

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

## Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна,  
доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 2023



# Численные методы решения нелинейных уравнений

**Постановка задачи.** Дано нелинейное уравнение вида  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  — заданная алгебраическая или трансцендентная (включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции) функция.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$  (имеет  $n$ -корней)

$f(x) = \sin x + 0,1x^2$  (имеет бесконечное множество решений)

Решить уравнение — это найти такое  $x^* \in \mathbb{R}$ :  $f(x^*) = 0$ . Значение  $x^*$  называют *корнем уравнения*.

**Методы делятся на:**

- **точные** (позволяют найти решение непосредственно с помощью формул)
- **итерационные** (приближенные)

**Этапы приближенного решения нелинейных уравнений**

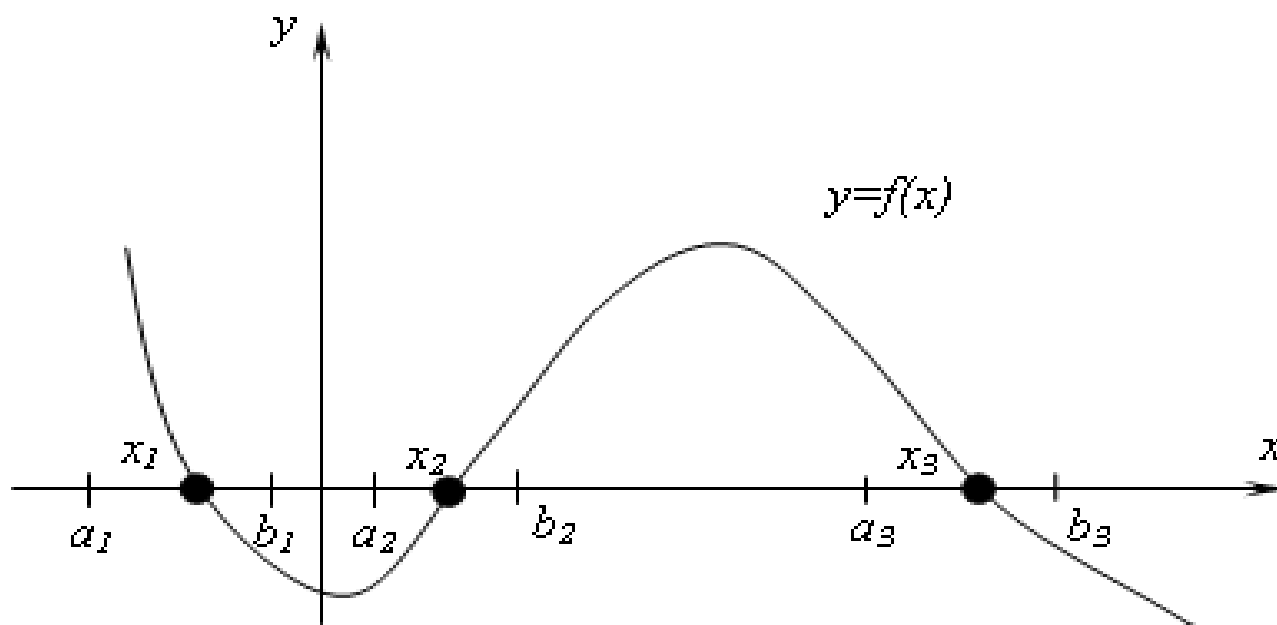
- Отделение (локализация) корней, т.е. определение интервала  $[a, b]$ , на котором содержится только один корень уравнения  $f(x) = 0$ . Такой интервал называется интервалом изоляции корня
- Уточнение корней до заданной точности

**Способы отделения корней**

- графический
- табличный
- аналитический



## Графическое отделение корней





## Табличное отделение корней

**Аналитический способ** состоит в нахождении экстремумов функции  $f(x)$ , исследование ее поведения при  $x \rightarrow \pm\infty$  и нахождении участков возрастания и убывания функции.

**Табличный способ** – это построение таблицы табулирования функции.

О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

$x$	$f(x)$
-3	-29,280
-2,5	-13,818
-2	-3,330
-1,5	2,933
-1	5,720
-0,5	5,783
0	3,870
0,5	0,733
1	-2,880
1,5	-6,218
2	-8,530
2,5	-9,068
3	-7,080
3,5	-1,818
4	7,470
4,5	21,533
5	41,120



## Теоремы существования корней

- *Необходимое условие существования корня уравнения на отрезке  $[a,b]$ :*

**Теорема 1.** Если непрерывная функция  $f(x)$  на концах отрезка  $[a; b]$  принимает значения разных знаков, т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения.

- *Достаточное условие единственности корня на отрезке  $[a,b]$ :*

**Теорема 2.** Если непрерывная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная  $f'(x)$  сохраняет знак внутри отрезка (т.е.  $f(x)$  монотонна), то внутри отрезка существует единственный корень уравнения  $f(x) = 0$ .



## Методы уточнения приближенных значений действительных корней

- *метод половинного деления (метод дихотомии);*
- *метод хорд*
- *метод Ньютона (метод касательных) ;*
- *модифицированный метод Ньютона ( метод секущих );*
- *метод простых итераций ;*
- *и др.*



# Основные требования и показатели численных методов

- ✓ устойчивость;
- ✓ сходимость;
- ✓ эффективность (скорость сходимости);

Алгоритм считается устойчивым, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных (малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов)

Алгоритм сходится, если итерационная последовательность приближений

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x^*, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Скорость сходимости (эффективность) – обозначает количество итераций, затраченных алгоритмом для достижения приемлемой точности решения задачи. Чем выше скорость, тем меньше итераций необходимо выполнить.

Различают линейную, сверхлинейную, квадратичную скорость:

$$|x^n - x^*| \leq \alpha |x^{n-1} - x^*|^\beta, \quad \alpha \in (0,1), \quad \beta = 1 \text{ — линейная,} \\ 1 < \beta < 2 \text{ — сверхлинейная, } \beta = 2 \text{ — квадратичная.}$$

## Метод половинного деления

**Идея метода:** начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Вычисляем  $f(x_0)$ . В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки:  $[a_0, x_0]$  либо  $[b_0, x_0]$ . Другую половину отрезка  $[a_0, b_0]$ , на которой функция  $f(x)$  знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню:  $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ . и т.д.

**Рабочая формула метода:**  $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

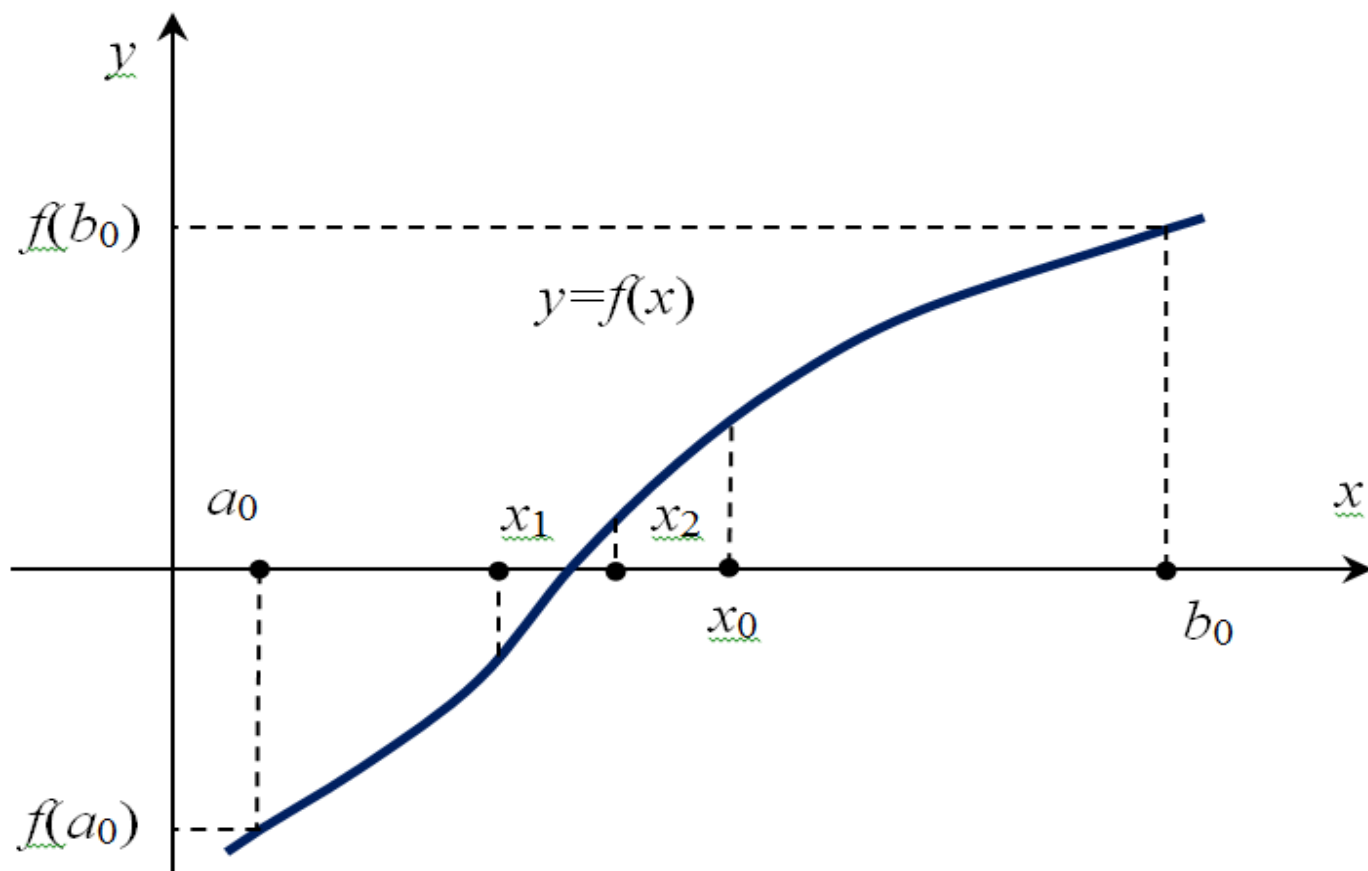
Критерий окончания итерационного процесса:  $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$  или  $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ .

Приближенное значение корня:  $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$  или  $x^* = a_n$  или  $x^* = b_n$



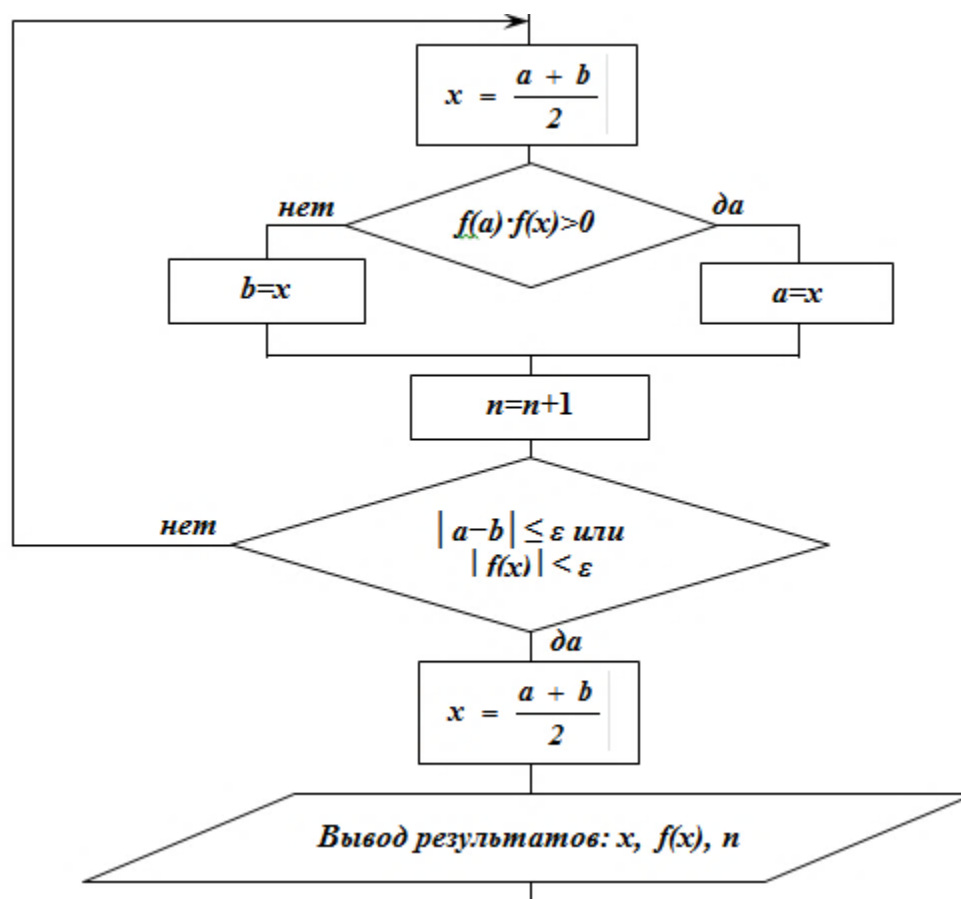


## Визуализация метода половинного деления





## Блок-схема метода половинного деления





# Достоинства и недостатки метода ПД

## Достоинства:

- прост и надежен.
- обладает абсолютной сходимостью (близость получаемого численного решения задачи к истинному решению.)

Рекомендация: применять когда требуется высокая надежность счета, а скорость не существенна.

## Недостатки:

- если интервал содержит несколько корней, то неизвестно к какому относится вычислительный процесс.
- медленный метод: имеет линейную сходимость.



## Оценка числа итераций

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2}, \quad |a_2 - b_2| = \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$$

$$|a_k - b_k| = |a_0 - b_0| \cdot 2^{-k}$$

$$|a_0 - b_0| \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon$$

$$k \geq \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}$$

Число итераций:  $n = \text{int}(\log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}) + 1$

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$ , при  $|a_0 - b_0| = 1$

$$k = 9,966; \quad n = 10 + 1 = 11$$



## Пример 1. Метод половинного деления

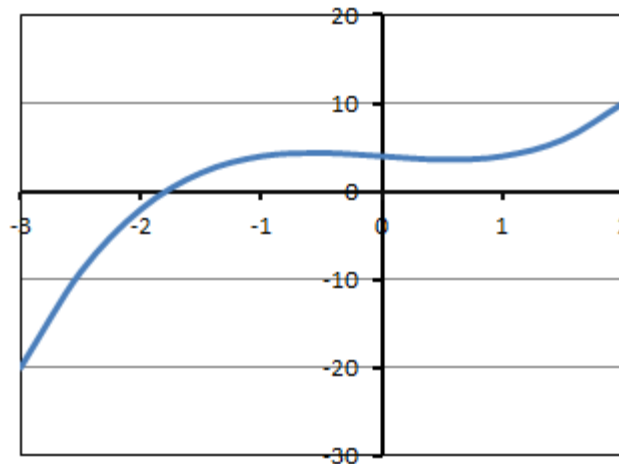
Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью  $\varepsilon = 0,01$

$$n = \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon} + 1 = 8$$

$$x^* \approx \frac{|a_7 + b_7|}{2} \approx 1,79297$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	a-b
0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-2,00000	4,00000	2,12500	1
1	-2,00000	-1,50000	-1,75000	-2,00000	2,12500	0,39063	0,5
2	-2,00000	-1,75000	-1,87500	-2,00000	0,39063	-0,71680	0,25
3	-1,87500	-1,75000	-1,81250	-0,71680	0,39063	-0,14185	0,125
4	-1,81250	-1,75000	-1,78125	-0,14185	0,39063	0,12961	0,0625
5	-1,81250	-1,78125	-1,79688	-0,14185	0,12961	-0,00480	0,03125
6	-1,79688	-1,78125	-1,78906	-0,00480	0,12961	0,06273	0,015625
7	-1,79688	-1,78906	<b>-1,79297</b>	-0,00480	0,06273	0,02905	0,0078125



# Метод хорд

**Идея метода:** функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки  $A(a, f(a))$  и  $B(b, f(b))$ :

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс ( $y = 0$ ):  $x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

**Алгоритм метода:**

0 шаг: Находим интервал изоляции корня  $[a_0, b_0]$

1 шаг: Вычисляем  $x_0$ :  $x_0 = a_0 - \frac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)} f(a_0)$

2 шаг: Вычисляем  $f(x_0)$ .

3 шаг: В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки:  $[a_0, x_0]$  либо  $[b_0, x_0]$ .

4 шаг: Вычисляем  $x_1$  и т.д (повторяем 1-3 шаги).

**Рабочая формула метода:**

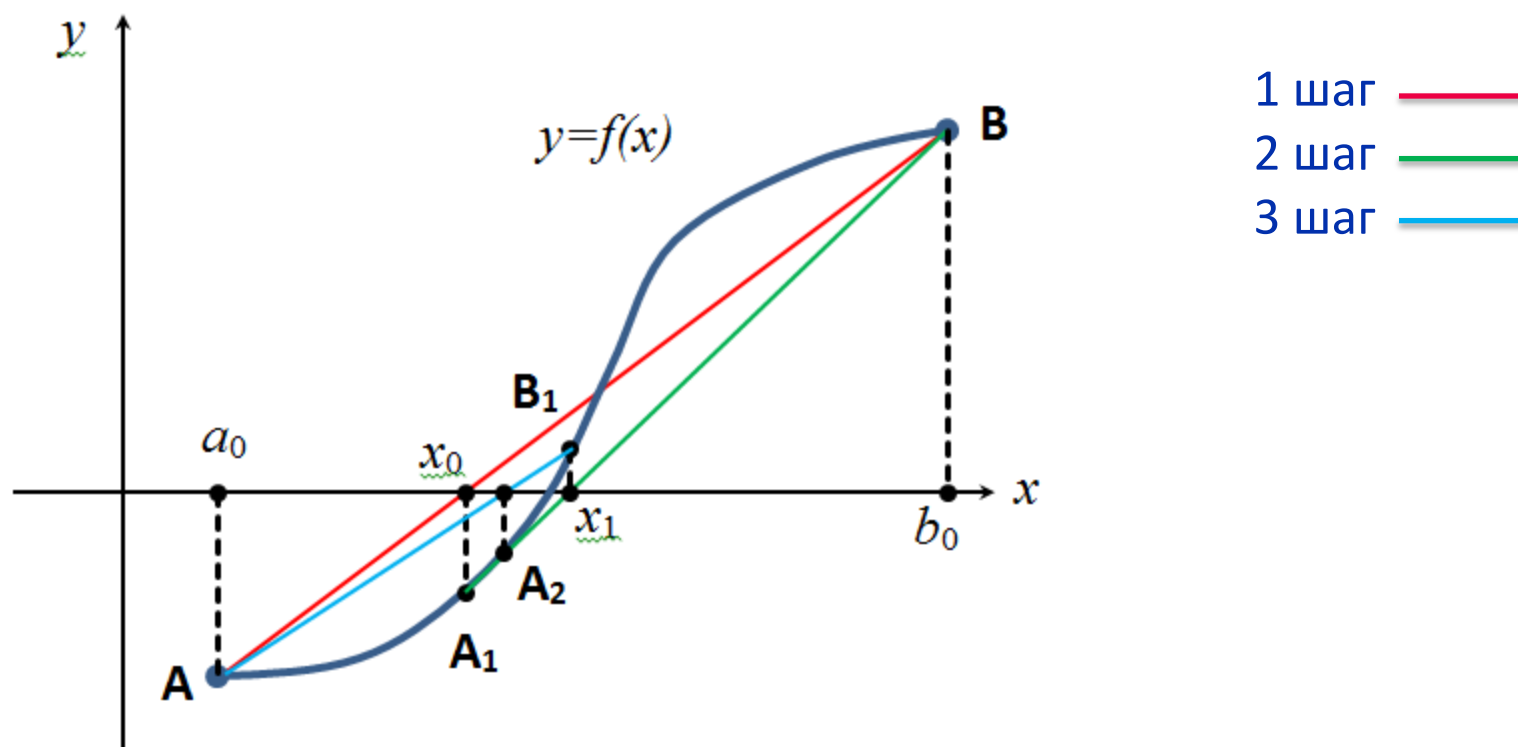
$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Критерий окончания итерационного процесса:  $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$  или  $|a_i - b_i| \leq \varepsilon$  или  $|f(x_i)| \leq \varepsilon$

Приближенное значение корня:  $x^* = x_n$



## Визуализация метода хорд



# Метод хорд

Семейство хорд может строиться:

а) при фиксированном левом конце хорд, тогда  $x_0=b$  (рис. 1а)

**Рабочая формула метода:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a-x_i}{f(a)-f(x_i)} f(x_i)$$

б) при фиксированном правом конце хорд, тогда  $x_0=a$  (рис. 1б)

**Рабочая формула метода:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{b-x_i}{f(b)-f(x_i)} f(x_i)$$

В этом случае **НЕ** надо определять на каждой итерации новые значения  $a$ ,  $b$

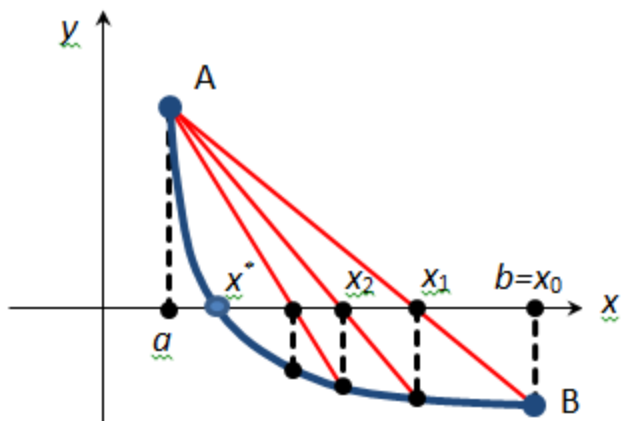


Рис. 1а

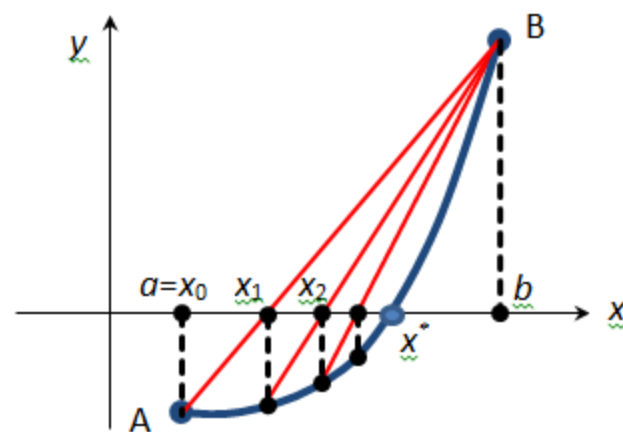


Рис. 1б





## Метод хорд. Определение фиксированного конца

1 случай.

$x_0 = a$ , граница  $b$  - зафиксирована

Производные имеют одинаковые знаки на отрезке  $[a, b]$ :

$$f'(x) \cdot f''(x) > 0$$

$f'(x) > 0$  и  $f''(x) > 0$ , функция возрастает и выпукла вниз

$f'(x) < 0$  и  $f''(x) < 0$ , функция убывает и выпукла вверх

2 случай.

$x_0 = b$ , граница  $a$  - зафиксирована

Производные имеют разные знаки на отрезке  $[a, b]$ :

$$f'(x) \cdot f''(x) < 0$$

$f'(x) < 0$  и  $f''(x) > 0$ , функция убывает и выпукла вниз

$f'(x) > 0$  и  $f''(x) < 0$ , функция возрастает и выпукла вверх



# Достоинства и недостатки метода хорд

## Достоинства:

- Простота реализации

## Недостатки:

- Скорость сходимости – линейная. Порядок сходимости метода хорд выше, чем у метода половинного деления.
- Выбор начального приближения.



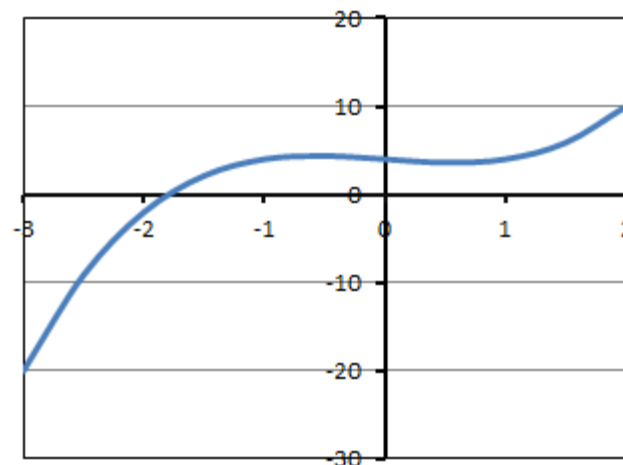
## Пример 2. Метод хорд

Найти корень уравнения  $x^3 - x + 4 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$   
 $f(-2) < 0$   $f(-1) > 0$

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

$$n = 4$$

$$x^* \approx 1,79611$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	$ x_{n+1} - x_n $
0	-2,00000	-1,00000	-1.66667	-2,00000	4,00000	1.03704	0.33333
1	-2,00000	-1.66667	-1.78049	-2,00000	1.03704	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.78049	-1.79447	-2,00000	0.13610	0.01603	0.01399
3	-2,00000	-1.79447	<b>-1.79611</b>	-2,00000	0.01603	0.00186	0.00163



## Пример 3. Метод хорд. Фиксированный конец

Найти корень уравнения  $x^3 - x + 4 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$$

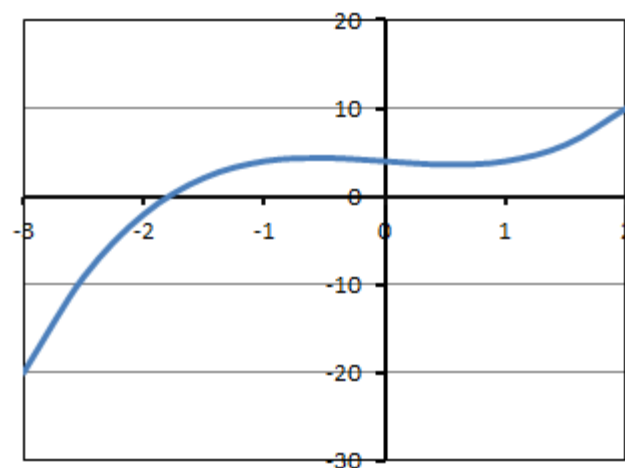
$$f''(x) = 6x < 0$$

$$f'(x) \cdot f''(x) < 0 \rightarrow x_0 = b = -1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - x_i}{f(a) - f(x_i)} f(x_i)$$

$$n = 4$$

$$x^* \approx 1,79611$$



№ итерации	a	x	F(a)	F(x)	$ x_{n+1} - x_n $
0	-2,00000	-1.66667	-2,00000	1.03704	0.66667
1	-2,00000	-1.78049	-2,00000	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.79447	-2,00000	0.01603	0.01399
3	-2,00000	<b>-1.79611</b>	-2,00000	0.00186	0.00163



## Метод Ньютона (касательных)

**Идея метода:** функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня  $x^* = x_n$  принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

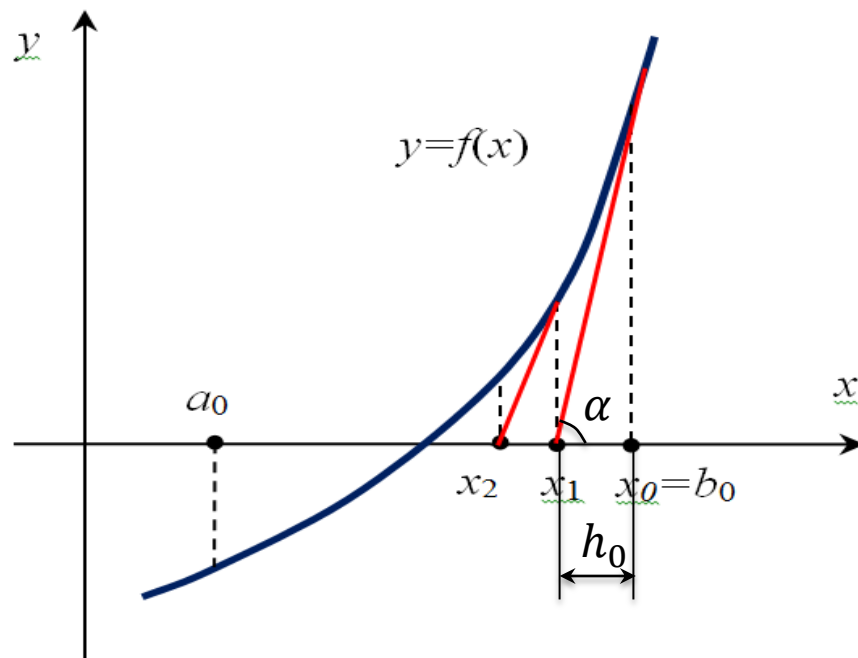
$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan \alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

**Рабочая формула метода:**

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$



Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Приближенное значение корня:  $x^* = x_n$



## Условия сходимости метода Ньютона

Достаточное условие сходимости метода Ньютона:

Метод Ньютона применяется в том случае, если выполняются условия:

- функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$  ;
- $f(a) \cdot f(b) < 0$  (на концах отрезка  $[a; b]$  функция имеет разные знаки);
- производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют знак на отрезке  $[a; b]$ ;
- производная  $f'(x) \neq 0$

**Выбор начального приближения  $x_0 \in [a; b]$ :**

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

$$x_0 = \begin{cases} a_0, & \text{если } f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0 \\ b_0, & \text{если } f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0 \end{cases}$$



## Достоинства и недостатки метода Ньютона

Достоинства:

- квадратичная сходимость .

Недостатки:

- необходимость вычисления производной на каждой итерации.
- выбор начального приближения.



## Пример 4. Метод Ньютона

Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

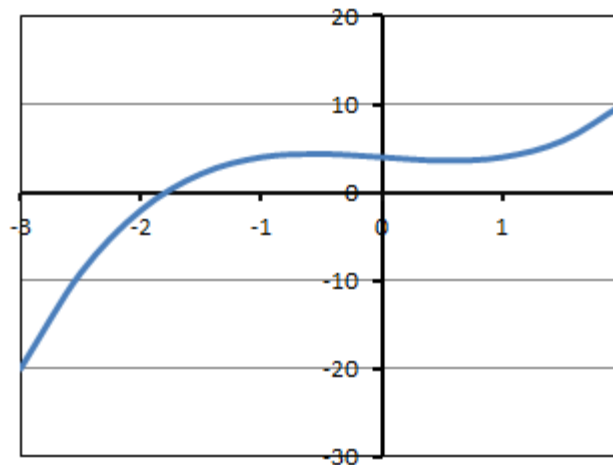
с точностью  $\varepsilon = 0,01$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$$

$$f(-2) < 0 \quad f(-1) > 0$$

$$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$$

$$n = 3 \quad x^* \approx 1,79632$$



№ итерации	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1}$	$ x_{n+1} - x_n $
0	-2,00000	-2,00000	11.00000	-1.81818	0.18182
1	-1.81818	-0.19234	8.91736	-1.79661	0.02157
2	-1.79661	-0.00253	8.68345	<b>-1.79632</b>	0.00029

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$





## Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив  $f'(x)$  разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

Метод секущих является двухшаговым, т.е. новое приближение  $x_{i+1}$  определяется двумя предыдущими итерациями  $x_i$  и  $x_{i-1}$ .

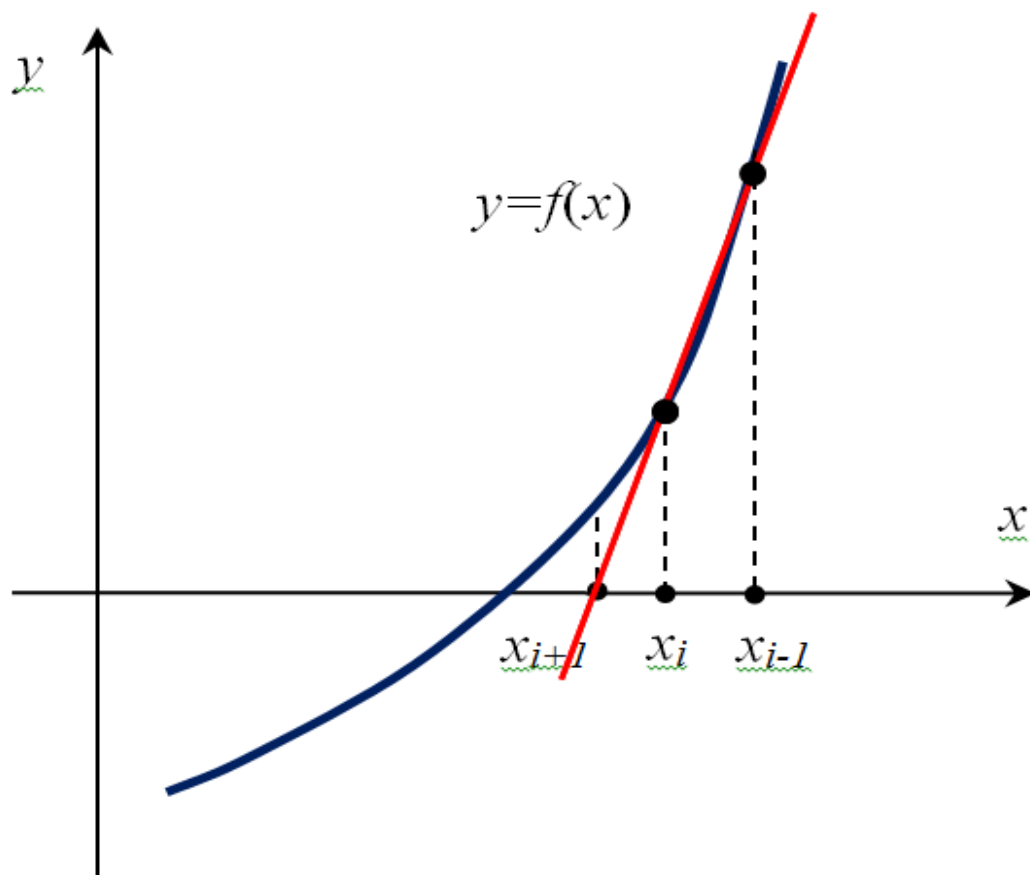
Выбор  $x_0$  определяется как и в методе Ньютона,  $x_1$  - выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Приближенное значение корня:  $x^* = x_n$

## Визуализация метода секущих





# Достоинства и недостатки метода секущих

## Достоинства:

Меньший объем вычислений по сравнению с методом Ньютона, т.к. не требуется вычислять производную.

## Недостатки:

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных и равен золотому сечению  $\approx 1,618$  (сверхлинейная).



## Пример 5. Метод секущих

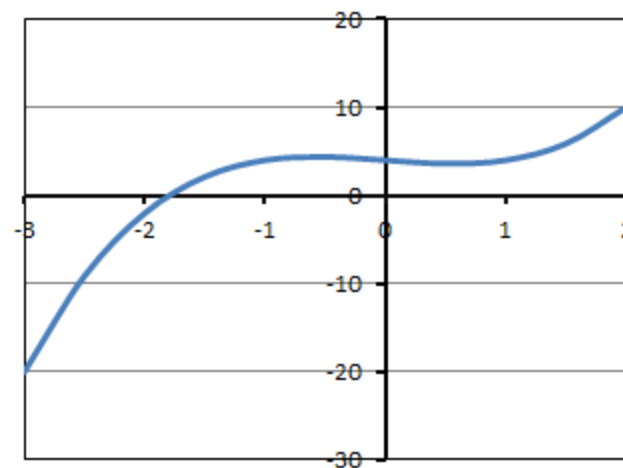
Найти корень уравнения  $x^3 - x + 4 = 0$

с точностью  $\varepsilon = 0,01$

$x_0 = -2$   $x_1 = -1,5$

$n = 3$   $x^* \approx 1,79612$

(метод Ньютона:  $n = 3$   $x^* \approx 1,79632$ )



№ итерации	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-2,00000	-1.50000	-1.75758	2.12500	0.25758
1	-1.50000	-1.75758	-1.80464	0.32830	0.04706
2	-1.75758	-1.80464	<b>-1.79612</b>	-0.07258	0.00852

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad |f(x_n)| > \varepsilon \rightarrow n = 4$$



# Метод простой итерации

Уравнение  $f(x) = 0$  приведем к эквивалентному виду:  $x = \varphi(x)$ , выразив  $x$  из исходного уравнения.

Зная начальное приближение:  $x_0 \in [a, b]$ , найдем очередные приближения:

$$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \dots$$

**Рабочая формула метода:**  $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

**Теорема.** Если на отрезке локализации  $[a, b]$  функция  $\varphi(x)$  определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$ , где  $0 \leq q < 1$ , то независимо от выбора начального приближения  $x_0 \in [a, b]$  итерационная последовательность  $\{x_n\}$  метода будет сходиться к корню уравнения.

**Достаточное условие сходимости метода:**

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , где  $q$  – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Чем меньше  $q$ , тем выше скорость сходимости.

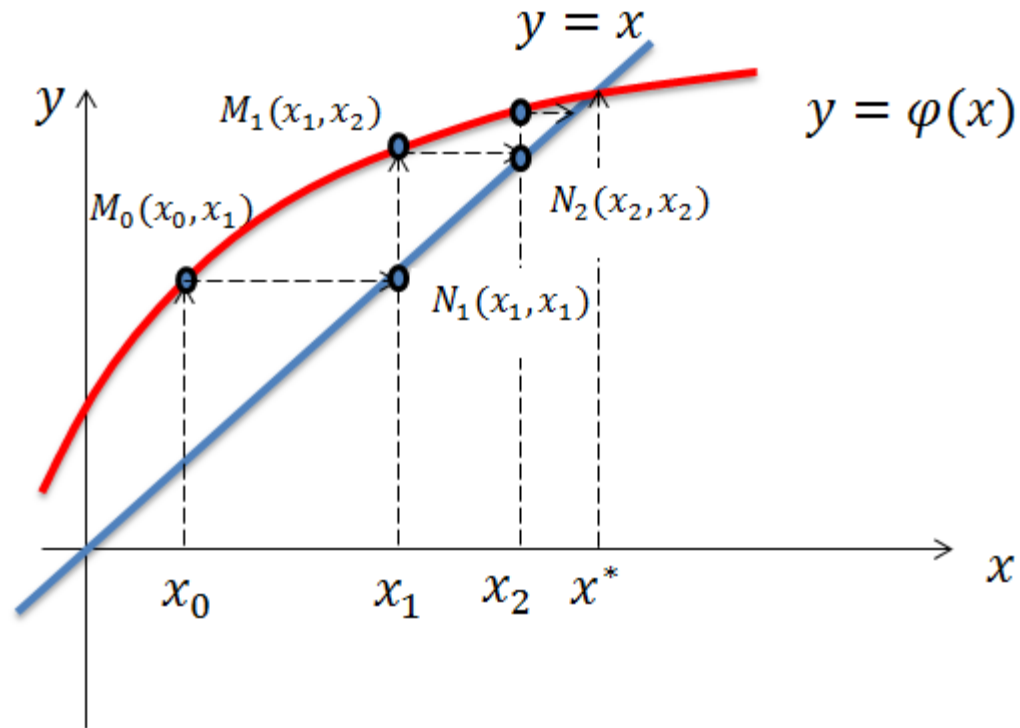
**Критерий окончания итерационного процесса:**

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ (при } 0 < q \leq 0,5)$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon \text{ (при } 0,5 < q < 1)$$

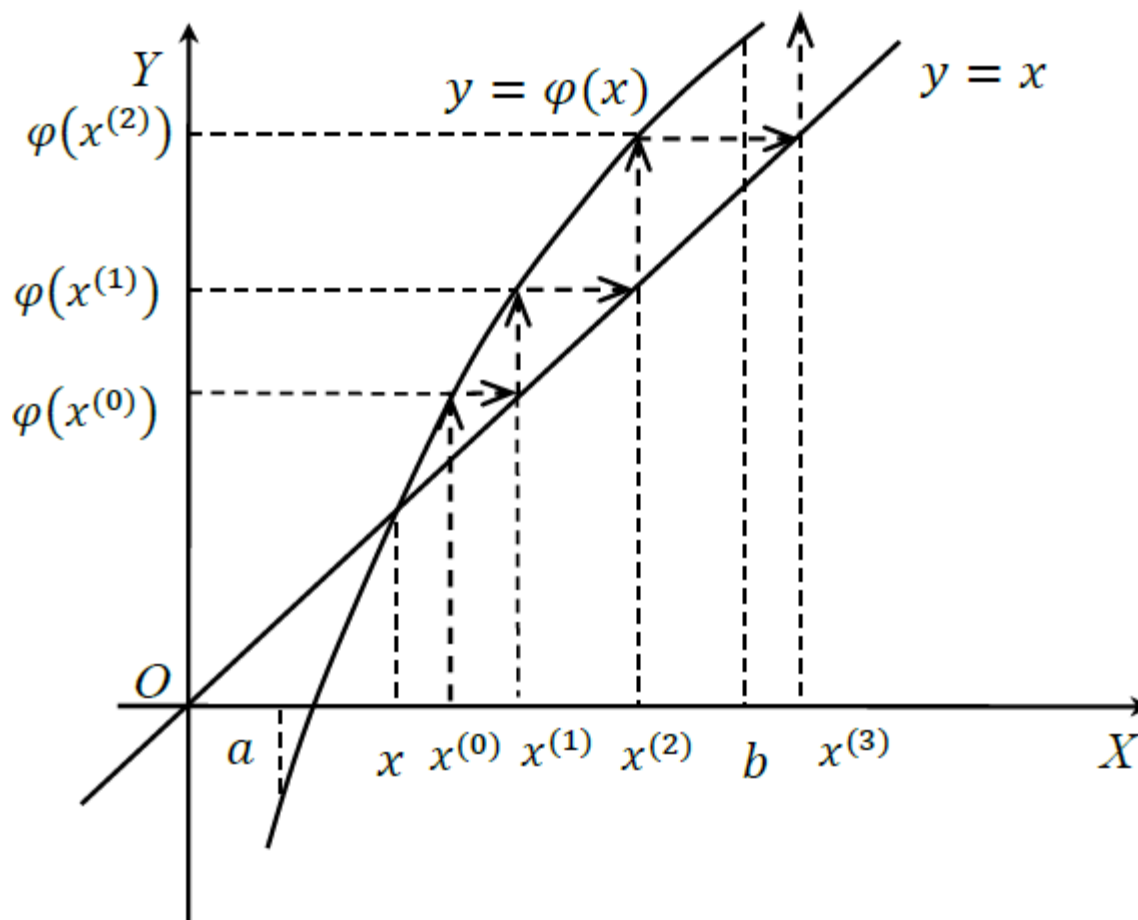
Можно ограничиться:  $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

# Геометрический смысл метода простой итерации



При итерационном процессе получается ломаная линия  $M_0N_1M_1N_2M_2\dots$ , где абсциссы  $M_n$ - последовательные приближения  $x_n$  к решению  $x^*$ . Последовательность итераций на рисунке сходится к точному значению корня: предел последовательности  $\{x^k\}$  существует и совпадает с корнем.

## Геометрический смысл метода простой итерации



Последовательность  $\{x^k\}$  может расходиться.  
 Это не значит, что уравнение не имеет корня.  
 Просто, последовательность к нему не сходится.



## Достоинства и недостатки метода простой итерации

### Достоинства:

Простота

### Недостатки:

Недостатком этого метода является его сходимость в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

Если  $|\varphi'(x)| \approx 1$ , то сходимость может быть очень медленной.



# Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

1 способ:

Преобразуем уравнение к виду  $x = \varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^3 + 4 = 0$$

$$a_0 = -2 \quad b_0 = -1$$

$$\varphi'(x) = 3x^2$$

$$\varphi'(-2) = 12 > 1$$

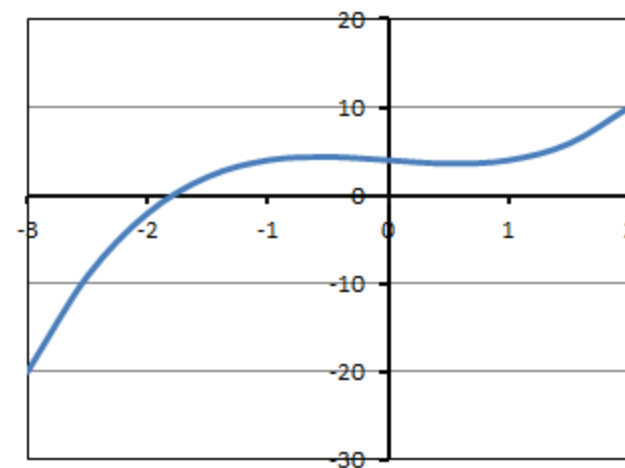
$$\varphi'(-1) = 3 > 1 \quad \text{Условие сходимости НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ}$$

2 способ:

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 4}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x - 4)^{-2/3} \quad |\varphi'(-2)| < 1 \quad |\varphi'(-1)| < 1$$

Условие сходимости ВЫПОЛНЯЕТСЯ





# Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

3 способ (наиболее используемый):

Если непосредственное преобразование уравнения к виду  $x = \varphi(x)$

не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода, применяем более общий прием введения параметра  $\lambda$

1. преобразуем уравнение  $f(x) = 0$  к равносильному (при  $\lambda \neq 0$ )  $\lambda f(x) = 0$

2. прибавим  $x$  в обеих частях:  $x = x + \lambda f(x)$

3.  $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ ,  $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$

4. высокая скорость сходимости обеспечивается при  $q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)| \approx 0$ . Тогда

$$\lambda = -\frac{1}{\max_{[a,b]} |f'(x)|}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = 2 \quad \lambda = -\frac{1}{\max_{[a,b]} |f'(x)|} = -\frac{1}{11}$$

$$x = x + \lambda f(x) \rightarrow x = x + \lambda(x^3 - x + 4) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

$$\varphi(x) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$



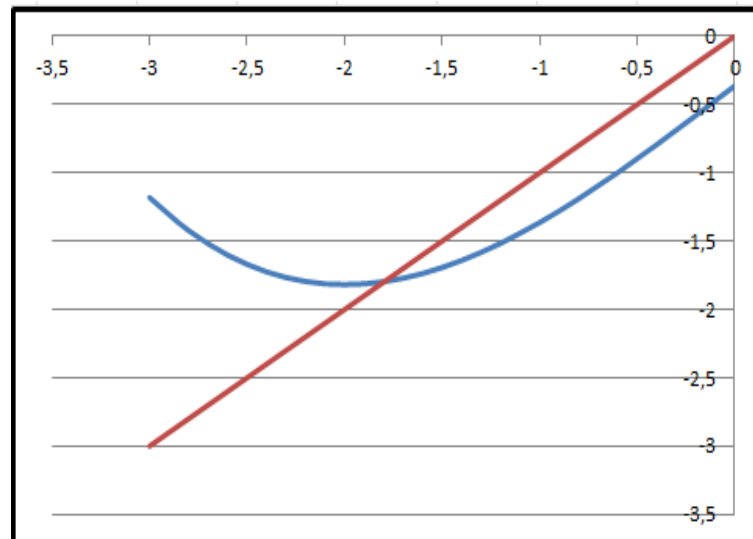
## Метод простой итерации

$$x = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{12}{11}x_0 - \frac{1}{11}x_0^3 - \frac{4}{11} \approx 1.8182$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{12}{11}x_1 - \frac{1}{11}x_1^3 - \frac{4}{11} \approx 1.8007$$



№ итерации	$x_i$	$x_{i+1}$	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-2,0000	-1.8182	-1.8007	-0.19234	0.1818
1	-1.8182	-1.8007	-1.7972	-0.03808	0.0175
2	-1.8007	-1.7972	-1.7965	-0.00793	0.0035

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть для вычисления неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  требуется решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В отличие от систем линейных уравнений не существует прямых методов решения нелинейных систем общего вида.

Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удастся выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного уравнения относительно одного неизвестного.

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

К основе метода лежит использование разложения функций  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки, причем члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются.

Пусть начальные приближения неизвестных системы (1) получены и равны соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , благодаря которым решение системы запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1, x_2 = a_2 + \Delta x_2, \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \quad (2)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (1) с учетом (2) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

[illegible]

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Поскольку в соответствии с (1) левые части этих выражений должны обращаться в нуль, то приравняем к нулю и правые части. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_2 \\ \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Delta x_n = -F_n \end{cases} \quad (3)$$

Значения  $F_1, F_2, \dots, F_n$  и их производные вычисляются при  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ .  
Определителем системы (3) является **якобиан**:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  к значениям неизвестных на каждой итерации.

Критерий окончания итерационного процесса:  $\max |\Delta x_i| \leq \varepsilon$ .

В методе Ньютона:

1. Важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости.
2. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Пусть задано начальное приближение  $\{x_0, y_0\}$  (его можно определить графическим методом). Тогда, очередное приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \\ g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \end{cases}$$

Разложим функцию в окрестности некоторой фиксированной точки по формуле Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + R = 0 \\ g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + R = 0 \end{cases}$$





## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = -f(x_0, y_0) \right) \\ \left( \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = -g(x_0, y_0) \right) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Тогда, вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно  $\Delta x, \Delta y$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

А далее вычислять на каждой итерации:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \text{ и } y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где  $x_i, y_i$  - текущее приближение к корню,

$x_{i+1}, y_{i+1}$  - последующее приближение,

$\Delta x_i, \Delta y_i$  – приращения к очередным приближениям.

Процесс вычисления заканчивается при выполнении следующих условий:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon, \quad |y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon$$



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

### Пример:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ -3x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности радиусом, равным 2, и параболы  $y = 3x^2$ . Следовательно, система имеет не более двух различных решений.

Построим матрицу Якоби:

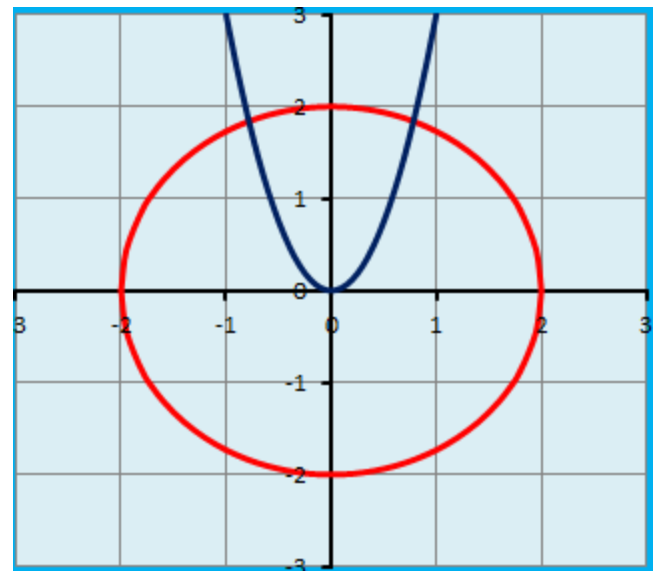
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -6x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Тогда будем решать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -6x & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x^2 - y^2 \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases} \quad (4)$$





## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ:

Шаг 1. Выбираем  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ .

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases}$$

На первой итерации система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\Delta x + 4\Delta y = -1 \\ -6\Delta x + \Delta y = 1 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

Получаем  $\Delta x = -0,192$  и  $\Delta y = -0,154$ .

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 0,192 = 0,808$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 2 - 0,154 = 1,846.$$

Шаг 4. Проверяем критерий окончания итерационного процесса при  $\varepsilon = 0,01$ :

$$|x_1 - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y_1 - y_0| \leq \varepsilon$$

$$|0,808 - 1| > \varepsilon, \quad |1,846 - 2| > \varepsilon$$

Шаг 5. Если ответ не найден, возврат на шаг 2:

$$\begin{cases} 1,616\Delta x + 3,692\Delta y = -0,06058 \\ -4,848\Delta x + \Delta y = 0,11259 \end{cases}$$

И т.д.



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Приведем систему уравнений к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Или, в векторной форме:  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$      $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{X}) \\ \varphi_2(\mathbf{X}) \\ \dots \dots \\ \varphi_n(\mathbf{X}) \end{pmatrix}$

Если выбрано начальное приближение:  $\mathbf{X}^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса:

$$\max_{[x \in G]} |\varphi'(x)| \leq q < 1 \text{ или } \max_{[x \in G]} \max_{[i]} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right| \leq q < 1$$

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Если  $X^{(0)} \in G$  и все последовательные приближения:  $X^{(k+1)} = \varphi(X^k)$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots$  также содержатся в ограниченной замкнутой области  $G$ , тогда итерационный процесс сходится к единственному решению уравнения  $X = \varphi(X)$

**Критерий окончания итерационного процесса:**

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^k \right| \leq \varepsilon$$



## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Пример: найти положительное решение системы нелинейных уравнений с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0,1x_1^2 + x_1 + 0,2x_2^2 - 0,3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0,2x_1^2 + x_2 + 0,1x_1x_2 - 0,7 = 0 \end{cases}$$

Определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате:

$$0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,3 - 0,1x_1^2 - 0,2x_2^2 \\ x_2 = 0,7 - 0,2x_1^2 - 0,1x_1x_2 \end{cases}$$

Проверим условие сходимости. В области G имеем:

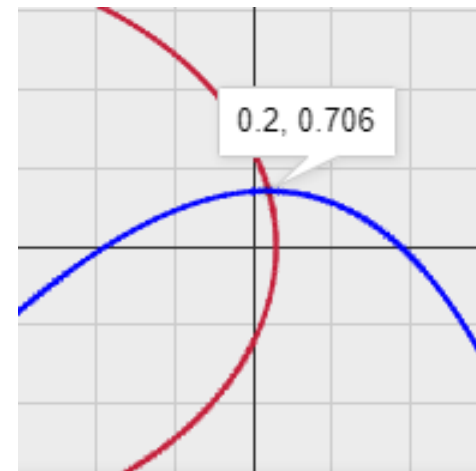
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = -0,2x_1 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -0,4x_2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -0,4x_1 - 0,1x_2 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -0,1x_1$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| = |-0,2x_1| + |-0,4x_2| \leq 0,6$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| = |-0,4x_1 - 0,1x_2| + |-0,1x_1| \leq 0,6$$

$$\max_{x \in G} |\varphi'(x)| \leq 0,6 < 1 \rightarrow \text{Процесс сходящийся}$$





## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

$$\begin{cases} x_1 = 0,3 - 0,1x_1^2 - 0,2x_2^2 \\ x_2 = 0,7 - 0,2x_1^2 - 0,1x_1x_2 \end{cases}$$

Выберем начальное приближение:  $x_1^{(0)} = 1$   $x_2^{(0)} = 1$

### 1 шаг.

$$x_1^{(1)} = 0,3 - 0,1 - 0,2 = 0$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1 > \varepsilon$$

$$x_2^{(1)} = 0,7 - 0,2 - 0,1 = 0,4$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,6 > \varepsilon$$

### 2 шаг.

$$x_1^{(2)} = 0,3 - 0 - 0,2 \cdot 0,4^2 = 0,268$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0,268 > \varepsilon$$

$$x_2^{(2)} = 0,7 - 0 - 0 = 0,7$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0,3 > \varepsilon$$

### 3 шаг.

$$x_1^{(3)} = 0,3 - 0,1 \cdot 0,268^2 - 0,2 \cdot 0,7^2 = 0,195$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,073 > \varepsilon$$

$$x_2^{(3)} = 0,7 - 0,2 \cdot 0,268^2 - 0,1 \cdot 0,268 \cdot 0,7 = 0,667$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,033 > \varepsilon$$

### 4 шаг.

$$x_1^{(4)} = 0,3 - 0,1 \cdot 0,195^2 - 0,2 \cdot 0,667^2 = 0,207$$

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = 0,012 > \varepsilon$$

$$x_2^{(4)} = 0,7 - 0,2 \cdot 0,195^2 - 0,1 \cdot 0,195 \cdot 0,667 = 0,679$$

$$|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = 0,002 > \varepsilon$$

Решение задачи:  $x_1^{(*)} \approx 0,207$   $x_2^{(*)} \approx 0,679$