Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет по лабораторной работе №3

Вариант 25

Выполнил:

Туляков Е.В
P32101

Преподаватель:

Рыбаков С.Д

Санкт-Петербург, 2023 г.

Цель лабораторной работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Формулы методов

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$ — формула Ньютона - Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$ — формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$ — формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n)]$$

— формула Симпсона

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Вычислительная реализация задачи

Интеграл для вычислений: $\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 + 6x - 25)dx$

1. Вычислить приведенный интеграл точно

$$\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 + 6x - 25)dx = (\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2 - 25x)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2^4}{2} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 25 \cdot 2 - 0 = -\frac{122}{3} = -40.667$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона - Котеса при n = 5

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 25$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx c_5^0 f(0) + c_5^1 f(0.4) + c_5^2 f(0.8) + c_5^3 f(1.2) + c_5^4 f(1.6) + c_5^5 f(2.0) =$$

$$= \frac{19\cdot 2}{288}\cdot(-25) + \frac{75\cdot 2}{288}\cdot(-23.11) + \frac{50\cdot 2}{288}\cdot(-21.74) + \frac{50\cdot 2}{288}\cdot(-20.10) + \frac{75\cdot 2}{288}\cdot(-17.45) + \frac{19\cdot 2}{288}\cdot(-13) = -40.667$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx -40.667$$

$$\Delta I = 0$$

3. Вычислить интеграл по формуле средних прямоугольников при n = 10

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 25$$

$$n = 10 \Rightarrow h = \frac{2-0}{10} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x_i)$	-25	-23.94	-23.11	-22.41	-21.74	-21	-20.10	-18.95	-17.45	-15.50	-13
$x_{i-\frac{1}{2}}$		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$f(x_{i-\frac{1}{2}})$		-24.44	-23.51	-22.75	-22.07	-21.38	-20.58	-19.57	-18.25	-16.53	-14.32

$$\int_0^2 f(x)dx \approx 0.2\cdot(-24.44 - 23.51 - 22.75 - 22.07 - 21.38 - 20.58 - 19.57 - 18.25 - 16.53 - 14.32) = -40.68$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx -40.68$$

$$\Delta I = 0.013 \approx 0.032\,\%$$

4. **Вычислить интеграл по формуле трапеций при n = 10**

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 25$$

$$n = 10 \Rightarrow h = \frac{2-0}{10} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x_i)$	-25	-23.94	-23.11	-22.41	-21.74	-21	-20.10	-18.95	-17.45	-15.50	-13

$$\int_0^2 f(x)dx \approx 0.2 \cdot (\frac{-25-13}{2} - 23.94 - 23.11 - 22.41 - 21.74 - 21 - 20.10 - 18.95 - 17.45 - 15.50) = -40.64$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx -40.64$$

$$\Delta I = 0.027 = 0.066\,\%$$

5. **Вычислить интеграл по формуле Симпсона при n = 10**

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 25$$

$$n = 10 \Rightarrow h = \frac{2-0}{10} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x_i)$	-25	-23.94	-23.11	-22.41	-21.74	-21	-20.10	-18.95	-17.45	-15.50	-13

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{0.2}{3}[(-25 + 4 \cdot (-23.94 - 22.41 - 21 - 18.95 - 15.50) + 2 \cdot (-23.11 - 21.74 - 20.10 - 17.45) - 13)] = -40.667$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx -40.667$$

$$\Delta I = 0$$

Программная реализация задачи - листинг программы

Общий метод

```
public static void execute(double a, double b, double accuracy) throws
TimeoutException {
    int n = 4;
    int k = getK();
    double integral0 = calculateI(a, b, n);
    double integral1;
    int i = 0;
    while(true){
        i++;
        n *= 2;
        integral1 = calculateI(a, b, n);
        if((Math.abs(integral1 - integral0)/(Math.pow(2, k) - 1)) < accuracy)
break;
        integral0 = integral1;
        if (i>5000) throw new TimeoutException();
    }
    Printer.printResult(a, b, n, integral1, accuracy, Math.abs(integral1 -
integral0)/(Math.pow(2, k) - 1));
}
```

Метод правых прямоугольников

```
private static double executeRight(double a, double b, double n){
    double sum = 0;
    double h = (b-a)/n;
    a += h;
    for(int i = 1; i < n+1; i++){
        sum += (FunctionStorage.getFunction(a));
        a += h;
    }
    return h * sum;
}
```

Метод левых прямоугольников

```
private static double executeLeft(double a, double b, double n){
    double sum = 0;
    double h = (b-a)/n;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        sum += (FunctionStorage.getFunction(a));
        a += h;
    }
    return h * sum;
}
```

Метод средних прямоугольников

```
private static double executeMedium(double a, double b, double n){
    double sum = 0;
    double h = (b-a)/n;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        sum += (FunctionStorage.getFunction(a + h/2));
        a += h;
    }
    return h * sum;
}
```

Метод трапеций

```
public static double execute(double a, double b, double n) {
    double sum = 0;
    double h = (b-a)/n;
    a += h;
    for(int i = 1; i < n; i++){
        sum += (FunctionStorage.getFunction(a));
        a += h;
    }
    return h * (sum+(FunctionStorage.getFunction(a)
+FunctionStorage.getFunction(b))/2);
}
```

Метод Симпсона

```
public static double execute(double a, double b, double n) {
    double oddSum = 0;
    double evenSum = 0;
    double h = (b-a)/n;
    a += h;
    for(int i = 1; i < n; i++){
        if(i%2 == 1) oddSum += (FunctionStorage.getFunction(a));
        else evenSum += (FunctionStorage.getFunction(a));
        a += h;
    }
    return h/3 * (FunctionStorage.getFunction(a) + 4*oddSum + 2*evenSum + 
FunctionStorage.getFunction(b)) ;
}
```

Результат работы программы

Choose the function:
[1] 2*x^3 - 9*x^2 + 3*x + 11
[2] 3*x^5 + x^2 + 0.1
[3] sin(x) + cos(x)
[4] 1 / x
Your choice: 4
Choose the method:
[1] Rectangle method
[2] Trapezoid method
[3] Simpson method
Your choice: 3
Input a (lower limit of integration): 10
Input b (higher limit of integration): 20
Input accuracy: 0,01
——————————————————RESULT——————————————————
Standart I = 0.693147180559945
Calculated I = 0.6723211973211973
Absolute error = 0.0013822597155930408
Relative error = 0.19941792369066702 %
ε = 0.01
n = 8
——

Вывод

В ходе лабораторной работы я изучил основные методы численного интегрирования. Метод прямоугольников на мой взгляд оказался самым простым в реализации, но при этом для получения желаемой точности приходится сделать значительно больше итераций, чем при использовании остальных методов. Также, можно сделать вывод, что метод средних прямоугольников в случае линейных функций имеет меньшую погрешность, чем методы левых и правых прямоугольников.