UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – prvi deo

Lekcija 01

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 01

NEODREĐENI INTEGRAL – PRVI DEO

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi opšte metode za integraciju i to su: Metod linearnosti, Metod smene, Metod parcijalne integracije

U ovoj lekciji će biti uveden integralni račun realne funkcije jedne realne promenljive. Ovaj račun će biti uveden preko osnovnih pojmova u vezi sa neodređenom integracijom, pravila i osobina neodređenog integrala, tablice neodređenih integral osnovnih funkcija, kao i opštih i specifičnih metoda za integraciju. U ovoj lekciji ćemo obraditi opšte metode za integraciju i to su:

- Metod linearnosti,
- Metod smene i
- Metod parcijalne integracije,

dok će specifične metode biti obrađene u narednoj lekciji.

Poglavlje 1

Primitivna funkcija i neodređeni integral

DEFINICIJA PRIMITIVNA FUNKCIJA

Funkcija $F'(x) = f(x)$ se naziva primitivna funkcija za funkciju $f(x)$.

Može se postaviti pitanje da li postoji suprotna operacija operaciji diferenciranja realnih funkcija jedne realne promenljive, tj. ako je data funkcija $y = f(x)$ može li se odrediti funkcija $F(x)$ takva da je $F'(x) = f(x)$ (ili što je ekvivalentno sa $dF = f(x)dx$)? O tome se govori u nastavku.

Definicija. Neka je data funkcija $f(x)$. Tada njena primitivna funkcija podrazumeva funkciju $F(x)$, za koju je $F'(x) = f(x)$.

Primer. Za funkciju $f(x) = 3x^2$ primitivna funkcija je $F(x) = x^3$, jer je $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Ako posmatramo funkcije iz prethodnog primera koje se dobijaju iz funkcije $F(x) = x^3$ dodadavanjem konstante, tj.

$$x^3 - 2,\ x^3 + \sqrt{2}, x^3 + 12, x^3 + \pi\ \ldots$$

ili u opštem slučaju u obliku $x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R}$ vidimo da i u ovom slučaju važi $(x^3 + c)' = 3x^2 = f(x)$. Dakle, funkcija $x^3 + c$ je takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$.

Generalno, ako je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tada je i $F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ takođe njena primitivna funkcija, jer je $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. Dakle, ako funkcija ima jednu primitivnu funkciju, tada postoji i beskonačan skup ovih funkcija.

Pitanje koje se prirodno nameće je da li skup $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ sadrži sve primitivne funkcije za $f(x)$ ili postoje još neke primitivne funkcije za $f(x)$ van ovog skupa. O tome govori naredni stav.

Stav. Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve proizvoljne primitivne funkcije za $f(x)$ na nekom intervalu $[a, b]$, tada se one razlikuju za konstantu.

EGZISTENCIJA NEODREĐENOG INTEGRALA

Funkcija koja je neprekidna na nekom intervalu ima primitivnu funkciju.

U opštem slučaju, za datu funkciju $y = f(x)$ ne mora postojati nijedna njena primitivna funkcija. Dakle, postavlja se pitanje pod kojim uslovima će ova funkcija imati primitivnu funkciju. Odgovor na ovo pitanje daje naredni stav. U njemu je naveden dovoljan uslov da ovakva funkcija ima svoju primitivnu funkciju.

Stav. Svaka neprekidna funkcija $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ ima primitivnu funkciju.

Napomena. Primitivna funkcija neke funkcije mora biti diferencijabilna na posmatranom intervalu, a samim tim i neprekidna, na osnovu stava koji smo dali u vezi sa odnosom diferencijabilnosti i neprekidnosti.

Primer. Dokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq 0 \\ 2, & \text{za } x > 0 \end{cases}$ nema primitivnu funkciju.

Dokaz. Data funkcija ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste (pokazati za vežbu). Pretpostavimo da ova funkcija ima primitivnu funkciju $F(x)$.

Tada, za $x < 0$ imamo da je $F'(x) = f(x) = 1$, tj. $F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$.

S druge strane, za $x > 0$ imamo da je $F'(x) = f(x) = 2$, tj. $F(x) = 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Dakle, primitivna funkcija je oblika $F(x) = \begin{cases} x + c, & \text{za } x < 0 \\ 2x + c_1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$. Kao što smo rekli primitivna funkcija je neprekidna. To znači da u tački $x = 0$ mora važiti $F(0+) = F(0-) = F(0)$. Kako je

$$F(0+) = \lim_{x \to 0+} (2x + c_1) = c_1 \text{ i } F(0-) = \lim_{x \to 0-} (x + c) = c,$$

tada je $F(0) = c = c_1$. To dalje znači da primitivna funkcija ima oblik $F(x) = \begin{cases} x + c, & \text{za } x \leq 0 \\ 2x + c_1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$. Ova funkcija nije diferencijabilna u tački $x = 0$ (pokazati za vežbu), tako da funkcija $F(x)$ ne može biti primitivna funkcija za funkciju $f(x)$. $\square$

PRIMER

Primitivna funkcija nula funkcije na nekom intervalu (a, b) je konstatna funkcija.

Ako je $F'(x) = 0 = f(x)$ na nekom intervalu (a, b), tada je $F(x)$ konstatna funkcija.

Rešenje. Neka je $x \in (a, b)$ fiksirana vrednost i izaberimo Δx tako da važi $x + \Delta x \in (a, b)$. Prema Lagranževom stavu (iz diferencijalnog računa) postoji $\xi \in (x, x + \Delta x)$ tako da je

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(\xi)\Delta x.$$

Kako je $F'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$, tada je $F'(\xi) = 0$. Odavde dobijamo da je

$$F(x+\Delta x)-F(x)=0, \quad \text{tj.} \quad F(x+\Delta x)=F(x),$$

za svako Δx. Dakle, vrednost funkcije za bilo koje $x+\Delta x \in (a,b)$ je jednako vrednosti funkcije u fiksiranoj tački $x \in (a,b)$ što znači da je posmatrana funkcija konstatna.

NEODREĐENI INTEGRAL

Za uočenu neprekidnu funkciju $y=f(x)$ skup njenih primitivnih funkcija se naziva neodređeni integral.

Definicija. Za uočenu neprekidnu funkciju $y=f(x)$ skup njenih primitivnih funkcija je

$$\{F(x)+c \mid c \in \mathbb{R},\ F-\textbf{jedna uočena primitivna funkcija za } f\},$$

ili kraće zapisano

$$F(x)+c, \quad c \in R.$$

Prethodno dati skup se naziva neodređeni integral funkcije f i označava sa

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Napomena. Uvedena oznaka će biti objekat preko koga će se operativno uvesti integralni račun - to je lakši način nego da je pomenuti račun uvoden preko prethodno pomenutog skupa primitivnih funkcija. U prethodnoj formuli, oznaka $\int$, predstavlja operaciju integraljenja funkcije. Veličina koja stoji pod ovom operacijom naziva se tzv. ''podintegralni izraz'', a funkcija u njemu ''podintegralna funkcija''. Proces nalaženja skupa primitivnih funkcija za neku funkciju f naziva se integracija (u smislu neodređenog integrala).

Proces integracije je suprotan procesu diferencijacije (što će kasnije biti dokazano), a da bi se on ostvario potrebno je generisati metodologiju za njegovo sprovođenje.

Suštinska razlika u procesima diferenciranja i integracije jeste u tome što se prilikom diferenciranja dobija jedinstven rezultat, a prilikom integracije, čitava klasa od beskonačno mnogo funkcija koje se međusobno razlikuju do na konstantu c.

U nastavku biće ukazano na odnos između diferenciranja i integraljenja u smislu neodređenog integrala.

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA NEODREĐENOG INTEGRALA

Neodređeni integral predstavlja familiju krivih koje se dobijaju za različite vrednosti proizvoljne konstante c. One se nazivaju integralne krive linije.

Označimo sa y neodređeni intergral funkcije $f(x)$, tj. stavimo

$$y = \int f(x)dx.$$

Tada je $y = F(x) + c$. Odavde se vidi da neodređeni integral geometrijski predstavlja familiju krivih koje se dobijaju za različite vrednosti proizvoljne konstante c. Ove krive se nazivaju integralne krive linije.

Ako se od ovih krivih traži samo ona koja prolazi kroz tačku (a, b), tada za nju važi

$$b = F(a) + c,$$

tj. za traženu krivu integraciona konstanta ima vrednost $c = b - F(a)$. Stoga, jednačina tražene integralne krive ima oblik $y = F(x) - F(a) + b$.

U ovom slučaju je se radi o tome da se iz skupa primitivnih funkcija odredi ona koja je jednaka b, za $x = a$. Ovaj problem se naziva Košijev problem.

OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

Integraljenje i diferenciranje funkcije u ovom redosledu su svojevrsni suprotni procesi.

$\mathbf{1}^\circ$ Neodređeni integral od diferencijala funkcije $F(x)$ jednak je $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
Zaista, važi da je

$$\int \big(dF(x)\big) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\mathbf{2}^\circ$ Diferencijal neodređenog integrala jednak je podintegralnom izrazu, a izvod neodređenog integrala jednak je podintegralnoj funkciji.
Zaista, iz definicije neodređenog integrala je $\int f(x)dx = F(x) + c$ imamo da je

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = (F(x) + c)'dx = F'(x)dx = f(x)dx,$$

i

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Prema prethodnom može se videti da su i u ovom redosledu diferenciranje i integracija svojevrsno suprotni procesi i da dx nije slučajno sastavni deo oznake za integral.

Napomena. Iako su diferenciranje i integracija suprotni procesi, integracija u odnosu na diferenciranje ima mali hendikep (zbog moći svojih metoda koje je sprovode). Naime, postoje slučajevi kod kojih rezultat integracije postoji, ali se ne može odrediti poznatim metodama (eliptički integrali o kojima ovde nećemo govoriti).

TABLICA INTEGRALA

Neodređenom integracijom neke funkcije, primenom određene metologije ili više njih, polazni integral se svodi na jedan tablični integral ili na zbir više tabličnih integrala.

Za sprovođenje procesa integracije polazna činjenica je tablica integrala, koja se zadaje na osnovu tablice diferencijala za osnovne slučajeve integracije (čitajući tablicu diferencijala unazad uz primenu prethodnog izvođenja). U nastavku je data tablica.

1. $\int 0dx = c,$
2. $\int dx = x + c,$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1;$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\};$
6. $\int e^x dx = e^x + c;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + c, \end{cases}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a > 0;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a > 0;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0;$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, a > 0.$

Napomena. Integrali pod rednim brojevima 13, 14, 15 i 16 nisu tablični integrali, ali ćemo ih prilikom rešavanja zadataka koristiti kao takve. U ovom i narednim predavanjima biće pokazano da oni zaista i važe.

Složeniji integrali, sa kojima ćemo se sretati u ovom i narednim predavanjima, se rešavaju tako što se korišćenjem određene metodologije ili više njih svode na zbir određenog broja tabličnih integrala. Te metodologije se dele na opšte i specifične metode za sprovođenje integracije. Opšte metode su one koje se mogu uvek primenjivati, a specifične su vezane za određene tipove podintegralne funkcije.

Poglavlje 2

Opšte metode za integraciju

UVOD

U opšte metode za integraciju spadaju metod linearnosti, metod parcijalne integracije i metod smene promenljivih.

Metodologija za rešavanje integrala je zasnovana na opštim i specifičnim metodama za sprovođenje integracije. Opšte metode su one koje se mogu uvek primenjivati (bez obzira kog je tipa podintegralna funkcija), a specifične su vezane za određene tipove podintegralne funkcije.
U opšte metode za integraciju spadaju

- Metod linearnosti,
- Metod smene promenljivih i
- Metod parcijalne integracije.

O njima govorimo u nastavku.

2.1 Metod linearnosti

OSOBINA LINEARNOSTI

Metoda linearnosti je jedna od osnovnih osobina neodređenih integrala.

Stav. Neka su date funkcije $y=f(x), x\in A\subseteq\mathbb{R}$ i $y=g(x), x\in A\subseteq\mathbb{R}$, koje su neprekidne na skupu A. Takođe, neka su date konstante $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Tada je

$$\int\Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)dx=\alpha\cdot\int f(x)dx+\beta\cdot\int g(x)dx. \qquad (*)$$

Prethodno data formula predstavlja metod linearnosti odnosna osobina linearnosti neodređenog integrala. Ona u sebi sadrži zapravo dve osobine neodređenih integrala. Naime, sledeća osobina

$$\int\Big(f(x)+g(x)\Big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx, \qquad (**)$$

koja se naziva osobina aditivnosti neodređenog integrala.

S druge strane, osobina

$$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx, \qquad (***)$$

se naziva osobina homogenosti neodređenog integrala. Osobine (**) i (***) se zajedno zadaju formulom (*).

Osobina linearnost se može uopštiti i na proizovoljan broj funkcija. Tada važi

$$\int \Big(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)\Big)dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx + \ldots + k_n \int f_n(x)dx,$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$i $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Studenti treba da obrate pažnju na sledeće

$$\int f(x) \cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx,$$

kao i

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$$

Metod linearnosti se koristi za pojednostavljivanje složenijih zadataka. To će biti ilustrovano sledećim primerom.

PRIMER – 1. DEO

Primena metode linearnosti za razne tipove podintegralnih funkcija.

$$\int \frac{2}{x^3}dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x^3}dx = 2 \cdot \int x^{-3}dx = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c;$$

$$\int\left(5x^3-4x^2-3x+\frac{5}{x}\right)dx=5\int x^3dx-4\int x^2dx-3\int xdx+5\int\frac{dx}{x}=$$
$$\frac{5x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5\ln|x|+c;$$

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}\right)dx=$$
$$\int x^{\frac{3}{4}}dx-\int x^{-\frac{5}{4}}dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}+c=\frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+c;$$

$$\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx=10\int\frac{x^8}{x^4}dx+3\int\frac{dx}{x^4}=10\int x^4dx+3\int x^{-4}dx=2x^5-\frac{1}{x^3}+c;$$

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)x^2}+\int\frac{-x^2dx}{x^2(1+x^2)}=\int\frac{dx}{x^2}-$$
$$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

PRIMER – 2. DEO

Metod linearnosti

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$\int(1-\sin x)dx=\int dx-\int\sin xdx=x+\cos x+c;$$

$$\int\left(4\cos x-\frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}+1\right)dx=4\int\cos xdx-5\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-x^2)}}+\int dx=$$
$$4\sin x-\frac{5}{3}\arcsin x+x+c;$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$- \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + c;$$

$$\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx = \int \frac{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} dx = 2\int dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = 2x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x$$
$$- \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c;$$

$$\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 + x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{6}} dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \ln|x| + c;$$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x \cdot \sin x}{e^x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^x \sin x}{e^x}\right) dx = \int e^x dx + \int \sin x dx = e^x - \cos x$$
$$+ c.$$

PRIMER - 3. DEO

Primena metode linearnosti.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$\int 2^x \cdot 5^{2x} dx = \int (2 \cdot 5^2)^x dx = \int 50^x dx = \frac{50^x}{\ln 50} + C.$$

$$\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx = \int \left(\frac{2^x}{10^x}+\frac{5^x}{10^x}\right)dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C.$$

2.2 Integracija metodom smene

UVOĐENJE SMENE U NEODREĐENI INTEGRAL

Ova metoda se vrlo često koristi u složenijim zadacima da bi se posmatrani zadatak pojednostavio ili sveo na tablični integral.

Neka je $x=\varphi(t)$ monotona funkcija koja je diferencijabilna u intervalu (α,β) i neka ona preslikava taj interval na interval (a,b) u kome je definisana funkcija $f(x)$. Pretpostavimo da je $\varphi(t)\neq 0$ i da je $t=\overline{\varphi}(x)$ inverzna funkcija funkcije $x=\varphi(t)$. Tada važi sledeći stav.

Stav. Ako je $\Phi(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, tada je funkcija $F(x)=\Phi(\overline{\varphi}(t))$ primitivna za funkciju $f(x)$.

Dokaz. Kako je

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

Ako je poznato

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\Phi(t)+c,$$

tada je

$$\int f(x)dx=\Phi(\overline{\varphi}(x))+c \ \text{ ili } \int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Integral na desnoj strani znaka jednakosti poslednje relacije je poznat, te zamenjujući u njemu $t=\overline{\varphi}(x)$ nalazimo integral s leve strane. Desna strana ove relacije dobije se iz leve strane zamenom da je $x=\varphi(t)$ i $dx=\varphi'(t)dt$. $\square$

Naime, formulom

$$\int f(x)dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

dat je Stav o smeni promenljive za neodređeni integral. Ova formula se primenjuje ili samostalno ili u kombinaciji sa nekim drugim metodama, da bi po određenom planu, integracija koja sledi bila jednostavnija (bliža tabličnom integralu, tj. svedena na njega). Nekad se u istom zadatku ova formula mora više puta primenjivati sa istim ili različitim smenama promenljive, samostalno ili u kombinaciji sa drugim metodama. Ako se pretpostavi da se posle prve primene prethodne formule dobije tablični integral po promenljivoj t , tada je

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(t)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Kako je $x=\varphi(t)$ monotona funkcija na (α,β), tada postoji $t=\overline{\varphi}(x)$ (gde je $\overline{\varphi}$ inverzna funkcija za $\varphi(t)$), za $x\in(a,b)$. Na kraju, dobijamo da je $F(x)=\Phi(\overline{\varphi}(x))$, čime je primena metode okončana.

SKORO TABLIČNI INTEGRALI

Najjednostavniji klase funkcija za integraciju primenom metode smene. Takvi integrali se nazivaju skoro tablični integrali.

Sada ćemo govoriti o nekim klasama integrala koje se mogu rešavati metodom smene. Integrali oblika:

$$\int e^{ax+b}dx;$$

$$\int \sin(ax+b)dx;$$

$$\int \cos(ax+b)dx;$$

$$\int (ax+b)^n dx;$$

$$\int \frac{dx}{ax+b};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)};$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)}.$$

gde su $a,b,n\in\mathbb{R},a\neq 0,n\neq -1,$jednostavnom smenom $ax+b=t,dx=\frac{1}{a}dt,$svode se na odgovarajuće tablične integrale.

PRIMER 1

Primeri uvođenja smene za prethodno date tipove funkcija.

Rešimo sledeće integrale:

a) $\int (5-2x)^9 dx$; b) $\int \frac{dy}{3y+2}$; c) $\int e^{-\frac{1}{2}x-4} dx$.

Rešenje.

a)

$$\int (5-2x)^9 dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 5-2x=t \\ dx=-\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int t^9 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^9 dt = -\frac{t^{10}}{20} + c = -\frac{(5-2x)^{10}}{20} + c;$$

b)

$$\int \frac{dy}{3y+2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 3y+2=t \\ dy=\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|3y+2| + c;$$

c)

$$\int e^{-\frac{1}{2}x-4} dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ -\frac{1}{2}x-4=t \\ dx=-2dt \end{bmatrix} = -2\int e^t dt = -2e^t + c = -2e^{-\frac{1}{2}x-4} + c.$$

FORMULE ZA SKORO TABLIČNE INTEGRALE

Ovako date skoro tablične integrale bi trebalo usvojiti, kao tablične integrale, jer se tako ubrzava rad.

S obzirom na jednostavnost rešavanja ovakvih oblika integrala, bilo bi korisno usvojiti sledeću tablicu ($a, b, n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$):

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c;$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{\mathrm{tg}(ax+b)}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{\mathrm{ctg}(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{\ln(ax+b)}{a} + c$$

Uopšteno govoreći, važi da ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, tada $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

INTEGRACIJA NEKIH TIPOVA IRACIONALNIH FUNKCIJA METODOM SMENE

Integracija funkcija koje se svodi na tablični integral čija je primtivna funkcija $y = \arcsin x$.

U nastavku ćemo rešiti nekoliko integrala koji se jednostavnom smenom svode na tablični integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

Svakako, može se izvesti sledeća formula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c,$$

koji se nalazi u tablici integrala zbog njegovog čestog korišćenja.

Specijalno, za $b = 1$ iz prethodne formule imamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Napomena. Na ispitu je dozvoljeno koristiti prethodne dve formule prilikom rešavanja integrala.

Naredne primere rešavamo bez primene pomenutih formula, kako bismo mogli da uvežbamo postupak rešavanja.

PRIMER 2

Primer integracije funkcija koje se svodi na tablični integral čije je rešenje funkcija $y = \arcsin x$.

Rešimo sledeće integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{16x^2}{9}\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{3}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{4x}{3}=t \\ dx=\frac{3}{4}dt \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + c = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4x}{3}\right) + c;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{3-(x^2)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2=t \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{3-t^2}} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{3\left(1-\frac{t^2}{3}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{t}{\sqrt{3}}=u \\ dt=\sqrt{3}du \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + c = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + c;$$

$$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}} = \int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-3^{2x}}} \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 3^x=t \\ 3^x dx=\frac{dt}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{25-t^2}} =$$

$$\frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{25\left(1-\frac{t^2}{25}\right)}} = \frac{1}{5\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{5}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{t}{5}=u \\ dt=5du \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{5\ln 3}\int \frac{5du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\arcsin u + c = \frac{1}{\ln 3}\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) + c = \frac{1}{\ln 3}\arcsin(\frac{3^x}{5}) + c;$$

$$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-2\sin^2 x}} = \int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \sqrt{2}\sin x=t \\ \cos xdx=\frac{dt}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin t + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x) + c.$$

INTEGRACIJA NEKIH TIPOVA RACIONALNIH FUNKCIJA METODOM SMENE

Integracija funkcija koje se svodi na tablični integral čija je primtivna funkcija $y = \operatorname{arctg} x$.

U nastavku ćemo rešiti nekoliko integrala koji se jednostavnom smenom svode na tablični integral

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

Može se izvesti sledeća formula:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a} + c,$$

koji je dat kao tablični integral zbog njegovog čestog korišćenja.
Specijalno, za $b = 1$ iz prethodne formule imamo:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

Na ispitu je dozvoljeno koristiti prethodne dve formule prilikom rešavanja integrala.
Naredne primere rešavamo bez primene pomenutih formula, kako bismo mogli da uvežbamo postupak rešavanja.

PRIMER 3

Primer integracije funkcija koje se svodi na tablični integral čije je rešenje funkcija $y = \operatorname{arctg} x$.

Rešimo sledeće integrale:
a)

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{x}{2} = t \\ dx = 2dt \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c;$$

b)

$$\int \frac{dx}{25+16x^2} = \int \frac{dx}{25\left(1+\frac{16x^2}{25}\right)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{4x}{5} = t \\ dx = \frac{5}{4}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{25}$$

$$\int \frac{\frac{5}{4}dt}{1+t^2} = \frac{1}{20}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{20}\text{arctg}\, t + c = \frac{1}{20}\text{arctg}\left(\frac{4x}{5}\right) + c;$$

c)

$$\int \frac{x^2dx}{16+9x^6} = \int \frac{x^2dx}{16+9(x^3)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^3 = t \\ x^2dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{16+9t^2}$$

. Zadatak se dalje rešava kao pod b).

d)

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\, t + c = \text{arctg}(\ln x) + c.$$

INTEGRALI RAZNIH KLASE FUNKCIJA ZAJEDNO SA SVOJOM IZVODNOM FUNKCIJOM

Prilikom rešavanja integrala o ovome treba voditi računa, jer se može desiti da se integral ne može rešiti na drugi način ako se ne uoči ova osobina.

U nastavku navodimo integrale oblika:

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c;$$

$$\int f'(x)\cdot \sin[f(x)]dx = -\cos[f(x)] + c;$$

$$\int f'(x)\cdot \cos[f(x)]dx = \sin[f(x)] + c;$$

$$\int f'(x)\cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\cos^2[f(x)]} = \text{tg}[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sin^2[f(x)]} = -\text{ctg}[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]} = \ln[f(x)] + c,$$

koji se rešavaju smenom $f(x) = t,\ f'(x)dx = dt, n \in \mathbb{R}, n \neq -1.$

PRIMER 4

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalaze stepena funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

Primer. Posmatrajmo postupak rešavanja sledećih integrala:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ 1+x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c;$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ x^2+x-3 = t \\ (2x+1)dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \mid x^2+x-3 \mid + c;$$

$$\int \frac{6x+5}{2x^2+1}dx = 6\int \frac{x}{2x^2+1}dx + 5\int \frac{dx}{2x^2+1} = \text{završiti za vežbu;}$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ x^3+1 = t \\ x^2dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = 13\ln \mid x^3+1| + c;$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ x^2+1 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + c =$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + c;$$

$$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \int \frac{xdx}{(x^2)^2+1} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$
$$+ c = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}(x^2) + c.$$

PRIMER 5

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi iracionalna, trigonometrijska ili eksponencijalna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{t} + c$$
$$= \frac{1}{\cos x} + c;$$

$$\int (6x+12)\cos(x^2+4x)dx = 3\int (2x+4)\cos(x^2+4x)dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+4x = t \\ (2x+4)dx = dt \end{bmatrix} =$$
$$= 3\int \cos t dt = 3(-\sin t) + c = -3\sin(2x+4) + c;$$

$$\int \frac{e^x}{5+e^x}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ e^x+5 = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln(5+e^x) + c;$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{bmatrix} = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c;$$

VIDEO KLIP 1

Dodatni primeri sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 6

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi logaritamska funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

Rešiti sledeće integrale:
a)

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1+\ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|1+\ln x| + c;$$

b)

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln t = u \\ \frac{dt}{t} = du \end{bmatrix} =$$
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln t| + c = \ln|\ln(\ln x)| + c;$$

Napomena. Zadatak je moguće rešiti i uvođenjem smene $\ln(\ln x) = t$.

c)

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t^3 \\ \frac{dx}{x} = 3t^2 dt \end{bmatrix} = \int 3t^3 dt = \frac{3}{4}t^4 + c = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{\ln x})^4 + c.$$

Napomena. U poslednjoj jednakosti smo iz smene $\ln x = t^3$, iskoristili da je $t = \sqrt[3]{\ln x}$.

PRIMER 7

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi iracionalna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

$$\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1-x^2 = t^2 \\ xdx = -tdt \end{bmatrix} =$$
$$= \arcsin x - \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2}} = \arcsin x - \int dt = \arcsin x - t + c =$$
$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 4+x^5 = t^2 \\ x^4 dx = \frac{2}{5}tdt \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\int \frac{tdt}{t} = \frac{2}{5}t + c = \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + c.$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+1 = t^2 \\ xdx = tdt \end{bmatrix} = \int t\sqrt{t^2}dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}$$
$$+ c;$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \int x\cdot x^2\sqrt{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+1=t^2 \Rightarrow x^2=t^2-1 \\ xdx = tdt \end{bmatrix} =$$
$$= \int (t^2-1)\sqrt{t^2}\,tdt = \int (t^4-t^2)dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+c =$$
$$= \frac{(\sqrt{x^2+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + c.$$

VIDEO KLIP 2

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

NEKI INTEGRALI IRACIONALNIH FUNKCIJA KOJI SE SVODE NA TABLIČNE

Svođenje na tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c.$

Izračunati sledeći integral

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx.$$

Rešenje. Najpre ćemo dati integral transformisati na sledeći način

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-27}}.$$

Sada, imamo da je

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+6x-27=u^2 \\ (2x+6)dx = 2udu \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{\sqrt{u^2}} = u + c_1 =$$
$$= \sqrt{x^2+6x-27} + c_1.$$

S druge strane, kako je $x^2+6x-27=(x+3)^2-36,$ imamo da je

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x+3=t \\ dx = tdt \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-36}} = 2\ln\left|t+\sqrt{t^2-36}\right| =$$

$$= 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + c_2.$$

Napomena. Korišćenjem integrala pod rednim brojem 16 iz tablice integrala smo dobili da je

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-36}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-36}\right|.$$

Sada, ukupno dobijamo da je

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \sqrt{x^2+6x-27} + 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + C,$$

gde je $C = c_1 + c_2$.

VIDEO KLIP 3

Dodatni primeri sa Youtube-a - metod smene

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Metod parcijalne integracije

FORMULA ZA PARCIJALNU INTEGRACIJU

Metod parcijalne integracije se dobija iz pravila za izvod prozvoda dve funkcije.

Metod parcijalne integracije daje delimičan odnos između integraljenja i množenja dve funkcije (samim tim i deljenja). Neka su date dve funkcije $y = u(x)$ i $y = v(x)$, $x \in A \subseteq R$, koje su diferencijabilne sa neprekidnim funkcijama na A. Za funkciju $h(x) = u(x) \cdot v(x),$ za $x \in A$ je

$$dh(x) = d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv,$$

pa je

$$d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du = u(x)dv,\ x \in A.$$

Ako integralimo prethodni izraz dobijamo

$$\int (d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du) = \int u(x)dv.$$

Primenom metode linearnosti za neodređeni integral imamo da je

$$\int u(x)dv = \int d\big(u(x) \cdot v(x)\big) - \int v(x)du.$$

Prema tome, važi da je

$$\int u(x)dv = u(x) \cdot v(x) + c_1 - \int v(x)du,$$

odnosno

$$\int u(x)dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du,$$

gde se c_1 pridružuje konstanti c_2 iz integrala na desnoj strani poslednje formule i čine konstantu ukupnog rešenja c ($c = c_1 + c_2, c \in \mathbb{R}$). Uzima se da je $c = 0$. Poslednja formula naziva se formula parcijalne integracije, koja se može napisati u obliku

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Poslednja formula se najčešće koristi pri rešavanju zadataka.

KADA PRIMENITI PARCIJALNU INTEGRACIJU?

Primena parcijalna integracija može pojednostavljivati polazni integral pažljivim odabirom funkcija za u i v', a može ga komplikovati ako je odabir pogrešan.

Primena metode parcijalne integracije naročito se preporučuje u sledećim slučajevima:

- kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, za u se uzima polinomska funkcija, a za v' se uzima funkcija eksponencijalnog tipa;

- kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne trigonometrijskog tipa, za u se uzima funkcija polinomskog tipa, a za v' funkcija trigonometrijskog tipa;

- kada se integrali proizvod jedne funkcije trigonometrijskog tipa i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, tada je potpuno svejedno šta se uzima za u, a šta za v', ali se do kraja principijelno mora primenjivati izabrana varijanta;

- kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije logaritamskog tipa, za u uzećemo funkciju logaritamskog tipa, a za v' funkciju polinomskog tipa;

- kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne inverzne trigonometrijske funkcije, za u uzećemo inverznu trigonometrijsku funkciju, a za v' funkciju polinomskog tipa.

Napomena. Metod parcijalne integracije se može, svakako, koristiti i kod drugih tipova podintegralnih funkcija, a ne samo kod navedenih. U nastavku je i naveden primer kada se ova metoda može koristiti kod određenih tipova integracije iracionalnih funkcija.

Napomena. Primenom parcijalne integracije se polazni integral, pažljivim odabirom funkcija za u i v', pojednostvaljuje. S druge strane, polazni integral se može iskomplikovati ako je ovaj odabir pogrešan. U mnogim zadacima, parcijalna integracija se primenjuje nekoliko puta uzastopno, dok se početni problem ne svede na tablični integral (uz pomoć drugih metoda ili samostalni), a u prva dva slučaja ona se primenjuje onoliko puta koliki je vodeći stepen polinoma pod integralom. U trećem slučaju se specifično primenjuje, i to najmanje dva puta.

PRIMER 1

Primena metoda parcijalne integracije.

Rešimo sledeći integral:

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx.$$

Rešenje. Označimo sa I dati integral. Tada je

$$I = \begin{bmatrix} \text{parc. integracija:} & \\ u = \sqrt{x^2+4}, & dv = dx \\ du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx, & v = x \end{bmatrix} = x\cdot\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx + \int \frac{4\,dx}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+4} - \overbrace{\int \sqrt{x^2+4}\,dx}^{I} + \ln|x+\sqrt{x^2+4}|.$$

Sada imamo da je

$$I = x\cdot\sqrt{x^2+4} - I + \ln|x+\sqrt{x^2+4}|,$$

tj.

$$2I = x\cdot\sqrt{x^2+4} + \ln|x+\sqrt{x^2+4}|.$$

Konačno je

$$I = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+4} + \ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right) + c.$$

Napomena. Rezultat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c.$$

je dat u tablici integrala.

PRIMER 2

Rešavanje integrala čija podintegralna funkcija predstavlja proizvod polinomske i logaritamske funkcije.

Rešiti integral

$$\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx.$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom parcijalne integracije. Tada imamo da je

$$\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx = \left| \begin{array}{ll} \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)=u, & dx=dv \\ \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=du, & x=v. \end{array} \right| =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} \left| \begin{array}{c} smena: \; 4+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array} \right| =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dx = x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \sqrt{4+x^2}+C.$$

PRIMER 3

Rešavanje integrala čija podintegralna funkcija predstavlja proizvod eksponencijalne i triginometrijske funkcije.

Rešimo sledeći integral

$$\int e^x \cdot \sin x dx.$$

Rešenje. Označimo sa I dati integral. Neka je $u(x)=\sin x$ i $v'(x)dx=e^x dx$. Tada je $u'(x)=\cos x dx$ i $v(x)=\int e^x dx = e^x$,za $c=0$. Tada dobijamo

$$I = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx.$$

Na poslednji integral primenimo još jednom parcijanu integraciju. Tu je $u(x)=\cos x$ i $v'(x)dx=e^x dx$. Tada je $u'(x)=-\sin x dx$ i $v(x)=\int e^x dx = e^x$,za $c=0$. Sada dobijamo

$$I = e^x \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \int \sin x e^x dx\right) = e^x(\sin x - \cos x) - \underbrace{\int e^x \cdot \sin x dx}_{I},$$

pa je

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

i konačno

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Integracija pomoću rekurzivnih formula

REKURZIVNA FORMULA

Rekurzivna formula omogućava da se integral I_n svede na jednostavniji integral, a u nekim slučajevima i da se dođe do vrednosti ovog integrala.

Integracija pomoću rekurzivnih relacija nije poseban metod u integraciji u teoriji neodređene integracije, ali se može u nekim slučajevima primeniti.

Ako podintegralni izraz u neodređenom integralu (osim integracione konstante) zavisi od prirodnog broja n, tada ga često označavamo sa I_n. Slično, integrali označeni sa $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots$ predstavljaju integrale istog oblika, kao i integral I_n koji se iz njega dobijaju, zamenjujući n tim redom sa $n-1, n-2, \ldots$ Ako je moguće integral I_n izraziti preko integrala $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots$ do odgovarajućeg integrala sa najmanjim indeksom, dolazi se do relacije koja se naziva rekuzivna formula. Rekurzivna formula omogućava da se integral I_n svede na jednostavniji, a u nekim slučajevima i da se dođe do vrednosti ovog integrala.

Primer. Izračunati

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rešenje. Rekurzivnu formulu dobićemo pomoću parcijalne integarcije

$$\begin{aligned}
I_n = \int \sin^n x dx &= \left| \begin{matrix} \sin^{n-1} x = u & \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n \geq 2$ je

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x,$$

pri čemu je

$$I_1 = -\cos x + C, \quad I_0 = x + C.$$

Značaj ove formule je u tome što sada možemo izračunati bilo koji integral ovog tipa. Na primer,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 - \frac{1}{2} \cos x \sin x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \sin x + c.$$

Na sličan način možemo odrediti $I_3, I_4, \ldots$, pri čemu za određivanje ovih integrala, kao i integrala I_2 moramo znati I_1 i I_0 koji se nazivaju početne vrednosti, jer se preko njih određuju ostali integrali ovakvog oblika.

Poglavlje 5

Vežba

ZADATAK 1

Metod linearnosti

1) $\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

2) $\int (x+1)x^{\frac{1}{3}}dx = \int \left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} + \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C = 3x\sqrt[3]{x}\left(\frac{x}{7} + \frac{1}{4}\right) + C$

3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \operatorname{arctg} x + C$

4) $\int \left(3\sin x + 4e^x - \frac{5}{x}\right)dx = 3\int \sin x \, dx + 4\int e^x \, dx - 5\int \frac{1}{x} \, dx = \; = -3\cos x + 4e^x - 5\ln|x| + C$

5) $\int \frac{2^{3x}}{3^{2x}}dx = \int \frac{8^x}{9^x}dx = \int \left(\frac{8}{9}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln\frac{8}{9}} + C = \frac{1}{\ln\frac{8}{9}}\left(\frac{8}{9}\right)^x + C$

ZADATAK 2 – 1. DEO

Skoro tablični integrali.

$$\int e^{-3x+2}dx = \left(\begin{array}{c} \text{smena}: \\ -3x+2 = t \\ dx = \frac{dt}{-3} \end{array}\right) = \int e^t \frac{dt}{-3} = \frac{e^t}{-3} + C = -\frac{e^{-3x+2}}{3} + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left(\begin{array}{c} \text{smena}: \\ \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array}\right) = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{3-\left(x^2\right)^2}}=\begin{bmatrix}\text{smena}:\\ x^2=t\\ xdx=\frac{dt}{2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{3-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{3\left(1-\frac{t^2}{3}\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=\begin{bmatrix}\text{smena}:\\ \frac{t}{\sqrt{3}}=u\\ dt=\sqrt{3}du\end{bmatrix}==\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{}{\sqrt{}}$$

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\cos 2x}}=\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}=\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}}=\begin{bmatrix}\text{smena}:\\ \sqrt{2}\sin x=t\\ \cos xdx=\frac{dt}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}==\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin t+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+c$$

Ovde smo koristili $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

ZADATAK 2 – 2. DEO

Skoro tablični integrali

$$\int\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}=\begin{bmatrix}\text{smena}:\\ \ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\text{arctg}\quad t+c=\text{arc}(\ln x)+c.$$

$$\int\frac{x^2dx}{16+9x^6}=\int\frac{x^2dx}{16+9\left(x^3\right)^2}=\begin{bmatrix}\text{smena}:\\ x^3=t\\ x^2dx=\frac{dt}{3}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{1}{3}dt}{16+9t^2}=\text{završiti}\quad\text{za}\quad\text{vežbu.}$$

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\begin{vmatrix}e^x=t\\ e^xdx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}e^x+C.$$

ZADATAK 3

Metod parcijalne integracije

$$\int x^2e^{2x}dx = \begin{pmatrix} u = x^2 & dv = e^{2x}dx \\ du = 2xdx & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int 2x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

$$\int (x+1)e^{-x}dx = \begin{pmatrix} u = x+1 & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{pmatrix} =$$

$$= -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx$$

$$= -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+2)e^{-x} + C$$

$$\int \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int dx = x \end{pmatrix} =$$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \left(x^2 - 2x\right)\sin xdx = \begin{pmatrix} u = x^2 - 2x & dv = \sin xdx \\ du = (2x-2)dx & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(x^2 - 2x\right)\cos x - \int -(2x-2)\cos xdx =$$

$$= -\left(x^2 - 2x\right)\cos x + \int (2x-2)\cos xdx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = 2x - 2 & dv = \cos xdx \\ du = 2dx & v = \int \cos xdx = \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(x^2 - 2x\right)\cos x + (2x-2)\sin x - \int 2\sin xdx =$$

$$= -\left(x^2 - 2x\right)\cos x + (2x-2)\sin x + 2\cos x + C =$$

$$= \left(-x^2 + 2x + 2\right)\cos x + (2x-2)\sin x + C$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 4

Metod parcijalne integracije.

$$I=\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx=\begin{pmatrix} u=\ln^2 x & dv=\sqrt{x}dx \\ du=2\ln x\frac{1}{x}dx & v=\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\end{pmatrix}==\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln^2 x-\int\frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}$$

Rešavamo integral $\int\sqrt{x}\ln x dx$

$$\int\sqrt{x}\ln x dx=\begin{pmatrix} u=\ln x & dv=\sqrt{x}dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\end{pmatrix}=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\int\frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\frac{2}{3}\int\sqrt{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln x-\frac{2}{3}$$

Vratimo dobijenu vrednost u početni integral i dobijamo:

$$I=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)\right)+C=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)\right)+\ =\frac{2x\sqrt{x}}{3}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$$

VIDEO KLIP 2

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 5

Primena parcijalne integracije.

Izračunati

$$\int\sin(\ln x)dx \qquad \text{i} \qquad \int\cos(\ln x)dx.$$

Rešenje. Neka je $A=\int \sin(\ln x)dx$ i $B=\int \cos(\ln x)dx$. Tada važi

$$A=\int \sin(\ln x)dx=\left|\begin{matrix} \sin(\ln x)=u & dx=dv \\ du=\frac{1}{x}\cos(\ln x)dx & v=x \end{matrix}\right|=$$

$$=x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-B=$$

$$=\left|\begin{matrix} \cos(\ln x)=u & dx=dv \\ du=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx & v=x \end{matrix}\right|=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-A.$$

Dakle,

$$A=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C.$$

Dalje, iz jednakosti $A=x\sin(\ln x)-B$ dobijamo

$$B=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C.$$

ZADATAK 6

Rešavanje integrala čija podintegralna funkcija predstavlja proizvod polinomske i triginometrijske funkcije.

Rešiti sledeći integral

$$\int \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Rešenje.

$$\int \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\left|\begin{matrix} x=u & \frac{dx}{\cos^2}=dv \\ dx=du & \operatorname{tg} x=v \end{matrix}\right|=x\cdot\operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg} xdx=$$
$$=x\cdot\operatorname{tg} x-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx\left|\begin{matrix} \cos x=u \\ -\sin xdx=dx \end{matrix}\right|=x\cdot\operatorname{tg} x+\int\frac{du}{u}=$$
$$=x\cdot\operatorname{tg} x+\ln|u|+c=x\cdot\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+c.$$

Zadatak može da se uradi i na sledeći način

$$\int \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{x\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int x\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx+\int xdx=$$
$$=\int x\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx+\frac{x^2}{2}\left|\begin{matrix} x=u & \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx=dv \\ dx=du & \operatorname{tg} x-x=v \end{matrix}\right|=$$
$$=x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}-\int(\operatorname{tg} x-x)dx=$$
$$=x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$$

ZADATAK 7

Svođenje integrala metodom smene na tablične integrale.

Izračunati sledeće integrale:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}; \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}; \qquad \text{c)} \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$$

Rešenje.

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{1}{2}=t \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \ln\left| t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \right| + C = \ln\left| \left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + C =$$

$$= \ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x} \right| + C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \ln\left| t + \sqrt{t^2+4} \right| + C = \ln\left| x - 1 + \sqrt{x^2-2x+5} \right| + C.$$

c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+2}{3} + C.$$

Zadaci pod a) i b) se rešavaju Ojlerovom smenom, o kojoj će biti reči na narednom predavanju. Ovde smo koristili integral pod rednim brojem 16 iz tablice integrala za njihovo rešavanje.

ZADATAK 8

Integrali koji se svode na tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$

Izračunati sledeći integral

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx;$$

Rešenje.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{27+6x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-12}{\sqrt{27+6x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 6\arcsin\frac{x-3}{6} + C.$$

ZADATAK 9

Integracija pomoću rekurzivnih formula

Izračunati

$$I_n = \int \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rešenje. Rekurzivnu formulu dobijamo parcijalnom integracijom

$$I_n = \int \cos^n x dx = \left| \begin{array}{cc} \cos^{n-1} x = u & \cos x dx = dv \\ du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx =$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x) dx =$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Dakle, za $n \geq 2$ je

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x,$$

pri čemu je

$$I_1 = \sin x + C, \quad I_0 = x + C.$$

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba dodatno da provežbaju.

Rešiti integrale

$\int(2x - 3\sin x + \cos x)dx$

rešenje: $x^2 + 3\cos x + \sin x + C$

$\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

rešenje: $\frac{8}{15}x^{15/8} + C$

$\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$

rešenje: $x + \operatorname{arctg} x + C$

$\int x^2(3-x)^4dx$

rešenje: $\frac{x^7}{7} - 2x^6 + 54\frac{x^5}{5} - 27x^4 + 27x^3 + C$

$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

rešenje: $\operatorname{tg} x - x + C$

$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+5}}$ rešenje: $\frac{1}{6}(2x+5)\sqrt{2x+5} - \frac{5}{2}\sqrt{2x+5} + C$

$\int\frac{dx}{(x-2)^3}$ rešenje: $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C$

$\int\frac{dx}{x^2+3}$ rešenje: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

$\int \ln x \, dx$ rešenje: $x(\ln x - 1) + C$

$\int x^2e^{-x}dx$ rešenje: $-\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x} + C$

$\int x \cos x \, dx$ rešenje: $x \sin x + \cos x + C$

Napomena. Internet studenti treba da se za sve domaće zadatke jave asistentima koji su predviđeni za rad sa njima. Potrebno je detaljno pročitati plan i program predmeta koji se nalazi na LAMS-u u okviru ovog predmeta, gde ćete naći i ime asistenta koji je predviđen za rad sa Vama. U njemu ćete takođe naći i termine u kojima se drže konsultacije na Skype-u, posebno sa profesorom posebno sa asistentom. Takođe, možete nas kontaktirati i putem e-maila.

Zaključak za lekciju 01

NEODREĐENA INTEGRACIJA

Metod linearnosti, metod smene promenljivih, metod parcijalne integracije.

U ovoj lekciji je uveden integralni račun realne funkcije jedne realne promenljive, kao i opšte metode za njegovo rešavanje i to su:

- Metod linearnosti,
- Metod smene promenljivih,
- Metod parcijalne integracije.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Uščumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.