UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Brojni redovi

Lekcija 09

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 09

BROJNI REDOVI

UVOD

Brojni redovi

Ova lekcija je posvećena izučavanju osnovnog pojma iz matematičke analize – brojnom redu. U njoj će biti izučen pojam brojnog reda kako sa nenegativnim članovima, tako i sa znakopromenljivim članovima. Centralno mesto u radu sa ovim veoma bitnim matematičkim pojmovima jeste odredjivanje njihove konvergencije i tome će biti posvećena posebna pažnja. Naime, biće uvedeni razni kriterijumi za ispitivanje konvergencije brojnog reda.

Poglavlje 1

Brojni niz

DEFINICIJA

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks.

Za uočeni neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ i neprazan skup $B \subseteq \mathbb{R}$, svaku uređenu trojku (A, B, f) gde je f pravilo po kojem se, na jednoznačan način, svakom $x \in A$ dodeljuje tačno jedno $y \in B$ naziva se realna funkcija jedne realne promenljive. Za pomenutu funkciju najčešća oznaka je $y = f(x),\ \ x \in A$, tj. kada je ona zadata u eksplicitnom obliku, što će ovde biti slučaj.

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks. Dakle,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots \end{array}$$

Element iz skupa A kome je indeks 1 naziva se prvim članom niza i označava se sa a_1. Analogno, a_2 je drugi član niza, a_3 je treći član niza i tako redom, uopšte a_n je $n-$ ti član niza, za $n \in \mathbb{N}$. Član a_n se naziva opšti član niza , koji igra veoma važnu ulogu u određivanju osobina posmatranog niza. Drugim rečima, za svaku funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kažemo da je jedan brojni (realan niz) i to se zapisuje: $a_n = f(n), (n \in \mathbb{N})$.

Niz sa članovima $a_n, (n \in \mathbb{N})$ se označava sa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili kraće sa (a_n). Nizovi se najčešće zadaju preko opšteg člana. To je ilustrovano narednim primerom.

Primer. Niz prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz parnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz neparnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n - 1$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz recipročnih vrednosti prirodnim brojevima se zadaje sa $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz čiji je opšti član $a_n = f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je od posebnog interesa u matematici.

Nizovi mogu biti sa konačnim brojem članova i tada se nazivaju konačni nizovi, dok ako imaju beskonačno mnogo članova, tada se nazivaju beskonačni nizovi. Ovde će biti proučavane osobine beskonačnih nizova.

OGRANIČENOST BROJNOG NIZA

Za niz se kaže da je ograničen ako je ograničen i odozdo i odozgo. Supremum (infimum) niza (ako postoji) predstavlja njegovo najmanje (najveće) gornje (donje) ograničenje.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozgo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \leq M$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako gornje ograničenje niza (a_n) naziva se $majoranta$ za taj niz.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozdo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \geq m$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako donje ograničenje niza (a_n) naziva se $minoranta$ za taj niz.

Niz (a_n) je ograničen niz ako je ograničen i odozdo i odozgo. To, zapravo, znači da se svi članovi tog niza nalaze u intervalu $[m, M]$.

Primer. Niz $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je ograničen niz, jer je:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

Očigledno je $1 < a_n < 2$, gde je broj 1 minoranta, a broj 2 majoranta niza.
U prethodnom primeru su samo grubo određene granice u kojima se vrednosti niza nalaze. Može se postaviti pitanje da li se za dati niz mogu preciznije odrediti granice intervala u kojima se nalaze sve vrednosti niza.

Broj G se naziva $supremum$ niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq G,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N}) a_{n_1} > G - \varepsilon.$$

Ako je supremum niza konačan broj, tada se piše da je $\sup{(a_n)} = G$, a u suprotnom po definiciji je $\sup{(a_n)} = +\infty$. Ako supremum pripada nizu naziva se maksimum i označava se sa $\max{(a_n)}$.

Broj g se naziva $infimum$ niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq g,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N}) a_{n_2} < g + \varepsilon.$$

Ako takav konačan broj postoji tada se piše da je $\inf{(a_n)} = g$, a u suprotnom po definiciji je $\inf{(a_n)} = -\infty$.
Ako infimum pripada nizu naziva se minimum i označava se sa $min(a_n)$.

Za posmatrani niz (a_n), ako postoje vrednosti za $n \in \mathbb{N}$ takve da nije ispunjen uslov $|a_n| < M$, gde je M realan broj koji ne zavisi od n , tada se kaže da taj niz nije ograničen, tj. da je neograničen.

Primer. Niz $a_n = \frac{n^2+1}{n-1}$, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ je neograničen niz. Zaista

$$|a_n| = \left| \frac{n^2+1}{n-1} \right| > \frac{n^2-1}{n-1} = n+1 > M,$$

za $n = 2, 3, 4 \ldots$

MONOTONOST NIZA

Rastući nizovi su ujedno i neopadajući, ali obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Niz (a_n) se naziva rastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n > 0$.

Niz (a_n) se naziva neopadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Niz (a_n) se naziva opadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n < 0$.

Niz (a_n) se naziva nerastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Nizovi koji imaju jednu od pobrojanih osobina se nazivaju monotoni nizovi.

> **Napomena.** Treba uočiti da su rastući nizovi ujedno i neopadajući, a obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Neka je (a_n) niz pozitivnih brojeva, tj. važi $a_n > 0, (\forall n \in \mathbb{N})$. Tada je niz (a_n) rastući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, a (a_n) je opadajući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

DEFINICIJA PODNIZA

Za zadati niz se na beskonačno mnogo načina može, od njega, formirati novih nizova koji predstavljaju njegove podnizove

Ako je zadat niz (a_n) od njega se na beskonačno mnogo načina može formirati novi niz a_{n_k}, tj niz

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

gde su indeksi n_k prirodni brojevi takvi da važi $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$Ovako formirani niz naziva se podniz niza (a_n).

Primer. Od niza $(a_n) = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ tj.

$$-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$$

možemo formirati npr. dva podniza uzimajući da prvi podniz, u oznaci (a'_{n_k}) čine članovi niza za koje je $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ a drugi u oznaci (a''_{n_k}) za koje je $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz (a'_{n_k}) koji ima članove

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$$

je opadajući niz dok je niz (a''_{n_k}) koji ima članove

$$-2, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, -\frac{10}{9}, \ldots$$

je rastući niz. Primetimo da početni niz nije monoton ali se sastoji od monotonih podnizova.

DEFINICIJA TAČKE NAGOMILAVANJA NIZA

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza.

Definicija. Broj a je tačka nagomilavanja niza (a_n) ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podniz (a_{n_k}) datog niza takav da svi elementi datog podniza imaju osobinu $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza. Niz ne mora imati tačke nagomilavanja, a ako ih ima, tada može imati jednu ili više takvih tačaka. Ako postoji tačka nagomilavanja nekog niza ona može, a i ne mora pripadati tom nizu. Niz iz prethodnog primera ima dve tačke nagomilavanja i to su broj 1 (za one članove koji su pozitivni) i broj -1 (za one članove koji su negativni).

Sada, će biti dat iskaz jednog važnog stava, koji daje vezu između ograničenosti niza i postojanja tačaka nagomilavanja.

Stav. (Bolcano–Vajerštrasov stav). Ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Pod pretpostavkom da je posmatrani niz i monoton, tada važi sledeći stav.

Stav. Svaki ograničeni i monoton niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
Primer. Niz $a_n = (-1)^n,\ n = 1,2,3,\ldots$ ima dve tačke nagomilavanja. Naime, $a_{2k} = 1$, za $n = 2k,\ k = 1,2,3,\ldots$ dok je $a_{2k-1} = -1$, za $n = 2k-1,\ k = 1,2,3,\ldots$

Niz $a_n = n,\ n = 1,2,3,\ldots$ je niz koji nema tačaka nagomilavanja, (ovo je neograničen niz).

Niz $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,\ldots$ ima jednu tačku nagomilavanja, jer se svi članovi tog niza okupljaju oko vrednosti 0.

DEFINICIJA KONVERGENCIJE BROJNOG NIZA

Za ispitivanje osobine konvergentnosti nekog brojnog niza dovoljno je tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se izostaviti konačno mnogo početnih članova tog niza).

Za posmatrani niz, najvažnije pitanje je pitanje njegove konvergencije.

Definicija. Za niz (a_n) se kaže da je konvergentan ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ i da pri tom važi da je $|a_n - A| < \varepsilon$, za $n > n_0$.

Dakle, oko tačke A se "okupljaju" skoro svi članovi niza, tj. svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Ako niz (a_n) nije konvergentan, tada se za njega kaže da je divergentan.

Za konvergentan niz (a_n) vrednost A iz prethodne definicije predstavlja njegovu graničnu vrednost i to se označava sa

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A \quad ili \quad a_n \to A, \; n \to +\infty.$$

U slučaju da je $A = 0$ takav niz se naziva nula-niz.

Stav. Neka je dat niz (a_n). Tada je on konvergentan ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

za svako $n, m > n_0(\varepsilon)$.

Niz sa prethodnom osobinom se naziva Košijev niz.

Napomena. Prethodni stav se naziva Košijev princip konvergencije realnih nizova. Košijev princip je ravnopravan prethodnoj definiciji i ima svoje prednosti i nedostatke u odnosu na nju. Prednost je u tome što se za njegovu primenu ne mora znati kandidat za graničnu vrednost niza, a mana je da ako se njime utvrdi da je posmatrani niz konvergentan, tada se granična vrednost tog niza ne zna.

Za ispitivanje svojstva konvergentnosti posmatranog niza, sasvim je dovoljno tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se preskočiti početnih konačno mnogo elemenata tog niza).

Pod opštim članom posmatranog niza se podrazumeva $n-$ti član kada n nije fiksirano.

PRIMER

Primena definicije za dokazivanje konvergencije određenih nizova.

Za niz sa opštim članom $a_n = q^n, \ n \in \mathbb{N}$,važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

Rešenje. Dokažimo, najpre, da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0, \ |q| < 1$. Očigledno je da za $q = 0$ prethodno važi. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $0 < |q| < 1$. Tada je

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Odavde imamo da je

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon, \ \ za \ \ n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

Sada ćemo dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty, \ |q| > 1$. Neka je, stoga, $|q| > 1$ i $\delta > 0$ proizvoljno. Tada je

$$|q|^n > (1 + (|q| - 1))^n > 1 + n(|q| - 1) > n(|q| - 1) > \delta,$$

za

$$n > \frac{\delta}{|q| - 1}.$$

Specijalno za $q = 1$, ovaj niz je konvergentan, dok za $q = -1$, on očigledno ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1, pa je divergentan.

Pomenućemo i poznati niz sa opštim članom

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n, \ \ n \in \mathbb{N},$$

koji se naziva geometrijska progresija. Opšti član ovog niza se može zapisati i na sledeći način

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

U slučaju da je $|q| < 1$, tada na osnovu prethodnog niza iz ovog primera važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

ARITMETIČKE OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

Kada su dva niza konvergentna, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom, količnikom...

Neka su (a_n) i (b_n) dva realna niza. Tada se nizovi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ nazivaju, tim redom zbir, razlika i proizvod nizova (a_n) i (b_n). Ako je, $b_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada se niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ naziva količnikom nizova (a_n) i (b_n).

Kada su nizovi (a_n) i (b_n) konvergentni, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom i količnikom. Odgovor na to pitanje daje naredni stav.

Stav. Neka su (a_n) i (b_n) konvergetni nizovi tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada važi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \pm b,$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b,$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0,$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \cdot a,$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^k = a^k,\ \ k \in \mathbb{N},$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt[k]{a},\ \ k \in \mathbb{N},$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right| = |a|.$

Napomena. Data tvrđenja olakšavaju određivanje graničnih vrednosti.

STAVOVI ZA KONVERGENCIJU – I DEO

Monoton i ograničen brojni niz je konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozdo. Ako je (a_n) nerastući niz, tada je on konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozgo. Ako je (a_n) neopadajući niz, tada je on konvergentan.

U opštem slučaju obrnuto ne mora da važi u oba stava.

Primer. Neka je dat niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz je rastući što smo već pokazali. Može se dokazati da je on ograničen odozgo brojem 3.

Na osnovu Binomne formule, zaista, imamo da važi da je

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3
\end{aligned}$$

Prema prethodnom stavu ovaj niz je konvergentan i postoji broj $e \in (2,3)$, tako da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e se naziva Ojlerov broj i on je jedan od najvažnih konstanti u matematici. Broj e je iracionalan transcendentan broj. Numerički se može proračunati bilo koja njegova decimala i važi da je $e = 2,71828\ldots$

STAVOVI ZA KONVERGENCIJU – II DEO

Stav o tri niza – Lema o dva policajca. Ako je niz konvergentan, tada je on ograničen.

Sledeći stav predstavlja veoma važan i često korišćen kriterijum za ispitivanje konvergencije nizova.

Stav. Neka su dati nizovi (a_n) i (b_n) i neka je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = A \in \mathbb{R},$$

Ako je za niz (c_n) ispunjeno da je $a_n \le c_n \le b_n$, za $n \ge n_0$, tada je niz (c_n) konvergentan i važi :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = A.$$

Napomena. Ovaj stav ima poseban značaj jer se prilikom njegove primene za konvergentan niz (c_n) odmah dobija i granična vrednost niza. Ovaj stav se u literaturi naziva Stav o tri niza, a često se naziva i Lema o dva policajca.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je on konvergentan. Tada je (a_n) ograničen niz. Obrnuto ne mora da važi.

Napomena. Prethodni stav daje dobru metodologiju za dokazivanje da je niz divergentan ako se dokaže da nije ograničen.

PRIMERI

Lema o dva policajca

Dokazati da važi:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0,$$

$$b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dokaz.

$a)$ Za $a = 1$ očigledno je tačno. Za $a > 1$ je $\sqrt[n]{a} > 1$ i imamo da je

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Ako posmatramo $a > n(\sqrt[n]{a} - 1)$ sledi da je $\frac{a}{n} > \sqrt[n]{a} - 1,$ tj. imamo da je:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$ sledi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0,$ tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$ Ako je konačno $0 < a < 1,$ tada imamo da je $\frac{1}{a} > 1.$ Tada na osnovu prethodnog važi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1,$ pa imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

b) Važi da je

$$\begin{aligned} n &= (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n > \\ &> 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \\ &> \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

Dakle, imamo da važi

$$\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2 < n,$$

tj.

$$(\sqrt[n]{n}-1)^2 < \frac{2}{n-1},$$

tj.

$$|\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Kako je $0 < |\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ i važi da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,$ tada imamo, na osnovu Leme o dva policajca, da važi tvrđenje.

KLASA NEOGRANIČENIH NIZOVA

Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz.

Sada će biti razmotrene ukratko neke klase neograničenih nizova. Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz. Kaže se da je tačka beskonačnosti njegova jedina tačka nagomilavanja i piše se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{ili} \quad a_n \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

Slično prethodnom, može se uvesti pojam nizova koji divergiraju ka $-\infty$.

Kod određeno divergentnog niza može se desiti da su njegovi članovi počev od nekog indeksa $n_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljno veliki tj.

$$a_n \geq M, \quad \text{za} \quad n \geq n_0(M).$$

Ovakvi nizovi koji teže u $+\infty$ čine klasu uslovno divergentnih nizova. Slično, mogu se definisati i uslovno divergentni nizovi koji teže u $-\infty$. Određeno divergentni nizovi, se po svojoj strukturi ne razlikuju mnogo od konvergentnih nizova. U osnovi oni se podudaraju jer i jedni i drugi imaju jednu tačku nagomilavanja. Mnogi stavovi koji važe za konvergentne nizove važe i za određeno divergentne nizove.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: ispitivanje konvergencije niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Pojam brojnog reda

DEFINICIJA BROJNOG REDA

Oznaka koja se koristi za sumu konvergentnog reda se vrlo često koristi u literaturi i za zadavanje samog reda, bez obzira da li je on konvergentan ili ne.

Neka je dat realan niz $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ kao i realan niz

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Tada se niz $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ naziva brojni red, a njegov n -ti član $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se naziva n-ta parcijalna suma. Za razmatrani red $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ vrednost $a_n = S_n - S_{n-1}, \; n \in \mathbb{N}$, je njegov opšti član (ili osnovni član). Svaki beskonačan zbir brojeva $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k, \; (m \in \mathbb{N}_0)$, se, takođe, naziva brojni red.

Konvergencija datog reda podrazumeva da postoji neko $S \in \mathbb{R}$ takvo da za niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, koji predstavlja red važi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Kako važi da je $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$,to se često uvodi oznaka

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

gde se S naziva suma brojnog reda.

U slučaju da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ takav red se naziva određeno divergentan. Sada ćemo navesti primere nekih redova čije poznavanje konvergentnosti će biti od interesa za dalji rad.

Primer. Red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ je konvergentan red za $|q| < 1$, dok je za $|q| \geq 1$ divergentan. Ovaj red se naziva geometrijski red i njegova suma za $|q| < 1$ iznosi $S = \frac{1}{1-q}$.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentan red i on se naziva harmonijski red.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira. Ovaj red se naziva hiperharmonijski red. Na primer važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Napomena. Harmonijski red je specijalan slučaj hiperharmonijskog reda, za $\alpha = 1$. Harmonijski red ima sumu $+\infty$ i veoma je bitan za ispitivanje konvergencije nekog složenijeg reda. Niz njegovih parcijalnih suma se ponaša veoma blisko vrednosti $\ln n$ i razlikuju se od nje do na Ojlerovu konstantu $c = 0,57722\ldots$

PRIMER 1

Određivanje sume geometrijskog reda.

Odrediti sumu geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k.$$

Posmatrajmo n -tu parcijalnu sumu ovog reda

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznajući činjenicu da se suma prvih n članova geometrijskog niza može zapisati

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1, \ n \in \mathbb{N},$$

kao i da je $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0,$ za $|q| < 1,$ važi da je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{za } \ |q| < 1.$$

Tada je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \text{za } \ |q| < 1.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } \ q \geq 1, \\ \text{ne postoji}, & \text{ako je } \ q \leq -1. \end{cases}$$

Dakle, geometrijski red određeno divergira, za $q \geq 1$, dok neodređeno divergira, za $q \leq -1$. Ukupno, geometrijski red divergira za $q \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Napomena. Na osnovu prethodnog primera nije teško uočiti da važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Možemo izvoditi i sledeće zaključke

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{1}{1-q^2},$$

za $|q| < 1$, zatim

$$1 - q + q^2 - q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-q)^k = \frac{1}{1-(-q)} = \frac{1}{1+q},$$

za $|q| < 1$, kao i mnoge druge.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija geometrijskih reda

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2

Određivanje sume reda

Izračunati sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Rešenje. Opšti član ovog reda je $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, i pri tom za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$,neposredno sledi da je dati red konvergentan i njegov zbir je $S=\frac{1}{2}$.

Napomena. $a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ se dobija korišćenjem metode neodređenih koeficijenata koja je uvedena i objašnjena u lekciji o neodređenim integralima.

OPERACIJE SA KONVERGENTNIM REDOVIMA

Konvergentan red pomnožen konstantom ostaje konvergentan, zbir ili razlika dva konvergetna reda jednaka je zbiru njihovih suma.

Osnovni zadatak u radu sa redovima jeste ispitivanje konvergencije redova i određivanje suma za konvergentne redove. Kod redova, slično kao i kod nizova, od divergentnih redova najinteresantniji su oni koji određeno ili uslovno divergiraju (tj. oni čije su sume $+\infty$ ili $-\infty$). Prilikom određivanja da li je neki red konvergentan ili divergentan, uvek se može zanemariti prvih konačno mnogo članova u njemu, ali ako je red konvergentan prilikom određivanja njegove sume, moraju se svi članova uzeti u obzir. Prvo ćemo govoriti o nekim osobinama konvergentnih redova.

Stav. Neka je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan red sa sumom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada je konvergentan i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S.$$

Stav. Neka su $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi sa sumama

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = T.$$

Tada je konvergentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = S \pm T.$$

Pod pretpostavkama datim u prethodnih stavovima, možemo prethodna dva stava objediniti u sledeći zapis

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k \pm \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha S \pm \beta T, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Stav. Brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ su istovremeno konvergentni ili divergetni redovi.

Dakle, ovakvi redovi su ekvikonvergetni (istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju), ali im sume, u slučaju konvergencije, neće biti iste.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: o brojnim redovima

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Brojni redovi sa pozitivnim (nenegativnim) članovima

POJAM BROJNOG REDA SA POZITIVNIM (NENEGATIVNIM) ČLANOVIMA

Brojni red se sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan.

U okviru ove lekcije obradićemo, najpre, pojam brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Pošto su redovi nizovi parcijalnih suma, sve tehnike za ispitivanje konvergencije nizova se i ovde mogu primeniti. Međutim, ovde ćemo uvesti aspekt određivanja konvergencije reda preko opšteg člana posmatranog reda.

Prvo, dajemo definiciju brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Definicija. Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ se naziva brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ako važi $a_k > 0 \, (a_k \geq 0),$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ kod koga je $a_k < 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, se naziva red sa negativnim članovima. Međutim, ako neki brojni red ima konačno mnogo negativnih članova, a svi ostali njegovi članovi su pozitivni (nenegativni), tada je taj brojni red, red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan ka $+\infty$.

Stav. Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz.

U nastavku ćemo dati razne kriterijume za proveru konvergentnosti brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima, koji se zadaju, kao što smo rekli, preko opšteg člana posmatranog reda.

3.1 Kriterijumi za konvergenciju

PRVI POREDBENI KRITERIJUM

Prvim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan upoređivanjem njihovih vrednosti.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ za koje je $a_k, b_k \geq 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $a_k \leq b_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Tada

1. ako red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;
2. ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, divergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$;

Napomena. Prethodnim stavom je zadat tzv. Prvi poredbeni kriterijum. Za poređenje njegovom primenom se najčešće koriste harmonijski, hiperhamonijski i geometrijski red.

Primer. Brojni red $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ je divergentan red. To zaključujemo iz sledećeg: $\ln k < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln k}, k = 2, 3, 4, \ldots$Dalje, kako je brojni red $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red (harmonijski red), na osnovu prethodnog stava pod 2. zaključujemo da je polazni red divergentan.

Primer. Brojni red $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$ je konvergentan red. To zaključujemo iz sledećeg

$$(k-1)^2 \leq k! \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je brojni red $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}$, tj. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ hiperharmonijski red koji je konvergentan, na osnovu prethodnog stava pod 1. zaključujemo da je i polazni red konvergentan. Poznato je da važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots = e.$$

Primer. Red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^k+3}}$ je konvergentan red jer važi

$$\frac{1}{\sqrt{4^k+3}} < \frac{1}{\sqrt{4^k}} = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergentan red, kao geometrijski red za koji važi $q=\frac{1}{2}<1$, tada zaključujemo da i polazni red konvergira.

DRUGI POREDBENI KRITERIJUM

Drugim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan, preko granične vrednosti njihovog količnika.

Stav. Neka je brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ red sa nenegativnim članovima, a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ brojni red sa pozitivnim članovima. Ako je

$$l=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k},$$

pri čemu je $l\in(0,+\infty)$, tada za brojne redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ kažemo da su istovremeno konvergetni ili istovremeno divergentni.

Napomena. Prethodnim stavom je zadat Drugi poredbeni kriterijum. Za brojne redove za koje se ustanovi njihova konvergentnost ili divergentnost, kaže se da je ekvikonvergentan sa redom sa kojim je upoređivan.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k+2}{k^3+k+2}.$$

Rešenje. Posmatrani red ćemo upoređivati sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Tada imamo da je

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{3k+2}{k^3+k+2}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k^3+2k^2}{k^3+k+2}=3\in(0,+\infty).$$

Na osnovu drugog poredbenog kriterijuma je posmatrani red ekvikonvergentan sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, a kako je ovaj red konvergentan kao hiperharmonijski red, tada zaključujemo da je i polazni red konvergentan.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sa pozitivnim članovima, pri čemu je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}\le\frac{b_{k+1}}{b_k},$$

za svako $k\in\mathbb{N}$.

- Ako brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, tada i brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

- Ako brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, tada i brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergira.

KOŠIJEV KORENI KRITERIJUM

Nedostatak Košijevog korenog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav (Košijev koreni kriterijum). Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = c.$$

- Ako je $0 \leq c < 1$ posmatrani red konvergira,
- Ako je $c > 1$ posmatrani red divergira,
- Ako je $c = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}.$$

Rešenje. Kako je $a_k = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$, tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} - 1\right)^{k-1} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k+1}{-2}}\right)^{\frac{k+1}{-2}\cdot\frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{\lim_{k\to\infty} \frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{-2} < 1.$$

Zaključujemo na osnovu Košijevog korenog kriterijuma da posmatrani red konvergira.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Root test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DALAMBEROV KRITERIJUM

Nedostatak Dalamberovog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav. (Dalamberov kriterijum) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d.$$

• Ako je $0 \le d < 1$ posmatrani red konvergira,
• Ako je $d > 1$ posmatrani red divergira,
• Ako je $d = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Pokazaćemo Dalamberovim kriterijumom da red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2+k}$ divergira. Imamo da je

$$a_k = \frac{2^k}{k^2+k} \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2+k+1} = \frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}.$$

Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}}{\frac{2^k}{k^2+k}} = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+3k+2} = 2 > 1.$$

Napomena. Košijev koreni kriterijum je precizniji od Dalamberovog, jer postoje slučajevi u kojima se konvergencija nekog brojnog reda može dokazati Košijevim, a ne može Dalamberovim, dok obrnuto ne važi.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Ratio test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

RABEOV KRITERIJUM

Rabeov kriterijum je opštiji od Dalamberovog kriterijuma.

Stav. (Rabeov kriterijum) Neka je dat red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = r.$$

• Ako je $0 \leq r < 1$ posmatrani red divergira,
• Ako je $r > 1$ posmatrani red konvergira,
• Ako je $r = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Napomena. Osim Dalamberovog kriterijuma, često se koriste i Kumerov, Gausov, Bertranov i Rabeov kriterijum i dr. De Morgan je dao hijerarhiju među pomenutim kriterijumima. Najslabiji od ovih kriterijuma je Dalamberov. Precizniji od njega je Rabeov kriterijum, a od njega su precizniji Bertranov i Gausov kriterijum. Na vrhu hijerarhije je Kumerov kriterijum, kao najopštiji i njegova posledica su Bertranov i Gausov kriterijum. U praksi se konvergentnost brojnog reda proverava u skladu sa pomenutom hijerarhijom. Dakle, prvo se proverava po Dalamberovom kriterijumu i ako je $d = 1$, primenjuje se Rabeov kriterijum i tako redom. Ovde ćemo navesti samo Rabeov kriterijum.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})}$$

Prvo proveravamo konvergentnost po Dalamberovom kriterijumu. Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{\sqrt{(k+1)!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})\cdot(2+\sqrt{k+1})}}{\frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2+\sqrt{k+1}} = 1,$$

pa prema Dalamberovom kriterijumu nemamo odgovor. Primenjujemo Rabeov kriterijum

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{2+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{\sqrt{k+1}} = +\infty.$$

Na osnovu Rabeovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

KOŠIJEV INTEGRALNI KRITERIJUM

Ovim kriterijumom se ispituje konvergencija reda, ispitivanjem konvergencije odgovarjućeg nesvojstvenog integrala. Oni su ekvikonvergentni.

Stav. (Košijev integralni kriterijum) Neka $y = f(x)$ neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ ekvikonvergentan sa integralom

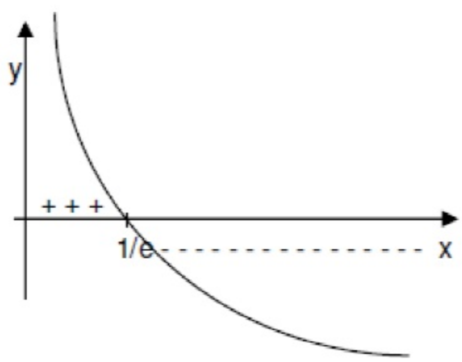
$$\int_m^{+\infty} f(x)dx.$$

Ekvikonvergentnost, kao što smo već rekli, znači da red i integral istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju. Dakle, ako nesvojstveni integral ima vrednost $\pm\infty$ ili ta vrednost ne postoji, tada je odgovarajući red divergentan, dok u slučaju da je vrednost integrala konačan broj, tada posmatrani red konvergira. Kao i u slučaju ostalih kriterijuma o kojima smo govorili, Košijevim integralnim kriterijumom se samo proverava njegova konvergencija i u slučaju da on konvergira ne znamo sumu tog reda.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}$.

Rešenje. Ispitivanje vršimo primenom Košijevog integralnog kriterijuma. Najpre, za funkciju $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[2, +\infty)$. Domen ove funkcije je $(0,1) \cup (1, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[2, +\infty)$.
Ostaje još da proverimo da li je nerastuća funkcija. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvoj znaka na intervalu $[2, +\infty)$.

Tada imamo $f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x \cdot \ln x)^2}$. Grafik funkcija $g(x) = -\ln x - 1$ je dat na slici.



Slika 3.1.1 Grafik funkcije $f(x) = -lnx - 1$.

Kako je $f'(x) < 0$, za $x \in [2, +\infty)$, tada je funkcija $y = f(x)$ nerastuća $x \in [2, +\infty)$.
Dakle, ispunjene su pretpostavke kriterijuma. Potrebno je sada odrediti vrednost integrala:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x dx} = \ldots = +\infty \text{ (uraditi za vežbu)}.$$

Dakle, ovaj integral divergira, a to znači, na osnovu Košijevog integralnog kriterijuma da divergira i početni red.

PRIMER

Košijev integralni kriterijum.

Primenom Košijevog integralnog kriterijuma ćemo dokazati da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira.

Očigledno, ako je $\alpha \leq 0$, red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ je divergentan red. Stoga ćemo proveriti šta se dešava za $\alpha > 0$. Najpre, za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Domen ove funkcije je $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Ostaje još da proverimo da li je ovo nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvog je on znaka na intervalu $[1, +\infty)$. Tada imamo $f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, za $\alpha > 0$ i $x \in [1, +\infty)$.

Dakle, posmatrani red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ je ekvikonvergentan sa nesvojstvenim integralom $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Na prethodnim predavanjima smo videli da je

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & za \;\; 0 < \alpha \leq 1, \\ -\frac{1}{-p+1}, & za \;\; \alpha > 1 \end{cases}$$

Na osnovu ekvikonvergencije posmatranog integrala i polaznog reda zaključujemo da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira.

KOŠIJEV PRINCIP KONVERGENCIJE

Ovaj stav je ekvivalentan definiciji konvergenciji redova.

Na kraju ovog dela navodimo i navodimo i Košijev opšti princip za konvergenciju brojnih redova koji je zasnovan na Košijevom principu za konvergenciju brojnih nizova. Ovaj kriterijum ima veliki teorijski značaj, ali se zbog složenosti retko primenjuje u praksi.

Stav. (Košijev princip konvergencije) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Tada je on konvergentan ako i samo ako je za svako proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj m $(m \in \mathbb{N})$, takav da za svako $n > m$ važi

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Napomena. Prethodni stav je ekvivalentan definiciji konvergencije za redove i u odnosu na nju ima svoje prednosti i mane (kao i kod nizova). Određena prednost ovog kriterijuma konvergencije sastoji se u tome što je, da bi se ispitala konvergencija nekog reda je dovoljno znati sve njegove članove, ali ne i tačnu vrednost njegove sume koja se u opštem slučaju teško može eksplicitno odrediti.

Primer. Pomenuli smo da je harmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red. To se može pokazati primenom Košijevog principa konvergencije. Tada imamo, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = & \\ & = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \\ & > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \\ & = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog vidimo da je za $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ i $m = 2n$ Košijev princip konvergencije očigledno nije ispunjen, pa je posmatrani red divergentan.

STAV ZA DOKAZIVANJE DIVERGENCIJE BROJNOG REDA

Ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Stav. Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ koji je konvergentan. Tada je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dokaz. Kako je dati red konvergentan, tada je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$. Takođe je i $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = S$, pa imamo da je $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) = S$Kako je $a_k = S_k - S_{k-1}$,za svako $k \in \mathbb{N}$, to je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

Napomena. Prethodni stav je odličan za ispitivanje divergencije datog reda, jer na osnovu zakona o kontrapoziciji prethodni stav se može interpretirati na sledeći način: ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Primer. Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ je divergentan red. Zaista, kako je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 1 \neq 0,$$

na osnovu prethodnog iznetog zaključujemo da je posmatrani red divergentan.

Poglavlje 4

Brojni redovi sa članovima promenljivog znaka

APSOLUTNA I USLOVNA KONVERGENCIJA

Kod brojnih redova sa članovima promenljivog znaka, uključujući i alternativne redove, postoje dve vrste konvergencije: apsolutna i uslovna konvergencija.

Kod redova sa članovima promenljivog znaka postoje dve vrste konvergencije: apsolutna konvergencija i uslovna konvergencija.

Definicija. Brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ naziva se apsolutno konvergentim ako konvergira odgovarajući red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Iz prethodne definicije može se uvideti da je apsolutna konvergencija nekog reda sa članovima promenljivog znaka ista kao i konvergencija reda odgovarajućeg reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Stoga se za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu primenjivati svi pomenuti kriterijumi za redove sa pozitivnim (nenegativnim) ćlanovima i važi sledeći stav.

Stav. Ako brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira, tada on i konvergira.

Napomena.U prethodnom stavu obrnuto ne mora da važi. Takođe, iz prethodnog stava važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| .$$

Redovi koji su konvergentni, a nisu apsolutno konvergentni nazivaju se uslovno konvergentni redovi. Na sledećoj slici je predstavljen odnos između apsolutno, uslovno konvergentnih i divergentnih redova.

Slika 4.1 Apsolutno i uslovno konvergetni i divergentni redovi.

PRIMER 1

Ispitivanje apsolutne konvergencije brojnog reda.

Ispitati konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}.$$

Rešenje. Ovaj red je primer reda sa članovima promenljivog znaka, jer je opšti član $a_k = \dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ Tada je $|a_k| = \dfrac{3^k}{(2k-1)^k}$. Dakle, red

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$$

je red sa pozitivnim članovima i na ispitivanje njegove konvergencije ćemo primeniti Košijev koreni kriterijum. Imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{(2k-1)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2k-1} = 0 < 1.$$

Tada na osnovu Košijevog korenog kriterijuma zaključujemo da je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$ konvergentan, a samim tim je i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$ apsolutno konvergentan.

ALTERNATIVNI REDOVI

U alternativnom brojnom redu važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak.

Alternativni redovi su specijalan slučaj redova sa članovima promenljivog znaka. Kod redovi sa članovima promenljivog znaka promena znaka ne mora da podleže nekoj posebnoj pravilnosti kao kod alternativnih redova. Za neki brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ kažemo da je alternativan red ako važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak, tj. u alternativnom redu važi da je

$$a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ a_3 < 0,\ a_4 > 0, \dots$$

ili

$$a_1 > 0,\ a_2 < 0,\ a_3 > 0,\ a_4 < 0, \dots$$

Ako uvedemo oznaku $b_k = |a_k|,\ k \in \mathbb{N},$ tada možemo alternativni red zapisati u obliku u kome se on najčečće i zapisuje

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \quad ili \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k,$$

u zavisnosti da li je prvi član tog alternativnog reda pozitivan ili negativan. Svakako, važi da je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k.$

Primer. Red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

je alternativni brojni red.

Opšte osobine konvergentnih redova koje smo već naveli, važe i za alternativne redove. Međutim, pomenuti kriterijumi za konvergenciju brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ne važe za alternativne redove. U nastavku dajemo jedan kriterijum za konvergenciju alternativnih redova.

LAJBNICOV KRITERIJUM

On jedan od kriterijuma za konvergenciju alternativnih redova.

Za alternativne redove važi sledeći veoma važan kriterijum za konvergenciju.

Stav (Lajbnicov kriterijum) Neka je dat alternativni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$. Ako važi da je niz $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nerastući i da je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0,$ tada je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergentan red.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Posmatrani red je alternativan. Niz $b_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}$ je opadajući niz. Zaista, važi da je

$$(\forall k \in \mathbb{N}) b_{k+1} - b_k \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \frac{-1}{k(k+1)} \leq 0.$$

Takođe, važi da je

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

pa na osnovu Lajbnicovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

Napomena. Ako je neki red alternativan tada se proverava, najpre, njegova apsolutna konvergencija. Ako ona ne važi, tada se uslovna konvergencija može proveriti Lajbnicovim kriterijumom.

Videli smo, u prethodnom primeru, da red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, ali on ne konvergira apsolutno, jer je red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonijski red koji divergira, već uslovno.

U slučaju da alternatnivni red konvergira, tada ostatak tog reda, oznaci R_n, je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog zanemarenog člana i ima isti znak kao i taj član, tj.

$$R_n = S - Sn = \lambda(-1)^n a_{n+1} \ (0 < \lambda < 1),$$

gde su S i S_n suma reda i n -ta parcijalna suma, respektivno. Često se to zapisuje na sledeći način

$$R_n < |a_{n+1}|.$$

Prema Leibnitzovom kriterijumu red iz prethodnog primera je konvergentan, a za ostatak R_n važi ocena $|R_n| < \dfrac{1}{n+1}$.

DIVERGENCIJA

Divergencija u slučaju znakopromenljivih brojnih redova (kao i alternativnih redova) podrazumeva dva slučaja.

U radu sa znakopromenljivim brojnim redovima (kao i alternativnih redova) divergencija podrazumeva dva slučaja. Prvi slučaj je da suma tog reda iznosi $-\infty$ ili $+\infty$. Drugi slučaj je da se divergencija javlja kada parcijalne sume takvog reda osciliraju između, na primer, dve vrednosti. To ilustrujemo sledećim primerom.

PrimerIspitati konvergenciju alternativnog reda $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$.

Rešenje. Za n -tu parcijalnu sumu datog reda važi $S_n = 1$, za $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ i $S_n = 0$, za $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{ako je } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ovaj red oscilira između dve vrednosti 0 i 1. Ovakvi redovi se nazivaju oscilatorni redovi. Dakle, dati red je oscilatoran i prema tome divergentan.

Napomena. Stav za dokazivanje divergencije brojnog reda sa nenegativnim članovima o kome smo već govorili važi i znakopromenljive brojne redove. Dakle,ako opšti član brojnog znakopromenljivogreda ne teži nuli, tada taj red divergira.

PRIMER 2 - 1. DEO

Ispitivanje kada je apsolutno i uslovno divergentan posmatrani red.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6}$, u zavisnosti od $p \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Posmatrani red je alternativan. Proverimo, najpre, apsolutnu konvergenciju ovog reda. Tada je

$$|a_k| = \left| \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6} \right| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo da je

$$\frac{(k^2+2)^p}{k+6} \sim \frac{k^{2p}}{k} = k^{2p-1} = \frac{1}{k^{1-2p}}, \quad \text{za } k \to +\infty.$$

Red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-2p}}$ konvergira za $1-2p > 1$, tj. za $p < 0$ kao hiperharmonijski red. Na osnovu Drugog poredbenog kriterijuma konvergira i red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$. Dakle, polazni red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6}$ apsolutno konvergira za $p < 0$. Za $p \geq \frac{1}{2}$, može se uočiti da je

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6} \neq 0,$$

pa opšti član posmatranog reda ne teži nuli. Zaključujemo da je posmatrani red divergentan za $p \geq \frac{1}{2}$.

PRIMER 2 - 2. DEO

Ispitivanje kada je divergentan posmatrani red.

Treba proveriti da li je niz $|a_k| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$, $k \in \mathbb{N}$ nerastući. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{(x^2+2)^p}{x+6}$, za $x \geq 1$ i $0 \leq p < \frac{1}{2}$ i odredimo njen prvi izvod. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p(x^2+2)^{p-1} \cdot 2x \cdot (x+6) - (x^2+2)^p}{(x+6)^2} = \\ &= \frac{(x^2+2)^{p-1}(2px^2+12px-x^2-2)}{(x+6)^2} = \\ &= \frac{(x^2+2)^{p-1}}{(x+6)^2}\big((2p-1)x^2+12px-2\big). \end{aligned}$$

Znak funkcije $f'(x)$ za $x \geq 1$ i $0 \leq p < \frac{1}{2}$ zavisiće od kvadratne funkcije $y = (2p-1)x^2 + 12px - 2$. Za koeficijent koji stoji uz x^2 u ovoj kvadratnoj funkciji važi da je $2p - 1 < 0$, zbog uslova $0 \leq p < \frac{1}{2}$. Ovo znači da će za dovoljno veliko x važiti da je $(2p-1)x^2 + 12px - 2 \leq 0$, tj. $f'(x) \leq 0$, za $0 \leq p < \frac{1}{2}$ i dovoljno veliko x. Ovim smo dokazali da je niz $|a_k| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$, za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$, nerastući.

S druge strane, važi da je

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k^2+2)^p}{k+6} = 0, \quad \text{za } 0 \leq p < \frac{1}{2}.$$

Kako su ispunjeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, posmatrani red uslovno konvergira za $0 \leq p < \frac{1}{2}$.

Napomena. Prilikom ispitivanja konvergencije ovog reda zanemarili smo konačno mnogo njegovih članova, jer to ne utiče na njegovu konvergenciju. Zato, posmatrani niz ne mora da bude nerastući za svako $k \in \mathbb{N}$, već je dovoljno dokazati da je on nerastući počev od nekog $k \in \mathbb{N}$.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Apsolutna i uslovna konvergencija i divergencija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Poredbeni kriterijum

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

STAVOVI O ZBIRU KONVERGENTNIH BROJNIH REDOVA

Kod konvergetnih i apsolutno konvergetnih redova njihova suma se ne menja promenom rasporeda članova, dok to ne važi za uslovno konvergetne redove.

Sada ćemo dati neke opšte stavove o konvergenciji brojnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Na osnovu definicije apsolutno konvergetnih redova prethodni stav se može primeniti i na njih.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka apsolutno konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, apsolutno konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Sledeći stav govori i o sumi uslovno konvergetnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka uslovno konvergira, tada za proizvoljan realan broj A postoji određena permutacija njegovih članova takva da je suma tog reda jednaka A. Takodje, postoji bar jedna permutacija članova tog reda, takva da je dobijeni red divergentan.

Na osnovu prethodnog stava vidimo da se pravila za sumiranje konačno mnogo članova i beskonačno mnogo članova nekog brojnog reda u opštem slučaju ne poklapaju.

Prethodni stav ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Posmatrajmo ponovo uslovno konveregentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Pretpostavimo da je suma tog reda S. Imamo da je

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\dots$$

Ako posmatramo red

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Sabiranjem ova dva reda, dobijamo

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Poslednji red je isti kao i polazni samo mu je redosled sumiranja članova promenjen. Pogrešno bi bilo zaključiti da je $\frac{3}{2}S = S,$ jer bi odatle dobili da je $S = 0,$ što nije tačno jer je iz samog reda $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lako videti da je $\frac{1}{2} < S < 1.$

Dakle, permutovanje članova u sumiranju beskonačnog uslovno konvergetnog reda dovodi do toga da se dobijaju različiti zbirovi, za isti red.

VIDEO KLIP 3

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Vežba

ZADATAK 1

Određivanje sume reda.

Odrediti sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Rešenje. Za članove reda važi

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots$$

U opštem slučaju imamo da je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada, $n-$ ta parcijalna suma je jednaka

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Konačno, imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Dakle, niz parcijalnih suma je konvergentan, pa red konvergira i suma reda je jednaka graničnoj vrednosti niza parcijalnih suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ZADATAK 2

Provera konvergencije primenom stava da ako opšti član divergentnog reda ne teži nuli, tada je on divergentan red.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Rešenje:

Opšti član konvergentnog reda mora težiti nuli. Ovde imamo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

pa je red divergentan.

ZADATAK 3

Poredbeni kriterijum.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}.$$

Rešenje:

Za primenu ovog kriterijuma je od koristi znati da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{divergentan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \begin{cases} \alpha > 1, & \text{konvergentan} \\ \alpha \leq 1, & \text{divergentan} \end{cases}$$

$$\frac{n}{2n^2+1} > \frac{n}{2n^2+n} = \frac{n}{n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, jer red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Kako je opšti član našeg reda veći od opšteg člana divergentnog reda zaključujemo da je posmatrani red divergentan.

ZADATAK 4

Košijev koreni kriterijum.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n^2+n}.$$

Rešenje:

Koristićemo Košijev koreni kriterijum.

Računaćemo graničnu vrednost n-tog korena opšteg člana

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-3}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-3}<1$$

Dakle, red konvergira na osnovu Košijevog korenog kriterijuma.

ZADATAK 5

Primena Dalamberov kriterijum.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Rešenje:

Koristićemo Dalamberov kriterijum.

Računaćemo graničnu vrednost količnika dva uzastopna člana

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!\,n^n}{(n+1)(n+1)^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Dakle, red konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

ZADATAK 6

Košijev integralni kriterijum.

Koristeći integralni kriterijum ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Rešenje:

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Ona je definisana, neprekidna i nerastuća za $x \geq 1$, pa stoga možemo primeniti Košijev integralni kriterijum.

Odgovarajući nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_1^b\right) = \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

je konvergentan, pa je i posmatrani red konvergentan.

ZADATAK 7

Košijev integralni kriterijum

Koristeći integralni kriterijum ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (p \in R).$$

Rešenje:

Napomenimo prvo da se posmatrani red naziva i opštim harmonijskim redom.

Ako stavimo da je $f(x) = \frac{1}{x^p}$, tada je $a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$, pri tom je funkcija f neprekidna i pozitivna za $x \geq 1$.

Ako je najpre $p \leq 0$, tada je $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} n^{|p|} \nrightarrow 0$, pa posmatrani red očigledno divergira.

Dalje, pretpostavimo da je $p > 0$. U tom slučaju je funkcija f opadajuća pa možemo primeniti Košijev integralni kriterijum.

Kako je nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \begin{cases} \text{konvergira,} & p > 1 \\ \text{divergira,} & p \leq 1. \end{cases}$$

Neposredno sledi da je posmatrani red konvergentan za $p > 1$ i divergentan za $p \leq 1$.

ZADATAK 8

Apsolutna konvergencija reda.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n}.$$

Rešenje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5} < 1$$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n} \right|$ konvergira na osnovu Košijevog korenog kriterijuma. Onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n}$ apsolutno konvergentan.

NAPOMENA: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

ZADATAK 9

Apsolutna i uslovna konvergencija.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$$

Rešenje:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

Red $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \right|$ divergira, pa red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ ne konvergira apsolutno.

Za uslovnu konvergenciju koristimo Lajbnicov kriterijum: Alternativni red konvergira ako je niz apsolutnih vrednosti monotono opadajući i teži nuli.

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln (n+1)} \quad \Rightarrow \text{ niz je opadajući}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

Dakle, red uslovno konvergira.

ZADATAK 10

Apsolutna konvergencija

Ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Rešenje:

U ovom primeru opšti član reda je oblika

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

$$|a_n| = \frac{n}{2^n} > 0, \qquad n \in N$$

odakle je

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{(n+1)}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \quad \text{kada} \quad n \to \infty .$$

Stoga, na osnovu Dalamberovog kriterijuma ovaj red konvergira apsolutno.

ZADATAK 11

Apsolutna konvergencija.

Ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}.$$

Rešenje:

U ovom primeru opšti član je oblika

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}$$

$$|a_n| = \frac{3^n}{(2n-1)^n} > 0, \qquad n \in N$$

odakle je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{(2n-1)^n}} = \frac{3}{2n-1} \to 0, \quad \text{kada} \quad n \to \infty .$$

Zaključujemo da na osnovu Košijevog korenog kriterijuma dati red konvergira apsolutno.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: razni postupci za ispitivanje konvergencije redova.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Zadatak 1. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 2. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Rezultat: Divergentan.

Zadatak 3. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{3n^2+1}.$$

Rezultat: Divergentan.

Zadatak 4. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 5. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 6. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Rezultat: Apsolutno konvergentan.

Zadatak 7. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}.$$

Rezultat: Apsolutno konvergentan.

Zaključak za lekciju 09

BROJNI REDOVI

Brojni red, suma brojnog reda, konvergencija, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, divergencija.

U ovoj lekciji je izučen pojam brojnog reda. Centralno mesto u radu sa ovim veoma bitnim matematičkim pojmovima jeste odredjivanje njihove konvergencije. Obradjeni su sledeći kriterijumi:

- Dalamberov kriterijum
- Košijev koreni kriterijum
- Poredbeni kriterijum
- Košijev integralni kriterijum
- Lajbnicov kriterijum

Međutim, u slučaju konvergentnosti reda ovi kriterijumi ne mogu nam ništa reći o njegovoj sumi.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.