UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – drugi deo

Lekcija 02

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 02

NEODREĐENI INTEGRAL – DRUGI DEO

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi specifične metode za integraciju.

Osim opštih metoda za integraciju, veoma su značajne specifične metode za integraciju. Ove metode se primenjuju kada se pod integralom nađe određena klasa funkcija. Na ovom predavanju ćemo govoriti o tome kako se vrši integracija racionalnih funkcija (racionalna funkcija je funkcija koja je predstavljena u obliku količnika dva polinoma). Svakako, integracija nekih racionalnih funkcija se može rešavati i drugim metodama (na primer metod smene).

Integracija racionalne funkcije se zasniva na metodama koje ih rastavljaju na zbirove tzv. elementarnih racionalnih funkcija. Primenom metode linearnosti se integracija racionalne funkcije prevodi u zbir određenog broja integrala po dobijenim elementarnim racionalnim funkcijama. Takvih racionalnih funkcija ima više tipova. Dalji rad se zasniva na pozvanju integracije ovih tipova.

Dakle, da bismo mogli da integralimo neku racionalnu funkciju potrebno je, najpre, da takvu funkciju razložiti na određeni broj elementarnih racionalnih funkcija. Za razlaganje ili dekompoziciju racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije se koristi:

Metod neodređenih koeficijenata i

metod Ostrogradskog za racionalne funkcije.

Ove dve metode su međusobno ravnopravne. Međutim, od slučaja do slučaja, nekada je bolje primeniti prvu, a nekada drugu metodu.

Nakon izvršene dekompozicije potrebno je znati integraliti dobijene klase elementarnih racionalnih funkcija.

Mi ćemo u izlaganju krenuti obrnutim redosledom. Dakle, prvo ćemo ukazati na to kako sa integrale sve klase elementarnih racionalnih funkcija koje se mogu dobiti primenom neke od pomenutih metoda, a nakon toga ukazati na to kako se ove metode primenjuju.

Napomena. Generalno, u racionalne funkcije spadaju i polinomi - oni se još nazivajuceli racionalni polinomi, ali o njima ovde nećemo govoriti, jer se oni rešavaju primenom tabličnih integrala, o čemu smo govorili na prethodnom času.

Poglavlje 1

Integracija elementarnih racionalnih funkcija

ELEMENTARNE RACIONALNE FUNKCIJE

Elementarne racionalne funkcije su osnova za primenu Metode neodređenih koeficijenata i Metode Ostrogradskog.

Racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-d)^j},\ j\in\mathbb{N} \quad \text{i} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}$$

se nazivaju elementarne racionalne funkcije , gde rešenja polinoma $x^2+bx+c,$ kod druge od njih, nisu realna (tj. rešenja su konjugovano – kompleksna). Dakle, od interesa je upoznati se sa postupcima za rešavanje integrala oblika

$$\int\frac{A\,dx}{(x-d)^j},\ j\in\mathbb{N} \quad \text{i} \quad \int\frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}.$$

S obzirom na to da smo ovu lekciju posvetili integraciji racionalnih funkcija, mi ćemo ovde govoriti i o rešavanju integrala

$$\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}.$$

u slučajevima kada kvadratni trinom ax^2+bx+cima i realna rešenja. Cilj nam je da ukažemo na postupke za rešavanje što većeg broja racionalnih funkcija. Za rešavanje mnogih od tako dobijenih integrala će se primenjivati opšte metode za rešavanje neodređenog integrala.
Ovde ćemo govoriti o tome kako se integrale racionalne funkcije sledećih oblika:

1. $f(x)=\frac{A}{x-a},\ A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a\in\mathbb{R},$

2. $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n},\ A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a\in\mathbb{R}, n=2,3,4,\dots$

3. $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,$

4. $f(x)=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c},\ M\neq 0, a\neq 0,$

5. $f(x)=\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n},\ a\neq 0,\ n=2,3,4,\dots$

6. $f(x) = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$, $M \neq 0, a \neq 0, n = 2, 3, 4, \ldots$

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 1 I 2

Inegracija ovih oblika se zasniva na metodi smene - ovo su skoro tablični integrali o kojima smo govorili u prethodnoj lekciji.

1. U ovom slučaju važi da je

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + c, \quad A \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\, a \in \mathbb{R}.$$

2. U ovom slučaju važi da je

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = \int A(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c,$$
$$A \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\, a \in \mathbb{R},\, n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Napomena. O integraciji ovih funkcija smo govorili na prethodnom predavanju (skoro tablični integrali).

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 3

U zavisnosti od rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ moguća su tri slučaja u rešavanju ovog integrala.

Da bismo integralili funkciju $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}, a \neq 0$, potrebno je transformisati kvadratni trinom u njenom imeniocu. Važi da je

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Tada je

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \left|\begin{array}{c} \text{smena}: \\ x+\frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}. \quad (*)$$

Sada razlikujemo tri slučaja.

1. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2} < 0$, tada možemo staviti da je $\frac{4ac-b^2}{4a} = -\alpha^2$, pa važi

$\int \frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\int \frac{dt}{t^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right|+c.$ (Poslednje važi na osnovu tabličnog integrala pod brojem 13). Dobijeno treba zameniti u integral (*) i nakon toga vratiti smenu, na argument x.

2. Ako je Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0,$ tada možemo staviti da je $\frac{4ac-b^2}{4a}=\alpha^2,$ pa važi $\int \frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+c.$(Poslednje važi na osnovu tabličnog integrala pod brojem 14). Dobijeno treba zameniti u integral (*) i nakon toga vratiti smenu, na argument x.

3. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$ tada je $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{at}+c=-\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+c=-\frac{2}{2ax+b}+c.$

NAPOMENA

Postojanje tri slučaja za integraciju racionalne funkcije oblika 3 je direktno povezano sa prirodnom rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0.$

Rekli smo da prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 3, razlikujemo tri slučaja. Postojanje ovih slučajeva je direktno povezano sa prirodnom rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0.$Naime

1. ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}<0$, tada je $4ac-b^2<0$ (jer je $4a^2$ uvek pozitivno), tj. $b^2-4ac>0$. Veličina b^2-4ac se naziva diskriminanta pomenute kvadratne jednačine i kada je ona pozitivna tada kvadratna jednačina ima realna i različita rešenja x_1 i x_2 . Tada je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, pa se u ovom slučaju za integraciju može primeniti i Metod neodređenih koeficijenata. Tada se dobijaju dva integrala racionalne funkcije oblika 1. O ovome će biti više reči kasnije na predavanjima, kao i na vežbama.

2. Ako je Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0,$ tada je $4ac-b^2>0,$ tj. $b^2-4ac<0.$ Kako je diskriminanta pomenute kvadratne jednačine negativna, tada ona ima konjugovano-kompleksna rešenja.

3. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$ tada je $b^2-4ac=0.$ Kako je diskriminanta pomenute kvadratne jednačine jednaka nuli, tada ona ima realna i jednaka rešenja.

PRIMER 1

Integracija racionalnih funkcija oblika 3

Izračunati:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$, c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Rešenje.

a)
$$\int \frac{dx}{x^2-6x-7} = \int \frac{dx}{x^2-6x+9-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-16} \left| \begin{array}{c} \text{smena}: \\ x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2-4^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + c = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right| + c.$$

b)
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} \left| \begin{array}{c} \text{smena}: \\ x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{(x+2)} + c.$$

c)
$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \left| \begin{array}{c} \text{smena}: \\ x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}} + c.$$

Napomena. Za rešavanje integrala pod a) je iskoriščen integral pod rednim brojem 13 iz spiska tabličnih integrala. Takođe, za rešavanje integrala pod c) je iskoriščen integral pod rednim brojem 14 iz spiska tabličnih integrala.

Napomena. Uočimo da u integralu pod a) kvadratna jednačina $x^2-6x-7=0$ ima realna i različita rešenja $x_1=-1$ i $x_2=7$. U integralu pod b) kvadratna jednačina $x^2+4x+4=0$ ima rešenja koja su realna i jednaka $x_1=x_2=-2$, dok u slučaju pod c) kvadratna jednačina $x^2+x+1=0$ nema realna rešenja. Integral pod a) ćemo kasnije ponovo rešiti, ali primenom Metode neodređenih koeficijenata.

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 4

Rešavanje ovog integrala se svodi na integraciju racionalnih funkcija oblika 3 i još jednog integrala koji se rešava metodom smene.

Da bismo integralili funkciju $f(x)=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, M\neq 0, a\neq 0,$ potrebno je, kao i kod integracije prethodnog oblika, kvadratni trinom u imeniocu rastaviti na isti način i nakon toga uvesti smenu $t=x+\frac{b}{2a}$. Tada je

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{M\left(t+\frac{b}{2a}\right)+N}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dx=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}+\frac{2aN-Mb}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dx.$$

Imamo da je

$$\frac{M}{2a}\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\left|\begin{array}{c}\text{smena}:\\ t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=u\\ 2tdt=du\end{array}\right|=\frac{M}{2a}\int\frac{du}{u}=\frac{M}{2a}\ln|u|+c=\frac{M}{2a}\ln|t^2$$

$$+\frac{4ac-b^2}{4a^2}|+c=\frac{M}{2a}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|+c.$$

Kako se rešava integral $\frac{2aN-Mb}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dx$ već smo pokazali u okviru prethodnog oblika.

Napomena. U slučaju da kvadratna jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima realna i različita rešenja x_1 i x_2, pa važi da je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Tada se na integraciju racionalne funkcije oblika 4 može primeniti Metod neodređenih koeficijenata. O tome će biti više reči kasnije na predavanjima, kao i na vežbama.

PRIMER 2 - 1. DEO

Integracija racionalnih funkcija oblika 4

Izračunati

$$\int\frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx.$$

Rešenje. Imamo da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \int \frac{3x-5}{2\left(x^2-4x-\frac{7}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-5}{\left(x^2-4x+4-\frac{15}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-5}{\left[(x-2)^2-\frac{15}{2}\right]}dx.$$

U poslednji integal uvodimo smenu $x-2=t$, tj. $x=t+2$ i $dx=dt$ i dobijamo

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x-5}{\left[(x-2)^2-\frac{15}{2}\right]}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3(t+2)-5}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3t-1}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}dt = \frac{3}{4}\int \frac{2tdt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}.$$

Sada imamo

$$\frac{3}{4}\int \frac{2tdt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} \left| \begin{array}{c} \text{smena :} \\ t^2-\frac{15}{2}=u \\ 2tdt=du \end{array} \right| = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{4}\ln|u|+c_1 = \frac{3}{4}\ln\left|t^2-\frac{15}{2}\right|+c_1 = \frac{3}{4}\ln\left|(x-2)^2-\frac{15}{2}\right|+c_1$$

i

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{15}{2}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{15}{2}}}{t+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right|+c_2 = \frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{\frac{15}{2}}}{x-2+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right|+c_2.$$

PRIMER 2 - 2. DEO

Rezultat integracije i napomene.

Konačno dobijamo da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \frac{3}{4}\ln\left|(x-2)^2-\frac{15}{2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{\frac{15}{2}}}{x-2+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right| + c, \quad \text{gde je } c = c_1+c_2.$$

Napomena. Prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 4, može se koristiti i sledeća tehnika: odredi se izvod kvadratnog trinoma u imeniocu. U našem primeru je $(2x^2-8x-7)'=4x-8$. Zatim se brojilac transformiše tako da sadrži ovaj izvodni polinom. U našem slučaju je $3x-5=\frac{3}{4}(4x-8)+1$. Primenom Metode linearnosti, tada važi da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-8)+1}{2x^2-8x-7}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x-8}{2x^2-8x-7}dx + \int \frac{dx}{2x^2-8x-7}.$$

Prvi od dobijenih integrala se rešava uvođenjem smene $2x^2-8x-7=t$ (primere kako se rešavaju ovakvi integrali smo imali na prethodnom predavanju). Drugi integral predstavlja integraciju racionalne funkcije oblika 3.

Napomena. Prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 4, nekada se možete desiti da je polinom u brojiocu, izvod polinoma u imeniocu. Svakako, ovo bi trebalo prvo proveravati, prilikom rešavanja ovih integrala, jer se time mnogo brže i jednostavnije određuje primitivna funkcija racionalne funkcije oblika 4.

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 5

Integral ovog oblika se rešeava primenom metode rekurzivnih relacija.

Polazimo od integrala $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n\in\mathbb{N}_0$, koji se rešava metodom rekurentnih formula. Važi

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n},$$

pa je

$$I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}J,\ \text{pri čemu je } J=\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Primenjujući parcijalnu integraciju dobijamo

$$J=\left|\begin{array}{ll} x=u & \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=dv \\ dx=du & v=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\end{array}\right|=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

Dakle, za $n\geq 2$ važi

$$I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1},$$

odnosno

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Pri tom je

$$I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\quad I_0=x+C.$$

Na sličan način se može dobiti rekurentna relacija za integral oblika $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$.

Konačno, integral oblika $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, se transformacijom imenioca na ranije opisani način, može svesti na neki od prethodno pomenuta dva integrala.

PRIMER 3

Inegracija racionalne funkcije oblika 5

Izračunati

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Rešenje. Primenimo prethodno dobijeni rekurzivni obrazac

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

pri čemu je $n=3$ i $a^2=1$. Tada je

$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot I_2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Prema istom rekurzivnom obrascu imamo da je

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1},$$

gde je $I_1 = \operatorname{arctg} x + c$. Tada imamo da je

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{arctg} x + c) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + c_1, \ (c_1 = \frac{1}{2}c).$$

Konačno, dobijamo da je

$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + c_1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + c_2, \ (c_2 = \frac{3}{4}c_1).$$

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 6

Integracija ovih racionalnih funkcija se svodi na oblik 5, kao i jedan integral koji se rešava metod smene.

Integral oblika $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,\ \ M\neq 0, a\neq 0,\ \ n=2,3,4,\ldots$ se transformiše na sledeći način

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n}\,dx = \begin{vmatrix} \text{smena}: \\ x+\frac{b}{2a}=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^n}\int \frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a^n}\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n} + \frac{2aN-bM}{2a^n}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}.$$

Prvi od poslednja dva integrala se rešava uvođenjem smene $t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=u, 2t\,dt\ =du$. Drugi od ovih integrala je oblika 5.

Poglavlje 2

Metod neodređenih koeficijenata

UVOD

Svaka racionalna funkcija se može predstaviti kao zbir više elementarnih racionalnih funkcija.

Do sada smo govorili o tome kako se pojedini oblici racionalnih funkcija integrale. Sada ćemo uvesti metodologiju kako se proizvoljna racionalna funkcija integrali, korišćenjem postupaka za integraciju ranije pomenutih 6 oblika racionalnih funkcija.

Svaka racionalna funkcija predstavlja količnik dva polinoma, tj. može se zapisati u obliku

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (*)$$

gde je $P_m(x)$ polinom stepena $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $Q_n(x)$ je polinom stepena $n \in \mathbb{N}$.

Kao što smo već rekli, racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-d)^j},\ j \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},\ k \in \mathbb{N}$$

se nazivaju elementarne racionalne funkcije, gde rešenja polinoma x^2+bx+c, kod druge od njih, nisu realna (tj. rešenja su konjugovano – kompleksna).
Svaka racionalna funkcija oblika (*) se može napisati kao zbir više elementarnih racionalnih funkcija. Metode pomoću kojih se može racionalna funkcija predstaviti u obliku zbira elementarnih racionalnih funkcija su Metod neodređenih koeficijenata i Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funckija. Najpre ćemo govoriti o prvoj od ovih metoda.

Pre nego što se primeni ova metoda potrebno je proveriti da li je $m \geq n$, gde su m i n stepeni polinoma posmatrane racionalne funkcije (*) u brojiocu i imeniocu tim redom. U slučaju da je ovo tačno tada treba, najpre, izvršiti deljenje polinoma iz brojioca racionalne funkcije (*), polinomom iz njenog imenioca. Kao količnik se dobija zbir jednog polinom i racionalne funkcije koja je i dalje oblika (*), ali kod koje važi da je $n > m$.

Poznato je da se polinom $Q_n(x)$ može rastaviti na činioce na sledeći način

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_p)^{\alpha_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q},$$

gde su $a_1, \ldots, a_p$ realni koreni polinoma $Q_n(x)$, a koreni kvadratnih trinoma $x^2+b_1x+c_1, \ldots, x^2+b_qx+c_q$ su konjugovano-kompleksni brojevi i važi

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_q) = n.$$

RASTAVLJANJE RACIONALNE FUNKCIJE NA ELEMENTARNE RACIONALNE FUNKCIJE

Rastavljanje neke racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije se svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata, tako da dekompozicija te racionalne funkcije bude tačna.

Za rastavljanje racionalne funkcije $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ za $n > m$, metodom neodređenih koeficijenata imamo da važi

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} \cdots \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{A_{p1}}{x-a_p} \cdots \frac{A_{p\alpha_p}}{(x-a_p)^{\alpha_p}} \cdots \frac{B_{11}+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}$$
$$\cdots \frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} \cdots \frac{B_{q1}+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} \cdots \frac{B_{q\beta_q}+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}}.$$

Prethodno data formula je poznati rezultat iz Teorije polinoma i nećemo ga ovde dokazivati, ali ćemo ga koristiti. Praktična primena ove metode se, zapravo, svodi na određivanje svih nepoznatih (neodređenih) koeficijenata, koje treba odrediti tako da prethodna dekompozicija racionalne funkcije $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ za $n > m$, na elementarne racionalne funkcije bude tačna. To se radi tako što se prethodna relacija pomnoži polinom $Q_n(x)$, a nakon toga primenjujemo Stav o jednakosti dva polinoma (dva polinoma su jednaka ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki).

Nakon određivanja ovih nepoznatih koeficijenata, integral

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

za $n > m$, se može računati, primenom metode linearnosti, kao zbir od više integrala elementarnih racionalnih funkcija, za koje smo pokazali kako se rešavaju.

PRIMER 1

Integracija racionalne funkcije oblika 3 Metodom neodređenih koeficijenata, u slučaju kada je to moguće.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 7}.$$

Rešenje. Kao što smo videli kvadratni trinom se može zapisati $x^2-6x-7=(x-7)(x+1)$. Tada važi da je

$$\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+1}.$$

Prethodnu relaciju ćemo pomnožiti sa x^2-6x-7 i dobijamo da je

$$1=A(x+1)+B(x-7) \quad \text{tj.} \quad 0\cdot x+1=(A+B)\cdot x+A-7B.$$

Iz jednakosti polinoma zaključujemo da mora važiti $A+B=0$ i $A-7B=1$. Odavde dobijamo da je $A=\frac{1}{8}$ i $B=-\frac{1}{8}$. Tada dobijamo da je

$$\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-7}-\frac{1}{8}\cdot\frac{B}{x+1},$$

odnosno

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-7}-\frac{1}{8}\int\frac{B}{x+1}&=\frac{1}{8}\ln|x-7|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+c\\&=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+c.\end{aligned}$$

PRIMER 2 – 1. DEO

Metod neodređenih koeficijenata – deljenje polinoma je potrebno

Rešiti sledeći integral:

$$\int\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx;$$

Rešenje. Stepen brojioca podintegralne funkcije veći je od stepena imenioca, pa se prvo moraju izvršiti sledeće transformacije:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}&=\frac{x^3-2x^2-15x+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=\\&=\frac{x\left(x^2-2x-15\right)+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=\\&=x+\frac{2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=\\&=x+2+\frac{17x-5}{x^2-2x-15}.\end{aligned}$$

Napomenimo da prethodno izvedene transformacije zapravo predstavljaju deljenje polinoma $x^3-2x-35$ polinomom $x^2-2x-15$.

Dakle, važi da je

$$\int \frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{17x-5}{x^2-2x-15}dx.$$

Integral $\int \frac{17x-5}{x^2-2x-15}dx$ predstavlja integraciju racionalne funkcije oblika 4. Primetimo da kvadratna jednačina $x^2-2x-15=0$ ima realna i različita rešenja

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \text{ tj. } x_1 = 5 \vee x_2 = -3,$$

tako da kvadratni trinom $x^2-2x-15$ možemo rastaviti na činioce na sledeći način $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. Kao što smo rekli u jednom od prethodnih napomena u ovom slučaju se ovaj integral može rešavati i primenom Metode neodređenih koeficijenata, što ćemo mi u nastavku i uraditi. Studentima ostavljamo za vežbu da ovaj integral reše postupkom uvdenim kod integracije racionalnih funkcija oblika 4.

PRIMER 2 – 2. DEO

Određivanje nepoznatih koeficijenata i rastavljanje racionalne funkcije na zbir više elementarnih.

Dalje, kako je $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$ imamo

$$\frac{17x-5}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}.$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa $x^2-2x-15$ dobijamo da je:

$$17x-5 = A(x+3) + B(x-5),$$

tj.

$$17x-5 = (A+B)x + 3A - 5B,$$

odakle se, korišćenjem osobine dva polinoma da su jednaki ako su im koeficijenti uz odgovarajuće članove jednaki, dobija sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x: &\quad A+B=17 \\ x^0: &\quad 3A-5B=-5 \end{aligned}$$

pa je $A=10, \quad B=7$. Dakle važi:

$$\frac{17x-5}{x^2-2x-15} = \frac{10}{x-5} + \frac{7}{x+3}$$

tj.

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15} = x+2+\frac{10}{x-5} + \frac{7}{x+3}$$

Prema tome je

$\int \frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{10}{x-5} dx + \int \frac{7}{x+3} dx,$

tj.

$\int \frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 10 \ln |x-5| + 7 \ln |x+3| + c.$

Napomena.U postupku poslednje integracije primenjen je Metod linearnosti.

PRIMER 3 - 1. DEO

Racionalna integracija

Izračunati:

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

Rešenje. Podintegralnu funkciju ćemo prikazati na sledeći način

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

gde je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = \frac{1}{4}, \quad F = -\frac{1}{4}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &\quad + \frac{1}{8} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4} \ln |x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{8(x^2+1)} - \frac{1}{4} J. \end{aligned}$$

PRIMER 3 - 2. DEO

Rešavanje integrala $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Uveli smo oznaku

$$J=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Rešimo ovaj integral

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \left| \begin{matrix} x=u & \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = dv \\ dx = du & -\frac{1}{2(x^2+1)} = \end{matrix} \right| = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Konačno dobijamo da je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \\ &- \frac{1}{8(x^2+1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + C. \end{aligned}$$

NapomenaO rešavanju integrala J govorili smo u primeru u okviru integracije racionalnih funkcija oblika 5, u prethodnom objektu učenja. Međutim, izvođenje rekuretnih relacija za odgovarajuće integrale je dugotrajan proces. Stoga, od interesa je znati "prečice" za rešavanje ovih oblika integrala. O još jednom načinu za rešavanje ovog integrala pogledati deo sa zadacima za vežbu.

VIDEO KLIP

Integracija racionalnih funkcija metodom dekompozicije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funkcija

UVOD

Ostrogradski je dao postupak za dekompoziciju racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije.

Metod Ostrogradskog se koristi za integraljenje racionalnih funkcija

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

gde je polinom $P_m(x)$ stepena $m \in \mathbb{N}$, a polinom $Q_n(x)$ je stepena $n \in \mathbb{N}$. Ova metoda se primenjuje kada je $n > m$. U suprotnom prvo je potrebno podeliti ova dva polinoma. Kao količnik se dobija zbir jednog polinom i racionalne funkcije kod koje važi da je $n > m$. Dakle, u nastavku ćemo pretpostavljati da je $n > m$. Takođe, pretpostavićemo da se polinom $Q_n(x)$ može rastaviti na činioce na sledeći način

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_p)^{\alpha_p} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_q x + c_q)^{\beta_q}.$$

gde su $a_1, \ldots, a_p$ realni koreni polinoma $Q_n(x)$, a koreni kvadratnih trinoma $x^2 + b_1 x + c_1, \ldots, x^2 + b_q x + c_q$ su konjugovano-kompleksni brojevi i važi

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_q) = n.$$

METOD OSTROGRADSKOG

Ovom metodom se polazna racionalna funkcija svodi na elementarne racionalne funkcije.

Za integraciju racionalne funkcije $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, za $n > m$, Ostrogradski je dao sledeću formulu

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{R_{m-1}(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (x - a_p)^{\alpha_p - 1} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1} \cdots (x^2 + b_q x + c_q)^{\beta_q - 1}} +$$

$$+ \int \frac{A_1 dx}{x - a_1} + \ldots + \int \frac{A_p dx}{x - a_p} + \int \frac{(B_1 x + C_1) dx}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + \int \frac{(B_q x + C_q) dx}{x^2 + b_q x + c_q},$$

gde polinom $R_{m-1}(x)$ koji je $(m-1)$. stepena treba odrediti, tj. treba odrediti njegove koeficijente, kao i koeficijente $A_1, \ldots, A_p, B_1, C_1, \ldots, B_q, C_q$.Traženi koeficijenti se određuju, najpre, diferenciranjem prethodne formule, a zatim nakon sređivanja tako dobijenog izraza primenjujemo stav o jednakosti dva polinoma (dva polinoma su jednaka ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki).

Napomena. Metod neodređenih koeficijenata i Metod Ostrogradskog su ravnopravne metode u primeni, s tim što od slučaja do slučaja zavisi kojom od njih će seintegracija izvršiti brže. Metod Ostrogradskog se posebno preporučuje za primenu u situaciji kada polinom u imeniocu racionalne funkcije ima višestruke nule.

PRIMER - 1.DEO

Integracija racionalne funkcije primenom metode Ostrogradskog - postupak dekompozicije.

Rešiti sledeći integral

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx.$$

Rešenje. Na osnovu metode Ostrogradskog možemo pisati

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx = \frac{Ax+B}{(x-1)(x+2)} + \int \frac{Cdx}{x-1} + \int \frac{Ddx}{x+2}.$$

Diferenciranjem prethodne relacije dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2} &= \frac{A(x^2+x-2)+(Ax+B)(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2} = \\ &= \frac{3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A}{(x-1)^2(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}.\end{aligned}$$

Poslednji izraz, proširujemo sa $(x-1)^2(x+2)^2$ i dobijamo:

$$\begin{aligned}x^2+2x-1 &= 3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A+C(x-1)(x+2)^2+D(x-1)^2(x+2) = \\ &= 3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A+C(x^3+3x^2-4)+D(x^3-3x+2) = \\ &= (C+D)x^3+(3A+3C-3D)x^2+(2A+2B-3D)x-2A+B-4C+2D.\end{aligned}$$

PRIMER - 2.DEO

Integracija racionalne funkcije primenom metode Ostrogradskog – određivanje nepoznatih koeficijenata i integracija dobijenih elementarnih racionalnih funkcija.

Iz jednakosti ovih polinoma dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x^3 &: C+D=0, \\ x^2 &: 3A+3C-3D=1, \\ x &: 2A+2B-3D=2, \\ x^0 &: -2A+B-4C+2D=-1 \end{aligned}$$

Njegovim rešavanjem nalazimo da je:

$$A=-\frac{1}{9},\quad B=-\frac{5}{9},\quad C=\frac{8}{27},\quad D=-\frac{8}{27}.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx &= \frac{-\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{8}{27}\int\frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27}\ln|x-1| - \frac{8}{27}\ln|x+2| + c = \\ &= \frac{-\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + c. \end{aligned}$$

Poglavlje 4

Vežba

ZADATAK 1

Integraljenje određenih tipova elementarnih racionalnih funkcija.

Rešiti integral:

$$\int \frac{1}{2x^2+3x+5}dx.$$

Rešenje.

$$2x^2+3x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-40}}{4}$$

Trinom nema realne nule. Dovodimo ga na kakonički oblik sledećim postupkom:

$$2x^2+3x+5=2(x+\alpha)^2+\beta$$

$$2x^2+3x+5=2\left(x^2+2\alpha x+\alpha^2\right)+\beta$$

$$2x^2+3x+5=2x^2+4\alpha x+2\alpha^2+\beta$$

Dva polinoma istog stepena su jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki. Iz sledećih jednačina dobijamo α i β

$$3=4\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{3}{4}$$

$$5 \;=\; 2\alpha^2+\beta \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{31}{8}$$

$$2x^2+3x+5=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$$

$$\int \frac{1}{2x^2+3x+5}dx=\int \frac{1}{2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}}dx=\begin{pmatrix} \text{smena :} \\ x+\frac{3}{4}=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=$$

$$\int \frac{1}{2t^2+\frac{31}{8}}dt=\int \frac{1}{\frac{16t^2+31}{8}}dt=$$

$$8\int\frac{1}{(4t)^2+(\sqrt{31})^2}dt=\left(\begin{array}{c}\text{smena}:\\ 4t=u\\ 4dt=du\end{array}\right)=$$

$$8\int\frac{1}{u^2+(\sqrt{31})^2}\cdot\frac{dt}{4}=2\int\frac{1}{u^2+(\sqrt{31})^2}dt=\frac{2}{\sqrt{31}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{31}}+C=$$

$$\frac{2\sqrt{31}}{31}\text{arctg}\frac{4t}{\sqrt{31}}+C=$$

$$\frac{2\sqrt{31}}{31}\text{arctg}\frac{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{31}}+C=\frac{2\sqrt{31}}{31}\text{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{31}}+C.$$

ZADATAK 2

Integraljenje određenih tipova elementarnih racionalnih funkcija

Rešiti integral: $\int\frac{-3x+2}{x^2+2x+4}dx.$

Rešenje. $x^2+2x+4=0,\quad x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$. Trinom nema realne nule. Ovde je očigledno kako izgleda kanonski oblik

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3$$

Ako nije očigledno možemo ga odrediti i ovako: $x^2+2x+4=(x+\alpha)^2+\beta \Leftrightarrow x^2+2x+4=x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta$

Dva polinoma istog stepena su jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki. Iz sledećih jednačina dobijamo α i β

$$2=2\alpha \quad\Longrightarrow\quad \alpha=1$$

$$4=\alpha^2+\beta \quad\Longrightarrow\quad \beta=3$$

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3$$

$$I=\int\frac{-3x+2}{x^2+2x+4}dx=\int\frac{-3x+2}{(x+1)^2+3}dx=\left(\begin{array}{c}\text{smena}:\\ x+1=t,\ x=t-1\\ dx=dt\end{array}\right)=\int\frac{-3(t-1)+2}{t^2+3}dt=$$

$$\int\frac{-3t+5}{t^2+3}dt=-3\int\frac{t}{t^2+3}dt+5\int\frac{1}{t^2+3}dt=-3I_1+5I_2.$$

$$I_1=\int\frac{t}{t^2+3}dt=\left(\begin{array}{c}\text{smena}:\\ t^2+3=u,\\ tdt=\frac{du}{2}\end{array}\right)=\int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\ln|u|+C_1=\ =$$

$\frac{1}{2}\ln\left|t^2+3\right|+C_1=\frac{1}{2}\ln\left||x+1|^2+3\right|+C_1=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right|+C_1$

$I_2=\int\frac{1}{t^2+3}dt=\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{3})^2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C_2$

$I=-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$

ZADATAK 3 - 1. DEO

Metod neodređenih koeficijenata - mogućnosti za određivanje koeficijenata

Izračunati

$$\int\frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}dx.$$

Rešenje. Kod podintegralna funkcije $\dfrac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}$ je stepen polinom u imeniocu veći od stepena u brojiocu, pa primenjujemo Metod neodređenih koeficijenata.

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}=\frac{x^2+3}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}=$$
$$=\frac{A(x-3)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+2)}.$$

Odavde možemo zaključiti da je

$$x^2+3=A(x-3)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-3), \qquad (*)$$

odnosno

$$x^2+3=(A+B+C)x^2+(2B-A-3C)x-6A. \qquad (**)$$

Koeficijenti A, B i C se mogu odrediti na dva načina.

Prvi način. Birajući za x one vrednosti koje su nule polinoma $x(x-3)(x+2)$, iz jednakosti (*) dobijamo:

Za $x=0$ je $3=-6A$, pa je $A=-\frac{1}{2}$.

Za $x=3$ je $12=15B$, pa je $B=\frac{4}{5}$.

Za $x=-1$ je $7=10C$, pa je $C=\frac{7}{10}$.

Drugi način. Koristeći osobinu identičnih polinoma da su im jednaki koeficijenti uz odgovarajuće stepene po x, iz jednakosti (*) dobijamo

$$\begin{aligned}x^2 &: 1 = A + B + C,\\ x^1 &: 0 = 2B - A - 3C,\\ x^0 &: 3 = -6A.\end{aligned}$$

Odavde je $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{4}{5}$ i $C = \frac{7}{10}$.

ZADATAK 3 - 2. DEO

Integracija dobijenih elementarnih racionalnih funkcija.

Sada je

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{7}{10}}{x+2},$$

pa je

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{10}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{10}\ln|x+2| + c.$$

ZADATAK 4

Metod neodređenih koeficijenata.

Rešiti integral: $\int \frac{12x^2+22x-30}{(x+1)(x-3)(x+6)}dx;$

Rešenje. Racionalna funkcija kod koje je stepen imenioca veći od stepena brojioca integrali se tako što se imenilac rastavi na činioce i funkcija se zapiše u obliku zbira jednostavnijih racionalnih funkcija koje se zatim integrale. Kako su svi činioci u imeniocu stepena 1 racionalnu funkciju rastavljamo na sledeći način:

$$\frac{12x^2+22x-30}{(x+1)(x-3)(x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+6} = \ = \frac{A(x-3)(x+6)+B(x+1)(x+6)+C(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+6)}$$

gde su A, B i C konstante koje treba odrediti. Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

$12x^2+22x-30 = A(x-3)(x+6)+B(x+1)(x+6)+C(x+1)(x-3) =$

$Ax^2-3Ax+6Ax-18A+Bx^2+6Bx+Bx+6B+Cx^2-3Cx+Cx-3C =$

$(A+B+C)x^2+(3A+7B-2C)x-18A+6B-3C$

Izjednačimo koeficijente uz iste stepene i dobijamo sistem:

$$12 = A + B + C$$
$$22 = 3A + 7B - 2C$$
$$-30 = -18A + 6B - 3C$$

Rešavanjem sistema dobijamo $A = 2,\quad B = 4, C = 6.$

$$\int \frac{12x^2 + 22x - 30}{(x+1)(x-3)(x+6)}dx = \int\left(\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-3} + \frac{6}{x+6}\right)dx = \int\frac{2}{x+1}dx + \int\frac{4}{x-3}dx + \int\frac{6}{x+6}dx =$$

$2\ln|x+1| + 4\ln|x-3| + 6\ln|x+6| + C.$

ZADATAK 5

Metod neodređenih koeficijenata

Rešiti integral: $\int\frac{9x+19}{(x+5)\left(x^2+4x+8\right)}dx;$

Rešenje. Kako trinom $x^2 + 4x + 8$ ne može da se dalje rastavi na činioce, imamo:

$$\frac{9x+19}{(x+5)\left(x^2+4x+8\right)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+8}$$

gde su $A,\quad B$ i C konstante koje treba odrediti.

$$\frac{9x+19}{(x+5)\left(x^2+4x+8\right)} = \frac{A\left(x^2+4x+8\right) + (Bx+C)(x+5)}{(x+5)\left(x^2+4x+8\right)}$$

$$9x + 19 = A\left(x^2 + 4x + 8\right) + (Bx+C)(x+5) =$$
$$= Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^2 + Cx + 5Bx + 5C =$$
$$= (A+B)x^2 + (4A + 5B + C)x + 8A + 5C$$

$$0 = A + B$$
$$9 = 4A + 5B + C$$
$$19 = 8A + 5C$$

Rešavanjem sistema dobijamo $A = -2,\quad B = 2,\quad C = 7.$

$$I_1 = \int\frac{2x+7}{x^2+4x+8}dx = \int\frac{2x+7}{(x+2)^2+4}dx = \left(\begin{array}{c}\text{smena :}\\ x+2=t,\\ x=t-2\\ dx=dt\end{array}\right) = \int\frac{2t+3}{t^2+4}dt = \int\frac{2t}{t^2+4}dt + 3\int\frac{1}{t^2+2^2}dt = \left(\begin{array}{c}\text{smena :}\\ t^2+4=s\\ 2tdt=ds\end{array}\right) =$$

$$\int\frac{1}{s}ds + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln|s| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln\left|t^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln\left|x^2+4x+8\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

ZADATAK 6– 1.DEO

Metod neodređenih koeficijenata – potrebno je deljenje polinoma.

Rešiti integral: $\int \frac{x^4 + 2x + 6}{x^2 - 2x + 1} dx.$

Rešenje. U ovom zadatku je polinom u brojiocu većeg stepena, pa je potrebno prvo podeliti polinome. Tada imamo:

$\left(x^4 + 2x +\right.$

$- \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)$

$2x^3 - x^2 + 2x + 6$

$- \left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)$

$3x^2 + 6$

$- \left(3x^2 -\right.$

Tada je

$$\frac{x^4 + 2x + 6}{x^2 - 2x + 1} = x^2 + 2x + 3 + \frac{6x + 3}{x^2 - 2x + 1}$$

Sada je

$$I = \int \frac{x^4 + 2x + 6}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{6x + 3}{x^2 - 2x + 1}\right) dx = \int x^2 dx + 2\int x dx + 3\int dx + 3\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x + 3I_1$$

ZADATAK 6– 2. DEO

Integracija racionalnih funkcija.

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{A(x - 1) + B}{(x - 1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x - 1)^2}$$

$$2x + 1 = Ax - A + B$$

$$A = 2, \qquad B = 3$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2-2x+1}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right)dx = 2\int\frac{1}{x-1}dx + 3\int\frac{1}{(x-1)^2}dx = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

$$I = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 3\left(2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1}\right) + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 6\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C$$

Napomena. Integral I_1 je moguće integraliti kao racionalnu funkciju koja je oblika 4 o kojoj smo govorili na predavnjima. Ovde je ovaj integral rešen primenom Metode neodređenih koeficijenata. Dakle, treba uočiti da se neki integrali mogu rešavati na više načina, što nije retkost u radu s neodređenim integralima.

ZADATAK 7 – 1. DEO

Metod neodređenih koeficijenata – deljenje polinoma.

Izračunati:

$$\int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}dx.$$

Rešenje. Kod podintegralna funkcija je stepen polinoma u brojiocu veći od stepena polinoma u imeniocu. Zbog toga ćemo podeliti odgovarajuće polinome.

$$\begin{array}{l}
(x^3+x^2-16x+16) : (x^2-4x+3) = x+5 \\
\underline{-x^3 \mp 4x^2 \pm 3x} \\
\qquad 5x^2 - 19x + 16 \\
\qquad \underline{-5x^2 \mp 20x \pm 15} \\
\qquad\qquad\quad x+1
\end{array}$$

Dakle,

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3} = x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3},$$

pa je

$$I = \int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}dx = \int (x+5)dx + \int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx.$$

ZADATAK 7 – 2. DEO

Integracija racionalne funkcije.

Kako je $x^2-4x+3 = x^2-4x+4-1 = (x-2)^2-1$imamo da je

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{x+1}{(x-2)^2-1}dx \left| \begin{array}{c} \text{smena :} \\ x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{t^2-1}dx = \ldots = 2\ln|x - 3| - \ln|x-1| + c.$$

Konačno je

$$I = \int (x+5)dx + \int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 2\ln|x-3| - \ln|x-1| + c.$$

Napomena. Shodno prethodno datoj napomeni, integral $\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx$ se može rešavati i na sledeći način. Kako je $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ važi da je

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

to je $x+1 = A(x-3)+B(x-1)$, odakle za $x=1$ dobijamo $A=-1$, a za $x=3$ dobijamo $B=2$, pa važi

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-1} = 2\ln|x-3| - \ln|x-1| + c.$$

ZADATAK 8 – 1. DEO

Metod neodređenih koeficijenata – deljenje polinoma nije potrebno. Određivanje nepoznatih koeficijenata i rastavljanje racionalne funkcije na zbir više elementarnih.

Rešiti sledeći integral:

$$\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}dx.$$

Rešenje. Polinom u imeniocu podintegralne funkcije, uparivawem prvog I trećeg člana, kao I drugog I četvrtog, može se napisati:

$$x^3-2x^2+x-2 = x\left(x^2+1\right) - 2\left(x^2+1\right) = (x-2)\left(x^2+1\right),$$

pa postoje konstante A, B i C takve da važi:

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Tada nakon proširivanja prethodne jednačine sa x^3-2x^2+x-2, dobijamo:

$$x+1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x-2)$$

tj.

$x + 1 = (A + B)x^2 + (C - 2B)x + A - 2C.$

Iz jednakosti ovih polinoma dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina po nepoznatim A, B i C:

$$\begin{aligned} x^2: &\quad A + B = 0 \\ x: &\quad -2B + C = 1 \\ x^0: &\quad A - 2C = 1 \end{aligned}$$

odakle je $A = 3/5, \quad B = -3/5$ i $C = -1/5$, pa je

$$\frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{3}{5(x-2)} - \frac{3x+1}{5\left(x^2+1\right)}.$$

ZADATAK 8 – 2.DEO

Primena metode linearnosti u rešavanju dobijenih integrala.

Odavde imamo da je

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}dx = \int \frac{3dx}{5(x-2)} - \int \frac{(3x+1)dx}{5\left(x^2+1\right)} =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| - \frac{3}{10}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}x + c.$$

ZADATAK 9 - 1. DEO

Metod Ostrogradskog - primena formule i određivanje nepoznatih koeficijenata.

Izračunati:

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3+1)^2}dx.$$

Rešenje. Primenićemo Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funkcija. Najpre, kako je $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, važi da je

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3+1)^2}dx = \int \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{(x+1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)^2}.$$

Rešenje poslednjeg integrala tražićemo u obliku

$$\int \frac{4x^3-3x^2-2}{(x+1)^2\cdot(x^2-x+1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{D}{x+1}dx + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Diferenciranjem prethodne relacije dobijamo

$$\frac{4x^3-3x^2-2}{(x^3+1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3+1)-(Ax^2+Bx+C)3x^2}{(x^3+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{(D+E)x^5+(-A-D+E+F)x^4+(-2B+D+F)x^3+(-3C+D+E)x^2 + (2A-D+E+F)x+B+D+F}{(x^3+1)^2}.$$

ZADATAK 9 - 2. DEO

Metod Ostrogrdskog - rešavanje dobijenih integrala.

Dakle, dobili smo sistem

$$\begin{aligned}
x^5: &\quad 0 = D+E,\\
x^4: &\quad 0 = -A-D+E+F,\\
x^3: &\quad 4 = -2B+D+F,\\
x^2: &\quad -3 = -3C+D+E,\\
x^1: &\quad 0 = 2A-D+E+F,\\
x^0: &\quad -2 = B+D+F,
\end{aligned}$$

Iz prve i četvrte jednačine sistema imamo da je $C=1$. Stavljajući dobijeno u četvrtu jednačinu imamo da je $D+E=0$, tj. $E=-D$. Iz treće i šeste jednačine sistema imamo da je $B=-2$. Stavljajući dobijeno u šestu jednačinu imamo da je $D+F=0$, tj. $F=-D$. Iz druge i pete jednačine imamo da je $A=\frac{2}{3}D$. Konačno, u petu jednačinu sistema zamenimo da je $A=\frac{2}{3}D, E=-D$ i $F=-D$. Dobijamo da je $D=0$, odakle je $A=C=E=F=0$.

Dakle,

$$\int \frac{4x^3-3x^2-2}{(x^3+1)^2}dx = \frac{0\cdot x^2-2x+1}{x^3+1} + \int \frac{0\cdot x^2+0\cdot x+0}{x^3+1}dx = \frac{-2x+1}{x^3+1} + C.$$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Zadaci koje studenti treba dodatno da provežbaju.

Rešiti integrale

1. $\int \frac{x}{x^3-1}dx.$

Rezultat. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

2. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+3}dx.$

Rezultat. $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$

3. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx.$

Rezultat. $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

4. Na predavanjima je pokazano kako se rešava $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Rešiti ovaj integral Metodom Ostrogradskog. Takođe, rešiti i integral $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$ ovom metodom.

Zaključak za lekciju 02

NEODREĐENA INTEGRACIJA – DRUGI DEO

Integracija racionalnih funkcija, integracija nekih tipova iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.

U ovoj lekciji su uvedene specifične metode za neodređen integraciju i to su: Metod neodređenih koeficijenata, Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funkcija, smene $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ i $t = \mathrm{tg}x$ za integraciju racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$, Ojlerove smene, Metod Ostrogradskog i Binomni diferencijal za integraciju određenih tipova iracionalnih funkcija. Takođe su pomenuti i drugi tipove smena koji se u specifičnim situacijama u zavisnosti od podintgralne funkcije mogu primenjivati.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.