

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Вычислительная математика**

Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.

[tamalysheva@itmo.ru](mailto:tamalysheva@itmo.ru)

Санкт-Петербург, 2023



# Численное интегрирование

## Постановка задачи

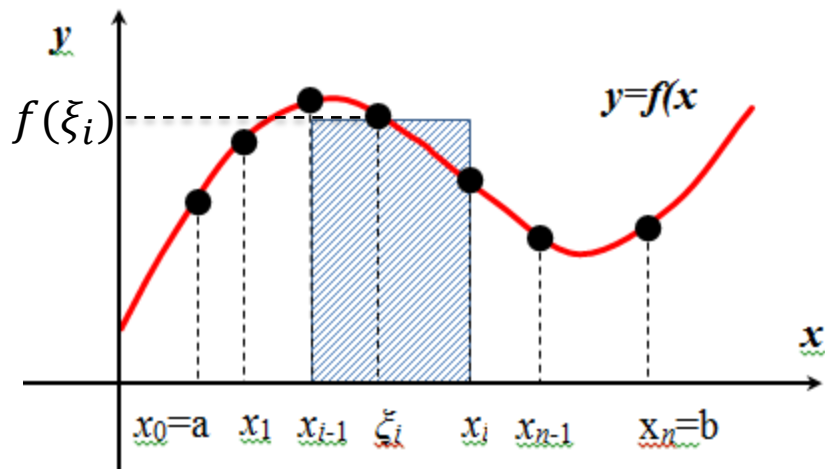
Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $y=f(x)$ .

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $(i=1, 2, \dots, n)$  причем  $x_0=a$ ,  $x_n=b$ .
2. На каждом из этих отрезков выберем произвольную точку  $\xi_i$
3. Найдем:  $s_i = f(\xi_i) \Delta x_i$        $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
4. Составим сумму всех таких

произведений:

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i -$$

интегральная сумма





## Постановка задачи

**Определенным интегралом** от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения; при этом длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

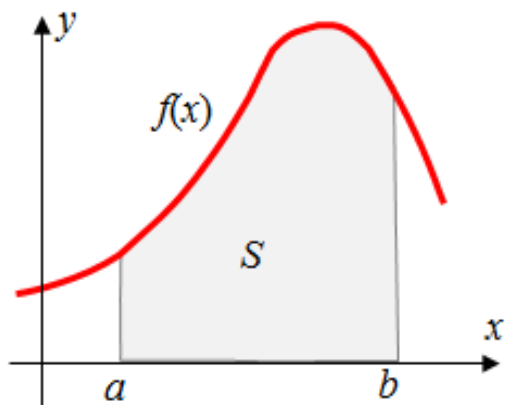
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Теорема существования определенного интеграла. Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ , ни от выбора точек  $\xi_i$ .

### Геометрический смысл интеграла:

если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ , то интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$ , отрезком оси абсцисс, ординатами  $a$  и  $b$ .

**Вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.**



# Аналитическая функция

Если функция  $f(x)$  задана аналитически (формулой) и ее первообразная  $F(x)$  является элементарной функцией, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона –Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(x) - \text{первообразная, } F'(x) = f(x)$$

Например, подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически, но интеграл не берущийся, т. е. не выражается в конечном виде через элементарные функции. Тогда можно использовать разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора, а затем применить формулу Ньютона –Лейбница. Например, для вычисления интеграла:

$$I = \int_0^1 e^{x^{-2}} dx$$

Разложение в ряд:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ . Заменим  $x$  на  $x^{-2}$ , получим:

$$I = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots \approx 0,7468$$



## Численное интегрирование

Когда формулой Ньютона –Лейбница невозможно или затруднительно воспользоваться:

- подынтегральная функция представлена в виде таблицы значений или задана графически, тогда первообразная  $F(x)$  не существует;
- подынтегральная функции имеет сложное аналитическое выражение или/и её первообразная не выражается через элементарные функции или слишком громоздка.

Тогда применяют численное (приближенное) интегрирование.

## Численное интегрирование

Численные методы вычисления определенных интегралов основаны на замене подынтегральной функции  $f(x)$  аппроксимирующей функцией, которая может быть проинтегрирована в аналитическом виде.

Для аппроксимации может быть использован любой класс простых функций, таких как полиномы, тригонометрические, экспоненциальные или логарифмические функции. В наиболее распространенном случае в качестве таких функций используются степенные полиномы  $P(x)$  с узлами интерполяции в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В этих точках значения функции и интерполяционного полинома полностью совпадают  $f(x_i) = P(x_i)$ .

# Численное интегрирование

Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называются **квадратурными формулами**.

При этом определенный интеграл заменяется конечной (интегральной) суммой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

где  $\alpha_i$  – числовые (квадратурные) коэффициенты, выбор которых зависит от используемого метода численного интегрирования.

$x_i$  – узлы интегрирования,  $x_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$ .

Правая часть – квадратурная сумма. В зависимости от способа вычисления суммы получены разные методы интегрирования.

**Погрешность** квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

и зависит от выбора коэффициентов и от расположения узлов  $x_i$ .



## Формула Ньютона - Котеса

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  $f(x)$  заменяется на отрезке  $[a, b]$

**интерполяционным многочленом Лагранжа**  $L_n(x)$ , совпадающий с  $f(x)$  в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ . Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_n^i(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где  $L_n^i(x)$  - коэффициенты Лагранжа (полиномы степени  $n$ ):

$$L_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Если полином Лагранжа «близок» к  $f(x)$ , то интегралы от них тоже должны быть «близки»:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_n^i(x) dx$$





# Формула Ньютона - Котеса

Коэффициенты Котеса:  $c_n^i = \int_a^b L_n^i(x) dx$

**Формула Ньютона-Котеса порядка n:**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) c_n^i$$

**Пример:** Вычислить коэффициенты Котеса  $c_1^0 = c_1^1$

Пусть значения функции  $f(x)$  заданы в двух узлах:  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$

Аппроксимируем функцию полиномом Лагранжа первой степени:

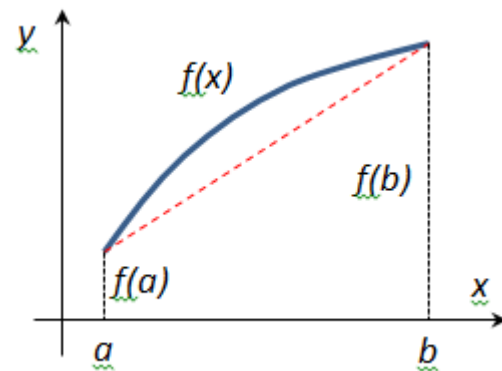
$$f(x) \approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= f(a) \frac{x - b}{a - b} + f(b) \frac{x - a}{b - a}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a)}{a - b} \int_a^b (x - b) dx + \frac{f(b)}{b - a} \int_a^b (x - a) dx =$$

$$f(a) \frac{b - a}{2} + f(b) \frac{b - a}{2}$$

Тогда коэффициенты Котеса  $c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$





## Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса $c_i^n$			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{32(b-a)}{90}$	$c_4^2 = \frac{12(b-a)}{90}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}$	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$	$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$



# Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса $c_i^n$			
7	$c_7^0 = c_7^7 = \frac{751(b-a)}{17280}$	$c_7^1 = c_7^6 = \frac{3577(b-a)}{17280}$	$c_7^2 = c_7^5 = \frac{1323(b-a)}{17280}$	$c_7^3 = c_7^4 = \frac{2989(b-a)}{17280}$
8	$c_8^0 = c_8^8 = \frac{989(b-a)}{28350}$ $c_8^4 = -\frac{4540(b-a)}{28350}$	$c_8^1 = c_8^7 = \frac{5888(b-a)}{28350}$	$c_8^2 = c_8^6 = -\frac{928(b-a)}{28350}$	$c_8^3 = c_8^5 = \frac{10496(b-a)}{28350}$
9	$c_9^0 = c_9^9 = \frac{2857(b-a)}{89600}$ $c_9^4 = c_9^5 = \frac{5778(b-a)}{89600}$	$c_9^1 = c_9^8 = \frac{15741(b-a)}{89600}$	$c_9^2 = c_9^7 = \frac{1080(b-a)}{89600}$	$c_9^3 = c_9^6 = \frac{19344(b-a)}{89600}$
10	$c_{10}^0 = c_{10}^{10} = \frac{16067(b-a)}{598752}$ $c_{10}^4 = c_{10}^6 = -\frac{260550(b-a)}{598752}$	$c_{10}^1 = c_{10}^9 = \frac{106300(b-a)}{598752}$ $c_{10}^5 = \frac{427368(b-a)}{598752}$	$c_{10}^2 = c_{10}^8 = -\frac{48525(b-a)}{598752}$	$c_{10}^3 = c_{10}^7 = \frac{272400(b-a)}{598752}$



## Формула Ньютона - Котеса

Как пользоваться этой таблицей?

Пусть функция  $f(x)$  задана в т р е х точках:  $a$ ,  $b$  и в точке  $x = \frac{a+b}{2}$ .

В таком случае, выбирая из строки  $n = 2$  коэффициенты Котеса  $c_2^0, c_2^1, c_2^2$ , запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(x) + c_2^2 f(b) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(x) + \frac{b-a}{6} f(b)$$



# Частные случаи формулы Ньютона-Котеса

Степень  
полинома

**Нулевая**

Формулы  
прямоугольников

Степень  
полинома

**Первая**

Формула  
трапеций

Степень  
полинома

**Вторая**

Формула  
парабол  
(Симпсона)

## Метод прямоугольников

На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из  $n$ -прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы  $n$ -элементарных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

В качестве точек  $\xi_i$  могут выбираться левые (  $\xi_i = x_{i-1}$  ) или правые (  $\xi_i = x_i$  ) границы отрезков, получим формулы левых и правых прямоугольников.

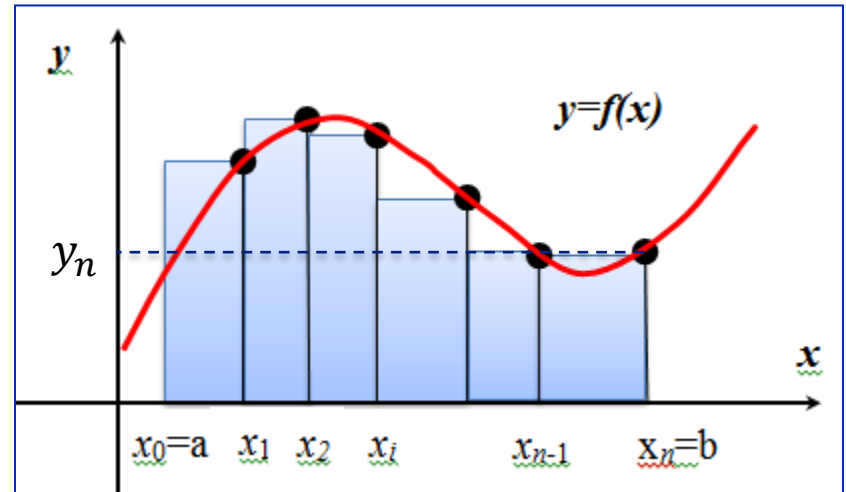
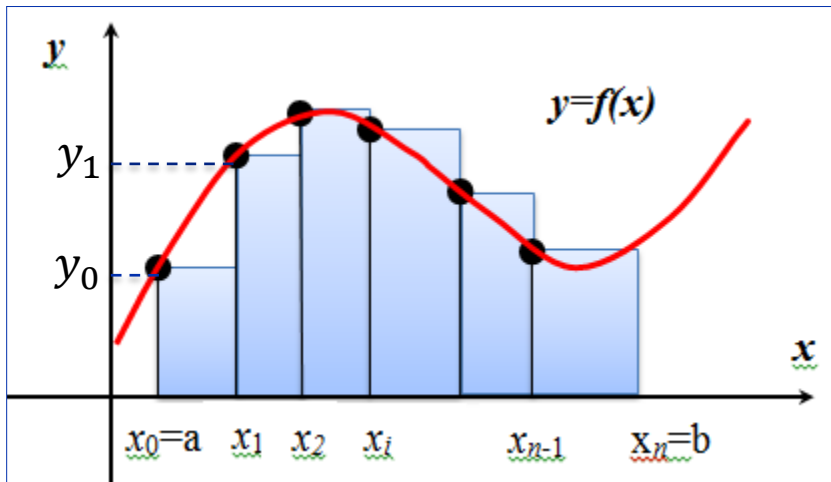


## Метод прямоугольников

Обозначим:

$$f(x_i) = y_i, \quad f(a) = y_0, \quad f(b) = y_n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i$$





## Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i y_{i-1}$  - левые  
прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n = \sum_{i=1}^n h_i y_i$  - правые  
прямоугольники

При  $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$ :

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_i$$

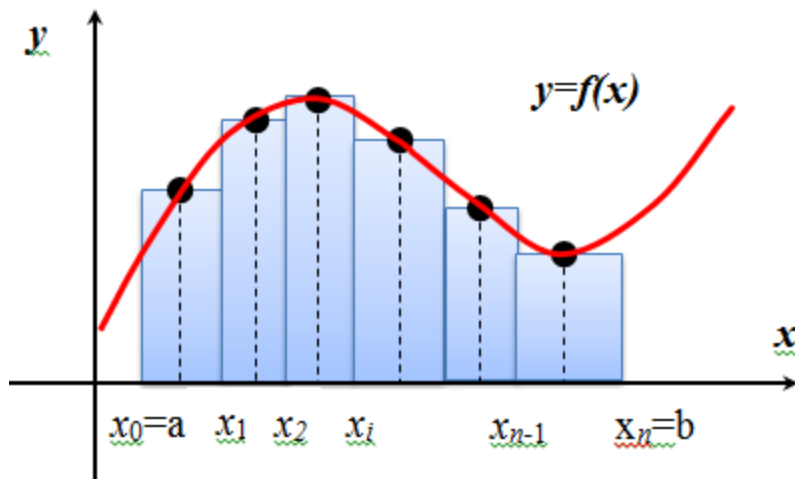




## Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2})$$
$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$



При  $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$  :

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$



## Метод прямоугольников

**Пример 1.** Найти значение интеграла методами прямоугольников:

$$I = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \approx 2,33 \dots$$

Разобьем отрезок интегрирования на 5 равных частей:  $n = 5$ ,  $h = \frac{b-a}{n} = 0,2$ .

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$$I_{\text{прав}} = h \sum_{i=1}^n y_i = 2,64 \quad I_{\text{лев}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-1} = 2,040 \quad I_{\text{сред}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-1/2} = 2,3300$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2,3333 - 2,3300 = 0,0033 (\approx 0,14\%)$$

$$\Delta I_{\text{лев}} = I - I_{\text{лев}} = 2,3333 - 2,040 = 0,2933 (\approx 12,5\%)$$

$$\Delta I_{\text{прав}} = I - I_{\text{прав}} = 2,3333 - 2,64 = 0,3067 (\approx 13,1\%)$$

$i$	0	1	2	3	4	5
$x_i$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$y_i$	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4
$x_{i-1/2}$		1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y_{i-1/2}$		1,21	1,69	2,25	2,89	3,61



## Метод прямоугольников

**Пример 2.** Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей:

$$n = 10, \quad h = \frac{b-a}{n} = 0,1.$$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$$I_{\text{прав}} = h \sum_{i=1}^n y_i = 2,485 \quad I_{\text{лев}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-1} = 2,185$$

$$I_{\text{сред}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-1/2} = 2,3325$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2,3333 - 2,3325 = 0,0008 (\approx 0,034\%)$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$y_i$	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
$x_{i-1/2}$		1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
$y_{i-1/2}$		1,1025	1,3225	1,5625	1,8225	2,1025	2,4025	2,7225	3,0625	3,4225	3,8025



## Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

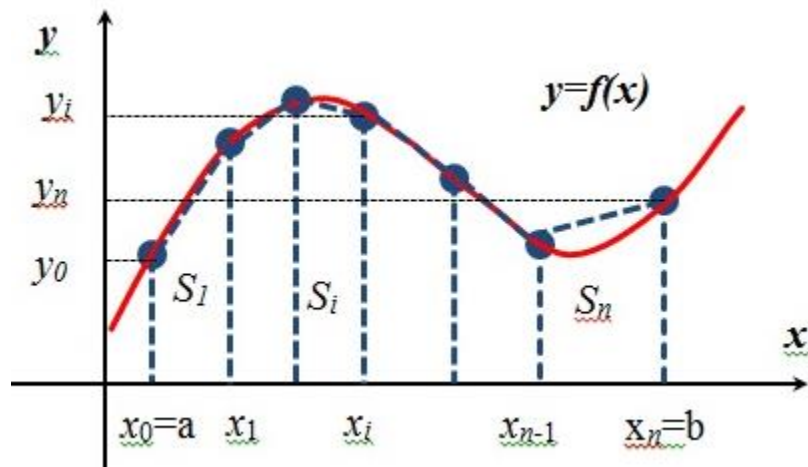
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции  $y = f(x)$  представляется в виде ломаной, соединяющей точки  $(x_i, y_i)$ . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \quad y_n = f(b), \quad y_i = f(x_i), \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При  $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$  формула трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$



## Метод трапеций

**Пример 3.** Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных

частей:  $n = 10$ ,  $h = \frac{b-a}{n} = 0,1$ .

$$I_{\text{трап}} = \int_1^2 x^2 dx = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0,1 \cdot \left( \frac{1 + 4}{2} + (1,21 + 1,44 + \dots + 3,61) \right) = 2,3350$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I = I - I_{\text{трап}} = 2,3333 - 2,3350 = 0,0017 (\approx 0,073\%).$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$y_i$	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

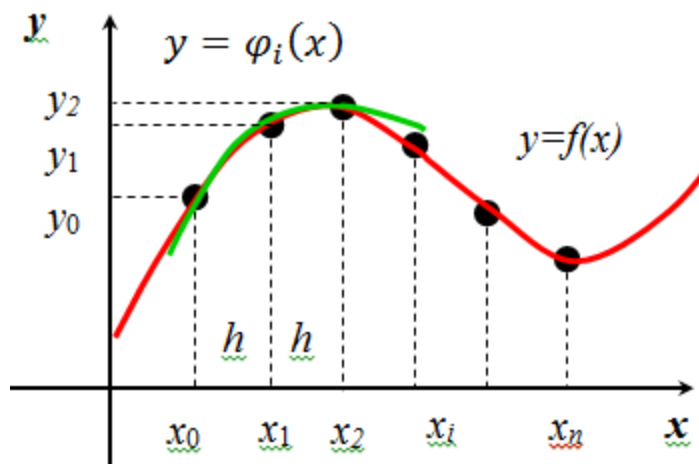
## Метод Симпсона (Симпсон Томас(20.08.1710–14.05.1751) – английский математик)

Разобьем отрезок интегрирования  $[a, b]$  на четное число  $n$  равных частей с шагом  $h$ . На каждом отрезке  $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{i-1}, x_{i+1}], \dots, [x_{n-2}, x_n]$  подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена и подынтегральной функции в узловых точках.

В качестве  $\varphi_i(x)$  можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки  $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ .





# Метод Симпсона

Для точек  $x_0, x_1, x_2$ :

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

При  $x_0=0; x_1=h; x_2=2h$ , получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{h \cdot 2h}y_0 + \frac{x(x-2h)}{-h \cdot h}y_1 + \frac{x(x-h)}{2h \cdot h}y_2 = \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2}y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2}y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2}y_2$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_0}^{x_0+2h} \varphi_1(x)dx = \int_0^{2h} \left( \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2}y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2}y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2}y_2 \right) dx = \\ &= \frac{y_0}{2h^2} \left( \frac{x^3}{3} - 3h \frac{x^2}{2} + 2h^2 x \right) \Big|_0^{2h} - \frac{y_1}{h^2} \left( \frac{x^3}{3} - 2h \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} + \frac{y_2}{2h^2} \left( \frac{x^3}{3} - h \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} = \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3} \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Для каждого элементарного отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ :  $S_i = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + 2y_n)$$



## Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

**Пример 4.** Найти значение интеграла методом Симпсона:  $I = \int_1^2 x^2 dx \approx 2,33$

При  $n = 4$ ,  $h = 0,25$ .

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	1	1,25	1,5	1,75	2
$y_i$	1	1,5625	2,25	3,0625	4

$$I = \frac{0,25}{3} [(1 + 4(1,5625 + 3,0625) + 2 \cdot 2,25) + 4] = 2,3333$$





## Методы Ньютона-Котеса

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^N c_j f(x_j) = \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n c_{in} f(x_i) \quad (*)$$

где  $n$  – порядок метода Ньютона-Котеса,  $N$  – количество частичных отрезков,

$$h = \frac{x_j - x_{j-1}}{n} \quad x_i = x_j + i \cdot h$$

$$C_n = \sum_{i=0}^n c_{in}$$

Из выражения (\*) можно получить формулу прямоугольников для  $n=0$ , формулу трапеций для  $n=1$ , формулу Симпсона для  $n=2$ .

$n$	$C_n$	$c_{0n}$	$c_{1n}$	$c_{2n}$	$c_{3n}$	$c_{4n}$	$c_{5n}$
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

# Погрешность численного интегрирования

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

Или:

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{приб}}|$$

Для оценки погрешности  $R$  приближенного интегрирования:

1) Формулы средних прямоугольников:  $|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2} :$

второй порядок точности  $O(h^2)$

2) Формула трапеций:  $|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} : O(h^2)$

3) Формула Симпсона:  $|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''''(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4} : O(h^4)$

четвертый порядок точности  $O(h^4)$



## Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

В основном встречаются две разновидности заданий:

- либо вычислить определенный интеграл численным методом для заданного числа разбиения отрезка  $n$  (см. примеры 1,2,3,4)
- либо найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.

**Пример 4.** Вычислите определенный интеграл  $\int_1^2 (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)dx$  методом трапеций с точностью до 0.01.

**Решение:** найдем количество точек разбиения отрезка интегрирования  $n$ , используя неравенство для оценки абсолютной погрешности  $|R| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ .

$$f'(x) = (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)' = \frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x, \quad f''(x) = (\frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x)'' = 1,2x^2 + 0,4$$

$$\max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = 1,2 \cdot 4 + 0,4 = 5,2$$

Подставим полученное значение в неравенство  $\max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \geq 0,01 \rightarrow 5,2 \frac{(2-1)^3}{12n^2} \geq 0,01$

Тогда  $n^2 \geq \frac{520}{12} \rightarrow |n| \geq 6,58$ . Возьмем  $n=8$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = 0,125$$

Занесем в таблицу результаты расчетов:



## Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
$f(x_i)$	-6,7	-6,58669	-6,44336	-6,26443	-6,04375	-5,77458	-5,44961	-5,06091	-4,6

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7 \right) dx \approx h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) =$$

$$= 0,125(-5,65 - 41,6233) = -5,9092$$

Найдем интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7 \right) dx = \left( \frac{x^5}{50} + \frac{x^3}{15} - 7x \right) \Big|_1^2 = -12,8267 + 6,9133 = -5,9134$$

$$|R| = |I - I_{\text{тр}}| = 0,0042 < 0,01 \text{ - точность достигнута.}$$



# Погрешность численного интегрирования

Непосредственное использование оценки погрешности неудобно, т.к. требует вычисление производной функции  $f(x)$ , особенно для подынтегральных функций сложного вида. В вычислительной практике используется **правило Рунге**.

**Правило Рунге** - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами  $h$ :

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

$I$  – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$  - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами  $h$ ;

$k$  - порядок точности квадратурной формулы,

( $k=2$  - для формул средних прямоугольников и трапеций,  $k=4$  - для формулы Симпсона).

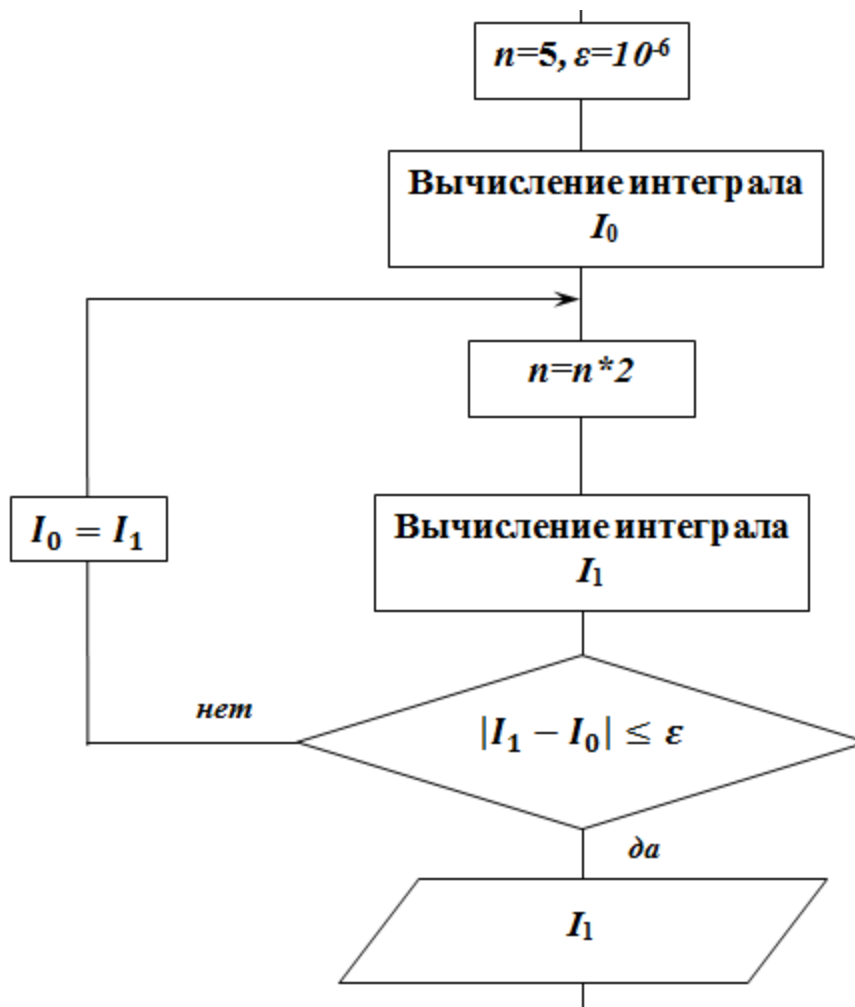


## Алгоритм приближенного вычисления определенных интегралов

Имеет смысл прибегнуть к следующему алгоритму:

1. Выбираем произвольно число  $n$ , например,  $n = 5$ .
2. Вычисляем по итерационной формуле интеграл для  $n = 5$  ( $I_0$ ).
3. Вычисляем интеграл для удвоенного числа узлов:  $n = 10$  ( $I_1$ ).
4. Находим абсолютную величину разности двух полученных приближенных значений ( $|R| = |I_1 - I_0|$ ).
5. Если она меньше требуемой точности, то прекращаем вычисления и в качестве приближенного значения определенного интеграла берем значение, предварительно округлив его до требуемого порядка точности. В противном случае удваиваем количество узлов (берем  $n = 20$ ) и повторяем действия.

# Алгоритм вычисления интеграла



# Погрешность численного интегрирования

Какой же метод применять при численном интегрировании?

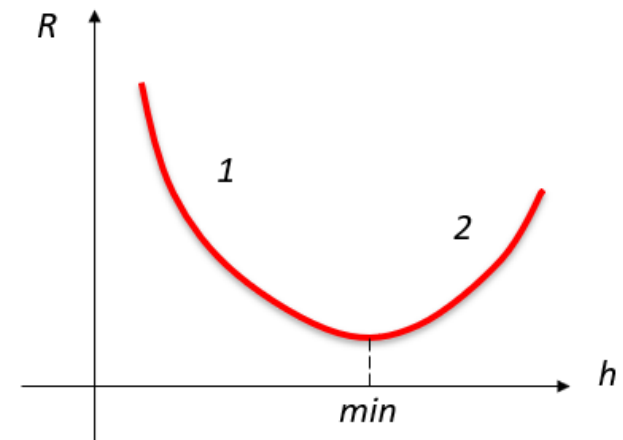
Точность метода Симпсона выше точности метода прямоугольников и трапеций для заданного  $n$  (это видно из оценки абсолютной погрешности), так что его использование предпочтительнее.

**ВОПРОС:** Зачем анализировать разные методы интегрирования, если погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности.

На участке (1) погрешность уменьшается в связи с уменьшением шага  $h$ .

На участке (2) при больших  $n$  начинает доминировать вычислительная погрешность, накапливающаяся в результате многочисленных в результате многочисленных арифметических действий.

Это может отдалить приближенное значение от точного.





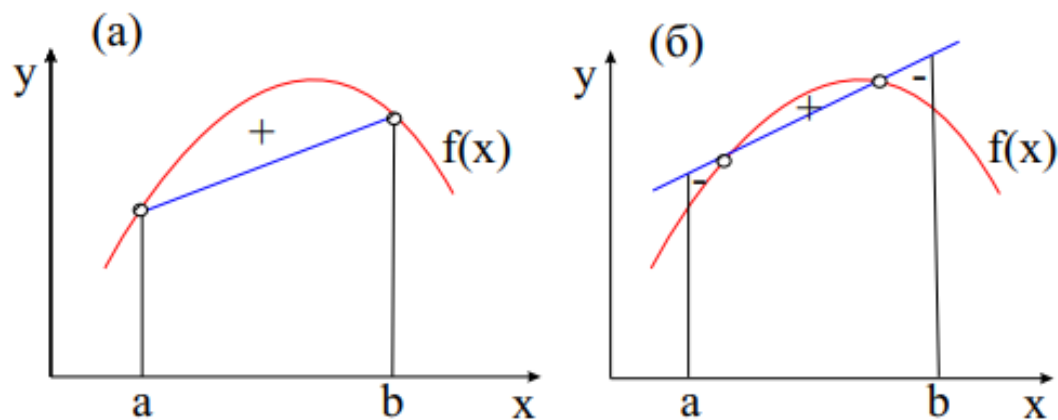
## Квадратурная формула Гаусса

Метод Гаусса позволяет повысить порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования. Используется для неравномерной сетки.

Погрешности аппроксимации (отмечены + и -) могут быть скомпенсированы за счет выбора оптимальных узлов.

Рис.а – метод трапеций

Рис.б – метод Гаусса





## Квадратурная формула Гаусса

Расчет интеграла в данном методе осуществляется в два этапа:

1. интеграл с пределами интегрирования  $[a, b]$  сводится к интегралу с пределами  $[-1, 1]$
2. полученный интеграл рассчитывается как сумма значений подынтегральной функции в специальных точках, умноженных на весовые коэффициенты.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n f(t_i) A_i$$

$$x_i \in [a, b]$$

$A_i$  – квадратурные (или весовые) коэффициенты,  $t_i$  – специальные узлы функции  $f(x)$ , корни многочлена Лежандра.



## Квадратурная формула Гаусса

Для изменения пределов интегрирования делается замена переменных:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad x_i \in [a, b], \quad t_i \in [-1, 1],$$

Получаем квадратуру Гаусса-Лежандра для произвольного интервала интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f(x_i)A_i$$

$$\text{где } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$$

$t_i$  и  $A_i$  уже вычислены и сведены в таблицу



## Квадратурная формула Гаусса

n	i	$t_i$	$A_i$
1	1	0	2
2	1;2	$\pm 0.57735027$	1
3	1;3	$\pm 0.77459667$	0.55555556
	2	0	0.88888889
4	1;4	$\pm 0.86113631$	0.34785484
	2;3	$\pm 0.33998104$	0.65214516
5	1;5	$\pm 0.90617985$	0.23692688
	2;4	$\pm 0.53846931$	0.47862868
	3	0	0.56888889

6	1;6	$\pm 0.93246951$	0.17132450
	2;5	$\pm 0.66120939$	0.36076158
	3;4	$\pm 0.23861919$	0.46791394
7	1;7	$\pm 0.94910791$	0.12948496
	2;6	$\pm 0.74153119$	0.27970540
	3;5	$\pm 0.40584515$	0.38183006
	4	0	0.41795918
8	1;8	$\pm 0.96028986$	0.10122854
	2;7	$\pm 0.79666648$	0.22238104
	3;6	$\pm 0.52553242$	0.31370664
	4;5	$\pm 0.183434464$	0.36268378



## Квадратурная формула Гаусса

Пример: вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при  $n=3$  и  $n=4$ )

$$\int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 2,6666667$$

Замена переменной:  $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$        $x_i = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} t = 1 + t_i$

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^3 f(x_i) A_i =$$

$$= \frac{b-a}{2} [A_1(1+t_1)^2 + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2] = 0,55555556(1-0,77459667)^2 + 0,55555556(1+0,77459667)^2 + 0,88888889(1-0)^2 = 2,6666668$$

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^4 f(x_i) A_i =$$

$$= \frac{b-a}{2} [A_1(1+t_1)^2 + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2 + A_4(1+t_4)^2] = 0,34785484(1-0,86113631)^2 + 0,34785484(1+0,86113631)^2 + 0,65214516(1-0,33998104)^2 + 0,65214516(1+0,33998104)^2 = 2,6666665$$

# Несобственные интегралы от неограниченных функций

Или *несобственными интегралами второго рода*.

В отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв (не существует):

- 1) в точке  $x = a$ , 2) или в точке  $x = b$ , 3) или в обеих точках сразу, 4) или на отрезке интегрирования

Если предел существует, то несобственный интеграл второго рода называется *сходящимся*. Если предел не существует, то несобственный интеграл второго рода называют *расходящимся*.

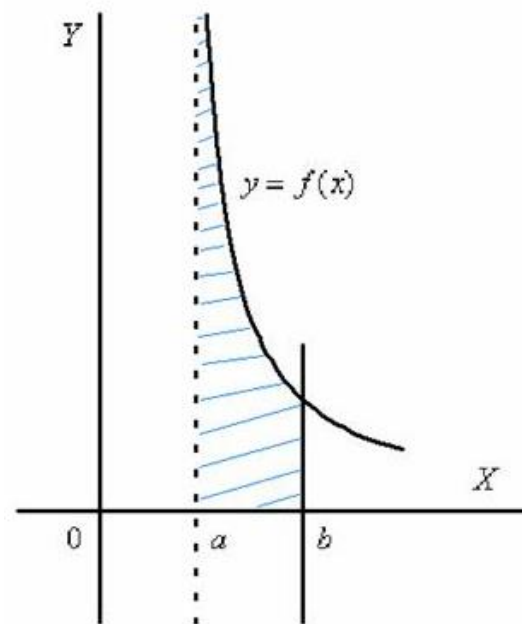
$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = ? \quad \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = ?$$

- 1) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке  $x = a$  (точка разрыва справа, особая точка, правосторонний предел):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_{a+\sigma}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$$

$$0 < \sigma < b - a$$

Добавка  $+0$  обозначает, что мы стремимся к значению  $a$  справа





## Несобственные интегралы от неограниченных функций

2) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке  $x = b$  (точка разрыва слева, особая точка, левосторонний предел):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_a^{b-\sigma} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$$

Добавка  $-0$  обозначает, что мы стремимся к значению  $b$  слева

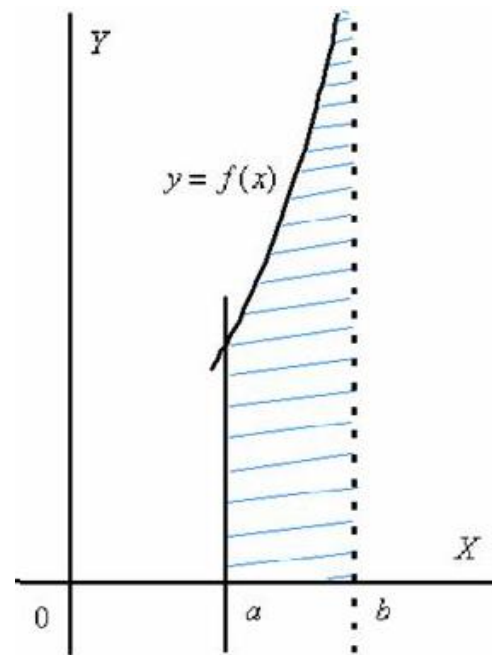
3) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точках  $a$  и  $b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow +0 \\ \sigma_2 \rightarrow +0}} \int_{a+\sigma_1}^{b-\sigma_2} f(x) dx$$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке  $c \in [a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\sigma_1} f(x) dx + \lim_{\sigma_2 \rightarrow +0} \int_{c+\sigma_2}^b f(x) dx$$

Если оба предела существуют, то интеграл называют сходящимся, если хотя бы один из пределов не существует, то его называют расходящимся.





## Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пример 5. Доказать, что несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

сходится и вычислить его.

Решение. Особой точкой подынтегральной функции является точка  $x = a$ . Согласно определению:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0+0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0+0} (2\sqrt{x}) \Big|_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0+0} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

Пример 6.

Особой точкой подынтегральной функции является точка  $x = b$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} &= \lim_{c \rightarrow 1-0} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c \rightarrow 1-0} (-\ln(1-x)) \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow 1-0} (-\ln(1-c)) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл расходится.