UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Dvojni integrali

Lekcija 12

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 12

DVOJNI INTEGRALI

Uvod

UVOD

Dvojni integral

Oblast integracije višestrukih integrala je višedimenzionalna oblast D. Generalni slučaj višestrukih integrala, kada je $D \subset \mathbb{R}^n$, neće biti razmatran na ovom kursu, pa se zadržavamo samo na specijalnim slučajevima. To su dvojni i trojni integrali, kod kojih je oblast integracije $D \subset \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalna (ravna) i $D \subset \mathbb{R}^3$ trodimenzionalna (prostorna) oblast, tim redom. U ovoj lekciji ćemo izučavati dvojni integral, a na narednoj trojni integral.

Ideja uvođenja dvojnog integrala, analagno je ideji uvođenja određenog Rimanovog integrala, samo što prilikom uvođenja dvojnog integrala umesto intervala, oblast integracije postaje neka oblast u ravni, a umesto realne funkcije jedne realne promenljive, vrši se integracija realne funkcije dve realne promenljive.

Poglavlje 1

Pojam dvojnog integrala

DEFINICIJA

Dvojni integral predstavlja generalizaciju pojma određenog integrala u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Neka je data ograničena funkcija $z = f(x, y)$ na ograničenoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Oblast D je ograničen skup u $\mathbb{R}^2$ ako postoji disk (krug) sa konačnim poluprečnikom koji sadrži D u sebi. Takođe, pretpostavimo da D ima konačnu površinu.

Napomena. Postoje oblasti u $\mathbb{R}^2$ koje nisu merljive (za koje se ne može izračunati površina).

U daljem razmatranju uvedimo pojam određenog integrala funkcije f na oblasti D. Posmatrajmo za dato $n \in \mathbb{N}$ kolekciju skupova $\{D_1, \ldots, D_n\}$, takvih da je $D_i \cap D_j = \emptyset$, $\{i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \neq j\}$i da je $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Ta kolekcija predstavlja jedan prekrivač oblasti D ili jednu podelu oblasti D. Označimo je sa P.

Nadalje, pretpostavljamo da posmatramo samo takve podele oblasti D kod kojih elementi te podele $\{D_1, \ldots, D_n\}$ imaju svoju površinu kao skupovi u $\mathbb{R}^2$ i da im dijametar (svima) teži nuli, kada se broj tih podeonih delova uvećava i teži u $+\infty$.

Napomena. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^2$, tada dijametar za A definišemo sa

$$dA = \sup_{P,Q \in A} ||P - Q||,$$

gde je supremum, u oznaci sup, standardno definisan (obično je to maksimum) po tačkama $P, Q \in A$ i gde je oznaka $|| \cdot ||$ Euklidsko rastojanje dato u $\mathbb{R}^2$.

Za $n \in \mathbb{N}$ formirajmo sledeće (Darbu-Rimanove) integralne sume

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Pi_i$$

gde su $(\eta_1, \xi_1), (\eta_2, \xi_2), \ldots, (\eta_n, \xi_n)$ proizvoljne tačke iz skupova $D_1, \ldots, D_n$ respektivno i $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ površine oblasti $D_1, \ldots, D_n$ respektivno.

Ako za integralne sume važi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I \in \mathbb{R}$$

bez obzira na izbor podele P i bez obzira na izbor tačaka $(\eta_1, \xi_1), (\eta_2, \xi_2), \ldots, (\eta_n, \xi_n)$. Tada za f kažemo da je integrabilna funkcija na oblasti D, tj. postoji njen dvojni integral na D je I.

NEKE KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Neprekidne funkcije se mogu integraliti, dok se neke od prekidnih funkcija mogu, a neke ne.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $z = f(x, y)$ na D. Tada ona ima dvojni integral na D.

Napomena. Prekidne funkcije su takve da neke od njih imaju dvojni integral, a neke nemaju. Mi ćemo uvek raditi sa elementarnim funkcijama, koje su neprekidne funkcije.

Standardna oznaka za dvojni integral je

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy$$

gde oblast D posebno opisujemo u skupovnom smislu. Za ovu oznaku, svi termini su isti kao za jednostruki integral, jedino treba napomenuti da se oznaka $dxdy$ naziva površinski element oblasti D.

OSNOVNE OSOBINE

Metod linearnosti i aditivnost integracije za dvojni integral. Ako je funkcija nenegativna na određenoj oblasti, tada je i dvojni integral od nje nenegativan broj.

Izložićemo neke bitne osobine dvojnog integrala.

Stav. Neka su date neprekidne i ograničene funkcije $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$ na ograničenoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ važi

$$\iint\limits_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y) dxdy + \beta \iint\limits_D g(x, y) dxdy.$$

2. Ako je $z = f(x, y) \geq 0$, za $(x, y) \in D$, tada je

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

3. Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za $(x, y) \in D$, tada je

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

4. Važi da je

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|dxdy.$$

5. Neka je $D = D_1 \cup D_2 \cup l$,gde su D_1 i D_2 oblasti iz $\mathbb{R}^2$ takve da imaju površinu i da važi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,a l je kriva („dovoljno dobra”) koja pripada oblasti D i koja razgraničava oblasti D_1 i D_2. Tada je

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

Na sličan način se može definisati prethodno pravilo za konačno mnogo disjunktnih skupova $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Ova osobina se naziva osobina aditivnosti dvojnog integrala po domenu integracije.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: definicija dvojnog integrala.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

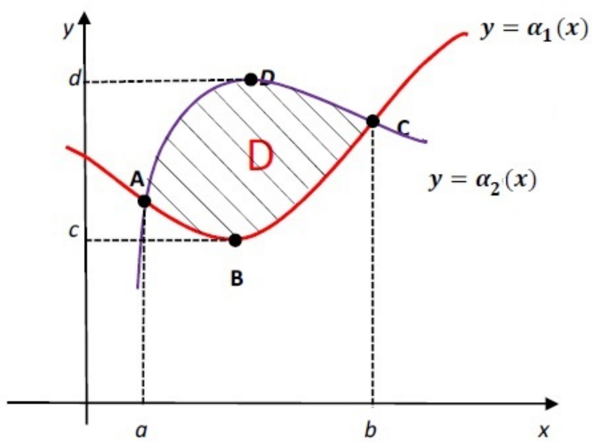
Poglavlje 2

Izračunavanje

FUBINIJEV STAV

Izračunavanje dvojnog integrala svodi se na izračunavanje dva jednostruka integrala. Za to se koristi Fubinijev stav.

U sledećem razmatranju uvešćemo bitnu tehniku za izračunavanje dvojnih integrala preko dvostrukih integral tj. dva uzastopna jednostruka integrala koja proističe iz čuvene Fubinijeve teoreme za dvojni integral. Pomenutu tehniku ćemo prikazati u nastavku. Neka je, najpre, oblast D data na elementaran način sledećom slikom.



Slika 2.1 Prikaz oblast D na kojoj sprovodimo integraciju

Rub oblasti D sa prethodne slike je kriva za koju važi: deo ruba koji čini luk krive ABC je grafik neke funkcije $y = \alpha_1(x), x \in [a, b]$, a deo ruba koji čini luk ADC je grafik funkcije $y = \alpha_2(x), x \in [a, b]$.

Takođe, podrazumevamo da su α_1 i α_2 neprekidne funkcije. Tada Fubinijeva teorema tvrdi da oblast D ima svoju površinu. Razmatrajmo na takvoj oblasti D neprekidnu i ograničenu funkciju $z = f(x, y)$. Tada je (prema Fubinijevoj teoremi)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Slično, rub oblasti D može biti kriva za koju važi: deo ruba koji čini luk BAD je grafik funkcije $x = \beta_1(y), y \in [c, d]$, a deo ruba koji čini luk BCD je grafik funkcije $x = \beta_2(y), y \in [c, d]$. Takođe, podrazumevamo da su β_1 i β_2 neprekidne funkcije. Tada

Fubinijeva teorema tvrdi da oblast D ima svoju površinu. Ako razmatramo na takvoj oblasti D neprekidnu i ograničenu funkciju $z = f(x, y)$, tada je (prema Fubinijevoj teoremi)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

BITNE NAPOMENE

Ukazano je na sve mogućnosti koje se mogu javiti prilikom primene Fubinijevog stava.

Posmatrajući prethodne formule možemo zaključiti da se prema rezultatu iz Fubinijevog stava može menjati redosled integracija po x, odnosno po y, ali se pri tome mora voditi računa i o promeni granica u kojima se vrši integracija. Granice integrala se pri ovakvim promenama redosleda integraljenja ne ostaju iste, osim, možda, u nekim najjednostavnijim primerima (kada je podintegralna funkcija konstantna po jednoj ili po obe promenljive ili kada je oblast D pravougaonik ili kvadrat). Generalno govoreći, ovde su granice unutrašnjeg integrala (integrala u zagradi) funkcionalne (zavise od određene promenljive) i rezultat takve integracije je funkcija po odgovarajućoj promenljivoj, dok su granice spoljašnjeg integrala uvek brojne. To određuje i redosled integracije i on se strogo sprovodi tako što se najpre integrali unutrašnji integral, a onda njegov rezultat se uvrštava pod spoljašnji integral i vrši druga integracija.
Uvažavajući prethodno rečeno, možemo uvesti i sledeće formule za izračunavanje dvostrukog integrala, koje su ravnopravne u upotrebi sa prethodnim

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)dy,$$

odnosno

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)dx,$$

a da se ne dođe u zabludu koju od integracija je potrebno prvo sprovesti.

Može se dokazati da ovakvu oblast uvek možemo u k koraka, $k \in \mathbb{N}$, podeliti na delove (najčešće pravim linijama ili delovima krivih drugog reda) koji su oblika prikazanog na prethodnoj slici. Tada se, uz korišćenje osobine aditivnosti dvojnog integrala po domenu integracije, integracija takve funkcije na domenu (oblasti) svodi se na zbir od k integrala te funkcije po pomenutim disjunktnim podoblastima. Svaki od tih k integrala izračunamo prema navedenim rezultatima Fubinijeve teoreme i dobijemo rešenje polaznog problema, kao zbir k dobijenih vrednosti.

PRIMER 1

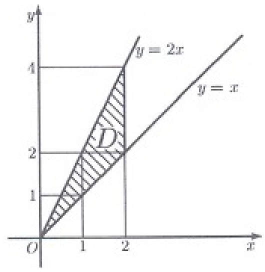
Izmena poretka integraljenja u dvojnom integralu.

Izmeniti poredak integracije u sledećim integralima

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy.$$

Rešenje. Iz datog integrala možemo videti da važi $x \in [0,2]$ i $x \leq y \leq 2x$.

Na osnovu ovih granica možemo skicirati oblast integracije, koja je prikazana na sledećoj slici.



Slika 2.2 Prikaz oblast na kojoj sprovodimo integraciju.

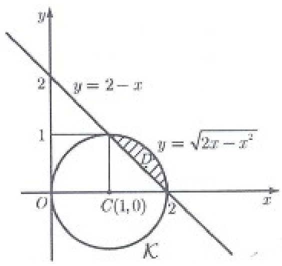
Tada imamo da je:

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

Izmeniti poredak integracije u sledećim integralima:

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$$

Rešenje. Iz $y = \sqrt{2x - x^2}$ dobijamo da je $y^2 + x^2 - 2x = 0$, tj. imamo da je kanonski oblik ove kružnice $K : (x-1)^2 + y^2 = 1,$ odakle imamo da je $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$. Na osnovu ovih granica možemo skicirati oblast integracije, koja je prikazana na sledećoj slici



Slika 2.3 Prikaz oblast na kojoj sprovodimo integraciju.

Sada je

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dx \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$$

PRIMER 2

Izračunavanje dvojnog integrala.

Izračunati dvojni integral

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy,$$

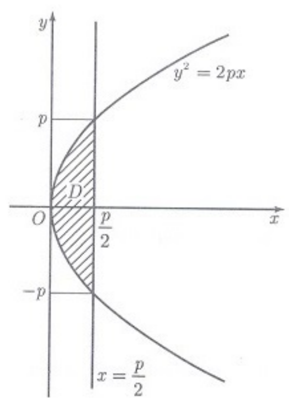
gde je D oblast ograničena parabolom $y^2 = 2px$ i pravom $x = \frac{p}{2}, p > 0.$

Rešenje. Oblast D je prikaza na slici. Tada je

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int\limits_0^{\frac{x}{2}} xdx \int\limits_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y^2 dy = 2\int\limits_0^{\frac{x}{2}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{2px}} y^2 dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} xy^3\Big|_0^{\sqrt{2px}} dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} x^{\frac{5}{2}} 2p\sqrt{2p}dx =$$

$$= \frac{4p}{3}\sqrt{2p}\frac{2}{7}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{p^5}{21}.$$



Slika 2.4 Prikaz oblast na kojoj sprovodimo integraciju.

PRIMER 3

Izračunavanje dvojnog integrala

Napomena. U specijalnim, jednostavnijim slučajevima granice oba integrala mogu biti i brojne i to povlači činjenicu da tada redosled integracije dvostrukih integrala nije bitan. Takođe, mogu se javiti slučajevi kada se dvostruki integral može računati kao proizvod dva jednostruka integrala, što ilustrujemo narednim primerom.

Primer. Izračunati integral:

$$\iint\limits_D x^2 y dx dy,$$

gde je D oblast ograničena data sa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$.

Rešenje. Oblast D predstavlja pravougaonik u $\mathbb{R}^2$ tako da imamo:

$$\iint\limits_D x^2 y dx dy = \left(\int\limits_0^3 x^2 dx \right) \cdot \left(\int\limits_1^2 y dy \right) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: promena redosleda integracije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

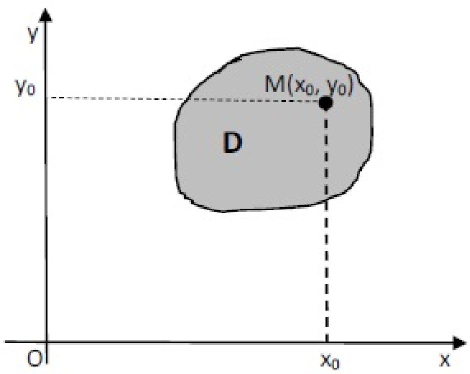
Smena promenljivih u dvojnom integralu

UVOD

Uvođenjem smene u dvojni integral se prevazilaze problemi kako u vezi sa samom podintegralnom funkcijom, tako i sa oblašću na kojoj se posmatrana integracija sprovodi.

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje dvojnog integrala jeste tehnika koja proističe iz stav o smeni promenljivih dvojnog integrala. Kako na efektivno izračunavanje dvojnog integrala, osim podintegralne funkcije, utiče i oblast u kojoj se vrši integracija cilj uvođenja smene promenljivih u dvojni integral jeste da se prevaziđe bar jedan (ili oba) od opisanih problema koji se mogu javiti prilikom integracije. O tome govorimo u nastavku.

Neka je data oblast D iz $\mathbb{R}^2$ koja je ograničena i čiji je rub npr. sačinjen je od delova krivih drugog reda (parabola, kružnica i dr.). Uočimo Dekartov koordinatni sistem Oxy u $\mathbb{R}^2$ i tačku $M(x_0, y_0)$ u njemu (videti sliku).



Slika 3.1 Oblast D i proizvoljna tačka M(x0,y0) iz nje.

JAKOBIJAN

Uvođenjem smene prilikom rešavanja dvojnog integrala, dolazi do promene oblasti u ravni po kojoj se vrši integracija. Jakobijan nam daje princip promene te oblasti integracije.

Pretpostavimo da postoji preslikavanje

$$\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v). \end{aligned} \qquad (*)$$

pri kojem se tačka $M(x_0, y_0) \in D$ može predstaviti preko nekih drugih koordinata u i v (iz nekog drugog koordinatnog sistema u $\mathbb{R}^2$), takvog da su funkcije $x(u,v)$ i $y(u,v)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda na oblasti D^*, gde oblast D^* predstavlja domen prethodno definisanog preslikavanja tj. svaka tačka ove oblasti je predstavljena preko koordinata u i v, a oblast D je slika ove oblast. Ovakvo definisano preslikavanje je bijekcija oblast D^* na D.

Napomena. U našem slučaju uvek će egzistirati barem jedno preslikavanje oblika $(^*)$ sa navedenim osobinama.

Za ovakvo dato preslikavanje definišemo matricu koju nazivamo Jakobijeva matrica (ova matrica je u vezi sa preslikavanjem koordinatnog sistema) na sledeći način

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix},$$

gde je J dato na D^*.

Determinanta $\det(J(u,v))$ se naziva Jakobijan i važi da je $\det(J(u,v)) \neq 0$, na D^* zbog osobina funkcija $x(u,v)$ i $y(u,v)$.

Napomena. Vrlo često se Jakobijan označava slovom J, slično kao i Jakobijeva matrica $J(u,v)$.

Stav. Neka je dato D i D^* sa osobinama kao u prethodnom razmatranju. Ako je na D data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x,y)$, tada je

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Ova formula se vrlo često primenjuje sa ciljem da se polazni zadatak pojednostavi za primenu Fubinijevog stava.

Nekada je prirodnije uvesti smene izražavanjem novouvedenih promenljivih preko starih

$$\begin{aligned} u &= u(x,y), \\ v &= v(x,y). \end{aligned}$$

gde je potrebno, najpre, iz ovog sistema jednačina izvršiti izražavanje promenljivih x i y preko promenljivih u i v, a Jakobijan $J(x,y)$ u ovom slučaju se može odrediti na sledeći način

$$J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)}.$$

PRIMER

Uvođenje smene u dvojni integral.

Izračunati dvojni integral

$$\iint_D (2x-y)e^{x+y}dxdy,$$

gde je oblast $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 1 \le x+y \le 3,\ 2x \le y \le 2x+1\}$.

Rešenje. Zadatak rešavamo uvođenjem novih promenljivih. Iz oblasti D imamo da je

$$\begin{gathered} 1 \le x+y \le 3, \\ 2x \le y \le 2x+1, \end{gathered}$$

pa ćemo uvesti smene na sledeći način:

$$x+y=u, \quad u=u(x,y),$$

$$y-2x=v, \quad v=v(x,y).$$

Nova oblast D^* je tada $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \big| 1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 1\}$.

Kako smo već rekli, neophodno je iz prethodnog sistema izraziti promenljive x i y u funkciji od u i v. Tada dobijamo

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3},$$

$$y = \frac{2u}{3} - \frac{v}{3}$$

Tada je Jakobijan jednak:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Sada je

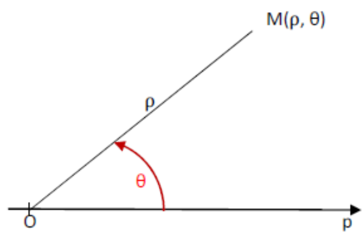
$$\begin{aligned} \iint_D (2x-y)e^{x+y}dxdy &= \iint_{D^*} (-v)e^u \frac{1}{9} dudv = \\ &= -\frac{1}{9}\left(\int_1^3 e^u du\right) \cdot \left(\int_0^1 v dv\right) = \\ &= -\frac{1}{18}(e^3 - e). \end{aligned}$$

POLARNE KOORDINATE

Jedna od najvažnijih smena u dvojnom integralu jeste uvođenje polarnih koordinata. Polarni koordinatni sistem se zadaje polom (tačkom) i proizvoljnom polupravom koja polazi iz nje.

Prilikom uvođenja smene u dvojni integral teško je predvideti u opštem slučaju kakva će se podintegralna funkciji pojaviti u novodobijenom dvojnom integralu. Stoga je od interesa posmatrati neke tipske smene, kao što je transformacija Dekartovih u polarne koordinate. O tome govorimo u nastavku.

Neka je data oblast D iz $\mathbb{R}^2$ koja je ograničena i čiji je rub npr. sačinjen je od delova krivih drugog reda (parabola, kružnica i dr.) Za tačke $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pa samim tim i za one iz D možemo na jedinstven način (osim za tačku $O(0,0)$ koja predstavlja koordinatni početak) uvesti njihovo predstavljanje preko polarnih koordinata tj. uvođenjem polarnog koordinatnog sistema. Polarni koordinatni sistem je definisan tačkom $O(0,0)$ koja se naziva „pol" i koordinatnom poluosom p . U ovakvom sistemu aktuelne su koordinate ρ (rastojanje tačke M od koordinatnog početka O) i $\theta-$ ugao između poluose p i prave date tačkama O i M, meren od p u pozitivnom smeru (videti sliku).



Slika 3.2 Predstavljanje tačke $M(\rho, \theta)$ u polarnim koordinatama.

Time se indukuje sledeće preslikavanje:

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$$

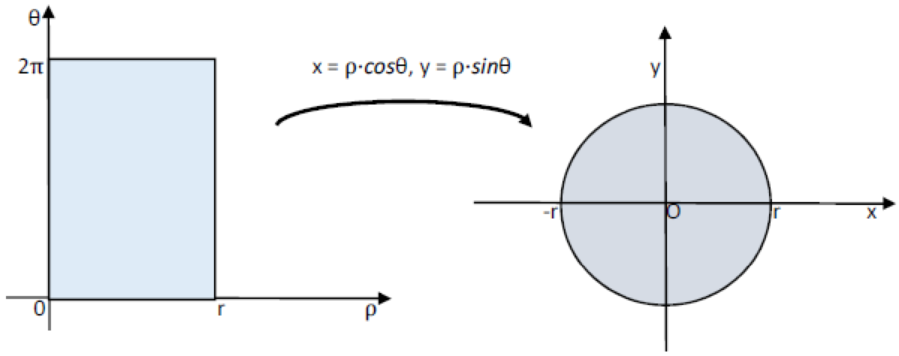
$$y = y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$$

za $\alpha \in [0, 2\pi)$ i neko $\rho > 0$, koje predstavlja vezi između polarnog i Dekartovog pravouglog koordinatnog sistemu u ravni, pri čemu pretpostavljamo da se koordinatni početak za oba sistema poklapa, kao i da se poluosa p poklapa sa pozitivnim delom Ox ose. Može se pokazati da ovo preslikavanje bijektivno preslikava odgovarajuću oblast neke oblasti D^* iz ravni $\mathbb{R}^2$ sa polarnim koordinatama u datu oblast D iz $\mathbb{R}^2$ sa Dekartovim koordinatama. Prethodno definisano preslikavanje jedino ne tretira tačku $O(0,0)$ (dakle ne tretira se pol) i ova tačka se može pri integraciji ignorisati ako se ona nađe u D ili na rubu od D.

PRIMER 1

Slučaj kada se polarne koordinate najčešće primenjuju.

Polarnim koordinatama se uspostavlja bijektivno preslikavanje između oblasti $D^* = \{(\rho, \theta) \big| 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le r\}$ u polarnim koordinatama i oblasti $D = \{(x, y) \big| x^2 + y^2 \le r^2\}$u Dekartovim koordinatama (videti sliku).



Slika 3.3 Preslikavanje oblasti u polarnim koordinatama.

Oblast D sa već pomenutim osobinama je svojim rubom zadala i granice buduće integracije neke funkcije $z = f(x, y)$ definisane na njoj, a samim tim, zajedno sa datim preslikavanjem dobijamo i granice za oblast D^* po koordinatama ρ i θ. U praksi treba granice po veličini θ uvek uzimati da su brojne, dok će granice po veličini ρ tada biti u nekim slučajevima funkcionalne (funkcionalno zavisne od θ), a u nekim slučajevima brojne.
Na ovaj način će biti određen i redosled integracije u novodobijenom dvostrukom integralu.

Prema definiciji Jakobijana, u slučaju polarnih koordinata, imamo da važi:

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho,$$

pa je

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Napomena. Na osnovu svega izloženog može se zaključiti da je pogodno uvoditi polarne koordinate kada se kvadratna forma $x^2 + y^2$ javlja u podintegralnoj funkciji bilo samostalno, bilo pod nekom funkcijom i/ili ako se javlja kao oblast integracije (tj. ako je ona centralni krug).

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: polarne koordinate

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: polarne koordinate - presek dve kružnice

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2

Uvođenje polarnih koordinata u dvojni integral. Kvadratna forma x^2+y^2 se javlja i u zadavanju oblasti integracije i u podintegralnoj funkciji.

Izračunati

$$\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy,$$

gde je oblast D ograničena krugovima $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=e^2$.

Rešenje. Zadatak rešavamo uvođenjem polarnih koordinata

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta, \end{aligned}$$

za $\rho>0$ i $\theta\in[0,2\pi)$, umesto Dekartovih, pri čemu je $J(\rho,\theta)=\rho$. Tada je

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \rho^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1 \Rightarrow \rho=1,$$

$$x^2+y^2=e \Rightarrow \rho^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=e^2 \Rightarrow \rho=e,$$

Odavde zaključujemo, s obzirom da je, da se u oblast D koja predstavlja kružni prsten, preslikava oblast ograničena D^* u polarnim koordinatama sa $1<\rho<e$ i $\theta\in[0,2\pi)$ što predstavlja unutrašnjost pravougaonika. Tada početni integral postaje:

$$\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{D^*}\frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_1^e\frac{\ln\rho^2}{\rho}d\rho =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{smena promenljive:} & \text{promena granica} \\ \ln\rho^2=t & \rho=e\Rightarrow t=2 \\ \frac{d\rho}{\rho}=\frac{dt}{2} & \rho=1\Rightarrow t=0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\pi\int\limits_1^e\frac{tdt}{2} = 2\pi\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2\pi.$$

UOPŠTENE POLARNE KOORDINATE

Primena polarnih koordinata se može uopštiti i za druge oblike podintegralnih funkcije ili oblasti osim za kvadratne forme o kojima je bilo reči. Takođe, pol ne mora biti u tački O(0,0).

Opštije gledano u odnosu na prethodno, mogu se javljati i kvadratne forme oblika $(x-p)^2+(y-q)^2$ i tada treba uvoditi tzv. pomerene polarne koordinate sa polom u tački $O(p,q)$ u obliku

$$x = p + \rho\cos\theta$$

$$y = q + \rho\sin\theta$$

pri čemu u ovom slučaju Jakobijan ostaje isti. Takođe, može se javiti i kvadratna forma oblika

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

kada se pojednostavljivanje vrši uvođenjem sledećeg oblika polarnih koordinata

$$x = a\cdot\rho\cdot\cos\theta$$

$$y = b\cdot\rho\cdot\sin\theta$$

U ovom slučaju za Jakobijan važi $J(\rho,\theta)=ab\rho$.
Na kraju recimo da se korišćenje polarnih koordinata može dalje generalizovati. Najopštiji oblik predstavljaju uopštene polarne koordinate

$$x = a\cdot\rho^{\alpha}\cdot\cos^{\beta}\theta$$

$$y = b\cdot\rho^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}\theta$$

$a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, u slučaju da je pol u tački $O(0,0)$, pri čemu je Jakobijan $J(\rho,\theta)=a\cdot b\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\rho^{2\alpha-1}\cdot\cos^{\beta-1}\theta\cdot\sin^{\beta-1}\theta$

Ova generalizacija se može još jedino posmatrati ako pol nije u koordinatnom početku, već u tački $O(p,q)$. Tada je

$$x = p + a\cdot\rho^{\alpha}\cdot\cos^{\beta}\theta$$

$$y = q + b\cdot\rho^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}\theta$$

$a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pri čemu je Jakobijan

$$J(\rho,\theta)=a\cdot b\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\rho^{2\alpha-1}\cdot\cos^{\beta-1}\theta\cdot\sin^{\beta-1}\theta.$$

Poglavlje 4

Primena dvojnog integrala

IZRAČUNAVANJE POVRŠINE RAVNOG LIKA

Formula za izračunavanje površine ravnog lika.

Ako je data ograničena oblast D u ravni Oxy (videti sliku), tada se površina ove figure može izračunati po formuli

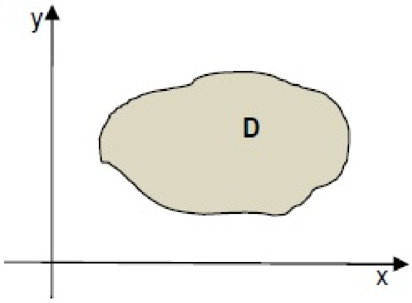
$$P = \iint\limits_D dxdy$$

gde je P površina oblasti D. Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x,y)$, definisana na ovoj oblasti D i neka je

$$m = \inf_{(x,y)\in D} |f(x,y)|, \; M = \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

Tada je

$$m \cdot P \leq \left| \iint\limits_D dxdy \right| \leq M \cdot P.$$



Slika 4.1 Ograničena oblast.

PRIMER 1 – 1. DEO

Određivanje površine kruga primenom dvojnog integrala u Dekartovim koordinatama - bez uvođenja polarnih koordinata.

Primenom dvojnog integrala izračunati površinu kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje. Zadatak ćemo rešavati na dva načina: određivanjem površine kruga preko Dekartovih koordinata i uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački $O(0,0)$.

Prvi način: Primenićemo formulu za određivanje površine figure u ravni. U ovom slučaju je

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big| -r\le x\le r,\ -\sqrt{r^2-x^2}\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\right\}.$$

Tada je

$$P=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy\right)dx=2\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$$

Sada ćemo obnoviti kako se rešava poslednji integral. Integral $\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$ rešavamo smenom $x=r\sin t$ i ima da je $dx=r\cos t$. Za $x=-r$ imamo da je $t=-\frac{\pi}{2}$, dok je za $x=r$ imamo da je $t=\frac{\pi}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned}\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos tdt=r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\\&=r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos tdt=\\&=r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\ldots=\\&=\frac{r^2\pi}{2}.\end{aligned}$$

Napomena. Iskoristili smo prilikom rešavanja prethodnog intergala u jednom koraku da je $|\cos t|=\cos t$, jer je $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Konačno je

$$P=2\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=r^2\pi.$$

PRIMER 1 - 2. DEO

Određivanje površine kruga primenom dvojnog integrala uvođenjem polarnih koordinata.

Drugi način: Uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački O(0, 0) na sledeći način:

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$$

$$y = y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$$

pri čemu je Jakobijan $J = \rho$ i važi da je $0 \leq \rho \leq r$, kao i $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Tada imamo da je:

$$P = \iint_D dxdy = \left(\int_0^r \rho d\rho \right) \cdot \left(\int_0^2 \pi d\theta \right) = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^r \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = r^2 \pi .$$

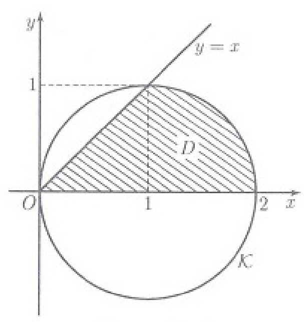
Napomena. Iz ovog primera se može videti koliko uvođenja polarnih koordinata , u određenim situacijama, može ubrzati rešavanje dvojnih integrala.

PRIMER 2

Određivanje površine dela kruga primenom dvojnog integrala bez uvođenja i sa uvođenjem polarnih koordinata.

Primer. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama $x^2 + y^2 = 2x, y = 0$ i $y = x$ uvođenjem i bez uvođenja polarnih koordinata

Rešenje. Iz $x^2 + y^2 = 2x$ imamo da je kanonski oblik jednačine ove kružnice glasi $\mathscr{K}: (x-1)^2 + y^2 = 1.$ Ova kružnica i prave $y = 0$ i $y = x$ ograničavaju oblast D čiju površinu treba izračunati (videti sliku).



Slika 4.2 Oblast određena datim uslovima.

Prvi način: Izračunajmo, sada, površinu oblasti D uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački $O(0, 0)$. Tada imamo da je:

$$x = \rho \cdot \cos\theta$$

$$y = \rho \cdot \sin\theta$$

pri čemu je Jakobijan $J = \rho$ i važi da je

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\theta \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, \\ y = x \Rightarrow \rho\sin\theta = \rho\cos\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \\ y = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0. \end{gathered}$$

Iz poslednja dva uslova imamo da je $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Sada je

$$\begin{aligned} P = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \\ = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta d\theta = \ldots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Drugi način: Izračunajmo površinu oblasti D preko Dekartovih koordinata. Tada imamo da je

$$P = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy = \ldots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: izračunavanje površine.

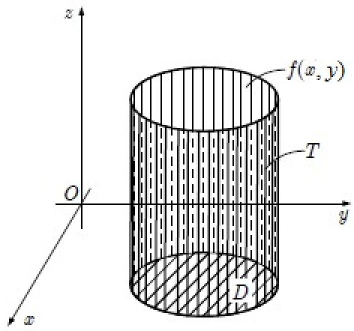
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ODREĐIVANJE ZAPREMINE TELA

Određivanje zapremine tela se može vršiti primenom dvojnog integrala.

Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x,y)$ na ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f(x,y) \geq 0$, za $(x,y) \in D$.

Na datoj slici uočimo cilindrično telo čije su baze (osnove) oblasti D i $f(D)$ i čiji je omotač takva površ koja nastaje kao trag (u $\mathbb{R}^3$) kretanja neke prave P (paralelne sa z osom) po rubu od oblasti D (tj. cilindrična površ). Označimo to telo sa T.



Slika 4.3 Cilindarska površ.

Tada se može dokazati da važi formula

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Na prethodnoj slici smo prikazali situaciju kada je funkcija f strogo pozitivna na D, ali formula data formula važi i u slučaju ako je $z=f(x,y)$ veće ili jednako od nule na D (čak važi i ako deo omotača ili ceo omotač iščezava) (i u tim slučajevima posmatrano telo naziva se cilindrično telo).

Pretpostavimo sada da je $z=f(x,y)\le 0,$ za $(x,y)\in D.$ Tada se može dokazati da je zapremina analognog cilindričnog tela (u odnosu na prethodni slučaj) jednaka sa:

$$V=-\iint_D f(x,y)dxdy.$$

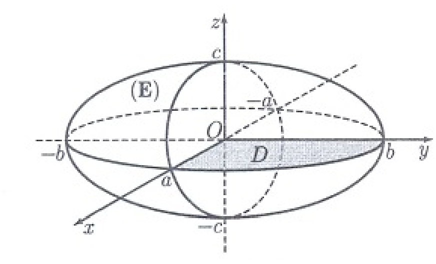
Zapremine nekih komplikovanijih tela u $\mathbb{R}^3$ se mogu izračunati preko prethodnih formula uz rastavljanje tog tela na delove koji odgovaraju ovom ili prethodnom slučaju.

PRIMER 3

Određivanje zapremine tela.

Primenom dvojnog integrala izračunati zapreminu elipsoida

$$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Slika 4.4 Centralni elipsoid.

Rešenje. Zapreminu elipsoida (videti sliku) ćemo izračunati tako što ćemo izračunati njegovu zapreminu u prvom oktantu i sve pomnožiti sa 8.

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

a kako je u prvom oktantu z pozitivna veličina, biramo izraz za z sa predznakom plus. Zadatak se rešava uvođenjem uopštenih polarnih koordinata. Tada je zapremina jednaka

$$\begin{aligned}
V &= 8\iint\limits_D z dx dy = 8c\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \\
&= 8c\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \\
&= \left| \begin{array}{ll} x = a\rho\cos\theta, & 0 < \rho \le 1, \\ y = b\rho\sin\theta, & 0 < \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ J = ab\rho. & \end{array} \right| = \\
&= 8c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, ab\rho d\rho = 8abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = \\
&= [\text{uvodeći smenu } 1-\rho^2 = u^2 \text{ dobijamo}] = \frac{4abc\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Napomena. Iz prethodno dobijene formule za zapreminu elipsoida, može se izvesti formula za određivanje zapremine lopte. Naime, lopta je specijalni slučaj elipsoida i tada je $a = b = c = r$. Dakle, njena zapremina $V = \frac{4r^3\pi}{3}$.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 4

Određivanje zapremine tela omeđenog sa površi i ravni.

Izračunati zapreminu ograničenu paraboloidom $z=3-x^2-y^2$ i ravni $z=0$.

Rešenje. Zadatak rešavamo uvođenjem polarnih koordinata

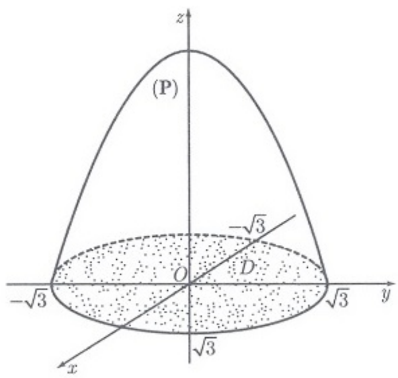
$$x=\rho\cdot\cos\theta$$

$$y=\rho\cdot\sin\theta$$

pri čemu je $\theta\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,\sqrt{3}]$. Tada je

$$V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}}(3-\rho^2)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\theta=\frac{9\pi}{2}.$$

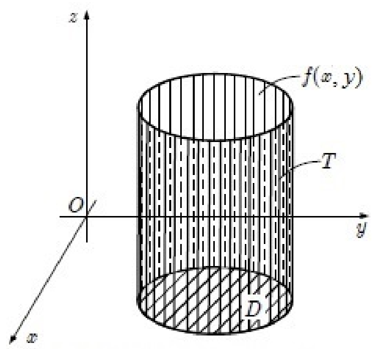


Slika 4.5 Telo čiju zapreminu određujemo.

ODREĐIVANJE POVRŠINE DELA POVRŠI U PROSTORU

Formula za određivanje površine dela površi u prostoru.

Neka data površ S jednoznačnom funkcijom $z=f(x,y),(x,y)\in D$ (tj. prave paralelne osi Oz je seku najviše u po jednoj tački), koja je diferencijabilna u oblasti D, što znači da su njeni parcijalni izvodi $p=z'_x$ i $q=z'_y$ neprekidni u oblasti D (videti sliku).



Slika 4.6 Određivanje površine del površi.

Tada se površina površi S, u oznaci $P(S)$, određuje po formuli

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

PRIMER 5

Izračunavanje površine dela površi u prostoru.

Izračunati površinu dela paraboloida $2z = x^2 + y^2$ koju iseca cilindar $x^2 + y^2 = 1$.

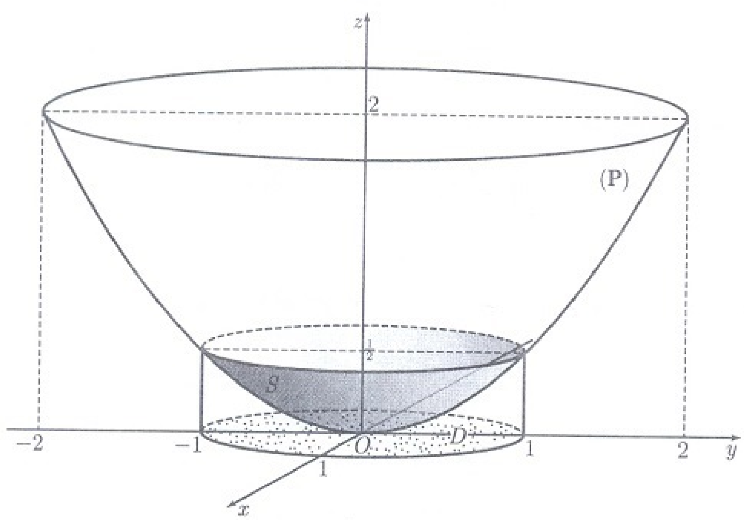
Rešenje. Tražena površina je označena sa S na datoj slici. Tada važi

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \begin{vmatrix} p = x, \\ q = y, \end{vmatrix} =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le 1 \\ y\rho\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ J = \rho, & \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = 2\pi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$



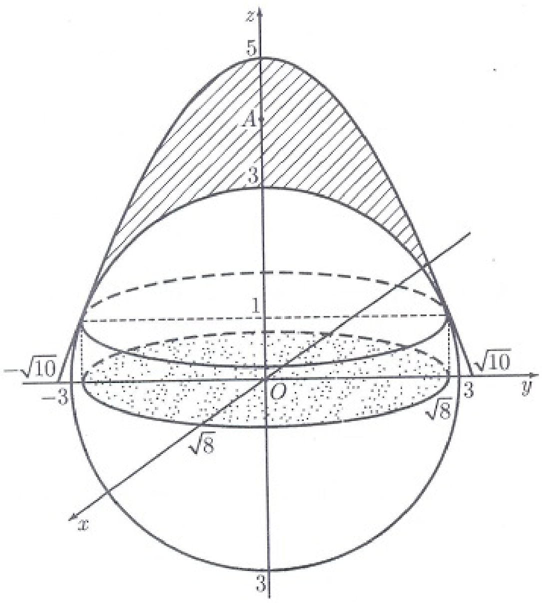
Slika 4.7 Izračunavanje površine dela površi u prostoru.

PRIMER 6 – 1. DEO

Skiciranje slike i određivanje potrebnih veličina.

Naći površinu tela određenog uslovima $x^2+y^2+z^2 \geq 9$i $x^2+y^2+2z \leq 10.$

Rešenje. Spoljašnjost sfera $x^2+y^2+z^2=9$ i unutrašnjost paroboloida $5-z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ određuje telo čiju površinu treba odrediti (videti sliku).



Slika 4.8 Telo omeđeno datim površima.

Presek ovih površi po koordinati z se određuje iz sistema

$$x^2+y^2+z^2=9,$$

$$x^2+y^2+2z=10.$$

Oduzimanjem prve od druge jednačine dobijamo da je $z^2-2z+1=0,$ tj. da je $z=1$. Dakle, ove dve površi se seku na visini 1 iznad Oxy ravni i kada postavimo ravan $z=1$ ona u preseku sa ovim površima daje oblast integracije po dvojnom integralu i to je krug $x^2+y^2=8.$

Tražena površina predstavlja zbir površine dela gornje polusfere (za $1 \leq z \leq 3$) i dela površine paraboloida (za $1 \leq z \leq 5$).

Jednačina gornje polusfere je $z_S=\sqrt{9-x^2-y^2}$, pa je

$$p_S=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad q_S=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Takođe, za paraboloid imamo da je

$$p_P=-x, \quad q_P=-y.$$

PRIMER 6 - 2. DEO

Izračunavanje površine dela površi u prostoru tela omeđenog sa dve površi.

Tražena površina je

$$
\begin{aligned}
P = P_S + P_P &= \iint\limits_D \left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + \sqrt{1+x^2+y^2} \right) dxdy = \\
&= \left| \begin{array}{ccc} D : x^2+y^2 = 8, & x = \rho\cos\theta, & 0 < \rho \leq \sqrt{8}, \\ J = \rho, & y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{3}{\sqrt{9-\rho^2}} + \sqrt{1+\rho^2} \right) d\rho = \\
&= -6\pi \int_0^{\sqrt{8}} \frac{-2\rho d\rho}{2\sqrt{9-\rho^2}} + 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{1+\rho^2}\, 2\rho \right) d\rho = \\
&= -6\pi \int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{9-\rho^2} \right)' d\rho + \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{8}} \left[\left(\sqrt{1+\rho^2} \right)^3 \right]' d\rho = \\
&= -6\pi \sqrt{9-\rho^2} \Big|_0^{\sqrt{8}} + \left(\frac{2\pi}{3} \sqrt{1+\rho^2}^{\,3} \right) \Big|_0^{\sqrt{8}} = \\
&= -6\pi(1-3) + \frac{2\pi}{3}(27-1) = \\
&= \frac{88\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Poglavlje 5

Vežba

ZADATAK 1

Izračunavanje dvostrukog integrala primenom Fubinijevog stava.

Izračunati

$$\iint_D xy^2 dxdy \text{ , } D = [2, 4] \times [-1, 2],$$

$$\iint_D \cos(x+y) \quad dxdy, \text{ , } D : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Rešenje:

1)

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_2^4 \left(\int_{-1}^{2} xy^2 dy \right) dx = \int_2^4 \left(x\frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^{2} \right) dx = \int_2^4 x \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) dx = \int_2^4 3x \quad dx = 3\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 18$$

ili

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_2^4 xy^2 dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left(y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 \right) dy = \int_{-1}^{2} y^2 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) dy = \int_{-1}^{2} 6y^2 \quad dy = 6\frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = 6\left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 18.$$

2)

$$\iint_D \cos(x+y) \quad dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x+y) \Big|_0^{\pi/2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x \right) dx$$

$$= -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -(-1-0) + (0-1) = 0.$$

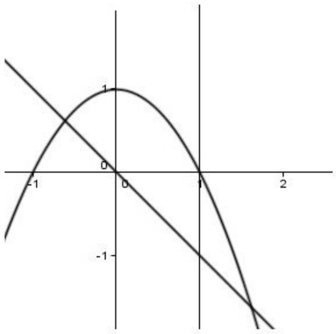
ZADATAK 2

Izračunavanje dvojnog integrala primenom Fubinijevog stava

Oblast integracije je $D : 0 \le x \le 1, \quad -x \le y \le -x^2 + 1$ (videti sliku)

$$\iint_D (x+y^3)dxdy = \int_0^1\left(\int_{-x}^{-x^2+1}(x+y^3)dy\right)dx = \int_0^1\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-x}^{-x^2+1}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{4}+x-x^3+\frac{5x^4}{4}-x^6+\frac{x^8}{4}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{4}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{36}\right)\Big|_0^1=\frac{40}{63},$$

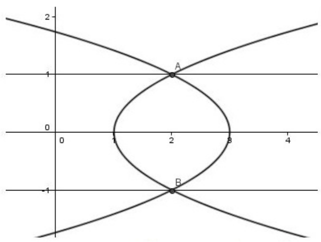


Slika 5.1 Oblast integracije

Oblast integracije je $D: -1 \le y \le 1, \quad y^2+1 \le x \le 3-y^2$

$$\iint_D xy^4dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2+1}^{3-y^2}xy^4dx\right)dy = \int_{-1}^{1}y^4\frac{x^2}{2}\Big|_{y^2+1}^{3-y^2}dy = \int_{-1}^{1}y^4\left(\frac{\left(3-y^2\right)^2}{2}-\frac{\left(y^2+1\right)^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}y^4\left(\frac{9-6y^2+y^4}{2}-\frac{y^4+2y^2+1}{2}\right)dy = 4\int_{-1}^{1}\left(y^4-y^6\right)dy = 4\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{16}{35}.$$



Slika 5.2 Oblast integracije

ZADATAK 3

Izračunavanje dvojnog integrala primenom Fubinijevog stava.

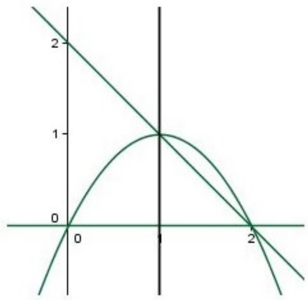
Odrediti dvostruki integral funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ na oblasti D ograničenoj krivama $y=-x^2+2x, \quad y=2-x.$

Rešenje: Datu oblast (videti sliku) treba podeliti na dva dela pravom $x=1$.

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{D_1}\left(x^2+y^2\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{-x^2+2x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx=$$

$$\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{-x^2+2x}dx+\int_1^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-x}dx=\int_0^1\left(x^2\left(-x^2+2x\right)+\frac{\left(-x^2+2x\right)^3}{3}\right)dx+\int_1^2\left(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$\cdots=\frac{61}{42}.$$



Slika 5.3 Oblast integracije

ZADATAK 4

Izračunavanje dvojnog integrala prelaskom na polarne koordinate.

Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

na oblast $D: x^2+y^2\le 1.$

Rešenje: Data oblast integracije je jedinična kružnica sa centrom u koordinatnom početku. Prelaskom na polarne koordinate smenom

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$dxdy=rdrd\varphi$

dobijamo

$$x^2+y^2=r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2$$

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_{D^*} e^{-r^2}rdrd\varphi$$

na oblasti $D^*: 0\le r\le 1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$ što je dalje jednako

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_{D^*} e^{-r^2}rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)d\varphi=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)2\pi=\left(1-\frac{1}{e}\right)\pi.$$

ZADATAK 5

Izračunavanje dvojnog integrala prelaskom na polarne koordinate

Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

na oblasti D ograničenoj krivama $x^2+y^2=e^2$ i $x^2+y^2=e^4$.

Rešenje:

Data oblast integracije je kružni prsten ograničen krivama sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika e i e^2 . Prelaskom na polarne koordinate smenom

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$dxdy=rdrd\varphi$

dobijamo

$x^2+y^2=r^2$

Tada imamo da je

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{D^*} r\ \ \ln r^2 drd\varphi$$

na oblasti $D^*: e\le r\le e^2\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$,

što je dalje jednako

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{D^*} r\ \ \ln r^2 drd\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_e^{e^2} r\ \ \ln r^2 dr\right)d\varphi=\begin{pmatrix}\text{smena}\\ r^2=t\\ 2rdr=dt\\ e\ \to\ e^2\\ e^2\ \to\ e^4\end{pmatrix}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4}\ln t\ \ dt\right)d\varphi$$

$$=\begin{pmatrix}u=\ln t & dv=dt\\ du=\frac{dt}{t} & v=t\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(t\ln t\Big|_{e^2}^{e^4}-\int_{e^2}^{e^4}\frac{t}{t}dt\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4e^4-2e^2-e^4+e^2\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left(3e^4-e^2\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=\left(3e^4-e^2\right)\pi.$$

ZADATAK 6

Izračunavanje dvojnog integrala uvođenjem smene.

Izračunati vrednost integrala $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, ako je oblast ograničena pravama

$y-x=1, \quad y-x=-3, \quad y+\frac{1}{3}x=\frac{7}{3}, \quad y+\frac{1}{3}x=5$

Rešenje: Uvođenjem smene

$u=y-x, \qquad v=y+\frac{1}{3}x,$

tada je $v-u=\frac{4}{3}x$ pa je $x=\frac{3}{4}\left(v-u\right)$ i $y=u+x=u+\frac{3}{4}v-\frac{3}{4}u=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v$. Tada Jakobijan glasi:

$$J=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

$y-x=1 \rightarrow u=1, \quad y-x=-3 \rightarrow u=-3, \quad y+\frac{1}{3}x=\frac{7}{3} \rightarrow v=\frac{7}{3}, \quad y+\frac{1}{3}x=5 \rightarrow v=5$

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy=\iint\limits_{D'} u\frac{3}{4}dudv=\frac{3}{4}\int\limits_{7/3}^{5} dv\int\limits_{-3}^{1} u \quad du=\frac{3}{4}\left(5-\frac{7}{3}\right)\frac{u^2}{2}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1^2-(-3)^2}{2}=2\cdot\frac{1-9}{2}=-8.$$

Napomena. Za vežbu zadatak rešiti bez uvođenja smene.

ZADATAK 7 – 1. DEO

Uvođenje smene u dvojni integral i primena Fubinijeve teoreme.

Izračunati integral $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, gde je $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^4+y^4\le 1, \quad x>0, \quad y>0\right\}$.

Rešenje:

Uvedimo smenu $u=x^2, \quad v=y^2$, odakle je $x=\sqrt{u}, \quad y=\sqrt{v}, \quad J=\frac{1}{4\sqrt{uv}}.$

$$\iint\limits_{x^4+y^4\le 1, \quad x>0, \quad y>0} \left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}\left(u+v\right)\frac{1}{4\sqrt{uv}}dudv$$

Prelaskom na polarne coordinate

$u=\rho\cos\varphi$

$v=\rho\sin\varphi$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{1}{4\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\rho d\rho d\varphi = \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \int_0^{\pi/2}\frac{1+\operatorname{ctg}\ \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}\ \varphi}}d\varphi = \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{\operatorname{ctg}\ \varphi} \\ t^2=\operatorname{ctg}\ \varphi \\ 2t\ \ dt = -\frac{1}{\sin^2\varphi}d\varphi \\ -\frac{2t}{1+t^4}dt = d\varphi \end{array}\right| =$$

$$\frac{1}{8}\int_{+\infty}^{0}\frac{1+t^2}{t}\left(-\frac{2t}{1+t^4}\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

Posmatrajmo poslednji integral kao neodređeni i rešimo ga metodom neodrešenih koeficijenata.

ZADATAK 7 – 2. DEO

Rešavanje nesvojstvenog integrala.

$$\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \int\frac{1+t^2}{1+t^4+2t^2-2t^2}dt = \int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)^2-2t^2}dt = \int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}dt$$

$$\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)} = \frac{At+B}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)} + \frac{Ct+D}{\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata se dobija da je $A=C=0,\quad B=D=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2-\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2+\sqrt{2}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-t\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\right)^2}\right) = \frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2} + \frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}.$$

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left(\frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2} + \frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2}dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{smena za prvi integral } m=1-\sqrt{2}t \\ \text{smena za drugi integral } n=1+\sqrt{2}t \end{array}\right| = \ \dots\ = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ZADATAK 8

Primena dvojnog integrala na izračunavanje površine ravnog lika.

Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y=\ -x^2+6x-5$ i pravom $y=x-1$.

Rešenje: Presečne tačke datih linija su $A(1,0)$ i $B(4,3)$ jer jednačina

$$-x^2+6x-5=x-1$$

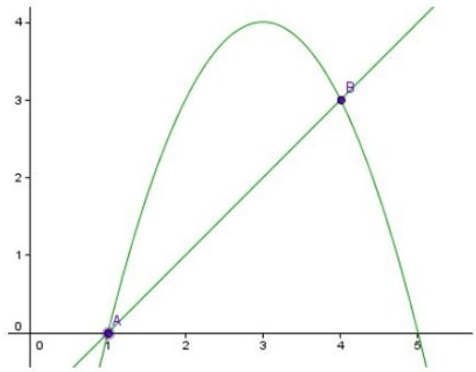
$-x^2+5x-4=0$

ima rešenja $x=1$ i $x=4$.

Dakle, tražena površina se preko dvostrukog integrala dobija kao

$$P=\iint\limits_D dxdy=\int_1^4\left(\int_{x-1}^{-x^2+6x-5}dy\right)dx=\int_1^4\left(-x^2+6x-5-x+1\right)dx=\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)=4.5.$$



Presečne tačke datih linija su $A(1,0)$ i $B(4,3)$ jer jednačina

Slika 5.4 Oblast integracije

ZADATAK 9

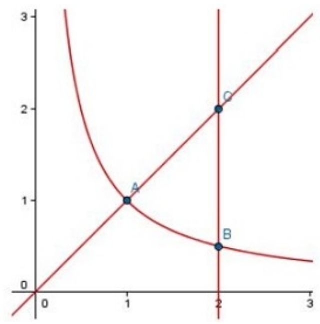
Primena dvojnog integrala na izračunavanje zapremine tela.

Izračunati zapreminu tela ograničenog ravni $z=0$ i grafikom nenegativne funkcije $f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}$ na oblasti D omeđene krivama $x=2,\quad y=x$ i $xy=1$.

Rešenje:

Sa slike vidimo da je $D: 1\le x\le 2,\quad \frac{1}{x}\le y\le x$

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2\left(\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy\right)dx=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\Bigg|_{1/x}^{x}\right)dx=\int_1^2\left(-x+x^3\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{4}+\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}=\frac{9}{4}.$$



Slika 5.5 Oblast integracije u ravni Oxy.

ZADATAK 10

Izračunavanje površine dela površi.

Odrediti površinu dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.

Rešenje: Iz jednačine konusa imamo da je

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$

Pa je odatle

$$z_x' = p = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z_y' = q = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Primenom formule za izračunavanje površine dela površi imamo da je:

$$P = 2\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = 2\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy =$$

$$2\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\,dxdy = 2\sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} dxdy = 2\sqrt{2}\pi$$

jer je

$$\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} dxdy = \pi$$

tj.prethodna formula predstavlja formulu za izračunavanje površina kruga $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ (naime $(x-1)^2 + y^2 = 1$ je kanonski oblik kružnice $x^2 + y^2 = 2x$).

ZADATAK 11

Određivanje zapremine tela omeđenog sa dve površi.

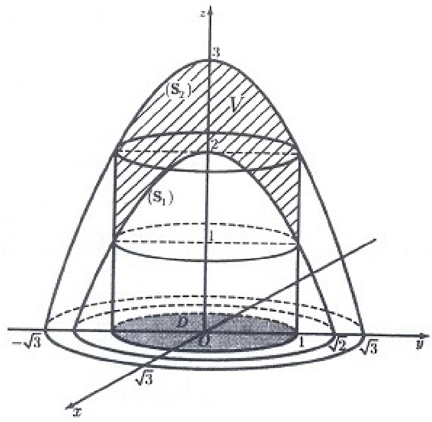
Izračunati zapreminu tela ograničenog površima $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2-z$ i $x^2 + y^2 = 3-z$.

Rešenje. Donja i gornja granica tela čija se zapremina traži (videti sliku) su paraboloidi $S_1 : x^2 + y^2 = 2-z$ i $S_2 : x^2 + y^2 = 3-z$.

Tada traženu zapreminu izračunavamo na sledeći način:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)dxdy = \iint_{D: x^2+y^2 \le 1} (3 - (x^2+y^2) - 2 + (x^2+y^2))dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = [\text{ površina kruga: } x^2+y^2 \le 1] = \pi.$$



Slika 5.6 Telo čiju zapreminu računamo.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Izračunati $\iint_D \left(x^2 + 2y\right)dxdy,$ gde je $D:(x,y) \in [0,1] \times [0,2].$

$\frac{14}{3}$

Zadatak 2. Izračunati $\iint_D (x+y)dxdy,$ gde je D ograničena krivama $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x.$

$\frac{261}{20}$

Zadatak 3. Izračunati $\iint_D \frac{4}{\left(y^2+2x+1\right)^2}dxdy,$ gde je $D:(x,y): 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x.$

$1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Zadatak 4. Izračunati $\iint_D x^3\sqrt{y^3+1}dxdy,$ gde je $D:(x,y): 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 1.$

$\frac{1}{18}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Zadatak 5. Izračunati $\iint_D (x+2y)dxdy,$ gde je D ograničena krivama $x = y^2 - 4, \quad x = 5.$

$\frac{252}{5}$

Zadatak 6. Izračunati $\iint\limits_{D} xydxdy$, gde je D ograničena krivama $xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 4x$.

$\frac{3}{2}\ln 2$

Zaključak za lekciju 12

DVOJNI INTEGRALI

Pojam dvojnog integrala, izračunavanje dvojnog integrala, uvođenje smene u dvojni integral

U ovoj lekciji smo uveli pojam dvojnog integrala i naučili

- Osnovne osobine dvojnih integrala,
- Izračunavanje dvojnog integrala,
- Smenu promenljivih u dvojnom integralu,
- Polarne koordinate,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje površine ravne figure,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje zapremine tela,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje površine dela površi u prostoru.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.