na izračunavanje zapremine tela koje čini oblast integracije.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine lopte - uvođenje sfernih koordinata.

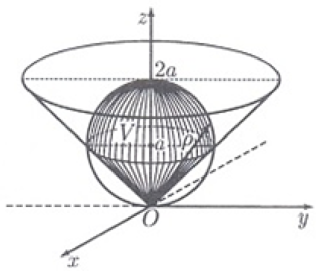
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 1

Izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi.

Izračunati zapreminu tela određenog nejednačinama $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ i $x^2+y^2 \leq z^2$, za $a>0$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Prva nejednačina $x^2+y^2+z^2 \leq 2az, (a>0)$ je deo prostora $\mathbb{R}^3$ koji predstavlja unutrašnjost sfere $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$, centrom u tački $(0,0,a)$ i poluprečnikom a. S druge strane, druga nejednakost predstavlja unutrašnjost kružnog konusa sa temenom u koordinatnom početku (videti sliku). Dakle, potrebno je izračunati zapreminu tela koje se nalazi preseku unutrašnjosti sfere i unutrašnjosti konusa. Na datoj slici ta oblast je šrafirana.



Slika 4.2 Telo dobijeno kao presek sfere i kunusa.

Uvodimo sferne koordinate:

$$x=\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi,$$

pri čemu je Jakobijan $J=\rho^2\sin\varphi$.

Zamenom sfernih koordinata u jednačinama sfere i konusa, koristeći datu sliku, dobijamo sledeće granice za ovako uvedene koordinate

$$\begin{gathered} x^2+y^2+z^2 \leq 2az \ \Leftrightarrow\ \rho^2=2a\rho\cos\varphi \ \Leftrightarrow\ 0<\rho\leq 2a\cos\varphi, \\ x^2+y^2\leq z^2 \ \Leftrightarrow\ \rho^2\sin^2\varphi=\rho^2\cos^{\varphi} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow\ 0\leq\varphi\frac{\pi}{4} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi. \end{gathered}$$

Sada imamo da je

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} smena : \cos\varphi = t, & -\sin\varphi d\varphi = dt \\ \varphi = 0 \Rightarrow t = 1, & \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{2}{2}, \end{vmatrix} = \ldots = a^3\pi,$$

PRIMER 2

Izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi

Izračunati zapreminu tela ograničenog površima $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z^2 = x^2 + y^2$,pri $z \geq 0$.

Rešenje. Kako je $z = 6 - x^2 - y^2$ jednačina paraboloida, a $z^2 = x^2 + y^2$ jednačina konusa uvodimo cilindrične koordinate

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z,$$

pri čemu je $J = \rho$.

Rešavanjem sistem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ i $z^2 = x^2 + y^2$ po z dobijamo da je $z = 6 - z^2$, tj. imamo $z^2 + z - 6 = 0$, čija su rešenja $z_1 = 2$ ili $z_2 = -3$. Kako je po uslovu zadatka $z \geq 0$ tada je presek konusa i paraboloida u ravni $z = 2$, čija je projekcija na ravan Oxy oblast data na slici.

Kako je je $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 4\right\}$imamo da je $0 < \rho \leq 2,\ 0 < \theta \leq 2\pi$. Kako je

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2),$$

odnosno

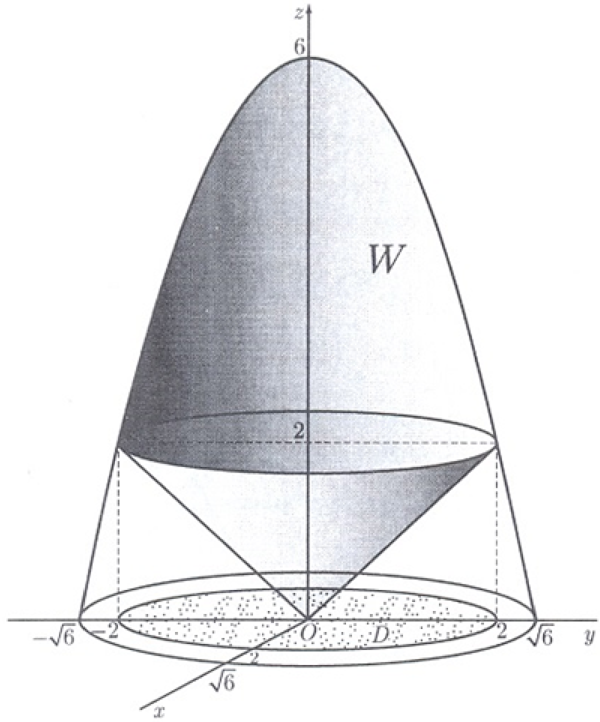
$$\rho \leq z \leq 6 - \rho^2.$$

Tražena zapremina je tada

$$V = \iiint_W dxdydz = \iint_D dxdy \int_\rho^{6-\rho^2} dz,$$

tj.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = \ldots = \frac{32\pi}{2}.$$



Slika 4.3 Telo dobijeno presekom paraboloida i konusa.

PRIMER 3 - 1. DEO

Određivanje granica za integral i izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi.

Izračunati zapreminu tela T koje ograničava elipsoid i konus čije jednačine su date tim redom

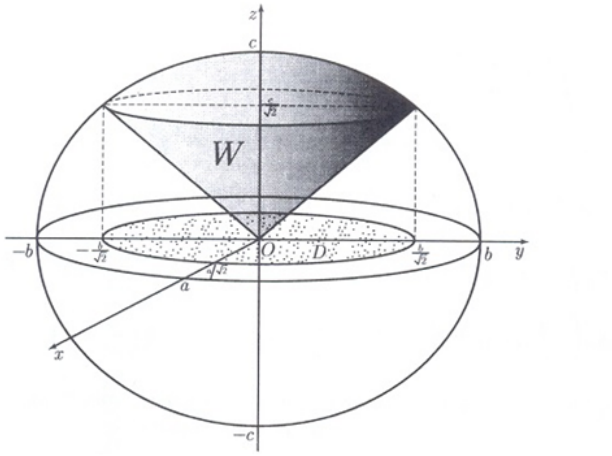
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \quad (z\geq 0).$$

Rešenje. Iz sistema koji čine jednačine ovih površi dobijamo da je $2\frac{z^2}{c^2}=1$, odnosno $z^2=\frac{c^2}{2}$. Kako je pretpostavka da je $z>0$, tada je $z=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Zamenom dobijenog u bilo kojoj od jednačina datih površi dobijamo projekciju tela, koje predstavlja presek ovih površi, u Oxy ravan. Ako uvrstimo da je $z=\frac{c}{\sqrt{2}}$ u jednačinu sfere, ta projekcija predstavlja krivu drugog reda čija jednačina glasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\frac{c^2}{2}}{c^2}=1 \text{ tj. } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}, \text{ tj. } \frac{x^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{2}}=1.$$

Dakle, ta projekcija predstavlja elipsu u Oxy ravni. Označimo je sa D. Takođe, nije teško uočiti sa slike da važi

$$c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$



Slika 4.4 Telo dobijeno presekom elipsoida i konusa.

Tada je

$$V = \iiint\limits_T = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= c\iint\limits_D \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right) dxdy.$$

PRIMER 3 – 2. DEO

Uvođenje polarnih koordinata, određivanje granica za novo uvedene promenljive i primena Fubinijeve teoreme.

Da bismo rešili poslednji intergal, uvešćemo uopštene polarne kordinate

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta,$$

$$0 < \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad J = \frac{ab}{2}\rho.$$

Sada je

$$V = c\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2}\right)\frac{1}{2}ab\rho d\rho =$$
$$= \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho - \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\frac{\rho}{\sqrt{2}}d\rho =$$
$$= I_1 - I_2.$$

Za prvi od ovih integrala, u oznaci I_1, uvodimo smenu $1-\frac{1}{2}\rho^2 = t^2$.Važi da je $\rho d\rho = -2tdt$ i za $\rho = 0$ je $t = 1$, dok za $\rho = 1$ je $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tada je

$$I_1 = \frac{abc}{2}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\cdot(-2tdt) = 2abc\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^2dt = 2abc\pi\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 =$$
$$= \frac{abc\pi}{3}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Za integral I_2 imamo da je

$$I_2 = \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\frac{\rho}{\sqrt{2}}d\rho = \frac{abc\pi}{\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{abc\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ukupno, dobijamo

$$V = I_1 - I_2 = \frac{abc\pi}{3}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{abc\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})abc\pi}{3}.$$

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine lopte - uvođenje cilindričnih koordinata.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Vežbe

ZADATAK 1

Izračunavanje trojnog integrala.

Izračunati trostruki integral

$$I = \iiint\limits_{D} (x + 2y - z)dxdydz$$

ako je oblast D kocka $[0, 1]^3$.

Rešenje:

Kako je oblast D kvadar u prostoru $Oxyz$, posmatrani integral se svodi na

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + 2y - z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left((x + 2y)z - \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + 2y - \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 dx \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) y + y^2 \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} + 1 \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ZADATAK 2

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem sfernih koordinata

Izračunati trostruki integral

$$\iiint\limits_{D} \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz$$

pri čemu je D polukugla $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \quad z \ge 0$.

<u>Rešenje:</u> Primenom sfernih koordinata

$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi$

dobijamo da je $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi$, pa je

$$I = \iiint\limits_{D_0} \rho^2\cos^2\varphi\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint\limits_{D_0} \rho^4\cos^3\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

pritom je D_0 opisana sa $0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$. Stoga je

$$I=\left(\int_0^R\rho^4d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)=2\pi\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\sin\varphi=\frac{2\pi R^5}{5}\int_0^1\left(1-u^2\right)du=\frac{2\pi R^5}{5}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

ZADATAK 3

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem sfernih koordinata.

Izračunati integral

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,$$

gde je V sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

Rešenje: Prelaskom na sferne coordinate dobijamo

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2\ln\rho^2\sin\theta\ \ d\rho=2\pi(-\cos\theta)\Bigg|_0^{\pi}\int_0^R2\rho^2\ln\rho\ \ d\rho=$$

$$4\pi(-\cos\pi+\cos 0)\int_0^R\rho^2\ln\rho\ \ d\rho=8\pi\int_0^R\rho^2\ln\rho\ \ d\rho$$

Integral $\int_0^R\rho^2\ln\rho\ \ d\rho$ rešavamo parcijalnom integracijom $u=\ln\rho,\quad dv=\rho^2d\rho,\quad du=\frac{d\rho}{\rho},\quad v=\frac{\rho^3}{3}.$

$$\int_0^R\ln\rho\ \ \rho^2d\rho=\ln\rho\ \ \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R-\int_0^R\frac{\rho^3}{3}\frac{1}{\rho}d\rho=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{3}\int_0^R\rho^2d\rho=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{9}R^3$$

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=8\pi\frac{R^3}{3}\left(\ln R-\frac{1}{3}\right).$$

ZADATAK 4

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem cilindričnih koordinata.

Izračunati

$$\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz,$$

gde je oblast V ograničena površima $x^2+y^2=2z,\quad z=2.$

Rešenje. Prelaskom na cilindrične koordinate dobijamo

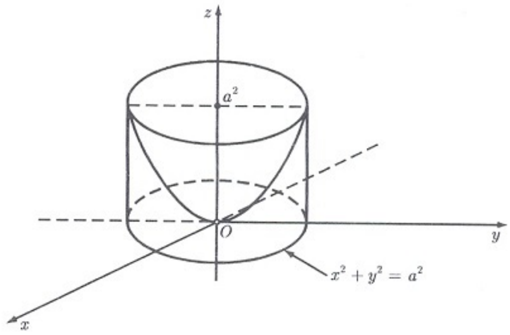
$$\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_{\rho^2/2}^{2}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^2\rho\ \ d\rho=2\pi\int_0^2\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho^3d\rho=2\pi\left(2\frac{\rho^4}{4}-\frac{1}{2}\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\Big|8-\frac{16}{3}=2\pi\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\pi.$$

ZADATAK 5

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala

Primenom trostrukog integrala izračunati zapreminu oblasti ograničene paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i cilindrom $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ za $z \geq 0$.

Rešenje: Kod izračunavanja zapremine ove oblasti primenićemo cilindrične koordinate $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$. U ovim koordinatama jednačine paraboloida i cilindra glase $z = \rho^2$ i $\rho = a$.



Slika 5.1 Telo ograničeno paraboloidom i cilindrom.

Ako sa D_0 označimo deo ovog tela koji se nalazi u prvom oktantu, tada je tražena zapremina

$$V = 4\iiint\limits_{D_0} \rho d\rho d\varphi dz,$$

a oblast D_0 u koordinatama (ρ, φ, z) odgovara zatvorena oblast definisana nejednakostima $0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq \rho^2$. Odavde dobijamo da je

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a d\rho \int_0^{\rho^2} \rho dz = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = 4\frac{\pi}{2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

ZADATAK 6

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala.

Primenom trostrukog integrala izračunati zapreminu kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Rešenje:

Ako sa D označimo posmatranu zatvorenu kuglu, a sa D_0 njen deo koji se nalazi u prvom oktantu, tada je

$$V = \iiint\limits_{D} dxdydz = 8\iiint\limits_{D_0} dxdydz.$$

Ako sada primenimo sferne koordinate

$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi$

tada je Jakobijan transformacije $J = \rho^2$, njegova apsolutna vrednost $|J| = J = \rho^2$ i $dxdydz = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Pritom oblasti D_0 u koordinatama (ρ, φ, θ) odgovara oblast $\Omega: 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Stoga je

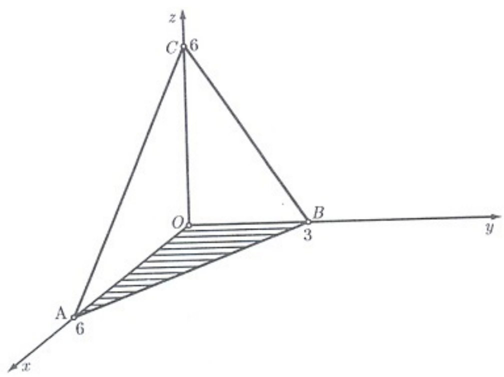
$$V = 8\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \rho^2\sin\theta d\theta = 8\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\varphi = 4\pi\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ZADATAK 7

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala..

Izračunati zapreminu tetraedra ograničenog ravnima $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y + z - 6 = 0$.

Rešenje:



Slika 5.2 Tetraedar ograničen datim ravnima

Projekcija tetraedra u ravni Oxy je trougao ograničen pravim linijama $x = 0, \quad y = 0$ i $x + 2y - 6 = 0$, tako da x varira od 0 do 6, i za fiksirano $x = x_0 \quad (0 \le x_0 \le 6)$, y varira od 0 do $3 - \frac{x}{2}$. Ako su x, y fiksirane vrednosti, koordinata z varira od $z = 0$ (ravan Oxy) do ravni $x + 2y + z - 6 = 0$, odnosno z varira od 0 do $6 - x - 2y$.

Dobijamo

$$V = \int_0^6 dx \int_0^{3-x/2} dy \int_0^{6-x-2y} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-x/2} (6 - x - 2y)dy = \int_0^6 \left(6y - xy - y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3-\frac{x}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^6 (6 - x)^2 dx = -\frac{1}{2}\int_0^6 (6 - x)^2 d\left(6 - x\right) = -\frac{1}{2}\frac{(6 - x)^3}{3}\Bigg|_0^6 = 36.$$

ZADATAK 8

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala-

Odrediti zapreminu tela ograničenog površima $z = x^2 + y^2$ i $z = 2 - x^2 - y^2$.

Rešenje:

U cilindričnim koordinatama imamo da je $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$. Jednačine datih površi u cilindričnim koordinatama su redom $z = \rho^2$ i $z = 2 - \rho^2$. Presek ovih površi je linija

$$L^* : \begin{cases} \rho = 1 & (\text{kružni} \quad \text{cilindar}) \\ z = 1 & (\text{ravan}) \end{cases},$$

čija ja projekcija u ravni Oxy kriva (kružnica)

$$L : \begin{cases} \rho = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Iz gornjih relacija dobijamo da je $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \rho^2 \le z \le 2 - \rho^2$, pa je

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^1 \left(2 - 2\rho^2\right)\rho \, d\rho = 4\pi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \pi.$$

ZADATAK 9

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala,

Odrediti zapreminu tela ograničenog površima $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (a < b)$.

Rešenje:

Oblast Ω leži unutar kupe $x^2 + y^2 = z^2$, pritom imamo dve koncentrične sfere unutar kupe. U sfernim koordinatama je

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi.$$

Iz prve dve jednačine sledi da je $a \le \rho \le b$, a iz treće nalazimo opseg ugla $\theta : \quad \rho^2\sin^2\theta = \rho^2\cos^2\theta$, pa je $\theta = \frac{\pi}{4}$, odnosno $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin\theta \; d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \; d\theta \int_a^b \rho^2 \; d\rho = 2\pi \left(-\cos\theta \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \; \frac{\rho^3}{3} \Bigg|_a^b =$$

$$2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})\left(b^3-a^3\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Izračunati

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$$

gde je V oblast ograničena površima $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1.$

Rezultat: $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$

Zadatak 2. Izračunati

$$\iiint_V |x| dxdydz,$$

gde je V oblast ograničena površima $x^2+y^2=1, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0.$

Rezultat: $\frac{4}{5}$

Zadatak 3. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $z=2-x-2y, \quad x=2y, \quad x=0, \quad z=0.$

Rezultat: $\frac{1}{3}$

Zadatak 4. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $y=\sqrt{z-x^2-z^2}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$ i xz ravni.

Rezultat: $\frac{\pi}{16}$

Zadatak 5. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $z=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z=5.$

Rezultat: $\frac{125}{3}\pi$

Zadatak 6. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad a>0, \quad z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}.$

Rezultat: $\frac{2-\sqrt{3}}{3}a^3\pi$

Zaključak za lekciju 13

TROJNI INTEGRALI

Pojam, osobine, izračunavanje, smena promenljivih u trojnom integralu, primena.

U ovoj lekciji smo uveli pojam dvojnog integrala i naučili

• Osnovne osobine trojnih integrala,

• Izračunavanje trojnog integrala,

• Smenu promenljivih u trojnom integralu,

• Polarne cilindrične koordinate,

• Polarne sferne koordinate

• Primenu trojnog integrala na određivanje zapremine tela.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.