UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – treći deo

Lekcija 03

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 03

NEODREĐENI INTEGRAL – TREĆI DEO

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi specifične metode za integraciju.

U prethodnim lekcijama je uveden integralni račun realne funkcije jedne realne promenljive preko osnovnih pojmova u vezi sa neodređenom integracijom, pravila i osobina neodređenog integral, tablice neodređenih integral osnovnih funkcija, kao i opštih metoda za integraciju. Takođe, uveli smo metodologije za integraciju racionalnih funkcija.

Sada ćemo obraditi specifične metode za integraciju nekih klasa iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.

O njima govorimo u nastavku.

Poglavlje 1

Integracija iracionalnih funkcija

UVOD

Ojlerove smene, Metod Ostrogradskog za iracionalne funkcije, Binomni diferencijal.

Sada ćemo pokazati kako se integrale sledeće klase iracionalnih funkcija:

1. $f(x)=R\left(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_1]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_1]{ax+b}\right)$ ili $f(x)=R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ gde je R racionalna funkcija svojih argumenata;

2. $f(x)=R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ a\neq 0,$ gde je R racionalna funkcija po x i kvadratnog korena iz kvadratnog trinoma po x;

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0;$

4. $f(x)=\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ M\neq 0;$

5. $f(x)=R(x^{2n}, \sqrt{a^2\pm b^2x^2}),$ gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2\pm b^2x^2}$ i $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c},\ a\neq 0;$

6. $f(x)=(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,\ m\neq 0;$
7. $f(x)=\frac{1}{x^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N};$

8. $f(x)=\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,$ gde je $P_n(x)$ polinom n -tog stepena $n\in\mathbb{N};$

9. $f(x)=x^m(a+bx^n)^p.$

Veoma važna metoda koja se koristi za integraciju racionalnih funkcija oblika 2 naziva se Ojlerove smene (ima ih ukupno tri), koja takve integracije pretvara u integraciju racionalnih funkcija po novoj promenljivoj. Takođe od interesa su i Metod Ostrogradskog (funkcije oblika 8) i Binomni diferencijal (funkcije oblika 9).

Napomena. Svakako, postoje i druge klase iracionalnih funkcija koja se mogu integraliti, ali ovde o njima neće biti reči.

1.1 Integracija iracionalnih funkcija oblika 1

INTEGRACIJA DVA TIPA JEDNOSTAVNIJIH IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u integrale racionalne funkcije.

Neka je podintegralna funkcija oblika $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)$. Ako je $n=NZD(n_1,n_2,\dots,n_k)$, tada je

$$\frac{n}{n_1}=m_1,\ \frac{n}{n_2}=m_2,\ \frac{n}{n_3}=m_3,\ \dots,\frac{n}{n_k}=m_k,$$

gde su $m_1,m_2,\dots,m_k\in\mathbb{N}$.Uvedimo smenu $\sqrt[n]{ax+b}=t$. Tada je

$$\sqrt[n_1]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_1}}=t^{m_1},\ \sqrt[n_2]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_2}}=t^{m_2},\ \dots,\sqrt[n_k]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_k}}=t^{m_k}$$

i $ax+b=t^n, x=\frac{t^n-b}{a}, dx=\frac{n\cdot t^{n-1}}{a}dt$.Tada, polazni integral postaje

$$\int f(x)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^{m_1},t^{m_2},\dots,t^{m_k},\frac{n\cdot t^{n-1}}{a}\right)dt,$$

gde podintegralna funkcija u integralu s desne strane predstavlja racionalnu funkciju argumenta t.

Ako je podintegralna funkcija oblika $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ gde je R racionalna funkcija svojih argumenata, treba uvesti smenu $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$, gde je $n=NZD(n_1,n_2,\dots,n_k)$. Posle ove smene podintegralna funkcija se svodi na racionalnu funkciju argumenta t.

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)$.

Izračunati

$$\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Rešenje. Kako je $6=NZS(2,3)$, zadatak rešavamo uvođenjem smene $\sqrt[6]{x+1}=t$, tj. $x+1=t^6$, tj. $x=t^6-1$. Tada je $dx=6t^5\,dt$ i dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t^6-1)^2+\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}} 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^{12}+2t^6-1+t^3}{t^2} t^5\,dt = \\
&= 6\int (t^{12}+2t^6-1+t^3)\cdot t^3\,dt = 6\int (t^{15}+2t^9-t^3+t^6)\,dt = \\
&= 6\left(\frac{t^{16}}{16}+2\cdot\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+c = \\
& 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{16}}{16}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{10}}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{4}}{4}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{7}}{7}\right)+c
\end{aligned}
$$

PRIMER 2

Integracija funkcije oblika $f(x)=R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

Izračunati

$$
\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)} dx.
$$

Rešenje. Uśćemo smenu $\frac{x}{x-1}=t^6$, jer je $6=NZS(2,3)$. Tada se dobija

$$
\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)} dx = \left| \begin{array}{cc} \frac{x}{x-1}=t^6, & x=\frac{t^6}{t^6-1} \\ dx=-\frac{6t^5}{(t^6-1)^2} & \end{array} \right| = \int \frac{-6dt}{t^4(t^2+1)} =
$$

$$
= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t^2} + \int \frac{Cdt}{t^3} + \int \frac{Ddt}{t^4} + \int \frac{(Ex+F)dt}{t^2+1} =
$$

(za vežbu odrediti koeficijente A, B, C, D, E i F)

$$
= -6\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{2}{t^3}-6\frac{1}{t}-6\operatorname{arctg} t + C =
$$

$$
= 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} - 6\sqrt[6]{\frac{x-1}{x}} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}} + C.
$$

1.2 Integracija iracionalnih funkcija oblika 2

PRVA OJLEROVA SMENA

Prva Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c *važi da je* $a>0$.

Prilikom integracije iracionalnih funkcija ako je podintegralna funkcija oblika

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$$

i polinom $ax^2 + bx + c$ nema realna i jednaka rešenja, tada se takav integral može rešavati Ojlerovim smenama.

Prva Ojlerova smena podrazumeva slučaj da u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$, prethodno datog oblika podintegralne funkcije, važi da je $a > 0$. Tada se takav integral rešava smenom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x.$$

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi da li će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus. Nakon uvođenja ove smene, integraljenje po iracionalnoj funkcije prelazi u integraljenje po racionalnoj funkciji.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Rešiti sledeće integrale:

$$a) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}};$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

REŠAVANJE PRIMERA

Uvođenje prve Ojlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Prva Ojlerova smena integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

a) Kako je koeficijent uz x^2 pozitivan za rešavanje ovog integrala može se koristiti prva Ojlerova smena. Tada imamo da je:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x \Rightarrow x^2 + a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow 2tx = t^2 + a^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{t^2 + a^2}{2t}.$$

Sada imamo da je:

$$dx = \frac{t^2 - a^2}{2t^2} dt.$$

Takođe, važi da je:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x \Rightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = t - \frac{t^2 + a^2}{2t} = \frac{t^2 - a^2}{2t}.$$

Konačno, ako dobijeno uvrstimo u polazni integral imamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c.$$

Na kraju, iz početne smene imamo da je:

$$\sqrt{x^2+a^2} = t - x \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2+a^2},$$

što nas dovodi do

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c.$$

Napomena. Ovaj integral je dat kao tablični i može se koristiti na ispitu kao takav, tj. bez prethodno datog rešavanja.

Rešenje pod b)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \frac{\text{smena :}}{\sqrt{x^2+x+1} = t - x} \right| = \int \frac{-\frac{2\left(1-t+t^2\right)}{(1-2t)^2}}{t}dt = \int \left(-\frac{2}{t} - \frac{3}{(2t-1)^2} + \frac{3}{2t-1} \right)dt = -2\ln|t| + \frac{3}{2(2t-1)} + \frac{3}{2}\ln|2t$$

DRUGA OJLEROVA SMENA

Druga Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c važi da je $c>0$.

U slučaju da je koeficijent $a < 0$ u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$ podintegralne funkcije oblika

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

tada je prva Ojlerova smena neupotrebljiva.

Međutim, ako je u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$ koeficijent $c > 0$, тада ce ovakvi integrali mogu rešavati drugom Ojlerovom smenom koja glasi:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x \cdot t \pm \sqrt{c}.$$

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi da li će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus. Nakon uvođenja ove smene, integraljenje po iracionalnoj funkcije prelazi u intgraljenje racionalne funkcije.

Primer. Rešiti integral:

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Rešenje. Kako je $a = -1$, ne može se primeniti prva Ojlerova smena, a kako je $c = 1$, može se primeniti druga Ojlerova smena. Ona u ovom slučaju glasi:

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 \Rightarrow \quad 1 + x - x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1 \quad \Rightarrow \quad x - x^2 = t^2x^2 - 2tx \,\Big/ : x \Rightarrow \quad 1 - x = t^2x - 2t.$$

Ako iz poslednje jednakosti izrazimo x, dobijamo da je:

$$x = \frac{2t+1}{t^2+1}.$$

REŠENJE PRIMERA – 1. DEO

Uvođenje drugeOjlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Prva Ojlerova smena integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Tada je, s jedne strane

$$dx = \frac{-2t^2 - 2t + 2}{\left(t^2+1\right)^2}dt,$$

a, s druge strane

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 = t \cdot \frac{2t+1}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Sada sve vrednosti iz početnog integrala možemo smeniti po novoj promenljivoj t i imamo:

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\frac{-2t^2-2t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt}{1 - \frac{t^2+t-1}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{-2t^2-2t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt}{\frac{t+1}{t^2+1}} = \int \frac{\left(-2t^2-2t+2\right)dt}{(1-t)\left(t^2+1\right)}.$$

REŠENJE PRIMERA – 2. DEO

Dekompozicija racionalne funkcije primenom metode neodređenih koeficijenata.

Važi da je:

$$\frac{-2t^2-2t+2}{(1-t)\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa $(1-t)\left(t^2+1\right)$ dobijamo da je:

$$-2t^2 - 2t + 2 = A\left(t^2+1\right) + (Bt+C)(1-t).$$

tj.

$$-2t^2 - 2t + 2 = (A-B)t^2 + (B-C)t + A + C.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad A - B = -2 \\ x^1 &: \quad B - C = -2 \\ x^0 &: \quad A + C = 2 \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su A = −1, B = 1 i C = 3. Tada je:

$$\frac{-2t^2-2t+2}{(1-t)\left(t^2+1\right)} = \frac{-1}{1-t} + \frac{3t+1}{t^2+1} = \frac{1}{t-1} + \frac{3t+1}{t^2+1}.$$

REŠENJE PRIMERA – 3.DEO

Integracija elementarnih racionalnih funkcija.

Odakle imamo:

$$\int \frac{-2t^2-2t+2}{(1-t)\left(t^2+1\right)}dt = \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{3t+1}{t^2+1}dt = \ln|t-1| + \frac{3}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Tada je:

$$\int \frac{-2t^2-2t+2}{(1-t)\left(t^2+1\right)}dt = \ln|t-1| + \ln\left(t^2+1\right) + \text{arctg}t + c.$$

Vraćajući smenu po t

$$t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$$

u poslednji integral dobijamo da je:

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}} = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} - 1\right| + \ln\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right)^2 + 1\right) + \text{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + c.$$

TREĆA OJLEROVA SMENA

Može se desiti da ni prva ni druga Ojlerova smena ne mogu da se primene. Ako kvadratni trinom ax^2+bx+c ima realna rešenja, tada se može primeniti treća Ojlerova smena.

Može se desiti da ni druga Ojlerova smena nije primenljiva zbog samog oblika kvadratnog trinom $ax^2 + bx + c$, tj. da ne važi ni $a > 0$, niti $c > 0$. Tada, ako ovaj kvadratni trinom ima realna i različita rešenja, tj. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ od interesa može biti smena:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x - x_1\right),$$

ili

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_2\right),$

koja se naziva treća Ojlerova smena. Metodologija rešavanja ovog slučaja veoma je slična prethodno opisanim slučajevima, tj potrebno je, najpre, iz smene izraziti x u funkciji od nove promenljive t, a zatim odrediti i dx.

Treća Ojlerova smena se primenjuje u situacijama kada kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ ima rešenja koja su realna i različita, a ne mora nužno biti $a < 0$ i $c < 0$. Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Rešiti integral

$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}}.$

Rešenje. Kako je $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, možemo uvesti treću Ojlerovu smenu. Tada je $\sqrt{x^2+x-6}=t(x-2)$. Kvadriranjem ovog izraza dobijamo da je:

$$(x+3)(x-2)=t^2(x-2)^2 \qquad / : (x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3=t^2(x-2) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x=\frac{2t^2+3}{t^2-1}.$$

REŠENJE PRIMERA

Treća Ojlerova smena, kao i prve dve Ojlerove smene, dovodi integraciju iracionalne funkcije, na integraciju racionalne funkcije.

Diferenciranjem poslednjem izraza dobijamo:

$dx=\frac{-10t}{(t-2)^2}dt.$

Takođe, važi da je:

$\sqrt{x^2+x-6}=t(x-2)=t\left(\frac{2t^2+3}{t^2-1}-2\right)=\frac{5t}{t^2-1}$

i

$x+1=\frac{2t^2+3}{t^2-1}+1=\frac{3t^2+2}{t^2-1}.$

Konačno, polazni integral, nakon uvođenja ovih smena, postaje integral:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}}=\int\frac{\frac{-10t}{(t-2)^2}dt}{\frac{3t^2+2}{t^2-1}\cdot\frac{5t}{t^2-1}}=-2\int\frac{dt}{3t^2+2}.$$

Kako se rešava poslednji integral već smo govorili, tako da je:

$$\int\frac{dt}{3t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Vraćajući smenu

$$\sqrt{x^2+x-6}=t(x-2)\ \Rightarrow\ t=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-2}$$

konačno je

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}}=\frac{-2}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+x-6}}{\sqrt{3}(x-2)}\right)+c.$$

1.3 Integracija iracionalnih funkcija oblika 3

INTEGRACIJA JEDNOG TIPA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u tablične integrale.

Integral oblika

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b+x+c}}$$

se rešava dovođenjem na kvadratnog trinoma $ax^2+b+x+c$na kanonski oblik i smenom se svodi na tablične integrale

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}\quad\text{i}\quad\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}.$$

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+b+x+c}}$.

Izračunati sledeće integrale:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}; \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}; \qquad \text{c)} \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$$

Rešenje.

a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|$$

$+C =$

$$= \ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

$$\text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C.$$

c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C$$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3} + C.$$

1.4 Integracija iracionalnih funkcija oblika 4

INTEGRACIJA JEDNOG TIPA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u dva integrala, jedan dat kao tablični integral i drugi o čijem smo rešavanju već govorili.

Integral oblika

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

se rešava dovođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c,za $a>0$, na kanonski oblik, tj.

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{Mx+N}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} dx$$

gde treba uvesti smenu $x+\frac{b}{2a}=t,\ x=t-\frac{b}{2a},\ dx=dt$. Tada važi

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{M_1t+N_1}{\sqrt{t^2\pm k^2}}dt=M_1\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}+N_1\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}.$$

Integral $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$ se rešava metodom smene i o njemu smo već govorili, dok je integral $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$ dat kao tablični integral. Slično, se postupa ako je $a<0$ u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c. Tada se nakon uvođenja odgovarajuće smene umesto integrala $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$ javlja integral $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$.

Napomena. Prilikom integraljenja iracionalnih funkcija oblika 4, može se koristiti tehnika koju smo naveli kod integraljenja racionalnih funkcija oblika 4. Radi se o tome da se vrši "nameštanje" brojioca, da predstavlja izvod imenioca. Prilikom ovakvog rešavanja integrala oblika 4, on se svodi na dva integrala, od kojih je jedan oblika integracije iracionalne funkcije oblika 3, dok je drugi integral (nakon uvođenja smene) oblika $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ tj. tablični je.

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Izračunati sledeće integrale:

$$\text{a)}\ \int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx; \qquad \text{b)}\ \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx.$$

Rešenje.

a)

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{27+6x-x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{-12}{\sqrt{27+6x-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}+6\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}}=-\sqrt{27+6x-x^2}+6\arcsin\frac{x-3}{6}+C.$$

b)

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx+2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}}$$

$$=\sqrt{x^2+6x-27}+2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right|+C.$$

1.5 Integracija iracionalnih funkcija oblika 5

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA KOD KOJIH JE MOGUĆE UVOĐENJE TRIGONOMETRIJSKE SMENE

Integracija nekih klasa iracionalnih funkcija uvođenjem trigonometrijske smene.

Ako je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2-b^2x^2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$

tada se uvodi smena

$x = \frac{a}{b}\sin t \quad \text{koja} \quad \text{dovodi} \quad \text{do} \quad a\sqrt{1-\sin^2 t} = a \cdot \cos t.$

Ako je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2+b^2x^2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$

tada se uvodi smena

$x = \frac{a}{b}\mathrm{tg}t \quad \text{koja} \quad \text{dovodi} \quad \text{do} \quad a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}.$

Ako je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$R\left(x^{2n}, \sqrt{b^2x^2-a^2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$

tada se uvodi smena

$x = \frac{a}{b\cos t} \quad \text{koja} \quad \text{dovodi} \quad \text{do} \quad a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1} = a \cdot \mathrm{tg}x.$

Integral oblika

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$

se svođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c na kanonski oblik može prevesti u jedan od integral oblika

$$\int \sqrt{p^2-q^2x^2}dx \ \text{ ili } \int \sqrt{p^2+q^2x^2}dx$$

koji su specijalan slučaj prethodno opisanih integrala (za $n=0,\ p,q \in \mathbb{R}^+$).

Napomena. Iracionalne funkcije oblika 5 se moguintegraliti na još dva načina. Prvi jemetod parcijalne integracije. O ovome videti primer sa predavanja gde je izučavan ovaj metod. Drugi način je primenom Metode Ostrogradskog za iracionalne funkcije o kojoj govorimo kasnije, gde je jedna funkcija oblika 5, integraljena ovom metodom.

PRIMER 1

Uvođenje trigonometrijske smene u integral iracionalne funkcije.

Primer: Izračunati sledeće integrale*:*

a) $\int\sqrt{16-x^2}dx;$ b) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}};$

c) $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx.$

Rešenje.

a) Ako stavimo $x=4\sin t,$ tada je $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$ i $dx=4\cos t\ \ dt,$ pa se dobija

$$\int\sqrt{16-x^2}dx=\int 16\cos^2 t dt=8\int(1+\cos 2t)dt=8t+4\sin 2t+C=8t+8\sin t\cos t+C=8\arcsin\frac{x}{4}+\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}+C.$$

b) Posle smene $x=3\mathrm{tg}t,\quad dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}$ i $\sqrt{x^2+9}=\frac{1}{\cos t},$ dobijamo

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{3\frac{dt}{\cos^2 t}}{27\mathrm{tg}^2 t\frac{1}{\cos t}}=\frac{1}{9}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

Dalje se koristi smena $u=\sin t,\quad du=\cos t dt$ i sledi

$$\frac{1}{9}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{9\sin t}+C=-\frac{1}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\mathrm{tg}t}+C=-\frac{1}{3x\sqrt{x^2+9}}+C.$$

c) Posle smene $x=\frac{2}{\cos t},\quad dx=\frac{2\sin t dt}{\cos^2 t},$ koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\mathrm{tg}t,$ dobijamo

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx=\int\frac{4\mathrm{tg}t\cos^2 t\sin t}{4\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt.$$

Dalje se uvodi smena $u=\sin t,\quad du=\cos t\ \ dt,$ i dobija se

$$\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{u^2}{1-u^2}du=-u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C==-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}\right|+C=-\sqrt{x}$$

VIDEO KLIP

Integracija nekih tipova iracionalnih funkcija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

1.6 Integracija iracionalnih funkcija oblika 6 i 7

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIK 6

Prilikom integracije iracionalne funkcije oblika 6 u jednom koraku se dobija i funkcija oblika 5.

Integral oblika

$$\int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

se izračunava dovođenjem kvadratog trinoma u podintegralnoj funkciji na kanonički oblik i primenom Metode smene promenljiive u neodređenom integralu.

Napomena. Prilikom integracije iracionalne funkcije oblika 6 u jednom koraku se dobija i funkcija oblika 5.

PRIMER 1

Postupak integracije iracionalne funkcije oblika 6.

Izračunati integral

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx.$$

Rešenje. Kako je $x^2-2x+3=(x-1)^2+2,$ tada smenom $x-1=t,$ tj. $x=t+1$ i $dx=dt$ polazni integral postaje

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx=\int (t+2)\sqrt{t^2+2}dt=\int t\sqrt{t^2+2}dt+2\int \sqrt{t^2+2}dt.$$

Inegral $\int t\sqrt{t^2+2}dt$ se rešava smenom $t^2+2=u$, pa je $2t\,dt=du$, tj. $t\,dt=\frac{du}{2}$. Dobijamo da je

$$\int t\sqrt{t^2+2}dt = \int \frac{\sqrt{t}\,dt}{2}\cdots = \frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3} + c_1.$$

Drugi integral predstavlja integraciju iracionalne funkcije oblika 5 i važi da je

$$2\int \sqrt{t^2+2}dt = \ldots = (x-1)\sqrt{x^2-2x+3} + 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + c_2.$$

Tada je

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx = \frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+3}$$
$$+ 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + c, \ \ (c = c_1 + c_2).$$

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIK 7

Integracije iracionalne funkcije oblika 7 se zasniva na Metodi smene. Tom prilikom dobija ili integracija funkcije oblika 5 ili se dobijeni integral uvođenjem još smene svodi na tablični.

Integral oblika

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

se izračunava uvođenjem smene $x = \frac{1}{t}$. Odavde je $dx = -\frac{dt}{t^2}$, pa je

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^n}\sqrt{\frac{1}{t^2} \pm a^2}} = -\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}}.$$

U slučaju da je $n-1$ parno, poslednji integral je oblika 5. U slučaju da je $n-1$ neparno, tada poslednji integral zapisujemo

$$-\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}} = -\int \frac{t \cdot t^{n-2}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}}$$

i rešavamo uvođenjem smene $1 \pm a^2t^2 = u^2$, pri čemu je $2a^2t\,dt = 2u\,du$, tj. $t\,dt = \frac{u\,du}{a^2}$, nakon čega on postaje tablični integral.

PRIMER 2

Postupak integracije iracionalne funkcije oblika 7.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \neq 0).$$

Rešenje. Uvodimo smenu $x = \frac{1}{t}$, odakle je $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Tada polazni integral postaje

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} + c = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

1.7 Integracija iracionalnih funkcija oblika 8

INTEGRACIJA NEKIH KLASA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Metod Ostrogradskog, integraciju posmatrane iracionalne funkcije prevodi u integraciju koja se može rešiti primenom Ojlerovih smena.

Sada će biti reči o integraljenju još nekim klasama funkcija za koje se mogu definisati specijalne metode, ali one ne moraju nužno dovesti do integrala racionalnih funkcija. Svakako, svaka od metoda koja će biti ovde pomenuta će nas dovoditi do integrala za koje smo metodologiju njihovih rešavanja već izneli.

Prva koju navodimo od njih je metod Ostrogradskog koji se koristi za reševanje sledećeg tipa iracionalnih integrala

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Pri čemu je $P_n(x)$ dati polinom n-tog reda, a brojevi a, b i c ($a \neq 0$) su dati realni brojevi. Za rešavanje integrala prethodnog oblika Ostrogradski je dao sledeću formulu

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde polinom $Q_{n-1}(x)$ koji je $(n-1)$. reda, kao i koeficijent λ treba odrediti, tako da prethodno data formula bude tačna. Koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ i koeficijent λ se određuju diferenciranjem prethodne formule.

Prethodno izneto ćemo primeniti u sledećim primerima.

PRIMER – 1. DEO

Primena metode Ostrogradskog i određivanje nepoznatih koeficijenata.

Primer. Izračunati sladeće integrale:

a) $\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx;$

b) $\int \sqrt{x^2+1}dx.$

Rešenja.

a) U ovom slučaju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ dobija se:

$$2\left(x^2+x+2\right) = 2A\left(x^2+x+1\right) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4A &= 2 \\ 3A+B &= 2 \\ 2A+B+2\lambda &= 4 \end{aligned}$$

čije je rešenje $A = 1/2, \quad B = 1/4 \quad \text{i} \quad \lambda = 11/8.$

PRIMER – 2. DEO

Nakon određivanja nepoznatih koeficijenata, ostaje da se reši jedan integral iraconalne funkcije na koji se može primeniti jedna od Ojlerovih smena.

Prema tome je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Poslednji integral se napiše kao

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

što posle smene

$$t = x+\frac{1}{2}, \quad dt = dx,$$

postaje

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left|x+\frac{1}{2}\right|^2+\frac{3}{4}}\right| + C = \ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Na kraju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

PRIMER – 3. DEO

Primena metode Ostrogradskog i Ojlerovih smena.

b) Pre svega je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = A\sqrt{x^2+1}+(Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\quad\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{x^2+1}$ dobija se

$$x^2+1 = A\left(x^2+1\right)+(Ax+B)x+\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ B &= 0 \\ A+\lambda &= 1 \end{aligned}$$

pa je $A = 1/2, \quad B = 0 \quad \text{i} \quad \lambda = 1/2$. Prema tome je

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Poslednji integral je tablični, pa je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

1.8 Integracija iracionalnih funkcija oblika 9

INTEGRACIJA NEKIH KLASA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Binomni diferencijal integraciju posmatrane funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Integrali oblika

$$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$$

mogu se rešiti (tj. mogu se svesti na integral racionalne funkcije) samo u sledeća tri slučaja:

- ako je p ceo broj;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = a + bx^n$, gde je s imenilac razlomka p;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = ax^{-n} + b$, gde je s imenilac razlomka p.

Za svaki od navedenih slučajeva ćemo dati po jedan primer.

Primer. Izračunati sledeće integrale:

a) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2}$;

b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;

c) $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$.

Napomena. Metoda koja je opisana se naziva Binomni diferencijal.

REŠENJA PRIMERA

Svi slučajevi primene Binomnog diferencijala.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je *p*=–2, tj. *p* je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2 = x, \quad 2tdt = dx$:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{t^2dt}{(1+t)^2} = 2\left(t + 1 - 2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C = 2\left(\sqrt{x} + 1 - 2\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + C.$$

b) U ovom slučaju je m=1, n=2/3 i p=–1/2, tj. p je razlomak, ali je broj $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2 = 1 + \sqrt[3]{x^2}$, tj. $x = \sqrt{\left(t^2-1\right)^3}$, ili $x^{1/3} = \sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2tdt = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}dx, \quad dx = 3\sqrt{t^2-1}tdt$, tada dobijamo

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int \frac{\left(t^2-1\right)^2 tdt}{t} = 3\int \left(t^2-1\right)^2 dt = \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C$$

c) U ovom slučaju je m=–6, n=2, p=–1/2, pa je $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5}{2} + \frac{-1}{2}$ ceo broj. Prema tome, može se uvesti smena $t^2 = 1 - x^{-2}, \quad tdt = \frac{dx}{x^3}, \quad x^{-2} = 1 - t^2,$ pa je

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3 x^4\sqrt{1-x^{-2}}} = \int \left(t^2-1\right)^2 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = \ = \frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^5}{5} - 2\frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^3}{3} + \sqrt{1-x^{-2}} + C$$

Poglavlje 2

Integracija trigonometrijskih funkcija

UVOD

Postoje situacije kada se u zavisnosti od pod integralne funkcije, primenjuje neke karakteristične smene ili postupci za rešavanje.

Sada ćemo govoriti o integracija raznih tipova funkcija, za koje postoje specifične smene.

Najpre ćemo izložiti slučajeve kada trigonometrijske funkcije možemo integraliti uvođenjem smene $\sin x = t$ ili $\cos x = t$.

Nakon toga ćemo ukazati na neke iracionalne funkcije koje se uvođenjem određenih trigonometrijskih funkcija mogu integraliti.

2.1 Integracija racionalnih funkcija po sin x i cosx

SMENA $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

Kada se vrši integraljenje racionalne funkcije čiji su argumenti po $\sin x$ ili po $\cos x$ (potpuno svejedno, može i mešovito) preporučuje se uvođenje smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Kada se vrši integraljenje racionalne funkcije čiji su argumenti po $\sin x$ ili po $\cos x$ (potpuno svejedno, može imešovito), u oznaci $R(\sin x, \cos x)$, tada se prilikom integracija ovakvih funkcija preporučuje da se za polazni integral uvede sledeća smena promenljive:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Posle uvođenja ove smene, u polaznom obliku zadatka vrši se zamena veličina dx, $\sin x$ i $\cos x$ prema datim formulama, po promenljivoj t i polazni integral se prevodi na integraciju racionalne funkcije po toj promenljivoj.

Primer. Izračunati sledeće integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{4\sin x-3\, cosx}$.

PRIMER 1

Rešavanje integrala uvođenjem smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

a)

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t-1+t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t(t+1)}=$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|-\ln|1+t|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

b)

$$\int \frac{dx}{2+\sin x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+2t}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2+t+1}=$$
$$=\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)+C=$$
$$=2\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

c)

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2+8t-3} =$$
$$= \int \frac{2dt}{(3t-3)(t+3)} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{3}{3t-1} - \frac{1}{t+3}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{5}(\ln|3t-1| - \ln|t+3|) + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3t-1}{t+3}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3}\right| + C.$$

SMENA $\operatorname{tg} x = t$

U nekim slučajevima je zgodno umesto smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ uvesti smenu $\operatorname{tg} x = t$, zbog dobijanja jednostavniji racionalnih funkcija po t za integraljenje.

Ako uvedemo oznake $u = \sin x$ i $v = \cos x$ tada je potrebno da za podintegralnu funkciju $R(\sin x, \cos x)$ važi $R(-u, -v) = R(u, v)$, kako bi uvođenje ove smene imamo efekta.

U tom slučaju je:

$$\operatorname{tg}x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg}t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Takođe, često se prilikom uvođenja ove smene, iz osnovnog trigonometrijskog identiteta

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

dobijaju sledeće transformacije:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;/\; \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2$$

Odavde se tada dobija

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Posle uvođenja ove smene, u polaznom obliku zadatka vrši se zamena veličina dx, $\sin x$ i $\cos x$ prema datim formulama, po promenljivoj t. Nakon uvođenja ove smene polazni integral se prevodi na integraciju racionalne funkcije po promenljivoj Nakon uvođenja ove smene polazni integral se prevodi na integraciju racionalne funkcije po promenljivoj t.

Prethodno rečeno ilustrujemo jednim primerom.

PRIMER 2 – 1. DEO

Uvođenjem smene $t = \operatorname{tg} x$ se racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$, svodi na racionalnu funkciju po t, koja se dalje rešava, metodom neodređenih koeficijenata.

Izračunati:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{2+\cos^2 x}; \qquad \text{b)} \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx; \qquad \text{c)} \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx.$$

Rešenje. a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+\cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx &= \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{2\sin x \cos x} dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}t + C = \\ &= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C.\end{aligned}$$

PRIMER 2 - 2. DEO

Smenom $t = \operatorname{tg} x$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ se svodi na racionalnu funkciju po promenljivoj t, koja se rešava metodom neodređenih koeficijenata.

c) Koristeći formulu

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx &= \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x} \left| \begin{matrix} 2x = u \\ 2dx = du \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 u} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - \frac{3}{4}\frac{t^2}{1+t^2}} = \\ &= 2\int \frac{dt}{4+t^2} = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C.\end{aligned}$$

SMENA $\sin x = t$ I $\cos x = t$

Uvođenje smena $\sin x = t$ i $\cos x = t$ u funkciju koja racionalna po $\sin x$ i $\cos x$.

Neka je i dalje $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ i neka je $u = \sin x$ i $v = \cos x$.

Smena $\mathbf{t} = \sin \mathbf{x}$.

Ako je $R(u, -v) = -R(u, v)$ tj. ako je data racionalna funkcija neparna po $\cos x$, tada je najbolje uvesti smenu $t = \sin x$.

Smena $\mathbf{t} = \cos \mathbf{x}$.

Ukoliko je $R(-u, v) = -R(u, v)$ tj. ako je data racionalna funkcija neparna po $\sin x$, tada je najbolje uvesti smenu $t = \cos x$.

PRIMER 3 – 1. DEO

Uvođenje smene $\sin x = t$

Primer. Rešiti integrale:

a) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$, b) $\int \frac{dx}{\sin x}$, c) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$.

Rešenje.

a) U ovom slučaju je $R(u, \ -v) = -R(u, \ v)$, pa je smena $\sin x = t$ tj. $\cos x dx = dt$. Da bismo uveli ovu smenu brojilac i imenilac podintegralne funkcije ćemo proširiti sa $\cos x$. Tada je:

$$\int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{t^4 dt}{1 - t^2} = \int \frac{\left(t^4 - 1 + 1\right) dt}{1 - t^2} = \int \frac{\left(t^4 - 1\right) dt}{1 - t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} = \ = -\int \left(t^2 + 1\right) dt - \int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{t^3}{3} - t -$$

Nakon vraćanja smene $\sin x = t$ dobijamo

$$\int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x}{\cos^2 x} dx = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + c.$$

PRIMER 3 – 2. DEO

Slučaj kada je jedan od izložilaca negativan ceo broj

b) U ovom slučaju je $R(-u, \ v) = -R(u, \ v)$, pa je smena $\cos x = t$, tj. $-\sin x \ dx = dt$, tj. $\sin x dx = -dt$. Da bismo uveli ovu smenu brojilac i imenilac podintegralne funkcije ćemo proširiti sa $\sin x$. Tada je:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + c.$$

Nakon vraćanja smene $\cos x = t$ dobijamo

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c.$$

c) U ovom slučaju je $R(-u, \ -v) = -R(u, \ v)$, pa je smena $tgx = \ t$, tj. $x = \operatorname{arctg} \ t$, tj. $dx \ = \ dt \big/ \left(1 + t^2\right)$. Već smo pokazali da je $\sin^2 x = \ t^2 \big/ \left(1 + t^2\right)$ i $\cos^2 x \ = \ 1 \big/ \left(1 + t^2\right)$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\left(1 + t^2\right) dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + t + c.$$

Vraćajući smenu $tg \ x = t$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{tgx} + tgx + c.$$

VIDEO KLIP 1

Kako se dolazi do odgovarajućih formula kada se uvodi smena $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Integracija racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

2.2 Integracija nekih klasa trigonometrijskih funkcija

INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA KOJE SE MOGU REŠAVATI SMENOM $\cos x = t$ I $\sin x = t$.

Dato su pravila kada se neke klase trigonometrijskih funkcija mogu integraliti smenom $\cos x = t$ ili $\sin x = t$.

Na kraju, pomenimo još jedan pristup u rešavanju integrala nekih klasa trigonometrijskih funkcija. Naime, trigonometrijske funkcije koje su polinomske funkcije po $\sin x$ I $\cos x$ mogu se rešavati postupcima koji su izloženi u nastavku. Svakako, kako su polinomske funkcije specijalni slučajevi racionalnih funkcija, integracija pomenutih funkcija se može raditi i prethodno izloženim postupcima kada se uvode smene $t = \sin x$, $t = \cos x$ ili $\operatorname{tg} x = t$.

Integrali oblika

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx, \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

se rešavaju:

Ako je $m = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$ smenom $\cos x = t$;

Ako je $n = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N}$ smenom $\sin x = t$;

Ako je $m = 2k$ i $n = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}$, tada se koriste sledeće transformacije

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Napomenimo da se prilikom rešavanja integrala oblika pod 3) može više puta javiti primena prethodnih formula. Takođe, prilikom rešavanja integrala oblika pod 3) nekad će se javiti i slučajevi 1) i/ili 2).

PRIMER 1

Slučaj kada je bar jedan od izložilaca neparan.

Primer. Rešiti sledeći integral:

$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 xdx;$

Rešenje.

U ovom slučaju, kako je n = 3, treba uvesti $\sin x = t$, tj. $dx = \cos xdx$. Tada imamo:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 xdx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int \sin^4 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos xdx = \int t^4 \cdot \left(1 - t^2\right)dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

PRIMER 2

Slučaj kada su oba izložioca parna.

Primer. Rešiti sledeći integral:

$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx.$

Rešenje. U ovom slučaju je m = 4 i n = 2, pa je:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x}{8}dx = = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2xdx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2xdx -$$

U poslednjem integralu, koji potpada pod slučaj 2), potrebno je uvesti smenu $\sin 2x = u$, tj. $2\cos 2xdx \; = \; du$, tj. $\cos 2x \;\; dx = du \,/\, 2$. Tada imamo

$$\int \left(1 - \sin^2 2x\right) \cdot \cos 2xdx = \int \left(1 - u^2\right)\frac{du}{2} = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + c.$$

Tada je:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx = \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + c = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c.$$

NAPOMENA O INTEGRACIJI U KONAČNOM OBLIKU - ZAVRŠNO RAZMATRANJE

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije.

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije. U tom slučaju se kaže da se integracija elementarnih funkcija ne može izvršiti u konačnom obliku.

Takav je slučaj sa integralima oblika

$$\int x^m(bx^n + a)^p dx,$$

kada nijedan od brojeva p, $\frac{m+1}{n}$ i $p + \frac{m+1}{n}$ nije ceo broj, kao i svi integrali koji se odgovarajućim smenama mogu svesti na ovaj integral. Na primer, $\int \sqrt{\sin x} dx$ se smenom $\sin x = t$, pri čemu je $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, svodi na integral $\int t^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$.

Isto tako integrali oblika

$$\int x^\alpha e^{\pm x}, \int x^\alpha \sin x, \int x^\alpha \cos x, \text{ gde je } \alpha \notin \mathbb{N},$$

ne mogu se izraziti elementarnih funkcijama. Na njih se svode integrali oblika

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sin x^2 dx.$$

Neelementarne funkcije

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dt}{\ln t} = li\, x \text{ (integralni logaritam)}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = si\, x$$

$\int \frac{\cos x}{x} dx = si\, x$ (integralni logaritam) predstavljaju nove transcedentne funkcije koje su predmet posebnog izučavanja u matematici.

Integrali oblika

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})\, dx$$

gde je R racionalna funkcija, a $P_n(x)$ polinom trećeg ili četvrtog stepena nazivaju se eliptički integrali, a izražavaju se tzv. eliptičkim funkcijama koje predstavljaju neelementarne funkcije koje se posebno proučavaju, a imaju velike primene. Primer eliptičkog integrala je integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx \ \ (|k| < 1).$$

Poglavlje 3

Vežba

ZADATAK 1

Integracija iracionalne funkcije oblika 1.

Izračunati

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Rešenje. Važi da je $6 = NZS(2,3)$. Zato treba uvesti smenu $\sqrt[6]{x} = t, x = t^6$, pa je $\sqrt{x} = t^3$ i $\sqrt[3]{x^2} = t^4$. Takođe, imamo da je $dx = 6t^5\,dt$. Tada je

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{6(t^6-1)t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = \int \frac{6(t^6-1)\,dt}{t^4(t+1)},$$

Kako je

$$\begin{aligned} t^6-1 &= (t^2-1)\cdot(t^4+t^2+1) = (t+1)(t-1)(t^4+t^2+1) \\ &= (t+1)(t^5-t^4+t^3-t^2+1), \end{aligned}$$

imamo da je

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{6(t+1)(t^5-t^4+t^3-t^2+1)\,dt}{t^4(t+1)} = 6\int \frac{(t^5-t^4+t^3-t^2+1)\,dt}{t^4} = \\ &= \int 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3}\right) + c = \\ &= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}| + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) + c. \end{aligned}$$

ZADATAK 2

Primena Ojlerovih smena (druga Ojlerova smena) - integracija iracionalnih funckija oblika 3.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Rešenje. Koristeći Ojlerovu smenu $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$ (ili $tx + \sqrt{c}$), jer je $c > 0$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+x-x^2} = tx - 1, & x = \frac{1+2t}{t^2+1} \\ dx = -\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2} & \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2\,\mathrm{arctg}(t+1) + C =$$

$$= -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C.$$

ZADATAK 3

Primena Ojlerovih smena (treća Ojlerova smena) - integracija iracionalnih funckija oblika 3.

Izračunati

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}.$$

Rešenje. Ako su koreni kvadratnog trinoma ax^2+bx+c realni i različiti , onda se može uvesti treća Ojlerova smena $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_1)} = (x-x_1)t$ (ili $(x-x_2)t$ gde su x_1 i x_2 ta rešenja. Kvadratni trinom x^2+2x ima korene $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$, to smenom $\sqrt{x^2+2x} = xt$ dobijamo

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = \left| \sqrt{x^2+2x} = xt, \quad x = \frac{2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = \frac{3}{2t} - \frac{1}{2}t + C = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

ZADATAK 4 - 1. DEO

Integracija iracionalnih funkcija oblika 5 Metodom parcijalne integracije

Izračunati:

$$\text{a)} \int \sqrt{a^2 - x^2}dx; \qquad \text{b)} \int \sqrt{a^2 + x^2}dx; \qquad a > 0.$$

Rešenje. a) Neka je $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Tada važi

$$I = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{a^2 - x^2} = u & dx = dv \\ du = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C_1.$$

Dakle,

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C_1, \quad \text{odnosno} \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C.$$

ZADATAK 4 - 2. DEO

Integracija iracionalnih funkcija oblika 5 Metodom parcijalne integracije.

b) Neka je $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx$. Tada važi

$$I = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{a^2 + x^2} = u & dx = dv \\ du = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} & v = x \end{array} \right| = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 + (a^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C_1.$$

Dakle,

$$2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C_1, \quad \text{odnosno}$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

ZADATAK 5

Integracija iracionalnih funkcija oblika 4.

Rešiti integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+12}}dx$$

Rešenje.

$$2x^2+8x+12=2\left(x^2+4x+6\right)=2\left((x+2)^2+2\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+12}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(x+2)^2+2}}dx=\begin{pmatrix} \text{smena}: \\ x+2=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+(\sqrt{2})^2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+|\sqrt{2}|^2}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{|x+2|^2+|\sqrt{2}|^2}\right|+C=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+C$$

ZADATAK 6

Integracija iracionalnih funkcija oblika 5.

Rešiti integral:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx.$$

Rešenje.

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

$$I=\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx=\int \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx=\begin{pmatrix} \text{smena}: \\ x+2=t,\ x=t-2 \\ dx=dt \end{pmatrix}=$$

$$\int \frac{t-2+3}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=I_1+I_2$$

$$I_1=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\begin{pmatrix} \text{smena}: \\ t^2+1=u \\ tdt=\frac{du}{2} \end{pmatrix}=\int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C_1=$$

$$\sqrt{u}+C_1=\sqrt{t^2+1}+C_1=\sqrt{x^2+4x+5}+C_1$$

$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C_2 = \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C_2$

$I = I_1 + I_2 = \sqrt{x^2+4x+5} + \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$

ZADATAK 7

Metod Ostrogradskog za integraciju iracionalnih funkcija oblika 8.

Izračunati

$$\int \sqrt{x^2+1}dx.$$

Rešenje. Pokazali smo već da ovakav tip integrala možemo rešavati metodom parcijalne integracije. Sada ćemo pokazati kako se ovaj tip integrala može rešiti i primenom Metode Ostrogradskog za integraciju iracionalne funkcije.
Integral $\int \sqrt{x^2+1}dx$ možemo zapisati u obliku

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

pa je

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = A\sqrt{x^2+1} + (Ax+B)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$x^2+1 = 2Ax^2 + Bx + A + \lambda.$$

Tada važi da je

$$x^2 : 1 = 2A,$$
$$x^1 : 0 = B,$$
$$x^0 : 1 = A + \lambda.$$

Odavde je $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ i

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

ZADATAK 8

Binomni diferencijal za integraciju racionalnih funkcija oblika 9.

Izračunati:

$$\text{a)} \int \sqrt{x^3}(1-\sqrt{x})^2 dx; \qquad \text{b)} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} dx.$$

Rešenje. a) Posmatrani integral može se predstaviti u obliku integrala binomnog diferencijala $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, za $m=\frac{3}{2}, n=\frac{1}{2}$ i $p=2$. Kako je p pozitivan ceo broj, prema binomnom obrascu dobijamo

$$\int \sqrt{x^3}(1-\sqrt{x})^2 dx = \int x^{\frac{3}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})^2 dx = \int x^{\frac{3}{2}}(1-2x^{\frac{1}{2}}+x)dx =$$

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C.$$

b) Kako je $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-2}$, to je $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$ i $p=-2$. U ovom slučaju je p negativan ceo broj, pa uvodimo smenu $x=t^s$, gde je s najmanji zajednički sadržalac za imenioce razlomaka m i n. Dakle, $t=x^{\frac{1}{2}}$, $2tdt=dx$, pa važi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} dx = 2\int \frac{t^2 dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + C.$$

ZADATAK 9

Uvođenje smene $\mathrm{tg}(x/2)=t$ u integral trigonometrijske funkcije.

Rešiti sledeće integrale:

1) $\int \frac{dx}{\cos x}$

2) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

Rešenje.

1) $$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+B(1-t)}{(1-t)(1+t)} =$$

$$\frac{A+B+(A-B)t}{(1-t)(1+t)}$$

$$A+B=2$$

$$A-B=0$$

$$A=B=1$$

$$I = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C$$

2)

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \quad \mathrm{arctg}(t+1) + C = \mathrm{arctg}\left(tg\frac{x}{2}+1\right) + C$$

ZADATAK 10

Trigonometrijske transformacije koje se mogu koristiti prilikom integracije jednostavnijih trigonometrijskih funkcija.

Kod integrala oblika $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ i $\int \cos mx \cos nx$ pogodno je koristiti transformacije kojima se proizvod dveju trigonometrijskih funkcija transformiše u zbir

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n) + \cos(m+n)].$$

Izračunajmo sledeće integrale primenom dati transformacija:

(a) $\displaystyle\int \sin 5x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

(b) $\displaystyle\int \cos x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 3x) dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x + C.$

(c) $\displaystyle\int \sin 2x \sin x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x) dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{6}\sin 3x + C.$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Zadaci koje studenti treba dodatno da provežbaju.

Rešiti integrale

$\int \frac{x}{x^3-1}dx$ rešenje: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

$\int \frac{x^4}{x^2+3}dx$ rešenje: $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ rešenje: $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ rešenje: $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$

$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ rešenje: $\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg} z+C,\qquad z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

$\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$, rašenje:

$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\left((z-1)^3+(z-1)^{-3}\right)+\left((z-1)^2+(z-1)^{-2}\right)+\left((z-1)+(z-1)^{-1}\right)\right)+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,\ z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$ rešenje: $\frac{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}}{3}+C$

Zaključak za lekciju 03

NEODREĐENA INTEGRACIJA – TREĆI DEO

Integracija racionalnih funkcija, integracija nekih tipova iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.

U ovoj lekciji su uvedene specifične metode za integraciju iracionalnih i trigonometrijskih funkcija. Navedeni su najčešći tipovi ovih funkcija koji se sreću u primenama.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.