Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет по лабораторной работе №2

Вариант 25

Выполнил:

Туляков Е.В
P32101

Преподаватель:

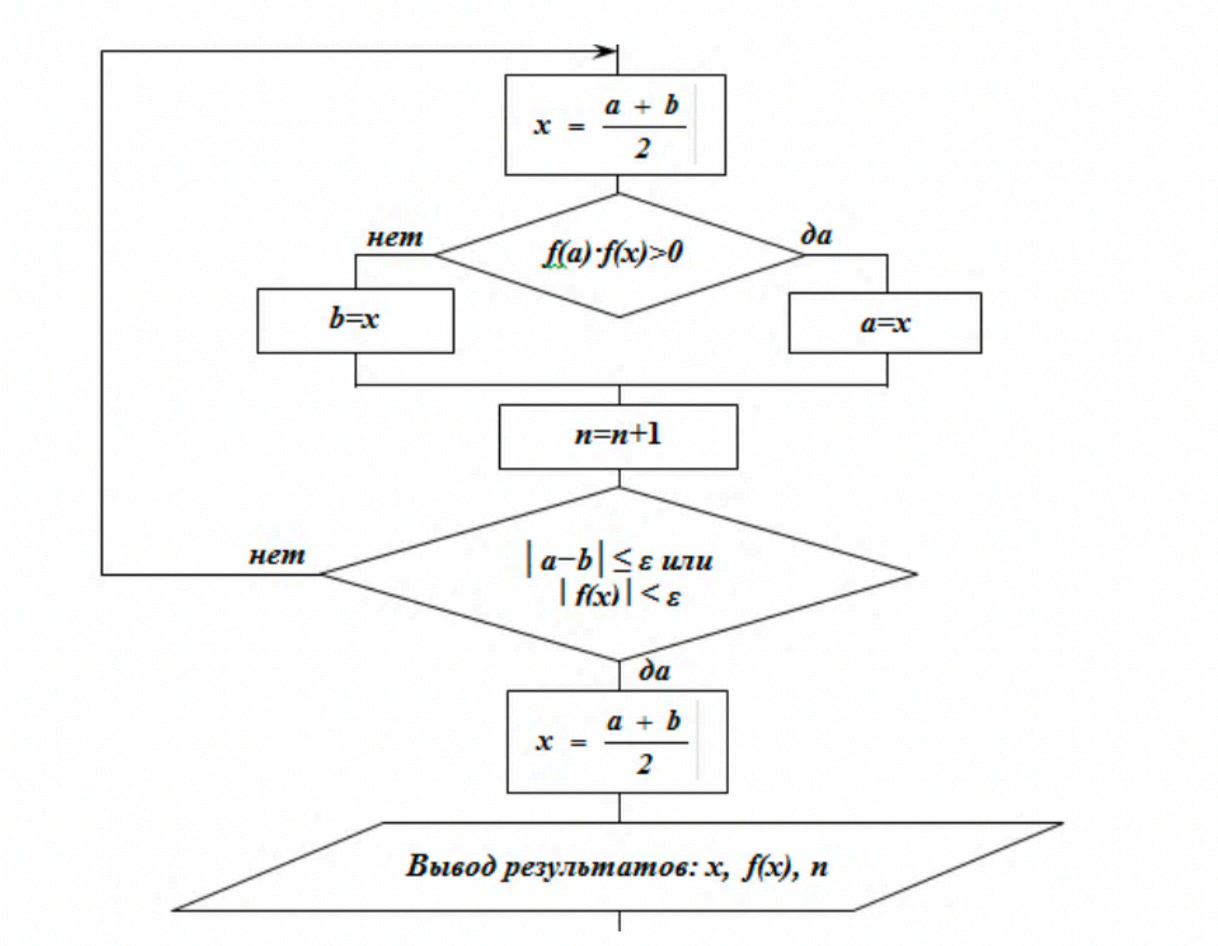
Рыбаков С.Д

Санкт-Петербург, 2023 г.

Цель лабораторной работы

Формулы методов

- Метод половинного деления: $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$



Блок-схема метода половинного деления

- Метод секущих:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \qquad i = 1,2 \ldots$$

- Метод простой итерации:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \qquad \varphi(x) = x + \lambda f(x) \qquad \lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]} |f'(x)|}$$

- Метод хорд: $x_i = \dfrac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

- Метод Ньютона: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:
Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

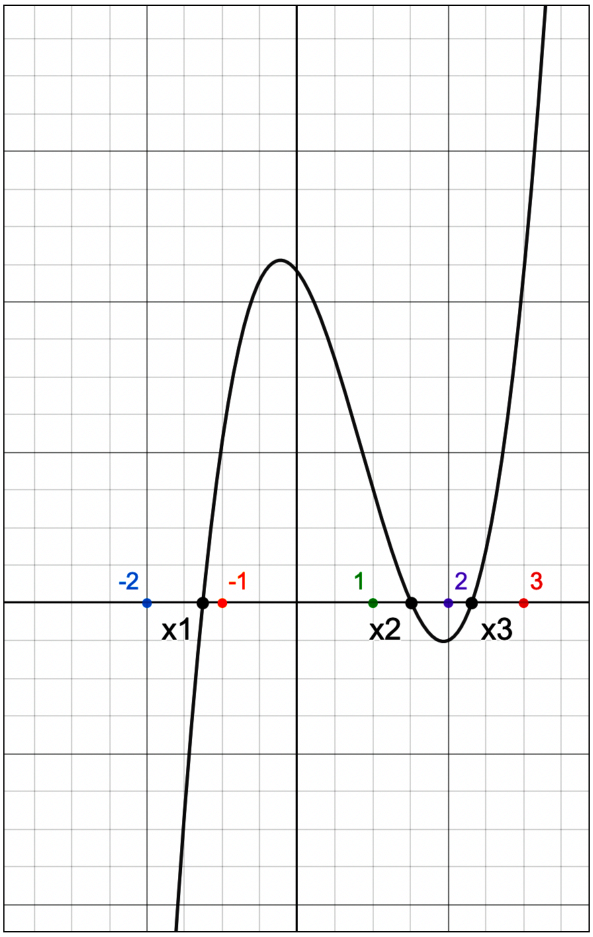
(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

$$x_0 = \begin{cases} a_0, & \text{если } f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0 \\ b_0, & \text{если } f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0 \end{cases}$$

Вычислительная реализация задачи

Заданное линейное уравнение: $f(x) = x^3 - 2.56x^2 - 1.325x + 4.395$

Точность: $\varepsilon = 0.01$



Графическое отделение корней

x_1 - метод половинного деления (Таблица 1)

x_2 - метод секущих (Таблица 2)

x_3 - метод простой итерации (Таблица 3)

Таблица 1

№ шага	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a-b|
0	-2.000	-1.000	-1.5	-11.195	2.160	-2.753	1
1	-1.500	-1.000	-1.25	-2.753	2.160	0.098	0.5
2	-1.500	-1.250	-1.375	-2.753	0.098	-1.223	0.25
3	-1.375	-1.250	-1.312	-1.223	0.098	-0.537	0.125
4	-1.312	-1.250	-1.281	-0.537	0.098	-0.213	0.0625
5	-1.281	-1.250	-1.265	-0.213	0.098	-0.056	0.03125
6	-1.265	-1.250	-1.257	-0.056	0.098	0.021	0.015625
7	-1.265	-1.257	-1.261	-0.056	0.021	-0.017	0.0078125

Таблица 2

№ итерации	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1} - x_k\|$
0	1.000	2.000	1.753	-0.408	0.247
1	2.000	1.753	0.600	2.893	1.152
2	1.753	0.600	1.610	-0.202	1.010
3	0.600	1.610	1.544	-0.074	0.066
4	1.610	1.544	1.506	0.008	0.038

Таблица 3

№ итерации	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	2.000	2.046	2.089	-0.468	0.046
1	2.046	2.089	2.128	-0.428	0.043
2	2.089	2.128	2.163	-0.380	0.039
3	2.128	2.163	2.193	-0.328	0.035
4	2.163	2.193	2.217	-0.276	0.03
5	2.193	2.217	2.237	-0.228	0.24
6	2.217	2.237	2.253	-0.185	0.02
7	2.237	2.253	2.265	-0.149	0.016
8	2.253	2.265	2.274	-0.120	0.012
9	2.265	2.274	2.281	-0.097	0.009

Примечание к таблице 3:

$$f'(x) = 3x^2 - 5.12x - 1.325$$

$$f'(2) = 0.435 \qquad f'(3) = 10.315$$

$$\lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|} = -\frac{1}{10.315} \approx -0.097$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow (\lambda \neq 0)\ \lambda f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x + \lambda f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x + \lambda f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x + \lambda(x^3 - 2.56x^2 - 1.325x + 4.395) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -0.097x^3 + 0.248x^2 + 1.128x - 0.426$$

$$x = \varphi(x) \qquad x_0 = 2 \qquad x_1 = \varphi(x_0) = 2.046$$

Программная реализация задачи - листинг программы

Метод хорд:

```
public static void execute(double a, double b, double accuracy) throws TimeoutException {
    double xi_1 = Integer.MAX_VALUE;
    double xi;
    double ai = a;
    double bi = b;
    double fxi;
    double fai;
    double fbi;
    int i = 1;
    while (true){
        fai = EquationStorage.getEquation(ai);
        fbi = EquationStorage.getEquation(bi);
        xi = (ai * fbi - bi * fai) / (fbi - fai);
        fxi = EquationStorage.getEquation(xi);
        if (fxi * fai < 0){
            bi = xi;
        }else {
            ai = xi;
        }
        if (Math.abs(xi - xi_1) <= accuracy){
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |x_i - x_{i-1}| <= ε"));
            break;
        } else if (Math.abs(ai - bi) <= accuracy) {
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |a_i - b_i| <= ε"));
            break;
        } else if (Math.abs(fxi) <= accuracy) {
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |f(x_i)| <= ε"));
            break;
        }
        xi_1 = xi;
```

```
        i++;
        if (i == 10000) throw new TimeoutException();
    }
    Printer.printResult(xi, i);
}
```

Метод Ньютона:

```
public static void execute(double a, double b, double accuracy) throws TimeoutException {
    double xi_1;
    double fxi_1;
    double dxi_1;
    double xi;
    double fxi;
    double dxi;
    if (EquationStorage.getEquation(a)*EquationStorage.getDoubleDerivative(a) > 0){
        xi_1 = a;
    } else{
        xi_1 = b;
    }
    int i = 1;
    while(true){
        fxi_1 = EquationStorage.getEquation(xi_1);
        dxi_1 = EquationStorage.getDerivative(xi_1);
        xi = xi_1 - fxi_1/dxi_1;
        fxi = EquationStorage.getEquation(xi);
        dxi = EquationStorage.getDerivative(xi);
        if (Math.abs(xi - xi_1) <= accuracy){
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |x_i - x_{i-1}| <= ε"));
            break;
        } else if (Math.abs(fxi/dxi) <= accuracy) {
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |f(x_i)/f'(x_i)| <= ε"));
            break;
        } else if (Math.abs(fxi) <= accuracy) {
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the
iterative process: |f(x_i)| <= ε"));
            break;
        }
        xi_1 = xi;
        i++;
        if (i == 10000) throw new TimeoutException();
    }
    Printer.printResult(xi, i);
}
```

Метод простой итерации:

```
public static void execute(double a, double b, double accuracy) throws TimeoutException {
    EquationStorage.setLambda(a, b);
    double xi_1 = EquationStorage.maxValueOfDerivativeOnInterval(a,b)[0];
    double xi;
    int i = 1;
```

```
    while (true){
        xi = EquationStorage.getPhi(xi_1);
        if (Math.abs(xi - xi_1) <= accuracy) {
            System.out.println(Printer.getYellowText("Reason for terminating the 
iterative process: |x_i - x_{i-1}| <= ε"));
            break;
        }
        xi_1 = xi;
        i++;
        if (i == 10000) throw new TimeoutException();
    }
    Printer.printResult(xi, i);
}
```

Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений:

```
public static void execute(double x_0, double y_0, double accuracy) throws 
NoSuchElementException, TimeoutException {
    double x_i = x_0;
    double y_i = y_0;
    int i = 0;
    EquationSystem equationSystem = EquationSystemStorage.getEquationSystem();
    double[][] matrix = new double[2][3];
    while(true){
        matrix[0][0] = equationSystem.getDerivativeXOfFirstEquation(x_i, y_i);
        matrix[0][1] = equationSystem.getDerivativeYOfFirstEquation(x_i, y_i);
        matrix[0][2] = equationSystem.getFirstEquation(x_i, y_i);
        matrix[1][0] = equationSystem.getDerivativeXOfSecondEquation(x_i, y_i);
        matrix[1][1] = equationSystem.getDerivativeYOfSecondEquation(x_i, y_i);
        matrix[1][2] = equationSystem.getSecondEquation(x_i, y_i);
        double[] results = MatrixGaussMethod.calculateSolutions(matrix);
        x_i += results[0];
        y_i += results[1];
        i++;
        if (i >= 10000) throw new TimeoutException();
        if(Math.abs(results[0]) < accuracy && Math.abs(results[1]) < accuracy) 
break;
    }
    Printer.printSystemResult(x_i, y_i, i);
}
```

Результат работы программы

```
Choose: non-linear equation [1] or system of non-linear equations [2]
1
Input number of non-linear equation:
[1] x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0
[2] e^(-x) - 1/2 * sin^2(x) = 0
[3] tg(0,55x + 0,1) - x^2 = 0
[4] (1 + x^2) * e^(-x) + sin(x) = 0
[5] 4 * sin(x) + 1 - x = 0
2
Input type of method:
[1] Chord method
[2] Newton's method
[3] Simple iteration method
3
Input accuracy:
2.5
Error!
Don't use dot as delimiter, you have to use comma
Accuracy have to be greater than 0 and less than 1
Input accuracy:
0,01
Input a (left border):
2,5
Input b (right border):
3
Reason for terminating the iterative process: |x_i - x_{i-1}| <= ε
-----------------RESULT-----------------
x = 2.778453958085955
f(x) = -9.525722401838715E-4
Number of iterations: 3
----------------------------------------
```

Вывод

Во время выполнения лабораторной работы я изучил работу метода хорд, метода секущих и метода прямых итераций. Основные особенности каждого метода расписаны в описании работы каждого их них.