UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine višeg reda

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 08

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

UVOD

Diferencijalne jednačine višeg reda.

Od diferencijalnih jednačina višeg reda obradićemo homogene i nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstatnim koeficijentima, kao i postupke za njihovo rešavanje. Takođe, upoznaćemo se sa Koši-Ojlerovom jednačinom čije se rešavanje svodi na prethodno pomenute diferencijalne jednačine više reda.

Diferencijalne jednačine su od fundamentalnog značaja u nauci i tehnici jer se čitav niz pojava, zakonitosti i problema izražavaju diferencijalnim jednačinama. One posebno mesto zauzimaju u fizici, hemiji, biologiji, mehanici drugim naukama.

Poglavlje 1

Diferencijalne jednačine višeg reda

UVOD

Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine n -tog reda može biti: opšte, partikularno i singularno.

$\text{Opšti oblik obične diferencijalne jednačine } n-\text{tog reda}$ je

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0,$$

gde je x nezavisna promenljiva, a $y = y(x)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti, koja se u jednačini javlja zajedno sa svojim izvodima. Red diferencijalne jednačine određuje najviši stepen izvoda koji se javlja u njoj.

Termin obična diferencijalna jednačina podrazumeva slučaj da je nepoznata funkcija $y = y(x)$, funkcija jedne promenljive.

Napomena. Postoje diferencijalne jednačine kod kojih je nepoznata funkcija, funkcija više nezavisno promenljivih. Takve diferencijalne jednačine se nazivaju parcijalne diferencijalne jednačine i njima se ovde nećemo baviti.

Nekada je moguće izraziti iz opšteg oblika diferencijalne jednačine $n-$ tog reda, $y^{(n)}$ u funkciji preostalih veličina i tada tu diferencijalnu jednačinu zapisujemo u obliku

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Rešiti običnu diferencijalnu jednačinu $n-$ tog reda podrazumeva određivanje funkcije $y = g(x)$ koja ima neprekidne izvode $n-$ tog reda i koja zajedno sa svojim izvodim zadovoljava tu jednačinu.
Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda može biti: opšte rešenje, $\text{partikularno rešenje}$ i $\text{singularno rešenje}$.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda predstavlja jednu klasu funkcija, s tim što se broj integracionih konstanti poklapa sa najvišim redom izvoda koji u njoj figuriše tj. n i ono je oblika

$$y = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ ili } h(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Konstante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se nazivaju integracione konstante i one se javljaju prilikom rešavanje diferencijalne jednačine neodređenom integracijom.

Partikularno rešenje se može dobiti iz opšteg rešenja kada se zadaju tzv. početni uslovi

$$y(x_0) = y_{01},\ y'(x_0) = y_{02},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n},$$

koje opšte rešenje treba da zadovolji, gde su $x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n} \in \mathbb{R}$ dati brojevi. Na taj način se iz klase funkcija koje prestavljaju opšte rešenje izdvaja samo jedna funkcija. Početni uslovi se još nazivaju i Košijevi uslovi, a dobijeno partikularno rešenje se naziva Košijevi rešenje. .

Singularno rešenje se ne može dobiti iz opšteg i najčešće se dobija iz ograničenja koje važe za tu diferencijalnu jednačinu.

1.1 Linearna diferencijalna jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima

UVOD

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda se tako naziva jer je nepoznata funkcija y, kao i svi njeni izvodi koji se javljaju u jednačini prvog stepena.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

se naziva linearna diferencijalna jednačina $n-$tog reda, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ proizvoljne funkcije po x ili konstante, pri čemu je funkcija $f(x)$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

U slučaju da je $f(x) = 0,$ ova jednačina se naziva homogena linearna jednačina $n-$tog reda, a u slučaju $f(x) \neq 0$ se naziva nehomogena linearna jednačina $n-$tog reda, $n-$tog reda.

Mi ćemo se ovde baviti slučajem kada su u prethodnoj jednačini $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ i tada se prethodna jednačina naziva linearna jednačina $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima.

U nastavku ćemo, najpre, izložiti metodologiju za određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda, jer određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda direktno zavisi od odgovarajuće homogene. Postupak za određivanje ovih rešenja ćemo prvo pokazati za homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda, a zatim uopštiti za proizvoljan red.

Za dobijanje opšteg rešenja nehomogene diferencijalne jednačine, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, potrebno je odrediti i jedno njeno partikularno rešenje. Ovde će biti izložene dve metode za njihovo određivanje. U opštem slučaju ovo nije jednostavno uraditi. Prva od njih se naziva Metoda neodređenih koeficijenata i ona se može primenjivati samo za određene klase funkcija $f(x)$. Druga se naziva Metoda varijacije konstanti ili Lagranževa metoda i ona je opštija od Metode neodređenih koeficijenata, jer ne postoje ograničenja kakvoj klasi funkcija pripada funkcija $f(x)$. Ipak, Metod neodređenih koeficijenata se primenjuje, kada je to moguće, pre nego Metod varijacije konstanti zbog jednostavnijeg postupka u određivanju partikularnog rešenja (u njemu nema neodređene integracije). Metod neodređenih koeficijenata zbog lakšeg razumevanja ćemo, prvo, izučiti za nehomogene linearne jednačine drugog reda, a nakon toga uopštiti. S druge strane, Metod varijacije konstanti ćemo odmah izlagati u najopštem slučaju.

1.2 Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Bilo koja dva linarno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda čine njen tzv. fundamentalni sistem rešenja.

U ovom delu razmatraćemo homogenu linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima, tj. jednačinu oblika

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0, \ (x \in D).$$

Ako uvedemo izraz

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y$$

definisan za dvaput diferencijabilne funkcije na intervalu D (diferencijalni operator drugog reda), jednačinu $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$možemo napisati u obliku $L(y) = 0$.

Ova jednačina će uvek imati trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ koje ćemo isključiti iz daljeg razmatranja. Važi sledeći stav.

Stav. Ako su y_1 i y_2 bilo koja dva rešenja posmatrane jednačine, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

takođe rešenje ove jednačine.

S obzirom da je pojam opšteg rešenja jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$suštinski vezan za dva linearno nezavisna rešenja te jednačine, navodimo, najpre, kriterijum za proveru linearne nezavisnosti rešenja y_1 i y_2 ove jednačine.

Stav. Rešenja $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$ homogene jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ biće linearno nezavisna na intervalu D ako i samo ako za njihov Vronskijan, tj. sledeću funkcionalnu determinantu važi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{za } x \in D.$$

Primer. Bilo koje dve funkcije x^m i x^n, $(m, n \in \mathbb{R},\ m \neq n)$, su linearno nezavisne u svakom intervalu $D = (a, b)$, jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ mx^{m-1} & nx^{n-1} \end{vmatrix} = (n-m)x^{m+n-1} \neq 0.$$

Bilo koja dva linearno nezavisna rešenja y_1 i y_2 homogene jednačine $L(y) = 0$ obrazuju njen fundamentalni sistem rešenja. Svaki fundamentalni sistem rešenja je od ogromnog značaja, jer se pomoću njega može obrazovati opšte rešenje te jednačine.

Značaj fundamentalnog sistema rešenja se vidi iz narednog stava.

Stav. Ako je y_1 i y_2 bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$,tada je jedno njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE SISTEMA FUNDAMENTALNIH REŠENJA

Postupak se zasniva na određivanju karakteristične jednačine i njenih rešenja. U zavisnosti kakva je priroda tih rešenja razlikujemo tri slučaja.

Potražimo rešenje jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda x}$ i $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, pa zamenom ovih vrednosti u homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima ona postaje

$$L(y) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0.$$

Kako je $e^{\lambda x} \neq 0$, za svako $x \in D$, nakon deobe prethodne jednačine sa $e^{\lambda x}$ dobijamo jednačinu

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

koja se naziva karakteristična jednačina jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo njena rešenja λ_1 i λ_2. U zavisnosti od prirode ovih rešenja razlikovaćemo tri slučaja.

Prvi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 realna i različita. Tada su funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešenja jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Za odgovarajući Vronskijan važi da je:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.$$

pa imamo da $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Drugi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 su realni i jednaka. Tada se može pokazati da je zajedno sa funkcijom $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i funkcija $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ rešenje posmatrane jednačine. U ovom slučaju, takođe, važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa imamo da funkcije $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje posmatrane jednačine.

Treći slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 konjugovano-kompleksna, tj. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Može se pokazati da je funkcije $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ i funkcija $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. I u ovom slučaju važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa ove dve funkcije obrazuju fundamentalni sistem rešenja posmatrane jednačine. Stoga je njeno opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

PRIMERI

Određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Primer 1. Za jednačinu

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i e^{3x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Primer 2. Za jednačinu

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i xe^{2x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Primer 3. Za jednačinu

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.
Ovde je $\alpha = -1$ i $\beta = 1$. Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće $y_1(x) = e^{-x}\cos x$ i $y_2(x) = e^{-x}\sin x$, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

1.3 Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Prethodno navedeni rezultati za homogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima se uopštavaju na linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima višeg reda.

Homogena linearna jednačina n -tog reda sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$je jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \quad (x \in D).$$

Nju, koristeći operator L, možemo zapisati u obliku $L(y) = 0$. Kao i za slučaj $n = 2$ rešenja ove jednačine imaće sledeću karakterističnu osobinu.

Stav. Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljna rešenja homogene linearne jednačine n -tog reda, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$,takođe rešenje ove jednačine.

Kod nalaženja realnih rešenja jednačine često koristimo i njena kompleksna rešenja. Reći ćemo, naime, da je kompleksna funkcija $y(x)$ realnog argumenta x, $(x \in D)$ ako je oblika

$$y(x) = u(x) + i \cdot v(x),$$

(gde su $u(x)$ i $v(x)$ odgovarajuće realne funkcije) rešenje posmatrane jednačine, ako važi jednakost $L(y) = 0$.

Pritom definišemo $y'(x) = u'(x) + i \cdot v'(x)$, $y''(x) = u''(x) + i \cdot v''(x)$, ... , $y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + i \cdot v^{(n)}(x)$. Može se dokazati da je tada $L(y) = L(u) + iL(v)$, odakle sledi da su i funkcije $u(x)$ i $v(x)$ realna rešenja jednačine.

Kod obrazovanja opšteg rešenja jednačine koristi se, kao i za $n = 2, n$ linearno nezavisnih rešenja te jednačine, pri čemu se prethodno dokazuje da takvih n rešenja zaista i postoji.

Da bi se ispitala njihova linearna nezavisnost, uvodi se ponovo pojam Vronskijana koji odgovara tim rešenjima. Pretpostavimo opštije da su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilo kojih n funkcija, $n-1$ puta diferencijabilnih na intervalu D (ako su one istovremeno i rešenja jednačine, neposredno sledi da moraju biti $n-$ puta diferencijabilne na intervalu D). Tada je na osnovu definicije, njihov Vronskijan funkcionalna determinanta

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Stav. Rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene jednačine biće linearno nezavisna u intervalu D ako i samo ako je za svako $x \in D$ odgovarajući Vronskijan $W(x) \neq 0$.

Napomena. Za Vronskijan n partikularnih rešenja homogene jednačine važi sledeća formula Ostrogorski – Liuvil $W(x) = W(x_0)e^{-a_1(x-x_0)}$ iz koje ponovo dobijamo dve osobine implicitno dokazane u prethodnom stavu: ako je $W(x_0) = 0$ $(x_0 \in D)$ tada je $W(x) \equiv 0$ i ako je $W(x_0) \neq 0$ $(x_0 \in D)$ tada je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in D$.

FUNDAMENTALNI SISTEM REŠENJA

Skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivamo fundamentalni sistem rešenja ovejednačine.

Kao i za $n = 2$, skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivaćemo fundamentalnim sistemom rešenja te jednačine. Slično kao i za $n = 2$, imamo sledeća dva stava.

Stav. Uvek postoji bar jedan sistem fundamentalnih rešenja homogene jednačine.

Stav. Ako je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine, tada je (jedno) njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n.$$

pri čemu su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne realne konstante.

Iz poslednjeg stava neposredno dobijamo narednu posledicu.

Posledica. Bilo kojih $n+1$ rešenja jednačine jesu linearno zavisna.

Opišimo sada kao i za slučaj $n = 2$ postupak određivanja bar jednog fundamentalnog sistema rešenja homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima. Potražimo naime rešenje te jednačine u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n-1)} = \lambda^{n-1}e^{\lambda x}$, $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ Polazna homogena jednačina je tada oblika:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0$$

Deobom sa $e^{\lambda x}$ poslednje jednačine dobijamo karakterističnu jednačinu za polaznu homogenu jednačinu:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Napomena. Rešenje karakteristične jednačine može biti realno ili kompleksno, tako da će ova jednačina imati n realnih ili konjugovan-kompleksnih rešenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pri čemu realna rešenja mogu biti jednostruka ili višestruka.
Razlikovaćemo, stoga, više slučajeva, zavisno od toga da li su koreni homogene jednačine realni i pri tom da li su jednostruki ili višestruki, ili da li su rešenja konjugovano-kompleksna. O tome govorimo u nastavku.

PRVI SLUČAJ

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i različita.

Stav. Neka su rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

koja odgovara homogenoj jednačini

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n$, realna i različita. Tada je jedan fundamentalan sistem rešenje

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

a opšte rešenje posmatrane homogene jednačine glasi:

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

PRIMER 1

Rešenja karakteristične jednačine su realna i različita

Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

odakle, ako za prvi i treći član izvučemo λ kao zajednički činilac, a za drugi i četvrti -2, dobijamo

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0,$$

nalazimo da je

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Kako su dobijena rešenja realna i različita tada je odgovarajući sistem fundamenatalnih rešenja dat sa

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

PRIMER 2

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0.$$

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ \ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), tada su oni oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -12$. U ovom slučaju moguće nule polinoma su brojevi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12$. Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 1^3 - 13 - 12 \neq 0$, pa ova vrednost nije nula polinoma. Dalje, važi da je $P_3(-1) = (-1)^3 + 13 - 12 = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = -1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda + 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 13\lambda - 12) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 12,$$

tj.

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 12).$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ dobijamo da je $\lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$. Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda - 4).$$

Kako su $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$ nule karakteristične jednačine $\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0$, opšte rešenje glasi:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}.$$

DRUGI SLUČAJ

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i neka od njih su višestruka

Pretpostavimo da su svi koreni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ karakteristične jednačine realni, ali su neki od njih i višestruki i da su koreni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ $(r < n)$ medjusobno različiti, a da su oni odgovarajuće višestrukosti $m_1, m_2, \dots, m_r$, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$. Ovo znači da se karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

može faktorisati u obliku

$$\left(x - \lambda_1\right)^{m_1}\left(x - \lambda_2\right)^{m_2} \cdot \dots \cdot \left(x - \lambda_r\right)^{m_r} = 0.$$

Stav. Pri navedenim pretpostavkama, fundamentalni sistem rešenja jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}y'\left(x\right) + a_n y\left(x\right) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n$ obrazovaće funkcije

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2 e^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2 e^{\lambda_2 x}, & \dots & x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & xe^{\lambda_r x}, & x^2 e^{\lambda_r x}, & \dots & x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x} \end{cases}$$

Primer. Nađimo opšte rešenje homogene jednačine

$y''' - 3y' + 2y = 0.$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika:

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$

Tada imamo da je

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) =$
$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0.$

nalazimo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$

Stoga je jedan njen fundamentalni sistem rešenja { $\left\{e^x, xe^x, e^{-2x}\right\}$) , a opšte rešenje

$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}.$

TREĆI SLUČAJ

Među rešenjima karakteristične jednačine, neka su konjugovano-kompleksna, odgovarajuće višestrukosti.

Neka su (različiti) koreni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednačine u opštem slučaju kompleksni i neka su im odgovarajuće višestrukosti redom $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n.$

Stav. Ako je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(\beta_k \neq 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ kompleksan koren karakteristične jednačine višestrukosti m_j $(1 \leq j \leq r)$, tada je i konjugovano kompleksan broj $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k(\beta_k \neq 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ takođe njen koren iste višestrukosti, a deo fundamentalnog sistema rešenja koji odgovara korenima $\alpha_k + i\beta_k$, za $\alpha_k \neq 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p e^{\alpha_k x} \cos \beta_k \;\; i \;\; x^p e^{\alpha_k x} \sin \beta_k, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m_j,$$

dok za $\alpha_k = 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p \cos \beta_k \;\; i \;\; x^p \sin \beta_k, \;\; p = 0, 1, 2, \ldots, m_j.$$

Napomena. U slučaju realnog korena λ_k, tj. za $\beta_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, iz prethodnog slučaja za određivanje odgovarajućeg dela fundamentalnog sistema rešenja, koristi se postupak opisan u prethodna dva stava. Zapravo, treći slučaj predstavlja opšti postupak za rešavanje jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = 0,$$

jer su prva dva sadržana u njemu. Naime, za $\beta_k = 0, (k = 1, 2, \ldots, n)$ u prethodnom slučaju (tj. kada je rešenje realno) dobijamo, partikularna rešenja, kao i fundamentalni skup rešenje za prva dva slučaja.

PRIMER 3

Homogena jednačina n-tog reda.

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y''' + 4y' = 0.$$

Rešenje. Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Odavde vidimo da su rešenje ovog polinoma $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 2i,$ pa jedan njen fundamentalan sistem rešenja obrazuju funkcije $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x$ i $y_3 = \sin 2x$.

Stoga je njeno opšte rešenje

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y^{iv} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date jednačine biće

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

pa su njena rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ višestrukosti 2.

Stoga je fundamentalni sistem rešenja obrazovan funkcijama $y_1 = e^{-x} \cos x,\ y_2 = e^{-x} \sin x,\ y_3 = xe^{-x} \cos x$ i $y_4 = xe^{-x} \sin x,$ a opšte rešenje je

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x.$$

1.4 Nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine.

Jednačina oblika

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

se naziva nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na intervalu D. Prethodna jednačina će imati jedinstveno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_{01}$ i $y'(x_0) = y_{02}$ tj. postojaće jedna jedinstvena integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_{01}, y_{02}).

Primer. Jednačina oblika

$$y'' + y' + y = x^3 + 3x - 2 - e^x$$

je jedna nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine. Pokazuje se naime da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p = y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

a $y_1(x)$ i $y_2(x)$ bilo koja dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, tada je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$,opšte rešenje nehomogene jednačine.

Iz prethodnog stava vidimo da nam je za određivanje opšteg rešenja nehomogene jednačine potrebno, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i jedno nehomogene jednačine partikularno rešenje

METOD NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Sada ćemo izneti jednu metodu za određivanje jednog partikularnog rešenja nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, ali koja važi samo za izvesne tipove funkcije $f(x)$. Ova metoda se naziva metod neodređenih koeficijenata i može se primeniti samo za slučajeve kada je funkcija $f(x)$ oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (*)$$

pri čemu su polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$, tim redom, stepena n, odnosno m. Specijalni slučajevi prethodnog, koji se često javljaju u zadacima, su $f(x) = P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, gde su $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

gde je $f(x)$ oblika $(*)$ određujemo zavisno od toga da li je kompleksan broj $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ rešenje ili ne karakteristične jednačine za odgovarajuću homogenu jednačinu.

U slučaju da $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ nije rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ nepoznati polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m, tj. $s=\max\{n,m\}$.
Ako pretpostavimo, ne umanjujući opštost, da je $n=max\{n,m\}$ tada važi da je

$$R(x)=r_0x^n+r_1x^{n-1}+\ldots+r_{n-1}x+r_n$$

i

$$S(x)=s_0x^n+s_1x^{n-1}+\ldots+s_{n-1}x+s_n$$

čije koeficijente $r_0,r_1,\ldots,r_{n-1},r_n$i $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1},s_n$treba odrediti.

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x)=xe^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x)$$

gde koeficijente polinoma $R(x)$ i $S(x)$ treba odrediti, kao i u prethodnom slučaju.

Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

PRIMER 1

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - rešenja realna i različita.

Odredimo opšte rešenje jednačine

$$y''-y=2x-1.$$

Rešenje. Kako karakteristična jednačina $\lambda^2-1=0$ ima rešenja $\lambda_{1,2}=\pm1$, odgovarajući fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine biće $y_1=e^x$ i $y_2=e^{-x}$.

Opšte rešenje ove jednačine je oblika $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+y_p(x)$.

Funkcija sa desne strane ove nehomogene jednačine $f(x)=2x-1$ polinom prvog stepena. Ako pogledamo opšti oblik funkcije $f(x)$ vidimo da ovaj polinom prvog reda potpada pod taj slučaj, pri čemu je $\alpha=0$ i $\beta=0$. Tada proveravamo da li je $\lambda=0+i\cdot0=0$ rešenje karakteristične jednačine. Kako to nije slučaj, partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y_p(x) = a \cdot x + b.$$

Kako je $y'_p(x) = a$ i $y''_p(x) = 0$ vraćajući ove veličine u početnu jednačinu dobijamo

$$-ax - b = 2x - 1 \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = 1,$$

dakle, $y_p(x) = -2x + 1$. Odavde, opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x + 1.$$

PRIMER 2

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - princip superpozicije.

Odredimo opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 + 3e^{-x}.$$

Rešenje. Kako karakteristična jednačina $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$ odgovarajući fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine biće $y_1 = e^{-x}$ i $y_2 = e^{2x}$.
Funkcija $f(x)$ predstavlja zbir dve funkcije, tako da, prvo određujemo partikularna rešenja $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$ koje odgovaraju jednačinama

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 \;\; i \;\; y'' - y' - 2y = 3e^{-x},$$

tim redom, a partikularno rešenje $y_p(x)$ cele nehomogene jednačine je $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$. U nastavku ćemo odrediti funkcije $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$.

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = x^2 - 1$, kako je $\alpha = \beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = 0$ rešenje karakteristične jednačine, što nije tačno, tako da je $y_{p_1}(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu koeficijente a, b i c treba odrediti.

Kako je $y'_{p_1}(x) = 2ax + b$ i $y''_{p_1}(x) = 2a$, vraćajući ovo u posmatranu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned}
&2a - 2ax - b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2ax^2 + (-2a - 2b)x + 2a - b - 2c = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2a = 1 \wedge -2a - 2b = 0 \wedge 2a - b - 2c = 1.
\end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{1}{4}$. Tada je traženo partikularno rešenje oblika

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$, kako je $\alpha = \ -1$ i $\beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = -1 + i \cdot 0$ jeste rešenje karakteristične jednačine. Vidimo da je jedno rešenje karakteristične jednačine $\lambda_1 =-1$, pa je $y_{p_2}(x) = Axe^{-x}$, pri čemu koeficijent A treba odrediti. Kako je $y'_{p_2}(x) = A(1-x)e^{-x}$ i $y''_{p_2}(x) = A(2+x)e^{-x}$, vraćajući ove veličine u posmatranu jednačinu dobijamo

$$A(2+x)e^{-x} - A(1-x)e^{-x} - 2Axe^{-x} = 3e^{-x}.$$

Nakon deljenja poslednje jednačina sa e^{-x} dobijamo da je $-3A = 3$, tj. $A = -1$. Tada je $y_{p_2}(x) = -xe^{-x}$.

Stoga je opšte rešenje date nehomogene jednačine:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} - xe^{-x}.$$

PRIMER 3

Primena metode neodređenih koeficijenata za odredjivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Odredimo opšte rešenje jednačine

$$y'' + y = 2\cos x.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je $\lambda^2 + 1 = 0$ i njena rešenja su $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je jedan fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine $\{\cos x, \sin x\}$.

Opšte rešenje ove jednačine je oblika $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p(x)$.

U funkciji $f(x)$ je $\alpha = 0, \beta = 1$, a kako je $\lambda = 0 + i = i$ rešenje karakteristične jednačine, traženo partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Imamo da je

$$y'_p(x) = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

i

$$y''_p(x) = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x).$$

Vraćajući dobijeno u polaznu jednačinu, imamo

$$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x,$$

odakle se, nakon sređivanja dobija

$$-A\sin x + B\cos x = 2\cos x,$$

tj. dobijamo da je $A = 0$ i $B = 2$.

Dakle $y_p(x) = x \cdot \sin x$, pa je opšte rešenje date jednačine oblika

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cdot \sin x.$$

VIDEO KLIP

Snimci sa Youtube-a: postupak za rešavanje Koši - Ojlerove jednačine je drugačiji od izloženog i odnosi se na jednačine drugog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

1.5 Nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Za određivanje partikularnog rešenja linearne nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda se koriste Metoda neodređenih koeficijenata i Metoda varijacije konstanti.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,se naziva nehomogena linearna jednačina $n-$ tog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

Može se pokazati da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p = y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

i $u = u(x)$ opšte rešenje odgovarajuće linearne homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima, tada je

$$y(x) = u(x) + y_p(x)$$

opšte rešenje date nehomogene jednačine.

U nastavku ćemo najpre izložiti Metod neodređenih koeficijenata, a zatim i Lagranževu metodu za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Ova metoda se može primeniti samo za određene klase funkcija $f(x)$.

Isto kao i za nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda, ako je slobodan član jednačine

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$,funkcija $f(x)\neq 0$ oblika

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

tada se partikularno rešenje polazne jednačine može odrediti neposredno, metodom neodredjenih koeficijenata, pri čemu su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n, odnosno m, tim redom.

Uočimo karakterističnu jednačinu, odgovarajuće homogene jednačine koja glasi:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Sada razlikujemo sledeća dva slučaja:

1° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ nije rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, tada postoji partikularno rešenje posmatrane jednačine oblika

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m.

2° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ jeste rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, višestrukosti $p\,(1\leq p\leq n)$, tada postoji partikularno rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$y_p(x)=x_pe^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x).$$

$\mathbf{Napomena.}$ Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

METOD VARIJACIJE KONSTANTI – POSTAVLJANJE SISTEMA ZA ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$ izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristi Lagranžev metod.

Nedostatak pomenute metode neodređenih koeficijenata za rešavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $n-$ tog reda

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$,je u tome što se može primeniti samo na određene klase funkcija $f(x)$, o čemu je već bilo reči.

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$, što je u praksi najčešće slučaj, izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristiti Metoda varijacije konstanti ili kako se još naziva Lagranževa metoda.

On se, dakle, sastoji u tome da opšte rešenje $y(x)$ tražimo u obliku

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x),$$

gde je $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja odgovarajuće homogene jednačine i gde su nepoznate funkcije $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ koje treba odrediti.

Može se pokazati da se ove funkcije mogu odrediti iz sledećeg sistema jednačina

$$\begin{aligned}C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n&=0,\\C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'&=0,\\C_1'y_1''+C_2'y_2''+\ldots+C_n'y_n''&=0,\\&\vdots\\C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}&=f(x).\end{aligned}$$

METODA VARIJACIJE KONSTANTI – ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Za razliku od Metode neodređenih koeficijenata, prilikom primene Metode varijacije konstanti do opšteg rešenja se dolazi neodređenom integracijom izvesnih funkcija.

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\,C_2'(x)=\varphi_2(x),\,\ldots,C_n'(x)=\varphi_n(x)$$

tj.

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + D_1 = \alpha_1(x) + D_1,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + D_2 = \alpha_2(x) + D_2,$$

$$\vdots$$

$$C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + D_n = \alpha_n(x) + D_n.$$

Tada je opšte rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$\begin{aligned} y(x) &= \big(\alpha_1(x) + D_1\big) \cdot y_1 + \big(\alpha_2(x) + D_2\big) \cdot y_2 + \cdots + \big(\alpha_n(x) + D_n\big) \cdot y_n = \\ &= u(x) + y_p(x), \end{aligned}$$

gde

$$u(x) = D_1 \cdot y_1 + D_2 \cdot y_2 + \cdots + D_n \cdot y_n,$$

predstavlja rešenje odgovarajuće homogene jednačine, dok funkcija

$$y_p(x) = \alpha_1(x) \cdot y_1 + \alpha_2(x) \cdot y_2 + \alpha_n(x) \cdot y_n$$

predstavlja partikularno rešenje.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Metod varijacije konstanti.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Koši - Ojlerova jednačina

POJAM

Poseban slučaj linearne homogene ili nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda čiji su koeficijenti funkcije predstavlja Koši-Ojlerova jednačina.

Do sada smo razmatrali linearnu homogenu i nehomogenu diferencijalnu jednačinu višeg reda oblika

$$y^{(n)}x + a_1 y^{(n-1)}x + a_2 y^{(n-2)}x + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

Međutim, kao što smo u uvodu rekli, koeficijenti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ mogu biti i proizvoljne funkcije, po promenljivoj x. Sada ćemo obraditi jedan specifičan slučaj ovakvih jednačina, u smislu da koeficijenti koji su funkcije imaju specifičan oblik. Naime, posmatrajmo jednačinu oblika

$$c_n(ax+b)^n y^{(n)}(x) + c_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = f(x).$$

Ova jednačina se naziva Koši - Ojlerova jednačina koja se smenom $ax + b = e^t$ prevodi u nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, gde su $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{R}$.

Pri uvođenju prethodne smene treba voditi računa o sledećem

$$ax + b = e^t \Rightarrow adx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = ae^{-t}.$$

Kako se u polaznu Ojlerovu jednačinu uvodi nova promenljiva t, potrebno je odrediti izvod funkcije y po promenljivoj t.
Tada imamo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = a\dot{y}e^{-t},$$

gde je uvedena oznaka $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Slično, možemo dobiti da je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(a\dot{y}e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ = a(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = \\ = a\ddot{y}e^{-2t} - a\dot{y}e^{-2t},$$

gde je $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Nastavljajući ovaj postupak, sve do $n-$ tog izvoda, i nakon uvođenja pomenute smene, polazna Ojlerova jednačina postaje nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, koja se može rešavati već pomenutom Metodom neodređenih koeficijenata ili Metodom varijacije konstanti u zavisnosti od toga kakva je funkcija $f(x)$.

PRIMER 1. DEO

Postupak rešavanja Ojlerove jednačine.

Odrediti opšte rešenje sledeće diferencijalne jednačine

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

Rešenje. Ovo je Koši-Ojlerova diferencijalna jednačina i nju rešavamo smenom $2x+3 = e^t \Rightarrow 2dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2e^{-t}$.

Tada imamo da je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\dot{y}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(2\dot{y}_t e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = 2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}_t e^{-2t},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2(\dddot{y}e^{-2t} - 2\ddot{y}e^{-2t} - (\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t}))e^{-t} \\ = 2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t}.$$

Uvodeći sve dobijene smene u početni jednačinu imamo

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = e^{3t}(2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t} + 3e^t \cdot 2\dot{y}e^{-t} - 6y \\ = 0,$$

tj.

$$2\dddot{y} - 6\ddot{y} + 10\dot{y} - 6y = 0 \diagup : 2 \Rightarrow \dddot{y} - 3\ddot{y} + 5\dot{y} - 3y = 0$$

Dobijena je homogena linearna diferencijalna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina tada glasi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje nula karakterističnog polinoma.

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_n(x)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

gde su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$i $n \in \mathbb{N}$. Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), oni su oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -3$. U ovom slučaju celobrojne nule, ako ih polinom ima, su brojevi $\pm 1, \pm 3$. Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = 1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda - 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

$$tj. \qquad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$dobijamo da je $\lambda_{2,3} = 1 + i\sqrt{2}$.

Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3).$$

Tada je

$$y(t) = C_1e^t + e^tC_2 \cos\sqrt{2t} + C_3 \sin\sqrt{2t}.$$

Tada je

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{\frac{1}{2}t} + C_3e^{\frac{3}{2}t}$$

Vraćajući uvedenu smenu $2x + 3 = e^t$, odnosno $t = \ln(2x + 3)$, dobijamo opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x) = C_1(2x+3) + C_2e^{\frac{1}{2}\ln(2x+3)} + C_3e^{\frac{3}{2}\ln(2x+3)} = C_1(2x+3) + C_2\sqrt{2x+3} + C_3\sqrt{2x+3}^3$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Koši-Ojlerova homogena jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Vežba

ZADATAK 1

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 4y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 4 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda = 2$ i $\lambda = -2$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine realna i različita. Tada su funkcije $y_1 = e^{2x}$ i $y_2 = e^{-2x}$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 4y' + 13y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ i njena rešenja su $\lambda = 2 + 3i$ i $\lambda = 2 - 3i$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine konjugovano-kompleksna.

Ukoliko su $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ i $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ rešenja karakteristične jednačine, tada su rešenja polazne jednačine kompleksne funkcije $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $\varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Sada su funkcije $y_1(x) = e^{2x}\cos 3x$ i $y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x.$

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 2y' + y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine višestruka. Tada su funkcije $y_1 = e^x$ i $y_2 = xe^x$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1e^x + C_2xe^x$.

ZADATAK 2

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.

Rešenje:

Karakteristična jednačina je $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$. Nule karakteristične jednačine su $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 3$. O postupku kako su ova rešenja određena videti primer sa predavanja.

Primećujemo da je -2 dvostruko rešenje.

Opšte rešenje ovo homogene jednačine tada glasi:

$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{3x}$.

ZADATAK 3

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + y = x$.

Rešenje:

Karakteristična jednačina zadate homogene jednačine je $\lambda^2 + 1 = 0$. Njena rešenja su $\lambda_{1/2} = 0 \pm i$. Dakle, konjugovano-kompleksna. Odgovarajuća homogena jednačina $y'' + y = 0$ ima partikularna rešenja $y_1 = \sin x$ i $y_2 = \cos x$ koja su linearno nezavisna, pa je njeno rešenje oblika

$y_h = C_1\sin x + C_2\cos x$.

Da bismo odredili partikularno rešenje zadate nehomogene jednačine koristimo metod neodređenih koeficijenata.

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$y_p = x^p P_n(x).$

U našem slučaju je $p = 0,$ jer se $\alpha = 1$ (koeficijent uz x u eksponentu e^x) ne preklapa ni sa jednim od rešenja karakteristične jednačine. a $P_n(x)$ je nepoznati polinom istog stepena, kao i polinom koji se javlja na desnoj strani polazne jednačine, tj. prvog stepena. Dakle, partikularno rešenje je oblika $y_p = ax + b$. Računamo izvode $y_p{}' = a$ i $y_p{}'' = 0$. Ubacujemo upravo dobijene izraze u polaznu jednačinu i dobijamo

$y_p{}'' + y_p = x,$

tj.

$ax + b = x.$

$a = 1,\ b = 0$ pa je $y_p = x$, dok je opšte rešenje nehomogene jednačine

$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x.$

ZADATAK 4

Nehomogena linearna jednačina drugog reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + y = x + 2e^x.$

Rešenje:

Funkcija $f(x) = x + 2e^x$ se može podeliti na dva sabirka

$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$

Partikularno rešenje jednačine $y'' + y = x$ je $y_1 = x$ (na osnovu prethodnog zadatka).

Treba odrediti partikularno rešenje jednačine $y'' + y = 2e^x$.

Da bismo odredili partikularno rešenje zadate nehomogene jednačine koristimo metod neodređenih koeficijenata.

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$y_2 = x^p e^{\alpha x} P_n(x).$

U našem slučaju je $p = 0,$ jer se $\alpha = 1$ (koeficijent uz x u eksponentu e^x) ne preklapa ni sa jednim od rešenja karakteristične jednačine. $P_n(x)$ je polinom stepena istog kao i polinom od koga je sačinjena funkcija $f_2(x) = 2e^x$. Kako je 2 konstanta, tj. polinom nultog stepena, takav će biti i $P_n(x)$.

Dakle, partikularno rešenje je oblika $y_2 = ae^x$. Računamo izvode, $y_2{}' = ae^x$ i $y_2{}'' = ae^x$. Ubacujemo upravo dobijene izraze u polaznu jednačinu i dobijamo

$$y_2{}'' + y_2 = 2e^x$$

tj.

$$2ae^x = 2e^x.$$

Odakle je $a = 1$ i $y_2 = e^x$.

Odgovarajuća homogena jednačina $y'' + y = 0$ ima opšte rešenje

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

(takođe, na osnovu prethodnog zadatka).

Opšte rešenje nehomogene jednačine oblika

$$y = y_h + y_1 + y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x + e^x.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 5

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2e^x.$$

Rešenje:

Opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine je zbir opšteg rešenje odgovarajuće linearne homogene jednačine i partikularnog rešenja nelinearne. Partikularno rešenje y_p jednako je zbiru partikularnih rešenja y_1 i y_2 redom jednačina

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x$$

i

$y''' - y'' + y' - y = 2e^x.$

Kako karakteristična funkcija polazne jednačine

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

ima korene i, $-i$ i 1. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x$.

Posmatrajmo, najpre, jednačinu $y''' - y'' + y' - y = \cos x$. Njeno partikularno rešenje je oblika $y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$. Naime, zbog $f_1 = \cos x$ imamo da je u opštem slučaju partikularno rešenje oblika

$y_p(x) = x^p e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$

U našem slučaju imamo da je $p = 1$, jer je $\alpha + i\beta = i$, pa imamo preklapanje sa komplesnim rešenjem u karakterističnj jednačini. S obzirom da uz funkciju $\cos x$ stoji koeficijent imamo da je $R_s(x) = A$ i $T_s(x) = B$.

Koeficijente A i B u y_1 određujemo tako što prvo odredimo y_1', y_1'' i y_1''' i zamenimo u $y''' - y'' + y' - y = \cos x$. Odatle dobijamo da je $A = B = -\frac{1}{4}$ (proveriti za vežbu).

O partikularnom rešenju jednačine $f_2(x) = 2e^x$ je već bilo reči i važi da je $y_2 = Cxe^x$ (x stoji u partikularnom rešenju jer je jedno rešenje karakteristične jednačine 1). Koeficijent C i određujemo tako što prvo odredimo y_2', y_2'' i y_2''' i zamenimo u

$y''' - y'' + y' - y = 2e^x.$

Tada dobijamo da je $C = 1$ (proveriti za vežbu).

Prema tome, opšte rešenje je

$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - \frac{1}{4}x(\cos x + \sin x) + xe^x.$

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 6

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$

Rešenje:

Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je, kao i u prethodnom zadatku

$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x,$

Pri čemu su rešenja karakteristične jednačine i, $-i$ i 1. Kako je $f(x) = \left(x^2 + x\right)e^{0x}$, tada nema preklapanja rešenja karakteristične jednačine sa vrednosšću $\alpha = 0$, pa je partikularno rešenje oblika $y_p = ax^2 + bx + c$. Da bismo odredili koeficijente a, b i c metodom neodređenih koeficijenata potrebno je, najpre, odrediti

$y'_p = 2ax + b$

$y''_p = 2a$

$y'''_p = 0$

Zamenom ovih vrednosti u polaznoj jednačini dobijamo

$-2a + 2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2 + x,$

tj.

$-ax^2 + (2a - b)x - 2a + b - c = x^2 + x,$

tj. $-a = 1$, $2a - b = 0$, $-2a + b - c = 0$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = -1$, $b = -2$, $c = 0$.

$y_p = -x^2 - 3x - 1$

$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x - x^2 - 2x.$

ZADATAK 7

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + 4y' + 5y = 10 \cos x e^{-2x}.$

Rešenje: Karakteristična jednačina glasi $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ i njena rešenja su konjugovano-kompleksna

$\lambda_{1,2} = -2 \pm i.$

Tada je odgovarajuće homogeno rešenje oblika

$y_h = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$

Dalje, zbog $f(x) = 10\cos xe^{-2x}$ imamo da je u opštem slučaju partikularno rešenje oblika

$$y_p(x) = x^p e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$$

Primećujemo da je $\alpha + i\beta = -2 + i$, pa je $p = 1$. Kako u funkciji $f(x) = 10\cos xe^{-2x}$ uz funkciju $\cos x$ stoji koeficijent - broj 10 (polinom nultog reda), imamo da je $R_s(x) = A$ i $T_s(x) = B$. Partikularno rešenje je tada oblika $y_p = xe^{-2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$.

Računamo prvi i drugi izvod partikularnog rešenja $y_p(x) = x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$.

$$y_p{}'(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{-2x} + x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$$

$$y_p{}''(x) = (-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x)e^{-2x} + (-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} + x(-A\cos x - B\sin x)e^{-2x} -$$

$$2x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x)e^{-2x} - 2x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} + 4x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$$

Iz identiteta $y_p{}'' + 4y_p{}' + 5y_p = 10\cos xe^{-2x}$, metodom neodređenih koeficijenata i rešavanjem sistema sa dve nepoznate dobijamo da je $A = 0$ i $B = 5$.

Opšte rešenje je oblika

$$y = y_h + y_p = \left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)e^{-2x} + 5x\sin xe^{-2x}.$$

ZADATAK 8

Lagranžev metod varijacije konstanti.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2}e^{3x}.$$

Rešenje:

Karakteristični polinom homogene linearne jednačine glasi $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda_{1,2} = 3$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine višestruka. Tada su funkcije $y_1 = e^{3x}$ i $y_2 = xe^{3x}$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje homogene linearne jednačine je oblika

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

Dalje, koristimo Lagranžev metod varijacije konstanti.

Rešavanjem sistema

$$C_1'(x)e^{3x} + C_2'\left(x\right)xe^{3x} = 0$$

$C_1'(x)3e^{3x} + C_2'\left(x\right)\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) = \frac{1}{x^2}e^{3x}$

Kramerovim pravilom, npr.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & 1+3x \end{vmatrix} = 1 + 3x - 3x = 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x^2} & 1+3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}.$$

Imamo da je:

$C_1'(x) = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{x}$

$C_2'(x) = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{x^2}$

$C_1\left(x\right)$ i $C_2\left(x\right)$ se dobijaju rešavanjem integrala

$C_1(x) = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x + D_1,\ C_2(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + D_2.$

Opšte rešenje je oblika

$y = \left(-\ln x + D_1\right)e^{3x} + \left(-\frac{1}{x} + D_2\right)xe^{3x}.$

ZADATAK 9

Koši-Ojlerova jednačina.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$x^2y'' + xy' - y = x^2.$

Rešenje: Ovo je Ojlerova diferencijalna jednačina i nju rešavamo smenom $x = e^t$ $\Rightarrow\ dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$

Tada imamo da je:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t},$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dot{y}_t e^{-t}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}\right)e^{-t} = \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}_t e^{-2t},$

Zamenom dobijenih vrednosti u polaznoj jednačini imamo

$x^2y'' + xy' - y = e^{2t}\left(\ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}_t e^{-2t}\right) + e^t \cdot \dot{y}e^{-t} - y = e^{2t},$

tj.

$\ddot{y} - y = e^{2t}$.

Dobili smo diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća homogena jednačina ima karakterističnu jednačinu je $\lambda^2 - 1 = 0$ koja ima rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$, pa je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Kako je $f(t) = e^{2t}$, tada partikularno rešenje je oblika:

$y_p = Ae^{2t}$.
Tada imamo da je $\dot{y}_p = 2Ae^{2t}$ i $\ddot{y}_p p = 4Ae^{2t}$. Zamenom prethodno dobijenog u jednačini $\ddot{y} - y = e^{2t}$ imamo

$$4Ae^{2t} - Ae^{2t} = e^{2t}.$$

Odavde dobijamo da je $A = \frac{1}{3}$, pa je $y_p = \frac{1}{3}e^{2t}$.

Ukupno je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Vraćajući smenu $x = e^t$ dobijamo opšte rešenje date diferencijalne jednačine po x koje glasi

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2.$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci za dodatni rad studenata.

Zadatak 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = xy' + y'^4$.

Rešenje: Opšte $y = Cx + C_1$, singularno $y = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x\sqrt[3]{x} + C_2$

Zadatak 2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' - 4y = 0$.

Rešenje: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

Zadatak 3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Rešenje: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Zadatak 4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$.

Rešenje: $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$

Zadatak 5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 5y' + 6y = e^x(3 - 4x)$.

Rešenje: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)e^x$

Zadatak 6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2$.

Rešenje: $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{72}x + \frac{37}{864} + C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$

Zadatak 7. Rešiti diferencijalnu jednačinu $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2\ln x$.

Rešenje: $y = \frac{1}{150}x^2\left(5\ln x - x^3\right) - \frac{1}{6}x^4(\ln x + 1) + \frac{D_1}{x} + D_2x^5$

Zaključak za lekciju 08

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG I VIŠEG REDA

Lagranževa i Kleroova jednačina; Homogena i nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa diferencijalnim jednačina višeg reda i to:

- Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstatnim koeficijentima,
- Nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima,
- Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstatnim koeficijentima,
- Nehomogena linearna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima,
- Ojlerova jednačina.

Izloženi su metodi za njihovo rešavanje.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.