UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine prvog reda

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 07

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

- Diferencijalne jednačine prvog reda
- Poglavlje 1: Obične diferencijalne jednačine prvog reda
- Poglavlje 2: Jednačina koja razdvaja promenljive
- Poglavlje 3: Homogena jednačina po x i y
- Poglavlje 4: Linearna jednačina
- Poglavlje 5: Bernulijeva jednačina
- Poglavlje 6: Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal
- Poglavlje 7: Rikatijeva jednačina
- Poglavlje 8: Lagranževa i Kleroova jednačina
- Poglavlje 9: Vežba
- Zaključak za lekciju 07

UVOD

Diferencijalne jednačine prvog reda.

U ovoj lekciji ćemo se upoznati sa pojmom obične diferencijalne jednačine prvog reda, s različitim tipovima diferencijalnih jednačina prvog reda, kao i s postupcima za njihovo rešavanje.

Diferencijalne jednačine su od fundamentalnog značaja u nauci i tehnici je se čitav niz pojava, zakonitosti i problema izražavaju diferencijalnim jednačinama. One posebno mesto zauzimaju u fizici, hemiji, biologiji, mehanici i drugim naukama.

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama.

Neka je dat interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ i neka je na tom intervalu definisana funkcija $y = y(x)$ koja će biti nepoznata u posmatranim jednačinama. Neka je funkcija $y(x)$ diferencijabilna i neka je na intervalu $[a, b]$ funkcija $y'(x)$ neprekidna funkcija.

Obična diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina koja uključuje nepoznatu funkciju jedne promenljive (koju treba odrediti), kao i njen prvi izvod. Ovom jednačinom se opisuje veza između takve funkcije i njenog prvog izvoda. Ona može biti zadata u implicitnom ili eksplicitnom obliku.

Opšti implicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$F(x, y, y') = 0,$$

gde je F realna funkcija od tri nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.
Opšti eksplicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$y' = f(x, y),$$

gde je f realna funkcija od dve nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.

Napomena. Za funkciju F domen je dopustiv ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x, y, odnosno y' dok je za funkciju f domen dopustiv ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x i y.

Generalno govoreći, diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama i određivanjem njihovih rešenja (ako postoje) definišemo funkcijske odnose između veličina u procesu koji modeliramo.

Napomena. Diferencijalne jednačine prvog reda se mogu, pored implicitnog i eksplicitnog oblika, zadati u obliku preko diferencijala tj. u obliku

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

S ovog oblika se može preći na eksplicitni ili implicitni oblik diferencijalne jednačine, kao i obrnuto.

OPŠTE, PARTIKULARNO I SINGULARNO REŠENJE

Opšta i partikularna rešenja se dobijaju nekom od metoda za integraljenje. Svako drugo rešenje se naziva singularno rešenje, tj. ono se ne može dobiti iz opšteg.

Opšte rešenje ili opšti integral jednačine

$$F(x,y,y') = 0,$$

odnosno, jednačine $y' = f(x,y)$, (ako postoji) je svaka funkcija oblika $\varphi(x,y,C) = 0$, gde su $x \in [a,b]$ i $C \in \mathbb{R}$ koja ih zadovoljava. Funkcija $\varphi(x,y,C) = 0$, gde su $x \in [a,b]$ i $C \in \mathbb{R}$ u ravni $\mathbb{R}^2$ predstavlja familiju krivih koje zavise od jednog parametra C. One se nazivaju integralne krive za date diferencijalne jednačine. Kroz proizvoljnu tačku $M(x_0,y_0)$ ravni može prolaziti jedna ili više integralnih krivih ako je zadovoljen uslov $\varphi(x_0,y_0,C) = 0$, odakle se može odrediti realna vrednost za C. Svakoj realnoj vrednost dobijenoj za C iz poslednjeg uslova odgovaraće po jedna integralna kriva, ako tu vrednost za C zamenimo u opštem rešenju diferencijalne jednačine. Takva kriva predstavlja partikularno rešenje za posmatrane diferencijalne jednačine. Zadavanje tačke $M(x_0,y_0)$, tj. postavljanje uslova da za $x = x_0$, je $y_0 = y(x_0)$ se naziva početni uslov ili početni vrednost .

Opšta i partikularna rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda, ako postoje, se dobijaju nekom od metoda za integraciju. Za takvu diferencijalnu jednačinu se kaže da je rešiva pomoću kvadratura. Svako drugo rešenje diferencijalne jednačine se naziva singularno rešenje. Dakle, to je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante $C \in \mathbb{R}$.

Napomena. Za svaku jednačinu oblika $F(x,y,y') = 0$, odnosno $y' = f(x,y)$, pod uslovom neprekidnosti i pod još jednim uslovom koji treba da važi za funkciju F, odnosno f – uslovom fiksne tačke, može se preko Koši – Pikarove teoreme (o kojoj ovde neće biti reči) dokazati postojanje i jedinstvenost jednog njenog partikularnog rešenja, ako je dat početni uslov da je za $x = x_0$, $y_0 = y(x_0)$. Ovaj uslov se naziva Košijev uslov , a problem određivanja pomenutog partikularnog rešenja naziva se Košijev problem ili Košijev zadatak .

Uopšteno govoreći, svaka diferencijalna jednačina prvog reda može biti ili rešiva (ima barem jedno rešenje) ili nerešiva (skup rešenja je prazan). Rešavanje ove jednačine podrazumeva poznavanje postupka koji nam za rezultat daje sva njena rešenja (ako ih ima).

Rešive jednačine mogu biti takve da je poznat postupak za njihovo rešavanje ili da se takav postupak ne zna. One jednačine koje su rešive, a za koje je nepoznat postupak za njihovo rešavanje se dele na: jednačine za koje se može dokazati da postoji postupak za njihovo rešavanje, ali da još uvek nema teorijskih dostignuća da bi se taj postupak odredio i na jednačine koje su rešive i za koje se dokazuje da ne postoji konstruktivni postupak za njihovo rešavanje bez dodatnih uslova (takva je npr. Rikatijeva jednačina).

Napomena. Osim pomenutih rešenja za diferencijalne jednačine postoje još približna i granična (asimptotska) rešenja, ali se njima ovde nećemo baviti.

TIPOVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

U ovoj lekciji će biti obrađene diferencijalne jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja).

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko tipova rešivih diferencijalnih jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja). Od takvih diferencijalnih jednačina prvog reda ćemo obraditi:

- Jednačinu koja razdvaja promenljive,
- Homogenu jednačinu,
- Jednačinu koja se može svesti na homogenu jednačinu,
- Linearnu jednačinu,
- Bernulijevu jednačinu,
- Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal neke funkcije,
- Rikatijevu jednačinu.
- Lagranžovu jednačinu,
- Kleroovu jednačinu.

Poglavlje 2

Jednačina koja razdvaja promenljive

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Postupak za rešavanje jednačine ovog tipa se zasniva na razdvajanju promenljivih na različite strane znaka jednakosti, a nakon toga se izvršava integracija cele jednakosti.

Pretpostavimo da je na intervalu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ nepoznata funkcija $y = f(x), x \in [a,b]$ neprekidna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom $y'(x)$. Sada ćemo razmotriti rešavanje diferencijalnih jednačina prvog reda koje imaju oblik (ili se mogu na njega svesti)

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

odnosno,

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na $x \in [a,b]$ i $g(y)$ neprekidna funkcija na $y \in [c,d] \subseteq \mathbb{R}$, gde je $g(y) \neq 0$, za svako $y \in [c,d]$.

Ovakva jednačina naziva se diferencijalna jednačina kod kojih se promenljive mogu razdvojiti i ona je rešiva po nepoznatoj funkciji $y(x)$, tj. njena rešenja se mogu dobiti integracionim metodama. Ona se rešava na sledeći način

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Leftrightarrow G(y) + C_1 = F(x) + C_2, (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow G(y) = F(x) + C,$$

gde je $C = (C_2 - C_1) \in \mathbb{R}$, a funkcije G i F su primitivne funkcije za funkcije $\frac{1}{g(y)}$ i $f(x)$, tim redom.

Funkcija $G(y) = F(x) + C$ predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive u implicitnom obliku i njena partikularna rešenja se mogu dobiti zadavanjem pojedinačnih vrednosti za $C \in \mathbb{R}$. Ako je moguće, funkciju $G(y) = F(x) + C$ koja predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive potrebno je prevesti u eksplicitan oblik.

Napomena. U slučaju da je funkcija $g(y) \neq 0$, ali da za neko y_0 važi da je $g(y_0) = 0$, tada je $y = y_0$ rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja, tj. ono je singularno rešenje. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'^2+y^2-1=0$. Da li ova diferencijalna jednačina ima singularna rešenja?

Diferencijalnu jednačinu $y'^2+y^2-1=0$ možemo zapisati u obliku $y'=\pm\sqrt{1-y^2}$, odakle dobijamo $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$, za $y\in(-1,1)$. Dalje, integracijom dobijamo $\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\int dx$, odnosno $\arcsin y=C\pm x$. Dakle, opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je $y=\sin\left(C\pm x\right)$.

Može se proveriti da $y_1=1$ i $y_2=-1$ jesu rešenja diferencijalne jednačine $y'^2+y^2-1=0$ koja se ne mogu dobiti iz opšteg rešenja (niti za jednu vrednost konstante C,) pa $y_1=1$ i $y_2=-1$ predstavljaju singularna rešenja ove diferencijalne jednačine.

PRIMER

Rešavanje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^3-(y+1)^3y'=0.$$

Rešenje. Ako iskoristimo da je $y'=\frac{dy}{dx}$, data jednačina se može napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} x^3-(y+1)^3\frac{dy}{dx}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3dx-(y+1)^3dy=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^3dx=(y+1)^3dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \int x^3dx=\int(y+1)^3dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^4}{4}+c=\frac{(y+1)^4}{4}. \end{aligned}$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa 4 i uvođenjem da je $c_1=4c$, imamo da je $(y+1)^4=x^4+c_1$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y=-1\pm\sqrt[4]{x^4+c_1}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: primena diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Njutnov zakon hlađenja.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Homogena jednačina po x i y

POSTUPAK REŠAVANJA

Prilikom rešavanja ovog tipa diferencijalne jednačine potrebno je, najpre, proveriti da li je ona homogena, a nakon toga uvesti novu nepoznatu funkciju.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ili svaka diferencijalna jednačina koja se može svesti na ovaj oblik, naziva se homogena diferencijalna jednačina po x i y. Za neku jednačinu kažemo da je homogena po x i y ako se $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ne menja zamenom x sa kx i y sa ky, gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, tada važi

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Primer. Jednačina oblika $xyy' = x^2 + y^2$ jeste homogena jednačina po x i y, jer se može predstaviti u obliku

$$x^2 + y^2 = xyy' / : xy \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Takođe, važi da je

$$y' = \frac{1}{\frac{ky}{kx}} + \frac{ky}{kx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ovu jednačina je moguće rešavati pomoću kvadratura. U tu svrhu treba uvesti smenu $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Odavde dobijamo da je $y = x \cdot z$, tj. $y' = z + xz'$.

Početna jednačina, sada, postaje

$$z + xz' = f(z), \quad \text{tj.} \quad z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Ona predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo da je

$$x = c \cdot e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}},$$

što predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive, po funkciji z. Opšte rešenje polazne jednačine se dobija vraćanjem uvedene smene i tada je

$$x = c \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Napomena. U prethodnom postupku, za dobijenu diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive po z može se desiti da za određenu vrednost $z = z_0$ važi da je $f(z_0) - z_0 = 0$. Tada je $z = z_0$ jedno njeno rešenje. Stoga, za polaznu homogenu jednačinu, s obzirom na smenu, imamo da je $y = z_0 \cdot x$, jedno njeno rešenje.

PRIMER - 1. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – provera i uvođenje smene.

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Rešenje. Nakon deobe prethodne jednačine sa dx, ova diferencijalna jednačina se može napisati u obliku

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prethodna jednačina nakon deobe sa x, postaje

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dalje, ako uvedemo smene $x = k \cdot x, y = k \cdot y, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo da je

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = \frac{ky}{kx} + \sqrt{1 + \left(\frac{ky}{kx}\right)^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

Ovo znači da je jednačina

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (*)$$

homogena po x i y.

Homogenu jednačinu po x i y rešavamo uvođenjem smene $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz smene je $y = x \cdot z$ imamo da je $y' = z + x \cdot z'$. Zamenom dobijenog u jednačini (*) dobijamo da je

$$z + xz' = z + \sqrt{1 + z^2}.$$

Odavde imamo da je

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}.$$

Dobijena jednačina predstavlja onu koja razdvaja promenljive. Razdvajanjem promenljivih ona postaje

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

PRIMER - 2. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – rešavanje dobijene diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Dobijenu jednačinu rešavamo integraljenjem

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}.$$

Imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + \ln|c|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|cx|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Opšte rešenje po z glasi

$$z+\sqrt{1+z^2} = cx, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, izrazimo funkciju $z = z(x)$, kako bismo odredili opšte rešenje polazne jednačine po y.

Tada imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z^2} = cx - z \quad &\Rightarrow \quad 1+z^2 = c^2x^2 - 2cxz + z^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{c^2x^2-1}{cx}, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Kako je $y = x \cdot z$, tada je

$$y = \frac{c^2x^2-1}{c}, \;\; c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Napomena. U prethodnom primeru smo uzeli da je konstanta u obliku $\ln|c|$. Ovo je dozvoljeno raditi i često se koristi u zadacima kako bi se omogućilo zapisivanje opšteg rešenja u što jednostavnijem obliku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: homogena jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

3.1 Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

POSTUPAK REŠAVANJA - PRVI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina rešava na izložen način.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$se može svesti na homogenu jednačinu uvođenjem određenih smena. Moguća su dva slučaja.

U prvom slučaju, ako je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tada se uvodi sledeća smena

$$x = X + \alpha,$$

$$y = Y + \beta.$$

de je X nova nepoznata, $Y = Y(X)$ nova nepoznata funkcija, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstante koje treba odrediti, kako bi se polazna jednačina svela na homogenu. Uvodeći smenu u polaznu jednačinu dobijamo

$$Y' = f\left(\frac{a_1 X + a_1\alpha + b_1 Y + b_1\beta + c_1}{a_2 X + a_2\alpha + b_2 Y + b_2\beta + c_2}\right)$$

a koeficijente α i β određujemo iz sledećih zahteva

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Ovako određene konstante α i β dovode do jednačine

$$Y' = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right),$$

odnosno,

$$Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}}\right),$$

tj.

$$Y' = g\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Poslednja jednačina predstavlja homogenu jednačinu po X i Y, koja se rešava po već izloženom metodu. Na kraju je potrebno vratiti sve uvedene smene.

POSTUPAK REŠAVANJA – DRUGI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina rešava na izložen način.

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je u diferencijalnoj jednačini oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,važi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo znači da je su a_1 i a_2, kao i b_1 i b_2 proporcionalne veličine, tj.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{R},$$

pa je tada $a_1 = \alpha \cdot a_2, b_1 = \alpha \cdot b_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. U ovoj situaciji se uvodi nova nepoznata funkcija $u = u(x)$ koja je oblika

$$u = a_1 x + b_1 y \quad \Rightarrow \quad u' = a_1 + b_1 y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - a_1}{b_1}.$$

Uvođenjem ove smene u polaznu jednačinu, ona postaje jednačina

$$u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_1}\right)$$

i predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Poglavlje 4

Linearna jednačina

POSTUPAK REŠAVANJA – HOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Linearna jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x),$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$, naziva se linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda. Data jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Ako je $b(x) = 0$, za svako $x \in [a, b]$, tada se prethodna jednačina naziva homogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda, a ako je $b(x) \neq 0$, za barem jedno $x \in [a, b]$, tada ovu jednačinu nazivamo nehomogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda.

Kada je data jednačina u homogenoj varijanti, onda se kroz određeni integracioni postupak može doći do formule za njeno opšte rešenje. Naime, tada imamo

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + c_0, c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$y(x) = e^{c_0} e^{-\int a(x)dx}, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Poslednji rezultat može se napisati u obliku

$$y(x) = ce^{-\int a(x)dx}, c = e_0^c, c_0 \in \mathbb{R}.$$

POSTUPAK REŠAVANJA – NEHOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Jedan od metoda za nalaženje rešenja ove jednačine jeste Lagranžev metod varijacije konstanti o kome će biti više reči na sledećem predavanju.

Međutim, ako je jednačina nehomogenog karaktera, tj. oblika

$$y' + a(x)y = b(x)$$

onda je postupak za njeno rešavanje takav da koristeći opšte rešenje homogene jednačine i metod varijacije konstanti (o kome će biti više reči u sledećoj lekciji) ili kako se još naziva Lagranžev metod dolazimo do opšteg rešenja nehomogene jednačine. Ovaj metod se zasniva na tome da se u opštem rešenju homogene jednačine, konstanta c proglasi funkcijom $c(x)$, koju treba tek odrediti. Tada je opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda oblika

$$y(x) = c(x)e^{-\int a(x)dx}, c \in \mathbb{R}.$$

gde funkciju $c(x)$ određujemo iz uslova $c'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$.

Tada je

$$c'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

odnosno nakon integraljenja poslednjeg izraza dobijamo

$$c(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

OPŠTE REŠENJE LINEARNE JEDNAČINE

Postoje i drugi postupci, osim pomenutog Lagranževog metoda, za određivanje opšteg rešenja linearne diferencijalne jednačine, ali o njima ovde neće biti reči.

Prethodna razmatranje indukuje sledeću formulu koja predstavlja opšte rešenje jednačine linearne jednačine, bilo da je ona homogenog ili nehomogenog karaktera, i to dato u eksplicitnom obliku

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right),$$

gde je $c \in \mathbb{R}$, a konstante iz integracija u eksponentima se ignorišu.

Napomena. Dato opšte rešenje se prilikom rešavanja zadataka može koristiti bez izvođenja prethodne formule. Dakle, na ispitu će biti dozvoljeno da se koristi ova formula.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije linearna jednačina, u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste linearna jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada posmatranu jednačinu treba tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje linearne diferencijalne jednačine prvog reda.

Rešiti jednačinu

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x.$$

Rešenje. Data jednačina je linearna, pri čemu je $a(x) = -\operatorname{tg} x$, $b(x) = \cos x$. Tada je

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int -\operatorname{tg} x dx} = e^{\int \operatorname{tg} x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = e^{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|} = \frac{1}{\cos x}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Opšte rešenje je oblika

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c\right).$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: linearna diferencijalna jednačina

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Bernulijeva jednačina

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Bernulijeva jednačina je jako slična linearnoj. Njeno rešavanje se nakon uvođenja smene svodi na rešavanje linearne jednačine.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Napomena. U slučaju da je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, prethodna jednačina se svodi na linearnu jednačinu.

Ova jednačina je rešiva i poseduje konstruktivni postupak za rešavanje, a njeno ukupno rešenje je sačinjeno od opštih rešenja -- singularnih nema.

Postupak za rešavanje Bernulijeve jednačine se ogleda u tome što se u nju, najpre, uvede smena

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

gde je $y = y(x), x \in [a, b]$, a $z = z(x), x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcija. Nakon uvođenja ove smene, Bernulijeva jednačina postaje obična linearna diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$ neprekidnoj na intervalu $[a, b]$.

Na kraju je potrebno dobijenu linearnu jednačinu rešiti po nepoznatoj funkciji z i vraćajući pomenutu smenu dobijamo opšte rešenje Bernulijeve jednačine.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije Bernulijeva jednačina u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste Bernulijeva jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada posmatranu jednačinu treba tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje Bernulijeve jednačine i uveđenjem smene i njenim svođenjem na linearnu jednačinu.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y - (2x^2+8)\sqrt{y} = 0.$$

Rešenje. Datu jednačinu zapisaćemo u obliku

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y = (2x^2+8)\sqrt{y}$$

iz kojeg je jasno da se radi o Bernulijevoj diferencijalnoj jednačini. Deljenjem sa $\sqrt{y}$, dobićemo

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4x}{x^2+1}\sqrt{y} = 2x^2+8.$$

Dalje, uvodimo smenu $\sqrt{y} = z$, pri čemu je $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = z'$, tj. $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$, pa se data jednačina transformiše u oblik

$$2z' - \frac{4x}{x^2+1}z = 2x^2+8,$$

tj. nakon deljenja sa 2 prethodne jednačine dobijamo

$$z' - \frac{2x}{x^2+1}z = x^2+4.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina čije je rešenje određeno sa

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx}dx\right) \\ &= e^{\ln(x^2+1)}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\ln(x^2+1)}dx\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + \int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + \int \left(1 + \frac{3}{x^2+1}dx\right)\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right). \end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je rešenje početne jednačine

$$\sqrt{y} = (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right),$$

odnosno

$$y = (x^2+1)^2(C + x + 3\operatorname{arctg} x)^2.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Bernulijeva jednačina - primer 1

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Bernulijeva jednačina - primer 2

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal

POJAM

Može se desiti da diferencijalna jednačina prvog reda nekog drugog tipa bude i jednačina sa totalnim diferencijalom.

Svaki jednačina oblika

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{$*$}$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima u $\mathbb{R}^2$ za $x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}, y \in [c,d] \subseteq \mathbb{R},$ naziva se obična diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom ako postoji funkcija $U(x,y)$ sa dopustivim domenom takva da je

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ i } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

U tom slučaju polazna jednačina se može zapisati

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = du = 0. \tag{$**$}$$

U ovom slučaju primećujemo da je jednačina oblika $(*)$ ekvivalentna jednačini oblika $(**)$, a iz jednačine $(**)$ imamo da je

$$U(x,y) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Sama funkcija $U(x,y)$ naziva se potencijal jednačine (*) , a formulom $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, zadato je opšte rešenje jednačine $(*)$ u implicitnom obliku što ćemo pokazati kasnije.
Ova jednačina nema singularnih rešenja. Ako je potrebno i ako je moguće iz rešenja oblika $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R},$ može se izvesti i eksplicitan oblik tog rešenja.

Da bi za jednačinu $(*)$ tražili pomenuti potencijal, potrebno je prvo ustanoviti kriterijum da li on uopšte i postoji. Tome govori sledeći stav.

Stav. Za jednačinu (*) postoji potencijal $U(x,y)$ ako i samo ako su $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima za $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ i ako je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

na preseku pomenutih domena.

ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Prilikom određivanje opšteg rešenja potrebno je primeniti tzv. parcijalno integraljenje, tj. integraljenje funkcije dve promenljive, po jednoj od promenljivih.

U sledećem razmatranju izložimo ukratko postupak nalaženja funkcije $U(x,y)$ za jednačinu $(*)$, uz pretpostavku da je ispunjen uslov $P'_x(x,y)=Q'_y(x,y)$. Najpre, iz jednakosti $U'_x(x,y)=P(x,y)$ imamo da je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+C(y),$$

gde je $p(x,y)$ primitivna funkcija (po promenljivoj x) za funkciju $P(x,y)$ i važi da je

$$U'_x(x,y)=p'_x(x,y)+\underbrace{(C(y))'_x}_{=0}=P(x,y).$$

Dalje, iz $U'_y(x,y)=Q(x,y)$, imamo da je

$$U'_y(x,y)=p'_y(x,y)+\underbrace{(C(y))'_y}_{=0}=Q(x,y).$$

pa je

$$Q(x,y)=p'_y(x,y)+C'_y(y),$$

Na kraju, rešavamo poslednju jednačinu po $C(y)$, gde pretpostavlja se da je ona trivijalnog karaktera i da ima samo opšte rešenje dato sa $C(y)=\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R})$.

Tada je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R}),$$

potencijal jednačine $(*)$ i njeno opšte rešenje je dato sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1=C_2,(C_1,C_2\in\mathbb{R}),$$

odnosno sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)=C,\,C=(C_1-C_2)\in\mathbb{R}.$$

Napomena. Svakako, jednačina data sa $(*)$ ne mora biti jednačina sa totalnim diferencijalom, tj. ne mora da bude ispunjen uslov

$$P'_x(x,y) = Q'_y(x,y).$$

Međutim, može se desiti da nakon množenja jednačine (*), nekom funkcijom (koja je funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y) ona postane jednačina sa totalnim diferencijalom. Ova funkcija se naziva integracioni faktor jednačine $(*)$. U teoriji postoje postupci za određivanje ovakvih funkcija, ako one postoje, i sami postupci su uslovljeni time da li je integracioni faktor funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y. O ovome neće biti reči u okviru ove lekcije.

PRIMER

Jednačina sa totalnim diferencijalom.

Rešiti jednačinu:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Rešenje. Imamo da je: $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ i $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Kako je

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 12xy,$$

ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu sa totalnim diferencijalom. Tada postoji $U(x,y)$ takvo da je

$$U'_x(x,y) = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,\ U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Iz prve jednačine, integracijom po promenljivoj x (promenljivu y posmatramo kao konstantu u ovoj integraciji) imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y),$$

gde je $f(y)$ nepoznata funkcija po promenljivoj y koju treba odrediti. Ako uradimo izvod po promenljivoj y od prethodne funkcije dobijamo

$$U'_y(x,y) = 6x^2y + f'(y).$$

Kako smo već ustanovili da mora biti $U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$, iz ove i prethodne jednačine, njihovim izjednačavanjem dobijamo da je:

$$f'(y) = 4y^3 \Rightarrow f(x) = y^4 + c.$$

Dakle, imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c.$$

S druge strane je $du(x,y) = 0$, pa je $u(x,y) = c_1$, $(c_1 \in \mathbb{R})$. Ukupno imamo da je: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c = c_1$,tj.

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\ (c_2 = c_1 - c).$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: totalni diferencijal - primer

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Rikatijeva jednačina

POJAM

Ova jednačina nije rešiva uz pomoć kvadratura u opštem slučaju, ali uz dodatni uslov može se dobiti konstruktivni postupak za takvo rešavanje.

Svaka jednačina oblika

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x),$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $p(x), q(x)$ i $r(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$, naziva se Rikatijeva diferencijalna jednačina.

NapomenaOva jednačina je rešiva i može se dokazati da ne postoji konstruktivan postupak za njeno rešavanje u opštem slučaju, tj. da nije rešiva pomoću kvadratura. Međutim, uz dodatne uslove moguće je napraviti algoritam za njeno rešavanje. Ona ima opšte rešenje, dok singularnih rešenja nema.

Da bi se Rikatijeva jednačina rešavala integracijom može se uvesti dodatni uslov da je poznato jedno njeno partikularno rešenje $y_0 = y_0(x)$, za $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$. Tada se u Rikatijevu jednačinu može uvesti smena

$$y = y(x) = y_0 + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$, $x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcije $(z(x) \neq 0,\ x \in [a, b])$, koja u tom slučaju postaje diferencijalna jednačina prvog reda koja je ili linearna ili koja razdvaja promenljive (po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$, $x \in [a, b]$).

Nakon rešavanja poslednje jednačine po $z = z(x)$ i vraćanja smene, dobijamo opšte rešenje za Rikatijevu jednačinu pod navedenim uslovom.

PRIMER

Rešavanje Rikatijeve diferencijalne jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x,$$

ako se zna da je funkcija $y_0 = e^x$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rešenje. Sada u Rikatijevu jednačinu možemo uvesti smenu

$$y = y(x) = e^x + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Takođe, da bi uveli smenu u početnu jednačinu treba odrediti

$$y' = e^x - \frac{1}{z^2}z'.$$

Tada imamo, zamenom svih ovih veličina u početnoj jednačini dobijamo

$$e^x - \frac{1}{z^2}z' - \left(e^x + \frac{1}{z}\right)^2 + 2e^x\left(e^x + \frac{1}{z}\right) = e^{2x} + e^x \Rightarrow \frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' + 1 = 0.$$

Dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive čijim rešavanjem dobijamo da je

$$z(x) = -x + c, \ (c \in \mathbb{R})$$

pa imamo da je

$$y(x) = e^x + \frac{1}{-x + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Rikatijeva jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

Lagranževa i Kleroova jednačina

LAGRANŽEVA JEDNAČINA

Za Lagranževu jednačinu postoji njeno opšte rešenje, kao i postupak za njegovo određivanje.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot f(y') + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i gde su f i g neprekidne funkcije na dopustivom domenu, naziva se Lagranževa diferencijalna jednačina.

Ova jednačina ima samo opšte rešenje i postoji postupak za njeno određivanje. Naime, uvedimo (parametar)

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \; i \; dy = pdx.$$

Sada je

$$y = x \cdot f(p) + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot f(p) + g(p)],$$

tj.

$$pdx = f(p)dx + x \cdot f'(p)dp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$(f(p) - p)dx + (x \cdot f'(p) + g'(p))dp = 0.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp \neq 0)$ dobijamo

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + x \cdot f'(p) + g'(p) = 0.$$

Na kraju, poslednju jednačinu delimo sa $f(p) - p$, $(f(p) - p \neq 0)$ i dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(p)}{f(p)-p}\cdot x=-\frac{g'(p)}{f(p)-p'}$$

koja predstavlja linearnu jednačinu po $x=x(p)$.

Njenim rešavanjem po već izloženom postupku dobijamo funkciju $x=x(p)$, čime traženu funkciju $y=y(x)$ dobijamo u parametarskom obliku

$$y=x\cdot f(p)+g(p),\ x=x(p).$$

Napomena. Rešenje Lagranževe jednačine se obično zadržava u ovakvom parametarskom obliku. Međutim,ako je moguće iz ovog oblika eliminisati parametar p, tako da opšte rešenje bude u eksplicitnom obliku $y=y(x)$, to treba i učiniti.

PRIMER 1

Određivanje opšteg rešenja Lagranževe jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y=\frac{3}{2}xy'+e^{y'}.$$

Rešenje. Uvođenjem parametra $p=y'$, pri čemu je $f(p)=\frac{3}{2}p$ i $g(p)=e^p$, polazna jednačina postaje:

$$y=\frac{3}{2}xp+e^p.$$

Ako potražimo prvi diferencijal prethodne jednačine, dobijamo

$$dy=d\left[\frac{3}{2}x\cdot p+e^p\right],$$

a koristeći da je $dy=pdx$, imamo

$$pdx=\frac{3}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp+e^pdp,$$

tj.

$$\frac{1}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp=-e^pdp.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp\neq 0)$ dobijamo

$$\frac{1}{2}p\frac{dx}{dp}+\frac{3}{2}x=-e^p.$$

Sada je još samo potrebno poslednju jednačinu podeliti sa $\frac{1}{2}p$ $(p\neq 0)$. Tada dobijamo

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{p}x = \frac{-2e^p}{p}.$$

Dobijena diferencijalna jednačina je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po $x = x(p)$. Njenim rešavanjem (ostavlja se za vežbu studentu) dobijamo da je

$$x(p) = \frac{1}{p^3}(c + (p^2 - 2p + 2)e^p),$$

što predstavlja opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

KLEROOVA JEDNAČINA

Kleroova jednačina predstavlja poseban oblik Lagranževe jednačine.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot y' + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i g neprekidna funkcija na dopustivom domenu, naziva se Kleroova diferencijalna jednačina. Kleroova jednačina je poseban oblik Lagranževe funkcije.

Postupak za rešavanje Kleroove jednačine je sličan kao i kod rešavanja Lagranževe jednačine. Najpre, uvodimo parametar p na sledeći način $p = y' = \frac{dy}{dx}$ i $dy = pdx$.

Sada je

$$y = x \cdot p + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot p + g(p),]$$

tj.

$$pdx = pdx + xdp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$x + g'(p)dp = 0.$$

Ako, najpre, pretpostavimo da je $dp = 0$, integraljenjem prethodne jednačine dobijamo da je $p = c,\ c \in \mathbb{R}$. Tada je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Ako pretpostavimo da je $x + g'(p) = 0$, imamo da je $x = -g'(p)$.

Ako uvrstimo uz ovu jednačinu i Klerovu jednačinu u obliku $y = x \cdot p + g(p)$ tj.

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p)$$

gde je p parametar uveden na početku, dobijamo singularno rešenje Kleroove jednačine, zadato preko parametra p. Ovo rešenje nije opšte rešenje, jer nije dobijeno integralnim računom. Potrebno je na kraju, ako je to moguće, iz ovog rešenja eliminisati parametar p i dobiti rešenje u eksplicitnom obliku.

PRIMER 2

Određivanje opšteg rešenja Kleroove jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y = x \cdot y' + (y')^2.$$

Rešenje. Prema prethodno izloženom, pri čemu je $g(y') = (y')^2$, imamo da je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Singularno rešenje tražimo iz uslova

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p),$$

tj. u našem slučaju, za $p = y'$ i $g(p) = p^2$, je

$$y = x \cdot p + p^2,\ x = -2p.$$

Kako je moguće p izraziti u funkciji od x, tada imamo da je $p = -\frac{x}{2}$, pa je singularno rešenje oblika

$$y = x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}.$$

Poglavlje 9

Vežba

ZADATAK 1

Jednačina koja razdvaja promenljive.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$\frac{x}{y} + y' = 0.$

Rešenje:

Posle smene $y' = \frac{dy}{dx}$ dobija se

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y \ \ dy = -x \ \ dx$

$\int y \ \ dy = -\int x \ \ dx + C$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

$x^2 + y^2 = 2C$

$x^2 + y^2 = C_1,\ C_1 = 2C,$

$y = \pm\sqrt{C_1 - x^2}.$

ZADATAK 2

Jednačina koja razdvaja promenljive

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$e^y\left(y' + 1\right) = 1.$

Rešenje:

$$e^y\left(y' + 1\right) = 1 \Leftrightarrow e^y\frac{dy}{dx} + e^y = 1 \Leftrightarrow e^y dy + e^y dx = dx \Leftrightarrow e^y dy = dx - e^y dx \Leftrightarrow$$

$$e^y dy = \left(1 - e^y\right)dx \Leftrightarrow \frac{e^y}{1 - e^y}dy = dx \Leftrightarrow \int\frac{e^y}{1 - e^y}dy\left[\begin{array}{c}\text{smena :}\\ 1 - e^y = t\\ -e^y dy = dt\end{array}\right] = \int dx + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\int\frac{dt}{t} = x + C \Leftrightarrow -\ln|t| = x + C \Leftrightarrow -\ln\left|1 - e^y\right| = x + C.$$

Tada imamo da je

$$1 - e^y = e^{-x-C},$$

tj.

$$e^y = 1 - e^{-x-C},$$

tj.

$$y = \ln\left|1 - e^{-x-C}\right|.$$

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'\cos y + \sin y = 0.$$

Rešenje: Posle smene $y' = \frac{dy}{dx}$ dobija se:

$$x\frac{dy}{dx}\cos y + \sin y = 0$$

Množenjem sa dx dobijamo

$$x\ \ dy\cos y + \sin y\ \ dx = 0,$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|\sin y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

$$\sin y = \frac{C}{x},$$

$$y = \arcsin\left(\frac{C}{x}\right).$$

ZADATAK 3

Homogena jednačina.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Rešenje: Deljenjem polazne jednačine sa x, dobijamo:

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Provera da li je posmatrana jednačina homogena jeste ta, da se funkcija $f(y/x)$ ne menja ako se u njoj x zameni sa kx, a y sa ky, što je ovde slučaj.

Kako se radi o homogenoj jednačini nju rešavamo smenom $z(x) = \frac{y}{x}$. Tada imamo $y = xz$, tj. $y' = xz' + z$. Uvodeći sve prethodno u polaznu jednačinu, ona postaje

$$xz' + z = z \cos \ln z,$$

$$xz' = z \cos \ln z - z,$$

$$z' = \frac{z \cos \ln z - z}{x},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(\cos \ln z - 1)}{x},$$

$$\frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Integracijom dobijamo

$$\int \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\ln z}{2} = \ln |x| + \ln \left| C \right|,$$

$$\ln \frac{y}{x} = 2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|),$$

$$\frac{y}{x} = e^{2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|)},$$

$$y = x e^{2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|)}.$$

Napomena. Pri rešavanju integrala $\int \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)}$ uvodimo smenu $\ln z = t$, $\frac{dz}{z} = dt$ i dobijamo integral $\int \frac{dt}{\cos t - 1}$ koji možemo, korišćenjem trigonometrijskog identiteta $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ svesti na integral

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

ZADATAK 4

Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$y' = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}$.

Rešenje: Kako je $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, uvodimo smenu $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, gde su brojevi α, β takvi da je $4\alpha - \beta + 7 = 0$ i $2\alpha + \beta - 1 = 0$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $\alpha = -1$ i $\beta = 3$. Zamenom u polaznoj jednačini $x = u - 1$, $y = v + 3$, pri čemu je $v = v(u)$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$\frac{dv}{du} = \frac{4u-v}{2u+v}$, tj. $v' = \frac{4u-v}{2u+v}$,

koja je homogena diferencijalna jednačina i koja se rešava uvođenjem nove nepoznate funkcije $w(u) = \frac{v}{u}$. Tada imamo $v = uw$, $v' = uw' + w$ i dobijamo:

$uw' + w = \frac{4-w}{2+w}$.

Dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive. Tada je:

$\int \frac{dw}{\frac{4-w}{2+w} - w} = \int \frac{du}{u}$, tj.$\int \frac{(2+w)dw}{4-3w-w^2} = \ln|u| + \ln\left|C\right|$.

Rešimo, sada, integral sa leve strane poslednje jednakosti. Kako je $4 - 3w - w^2 = (1-w)(4+w)$ radi se racionalnoj integraciji.

Sada imamo:

$\frac{2+w}{(1-w)(4+w)} = \frac{D}{1-w} + \frac{E}{4+w}$, tj.$2 + w = 4D + E + (D - E)w$.

Odavde dobijamo sistem $2 = 4D + E$, $1 = D - E$, čije je rešenje $D = \frac{3}{5}$, $E = -\frac{2}{5}$. Tada je:

$\int \frac{(2+w)dw}{4-3w-w^2} = \frac{3}{5}\int\frac{dw}{1-w} - \frac{2}{5}\int\frac{dw}{4+w} = -\frac{3}{5}\ln|1-w| - \frac{2}{5}\ln|4+w|$.

Sada je:

$-\frac{3}{5}\ln|1-w| - \frac{2}{5}\ln|4+w| = \ln|Cu|$, tj.$3\ln|1-w| + 2\ln|4+w| = -5\ln|Cu|$.

Tada imamo da je:

$\ln|1-w|^3 + \ln|4+w|^2 = \ln|Cu|^{-5}$, tj. $(1-w)^3(4+w)^2 = (Cu)^5$.

Kako je $x + 1 = u$, $y - 3 = v$ i $w = \frac{v}{u}$, to je opšte rešenje polazne jednačine:

$\left(1 - \frac{y-3}{x+1}\right)^3\left(4 + \frac{y-3}{x+1}\right)^2 = \left(C(x+1)\right)^5$.

ZADATAK 5

Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2.$$

Rešenje: Kako je $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, uvodimo novu funkciju $u(x) = x - y$, pa je $u' = 1 - y'$. Zamenom, u polaznoj jednačini

$$1 - u' = \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2,$$

tj. dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{du}{dx} = 1 - \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2 = \frac{3u^2+6u}{4u^2+4u+1}.$$

Sada imamo

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int dx.$$

Rešimo integral na levoj strani

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int\left(\frac{4u(u+2)}{3u(u+2)} + \frac{1-4u}{3u(u+2)}\right)du = \frac{4}{3}\int du + \frac{1}{3}\int\frac{1-4u}{u(u+2)}du.$$

Integral $\int \frac{1-4u}{u(u+2)}du$ ćemo rešavati metodom neodređenih koeficijenata i imamo

$$\frac{1-4u}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2},$$

odakle dobijamo da je $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{9}{2}$. Tada je:

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right).$$

Tada je:

$$\frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right) = x + C,$$

odnosno

$$\frac{1}{6}\left(8u + \ln|u| - 9\ln|u+2|\right) = x + C.$$

Vraćajući smenu $u(x) = x - y$ i množenjem prethodnog izraza sa 6, nakon sređivanja, dobijamo:

$$2x - 8y + \ln|x-y| - 9\ln|x-y+2| = C_1,\ C_1 = 6C.$$

ZADATAK 6

Linearna jednačina.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$xy' + y = \cos x.$

Rešenje:

Deljenjem sa x jednačina postaje

$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x},$

i ovo je linearna jednačina, pri čemu je $p = \frac{1}{x}, \quad q = \frac{\cos x}{x}.$

Prema formuli

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int \frac{\cos x}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx\right) = e^{-\ln x}\left(C + \int \frac{\cos x}{x} e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(C + \int \frac{\cos x}{x} x \, dx\right) = \frac{1}{x}(C + \int \cos x \, dx) = \frac{1}{x}(C + \sin x).$$

Odrediti opšti integral sledeće linearne diferencijalne jednačine

$y' + y\cos x = \sin x \cos x.$

Rešenje:

$p = \cos x, \quad q = \sin x \cos x$

$$y = e^{-\int p \, dx}\left(C + \int q e^{\int p \, dx} dx\right) = e^{-\int \cos x \, dx}\left(C + \int \sin x \cos x e^{\int \cos x \, dx} dx\right) = e^{-\sin x}\left(C + \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx\right)$$

$(\sin x = t, \quad \cos x \, dx = dt)$

$$= e^{-\sin x}\left(C + \int t e^t dt\right) = e^{-\sin x}\left(C + te^t - e^t\right) = e^{-\sin x}\left(C + \sin x \, e^{\sin x} - e^{\sin x}\right) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

ZADATAK 7

Linearna jednačina

Odrediti opšti integral sledeće linearne diferencijalne jednačine

$y \ln y \, dx + (x - \ln y)dy = 0.$

Rešenje:

Početnu jednačinu možemo zapisati u obliku

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y \ln y}{x - \ln y}$

kako iz ovog oblika ne možemo da uočimo o kom se tipu jednačine radi, pogledajmo recipročnu jednačinu. Tada imamo:

$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{x - \ln y}{y \ln y}$

$x' = -\frac{1}{y \ln y}x + \frac{1}{y}$

Primećujemo da početna jednačina iako nije linearna po y, jeste po x i dobijamo:

$x' + \frac{1}{y \ln y}x = \frac{1}{y}$,

gde je $p = \frac{1}{y \ln y}, \quad q = \frac{1}{y}$. Opšte rešenje je oblika:

$x(y) = e^{-\int p \, dy}\left(C + \int q e^{\int p \, dy} dy\right)$

Izračunaćemo prvo $\int p \, dy$.

$\int p \, dy = \int \frac{dy}{y \ln y}$

Smenom $\ln y = t$ dobijamo

$\int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln y) + C$

$x(y) = \frac{1}{\ln y}\left(C + \int \frac{\ln y}{y} dy\right)$

$x(y) = \frac{1}{\ln y}\left(C + \frac{\ln^2 y}{2}\right)$.

ZADATAK 8

Bernulijeva jednačina

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$.

Rešenje:

$2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$

$2xy' + y = -3x^2y^2 \qquad : 2x$

$y' + y\frac{1}{2x} = -\frac{3}{2}xy^2$

Ovde je $\alpha = 2$, pa uvodimo smenu $y = z^{\frac{1}{1-2}} = \frac{1}{z}$. Uvođenjem te smene, polazna jednačina postaje

$z' - \frac{1}{2x}z = \frac{3}{2}x$.

Ovo je linearna diferencijalna jednačina čije rešenje je:

$z = e^{-\int -\frac{dx}{2x}}\left(C + \int \frac{3}{2}x \; e^{\int -\frac{dx}{2x}} dx\right) = e^{\frac{1}{2}\ln x}\left(C + \int \frac{3}{2}x \; e^{-\frac{1}{2}\ln x} dx\right) = \sqrt{x}\left(C + \frac{3}{2}\int \sqrt{x} dx\right)$

$= \sqrt{x}\left(C + \frac{3}{2}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}(C + x\sqrt{x}) = x^2 + C\sqrt{x}$.

Dakle,

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + C\sqrt{x}} \quad .$$

ZADATAK 9

Bernulijeva jednačina.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^3 + 2\left(x^2 - xy^2\right)y' = 0.$$

Rešenje:

$$y' = -\frac{y^3}{2\left(x^2 - xy^2\right)}$$

Pogledajmo i recipročnu:

$$x' = -\frac{2\left(x^2 - xy^2\right)}{y^3} = -2\frac{x^2}{y^3} + 2\frac{x}{y}$$

$$x' - \frac{2}{y}x = -2\frac{x^2}{y^3}$$

$\alpha = 2$, uvodimo smenu $z(y) = \frac{1}{x}$ i $z' = \frac{-x'}{x^2}$, polazna jednačina postaje linearna jednačina

$$z' + \frac{2}{y}z = \frac{2}{y^3}.$$

Odavde je:

$$z(y) = \frac{1}{y^2}\left(C + 2\ln|y|\right),$$

a nakon vraćanja smene $x = \frac{1}{z}$ dobijamo

$$x = \frac{y^2}{C + 2\ln|y|} \quad .$$

ZADATAK 10

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x\left(y^2 + 1\right)dx + \left(yx^2 + 2y^3\right)dy = 0.$$

Rešenje:

$P(x, y) = x\left(y^2 + 1\right), \quad Q(x, y) = yx^2 + 2y^3$

$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

$F(x, y) = \int x\left(y^2 + 1\right)dx + \int\left(yx^2 + 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int x\left(y^2 + 1\right)dx\right)dy$

$F(x, y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2 + 1\right) + \int\left(yx^2 + 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}\left(y^2 + 1\right)\right)\right)dy$

$F(x, y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2 + 1\right) + \int\left(yx^2 + 2y^3 - yx^2\right)dy$

$F(x, y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2 + 1\right) + \int 2y^3 dy$

$F(x, y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2 + 1\right) + \frac{1}{2}y^4 + C.$

ZADATAK 11

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$\left(2xy + 4x^3\right)y' + y^2 + 12yx^2 = 0.$

Rešenje:

$\left(2xy + 4x^3\right)dy + \left(y^2 + 12yx^2\right)dx = 0$

$P(x, y) = y^2 + 12yx^2, \quad Q(x, y) = 2xy + 4x^3$

$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2y + 12x^2 = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

$F(x, y) = \int\left(y^2 + 12yx^2\right)dx + \int\left(2xy + 4x^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(y^2 + 12yx^2\right)dx\right)dy$

$F(x, y) = xy^2 + 4yx^3 + \int\left(2xy + 4x^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + 4yx^3\right)\right)dy$

$F(x, y) = xy^2 + 4yx^3 + \int\left(2xy + 4x^3 - \left(2xy + 4x^3\right)\right)dy$

$F(x, y) = xy^2 + 4yx^3 + \int 0 \quad dy$

$F(x, y) = xy^2 + 4yx^3 + C.$

ZADATAK 12

Rikatijeva jednačina.

Data je diferencijalna jednačina:

$$y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 5.$$

Pokazati da je jedno rešenje ove jednačine linearna funkcija $y = ax + b$, a zatim naći opšte rešenje ove jednačine.

Rešenje. Linearna funkcija $y = ax + b$ predstavlja pretpostavljeno partikularno rešenje date Rikatijeve jednačine. Tada ono zadovoljava polaznu jednačinu i kako je $y' = a$, imamo:

$$a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) - x^2 + 5 = -a^2x^2 - 2abx - b^2 + 2ax^2 + 2bx - x^2 + 5,$$

odnosno

$$a = \left(-a^2 + 2a - 1\right)x^2 + (-2ab + 2b)x + b^2 + 5 = -(a - 1)^2x^2 + 2b(1 - a)x - b^2 + 5.$$

Odavde dobijamo sledeći sistem: $(a - 1)^2 = 0,\ 2b(1 - a) = 0$ i $-b^2 + 5 = a$. Iz prve jednačine sistema imamo da je $a = 1$, druga jednačina postaje identitet, a iz treće jednačine imamo da je $b^2 = 4$, tj. tada je $b = \pm 2$. Tada, jedno partikularno rešenje je $y = x - 2$.

Potražimo sada opšte rešenje ove diferencijalne jednačine. Ono je oblika $y(x) = y_0 + \frac{1}{z}$, tj. $y(x) = x - 2 + \frac{1}{z}$. Tada je $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$.

Uvedimo ovu smenu sada u polaznu jednačinu. Tada imamo

$$1 - \frac{z'}{z^2} = -\left(x - 2 + \frac{1}{z}\right)^2 + 2x\left(x - 2 + \frac{1}{z}\right) - x^2 + 5,$$

što nas nakon sređivanja dovodi do jednačine:

$$z' + 4z = 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{dz}{dx} + 4z = 1.$$

Dobijena diferencijalna jednačina je ona koja razdvaja promenljive i imamo

$$\frac{dz}{1 - 4z} = dx, \quad \text{tj.} \quad \int \frac{dz}{1 - 4z} = \int dx.$$

Rešavanjem dobijamo:

$$-\frac{1}{4}\ln|1 - 4z| = x + C,$$

tj.

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{4(x + C)}} = \frac{e^{4(x + C)} - 1}{4e^{4(x + C)}}.$$

Tada je opšte rešenje oblika:

$$y(x) = x - 2 + \frac{1}{z} = x - 2 + \frac{4e^{4(x+C)}}{e^{4(x+C)} - 1}.$$

ZADATAK 13

Lagranževa jednačina

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Rešenje:

Kako je $\varphi(y') = 2y' \neq y'$, ovo je Lagranžova diferencijalna jednačina. Dakle,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{2p - p}x = \frac{2p}{p - 2p}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2$$

$$x = e^{-\int \frac{2}{p}dp}\left(C + \int\left(-2e^{\int \frac{2}{p}dp}\right)dp\right)$$

$$x = e^{-2\int \frac{dp}{p}}\left(C + \int\left(-2e^{2\int \frac{dp}{p}}\right)dp\right)$$

$$x = e^{-2\ln|p|}\left(C + \int\left(-2e^{2\ln|p|}\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{e^{\ln|p|^2}}\left(C + \int\left(-2e^{\ln|p|^2}\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C + \int\left(-2p^2\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C - 2\int p^2dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C + \left(-2\frac{p^3}{3}\right)\right) = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$$

$$y = 2\left(\frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}\right)p + p^2 = \frac{2C}{p} - \frac{4p^2}{3} + p^2 = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}$$

$2p = p \Rightarrow p = 0$. Dakle, $y = \varphi(0)x + \psi(0) = 0$ i to je singularno rešenje polazne jednačine.

ZADATAK 14

Lagranževa jednačina.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y = 3xy' - 7y'^3$.

Rešenje:

Kako je $\varphi(y') = 3y'$, ovo je Lagranžova diferencijalna jednačina. Dakle,

$y' = p \qquad dy = pdx$

$pdx = 3pdx + 3xdp - 21p^2dp$

$2pdx + \left(3x - 21p^2\right)dp = 0 \qquad / : 2dp$

$x' + \frac{3x}{2p} = \frac{21}{2}p$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}}\left(C + \frac{21}{2}\int pe^{\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}}dp\right)$$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\ln|p|}\left(C + \frac{21}{2}\int pe^{\frac{3}{2}\ln|p|}dp\right)$$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\ln|p|}\left(C + \frac{21}{2}\int p|p|^{\frac{3}{2}}dp\right)$$

Ako je $p > 0$

$$x(p) = p^{-\frac{3}{2}}\left(C + \frac{21}{2}\frac{2}{7}p^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$x(p) = p^{-\frac{3}{2}}C + 3p^2.$$

Ako je $p < 0$

$$x(p) = (-p)^{-\frac{3}{2}}\left(C + \frac{21}{2}\frac{2}{7}(-p)^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$x(p) = (-p)^{-\frac{3}{2}}C + 3p^2.$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Rešiti diferencijalne jednačine

$(xy+2y)y' = x^2+3x-2$ **rešenje:** $y=\sqrt{x^2+2x-8\ln|x+2|+C}$

$\left(x^2+y^2\right)y' - xy = 0$ **rešenje:** $\frac{2y^2}{x^2}\ln\frac{y}{x} = 1-\frac{2y^2}{x^2}\ln Cx$

$xy' + y = x^3$ **rešenje:** $y=\frac{C}{x}+\frac{x^3}{4}$

$y' + 2xy = 2x^3y^3$ **rešenje:** $y=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2}{2}+Ce^{2x^2}}}$

$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ **rešenje:** $x^2-xy+y^2+x-y=C$

$y' = \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2x^2}$ **rešenje:** $y= -\frac{1}{x}+\frac{2}{x\left(C-\ln|x|\right)}$

Zaključak za lekciju 07

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Obične diferencijalne jednačine.

U ovoj lekciji smo obradili sledeće tipove diferencijalnih jednačina prvog reda: one koje razdvajaju promenljive, homogenu i jedna tip diferencijalnih jednačina prvog reda koje se svode na homogenu, linearna jednačina, Bernulijeva jednačina, jednačina koja predstavlja totalni diferencijal i Rikatijeva jednačina.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.