

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

**Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.**

Санкт-Петербург, 2023

## Постановка задачи

Пусть некоторая функция  $f(x)$  задана на отрезке  $x \in [a, b]$  и определена рядом своих точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a \leq x_i \leq b$

Основная задача **интерполяции** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

**Определение 1.** Точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  называются **узлами интерполяции**. Точка, в которой нужно найти значение функции — **точкой интерполяции**.

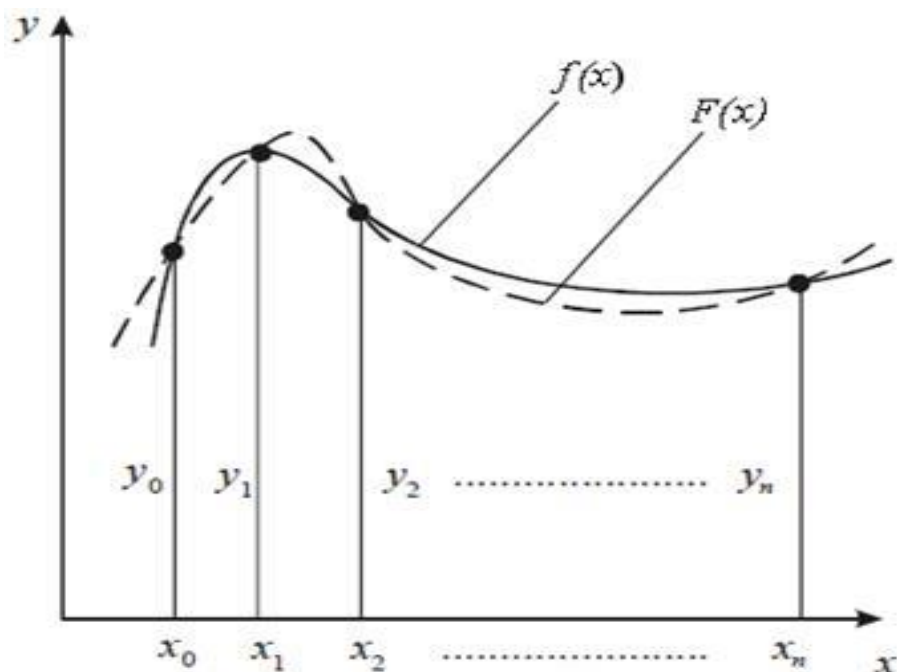
Требуется построить интерполирующую функцию  $F(x)$ , принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и  $f(x)$ , т.е.  $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$ .

Тогда, **условие интерполяции**:  $F(x_i) = y_i$ .

При этом предполагается, что среди значений  $x_i$  нет одинаковых.

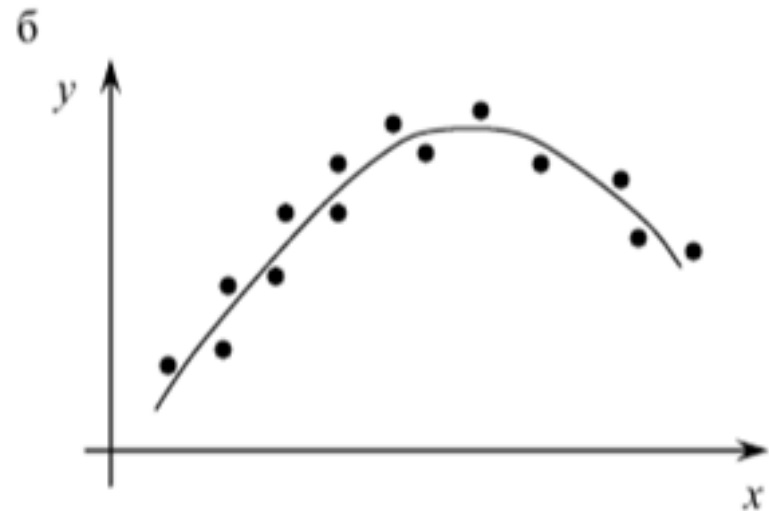
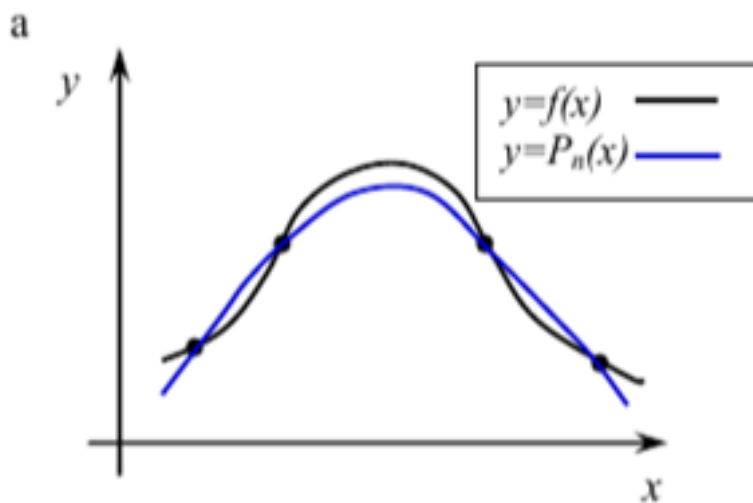
## Геометрическая интерпретация

**Определение 2.** Процесс вычисления значений функции  $F(x)$  в точках отличных от узлов интерполирования называется **интерполированием** функции  $f(x)$ . При этом различают **интерполирование** в узком смысле, когда  $x$  принадлежит интервалу  $[x_0, x_n]$ , и **экстраполирование**, когда  $x$  находится за пределами отрезка.



Геометрически задача интерполирования функции означает построение кривой  $y = F(x)$  проходящей через заданные точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

## Геометрическая интерпретация



Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующего полинома (б) для точно заданной функции

Основная задача **интерполяции** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Основная задача **аппроксимации** — построение эмпирической формулы, для которой  $f(x_i) \approx \varphi(x_i)$ .



# Интерполяция функции

Наиболее распространены следующие виды *интерполяции*:

- **линейная интерполяция**, при которой промежуточная точка, расположенная между двумя узловыми точками  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , лежит на отрезке прямой, соединяющей две ближайшие узловые точки;
- **квадратичная интерполяция**, при которой промежуточная точка между узловыми точками  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  лежит на отрезке параболы, соединяющей эти узловые точки;
- **полиномиальная интерполяция**, при которой промежуточные точки вычисляются как значение некоторого многочлена  $P_n(x)$ , причем  $P_n(x_i) = f(x_i)$ ;
- **сплайновая интерполяция**, при которой промежуточные точки находятся с помощью отрезков полиномов невысокой степени, проходящих через узловые точки и поддерживающие определенные условия стыковки в концевых точках;



# Интерполяция функции

Задача нахождения интерполяционной функции  $F(x)$  имеет бесконечное число решений, так как через заданные точки  $x_i, y_i$  можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции.

Однако эта задача становится однозначно разрешимой, если вместо произвольной функции  $F(x)$  искать полином  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющий условиям  $P_n(x_i) = f(x_i)$ :

$$F(x) = P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

**Определение 3.** Алгебраический многочлен, удовлетворяющий условиям интерполяции, называется **интерполяционным многочленом**.

# Интерполяция функции

В случае использования в качестве интерполирующей функции многочлена  $n$ -й степени  $F(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$  (требующий  $n + 1$  узел интерполяции) задача интерполяция табличной функции имеет единственное решение, т.е.

*коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  определяются единственным образом.*

Можно составить систему из  $n + 1$  линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_0, \dots, a_n$ . Матрица коэффициентов этой СЛАУ называется матрицей **Вандермонда**. Ее определитель не равен нулю, поскольку все значения узлов интерполяции различны между собой и ни одна из строк не является линейной комбинацией других строк

$$\begin{matrix} i=0 \\ i=1 \\ \dots \\ i=n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \right.$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0$$



## Интерполяция функции

**Примечание.** Вычисление коэффициентов полинома посредством решения системы в вычислительной практике *реализуется крайне редко*.


Причиной этого является плохая обусловленность матрицы Вандермонда, приводящая к заметному росту погрешности при выполнении условий интерполирования уже при сравнительно невысоких порядках полинома.

Вычислительные затраты реализации метода пропорциональны  $n^3$ .




## Интерполяция функции

Глобальная  
интерполяция



Полином един для  
всей области  
интерполяции

Локальная  
(кусочная)  
интерполяция



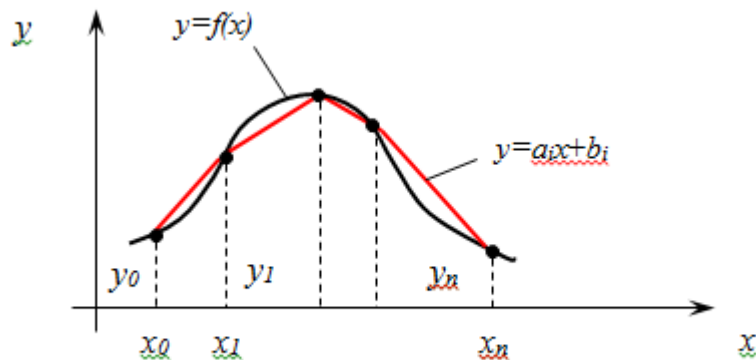
Между различными  
узлами полиномы  
различны



# Линейная интерполяция

**Линейная интерполяция** является простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции. Она состоит в том, что заданные точки  $(x_i, y_i)$ , соединяются прямолинейными отрезками, и функция  $f(x)$  приближается к ломаной с вершинами в данных точках.

Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется  $n$  интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для  $i$  — го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  и  $(x_i, y_i)$ , в виде: 
$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$



$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (2)$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента  $x$ , а затем подставить его в формулу (2) и найти приближенное значение **функций** в этой точке.

## Квадратичная интерполяция

В случае **квадратичной интерполяции** в качестве интерполяционной функции на отрезке  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  принимается квадратный трехчлен.

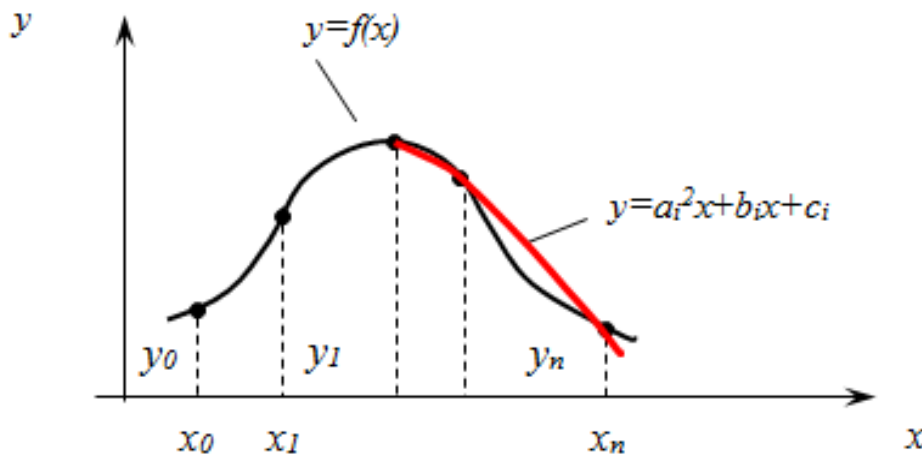
$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad (3)$$

Для определения неизвестных коэффициента  $a_i, b_i, c_i$  необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы через три точки  $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ . Эти условия можно записать в виде:

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}$$



Интерполяция для любой точки  $x \in [x_0, x_n]$  проводится по трем ближайшим ей узлам.



## Локальная интерполяция

**Пример 1.** Найти приближенное значение функции  $y = f(x)$  при  $x = 0,35$  для заданной таблицы:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

1. Используем линейную интерполяцию. Значение  $x=0,35$  находится между узлами  $x_{i-1} = 0,3$  и  $x_i = 0,4$ . Тогда:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5,44 - 3,79}{0,4 - 0,3} = 16,5$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3,79 - 16,5 \cdot 0,3 = -1,16$$

$$y \approx 16,5x - 1,16 = 16,5 \cdot 0,35 - 1,16 = 4,615$$

2. Используем квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений для ближайших узлов к точке  $x=0,35$ :  $x_{i-1} = 0,2$ ,  $x_i = 0,3$ ,  $x_{i+1} = 0,4$ .

Соответственно  $y_{i-1} = 2,38$ ,  $y_i = 3,79$ ,  $y_{i+1} = 5,44$ .

$$0,2^2 a_i + 0,2 b_i + c_i = 2,38$$

$$0,3^2 a_i + 0,3 b_i + c_i = 3,79$$

$$0,4^2 a_i + 0,4 b_i + c_i = 5,44$$

В результате решения системы, получим:  $a_i = 12$ ,  $b_i = 8,1$ ,  $c_i = 0,28$ .

$$y \approx 12 \cdot 0,35^2 + 8,1 \cdot 0,35 + 0,28 = 4,585$$

## Многочлен Лагранжа

Построим интерполяционный полином  $L_n(x)$ , степени не больше  $n$  и для которого выполнены условия  $L_n(x_i) = y_i$  (4)

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Лагранж предложил строить многочлен  $L_n(x)$  в виде:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \quad (5)$$

где  $l_i(x)$  – полином степени  $n$ , который удовлетворяет условию:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = x_i \text{ (если } i = j) \\ 0, & \text{во всех других узлах (если } i \neq j) \end{cases} \quad (6)$$

Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом  $x_j$  кроме  $x_i$ , то есть  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  – корни этого многочлена. Требование (6) совместно с выражением (5) обеспечивает выполнение условий (4).

## Многочлен Лагранжа

Полиномы  $l_i(x)$  составим следующим образом:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (7)$$

Здесь в каждом полиноме  $l_i(x)$  отсутствует скобка  $(x - x_i)$ , которой соответствует коэффициент  $c_i$ .

Найдем неизвестные коэффициенты  $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ , называемые коэффициентами Лагранжа, используя условие:  $L_n(x_i) = y_i$

При  $x = x_0$   $L_n(x_0) = y_0$

$$L_n(x_0) = c_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n) = y_0$$

Следовательно, коэффициент  $c_0$  вычисляется по следующей формуле:

$$c_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

При  $x = x_1$   $L_n(x_1) = y_1$

$$L_n(x_1) = c_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) = y_1$$

Следовательно, коэффициент  $c_1$  вычисляется по следующей формуле:

$$c_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$



## Многочлен Лагранжа

Значения остальных коэффициентов вычисляются аналогично:

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Тогда:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_3 - x_n)} \dots \dots$$



## Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (8)$$

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях  $n$  ( $n < 20$ ).

К недостаткам можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все **вычисления проводить заново**.



## Многочлен Лагранжа

Линейная и квадратичная интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

При  $n=1$  (два узла и первая степень многочлена):

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_1-x_0} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

При  $n=2$  (три узла и вторая степень многочлена):

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

## Оценка погрешности

В точках, отличных от узлов, интерполяционный полином  $P(x)$  отличается от значения функции  $f(x)$  на величину **остаточного члена**:  $R_n(x) = f(x) - P(x)$

Погрешность при использовании многочлена Лагранжа определяется формулой:

$$R_n(x) \leq \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$
$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{(n+1)}(x)$$

Применение этой формулы затрудняется необходимостью вычисления константы  $M^{(n+1)}$ , ведь о функции  $f(x)$  в общем случае неизвестно ничего, кроме таблицы. Для решения этой проблемы приходится привлекать дополнительные соображения, например, геометрические или физические, все, что известно о  $f(x)$  в каждом конкретном случае.

Например, получили  $R_n(x) \approx 0,000017$ , т.е. интерполяционный многочлен дает четыре верных знака после запятой. Однако нужно учитывать погрешности табличных данных и вычислений многочлена, поэтому верных знаков, скорее всего, будет меньше.

## Многочлен Лагранжа

**Пример 2.** Найти приближенное значение функции  $y = f(x)$  при  $x=0,35$  для заданной таблицы с помощью многочлена Лагранжа.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

**Решение:**

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,3)(0,1 - 0,4)(0,1 - 0,5)} \\ = 0,0234375 * y_0 = 0,0234375 * 1,25 = 0,029297$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,2 - 0,1)(0,2 - 0,3)(0,2 - 0,4)(0,2 - 0,5)} \\ = (-0,15625) * y_1 = (-0,15625) * 2,38 = -0,37187$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,4)(0,35 - 0,5)}{(0,3 - 0,1)(0,3 - 0,2)(0,3 - 0,4)(0,3 - 0,5)} \\ = 0,703125 * y_2 = 0,703125 * 3,79 = 2,66485$$



## Многочлен Лагранжа

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,5)}{(0,4 - 0,1)(0,4 - 0,2)(0,4 - 0,3)(0,4 - 0,5)}$$

$$= 0,46875 * y_3 = 0,46875 * 5,44 = 2,55$$

$$l_4(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{(0,35 - 0,1)(0,35 - 0,2)(0,35 - 0,3)(0,35 - 0,4)}{(0,5 - 0,1)(0,5 - 0,2)(0,5 - 0,3)(0,5 - 0,4)}$$

$$= -0,0390625 * y_4 = -0,0390625 * 7,14 = -0,27891$$

$$L_4(0,35) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) = 4,59336$$

**Пример 3.** Построить многочлен Лагранжа, если функция  $y = f(x)$  задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

**n=3**

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 3)(1 - 4)} + 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(2 - 1)(2 - 3)(2 - 4)} + 5 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)} +$$

$$7 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3)} = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5$$

# Многочлен Лагранжа

**Пример 4:** Вычислить, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа,  $\sqrt{105}$  и оценить погрешность.

Решение: Рассмотрим функцию  $y = \sqrt{x}$

x	100	121	144
y	10	11	12

$n = 2$

$$L_2(x) = 10 \cdot \frac{(105 - 121)(105 - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)} + 11 \cdot \frac{(105 - 100)(105 - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)} + 12 \cdot \frac{(105 - 100)(105 - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)} = 10,245624$$

Оценим  $R_2(x)$ :

$$R_2(x) \leq \frac{\max_{x \in [x_0; x_n]} f'''(x)}{(3)!} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad y'' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

$$\max_{x \in [100; 144]} y'''(x) = \left| \frac{3}{8\sqrt{100^5}} \right| = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

$$R_2(x) < \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} |(105 - 100)(105 - 121)(105 - 144)| \approx 1,95 \cdot 10^{-3}$$

# Многочлен Ньютона

## Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

При построении интерполяционного полинома в форме Ньютона используется понятие **разделенной разности**.

**Разделенные разности** применяются для функций, заданных на неравномерной сетке (**неравноотстоящие узлы**).

**Разделенные разности** (или разностные отношения) **нулевого порядка** совпадают со значениями функции в узлах:  $f(x_i) = y_i$ .

**Определение.** **Разделенные разности первого порядка** называют величины (определяются через разделенные разности нулевого порядка):

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

**Разделенные разности второго порядка** называют величины (определяются через разделенные разности первого порядка):

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$
$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

## Многочлен Ньютона

Разделенные разности  $k$ -го порядка определяются через разделенные разности порядка  $k - 1$ :

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \quad (9)$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

## Многочлен Ньютона

**Пример 5.** Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции **для  $x=0,22$** . При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя различные узлы.

x	0,15	0,2	0,33	0,47	0,62
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

**Решение:** Вычисления произведем по формуле:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Для вычисления значение функции при  $x=0,22$  за  $x_0$  возьмем сначала 0,15, затем 0,2.

**Для  $x_0 = 0,15$**

$$f(x_0, x_1) = \frac{2,38 - 1,25}{0,2 - 0,15} = 22,6$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3,79 - 2,38}{0,33 - 0,2} = 10,846$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{10,846 - 22,6}{0,33 - 0,15} = -65,3$$

$$y(0,22) = 1,25 + 22,6 \cdot (0,22 - 0,15) - 65,3 \cdot (0,22 - 0,15) \cdot (0,22 - 0,2) = 2,74058$$



## Многочлен Ньютона

Для  $x_0 = 0,2$ :

$$f(x_0, x_1) = \frac{3,79 - 2,38}{0,33 - 0,2} = 10,846$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5,44 - 3,79}{0,47 - 0,33} = 11,786$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{11,786 - 10,846}{0,47 - 0,2} = 3,482$$

$$\begin{aligned} y(0,22) &= 2,38 + 10,846 \cdot (0,22 - 0,2) + 3,482 \cdot (0,22 - 0,2) \cdot (0,22 - 0,33) \\ &= 2,58926 \end{aligned}$$

$$\text{Принимаем } y(0,22) = \frac{2,74058 + 2,58926}{2} = 2,66492.$$

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  называются равноотстоящими, если:  $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$ , где  $h$  - шаг интерполирования,  $x_i = x_0 + ih$ .

Конечные разности применяются для функций, заданных на равномерной сетке.

**Конечные разности нулевого порядка** совпадают со значениями функции в узлах:  $f(x_i) = y_i$ .

**Конечными разностями первого порядка** называют величины:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

**Конечными разностями второго порядка** называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

**Конечными разностями k-го порядка** называют величины:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Аналогично для любого  $k$  можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0$$

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - ky_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i$$

Используя конечные разности, можно определить  $y_k$ :

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0$$

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона.

Этот многочлен запишем в виде:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (*)$$

Условие интерполяции  $N_n(x_i) = y_i$  используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N_n(x_0) = a_0 = y_0$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1h = y_1$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1h + 2a_1h^2 = y_2$$

.....

Найдем отсюда коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$ :

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Общая формула имеет вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Подставляя эти выражения в (\*), получим:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Введем обозначение:  $t = (x - x_0)/h$ . Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед**:

$$N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента  $[x_0, x_n]$ . Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для  $x_0 \leq x \leq x_1$ . При этом за  $x_0$  может приниматься любой узел интерполяции  $x_k$ . Например, для  $x_1 \leq x \leq x_2$ , вместо  $x_0$  надо взять значение  $x_1$ . Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i \quad (*)$$

Интерполяционную формулу (\*) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево:  $t = (x - x_n)/h$ . Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад**:

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

## Экстраполирование функции

При **экстраполировании** для отыскания значений функции для  $x < x_0$  используется первый интерполяционный многочлен Ньютона. В этом случае  $t \leq 0$  и говорят, что первая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования назад**.

При отыскании значений функции для  $x > x_n$  используется второй интерполяционный многочлен Ньютона.

В этом случае  $t \geq 0$  и говорят, что вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования вперед**.

*Замечание.* При экстраполировании получаются бóльшие погрешности, чем при интерполировании. Поэтому пределы его применения ограничены. Тем не менее, экстраполирование можно проводить в узких пределах, например в пределах шага  $h$ .

В более далеких точках можно получить неверные значения  $y$ .

Формула Лагранжа применяется в обоих случаях.

# Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности функций удобно располагать в таблице (чтобы нагляднее понимать какие конечные разности надо вычислять):

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_4$	$\Delta^2 y_4$				
$x_5$	$y_5$	$\Delta y_5$					
$x_6$	$y_6$						

Если  $x_0 \leq x \leq x_1$ , то при использовании **первой интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

$\Delta y_i,$ $i = 0, \dots, 5$	$\Delta^2 y_i,$ $i = 0, \dots, 4$	$\Delta^3 y_i,$ $i = 0, \dots, 3$	$\Delta^4 y_i,$ $i = 0, \dots, 2$	$\Delta^5 y_i,$ $i = 0, 1$	$\Delta^6 y_i,$ $i = 0$
------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------	----------------------------



## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \\ \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i; \quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \\ t &= (x - x_0)/h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_6(x) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \\ &\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_0 + \\ &\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!} \Delta^6 y_0\end{aligned}$$



## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	...	$\Delta^n y_i$
$x_0$	$y_0$				
		$\Delta y_0$			
$x_1$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$		
		$\Delta y_1$		$\ddots$	
$x_2$	$y_2$				$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
				$\ddots$	
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$		$\Delta^2 y_{n-1}$		
		$\Delta y_{n-1}$			
$x_n$	$y_n$				

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Если  $x_1 \leq x \leq x_2$ , можно также использовать предыдущую формулу.

Но, для увеличения точности вычислений, рекомендуется взять вместо  $x_0$  значение  $x_1$  и тогда при использовании **первой интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

$$t = (x - x_1)/h$$

$\Delta y_i,$ $i = 1, \dots, 5$	$\Delta^2 y_i,$ $i = 1, \dots, 4$	$\Delta^3 y_i,$ $i = 1, \dots, 3$	$\Delta^4 y_i,$ $i = 1, 2$	$\Delta^5 y_i,$ $i = 1$
------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------	----------------------------

$$\begin{aligned}
 N_n(x) &= y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_1 \\
 &+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_1
 \end{aligned}$$

Количество слагаемых в этом случае уменьшается на единицу!

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для интерполирования назад все то же самое, только считаем с конца!!!!

$$\begin{aligned} N_6(x) &= y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0 \end{aligned}$$

# Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

**Пример 6.** Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для  $x=0,15$ ,  $x=0,22$  и  $x=0,47$  по заданной таблице.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

**Решение:**

№	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1	1,25	$\Delta y_0 = 1,13$	$\Delta^2 y_0 = 0,28$	$\Delta^3 y_0 = -0,04$	$\Delta^4 y_0 = -0,15$
1	0,2	2,38	$\Delta y_1 = 1,41$	$\Delta^2 y_1 = 0,24$	$\Delta^3 y_1 = -0,19$	
2	0,3	3,79	$\Delta y_2 = 1,65$	$\Delta^2 y_2 = 0,05$		
3	0,4	5,44	$\Delta y_3 = 1,7$			
4	0,5	7,14				

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т.к.  $x=0,15$   $x=0,22$  лежат в левой половине отрезка.

$$\text{Для } x=0,15: \quad t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,15-0,1}{0,1} = 0,5$$

$$N_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0,15)$$

$$\approx 1,25 + 0,5 \cdot 1,13 + \frac{0,5(-0,5)}{2} \cdot 0,28 + \frac{0,5(-0,5)(-1,5)}{6} \cdot (-0,04) + \frac{0,5(-0,5)(-1,5)(-2,5)}{24} \cdot (-0,15) \approx 1,78336$$

$$\text{Для } x=0,22: \quad t = \frac{(x-x_1)}{h} = \frac{0,22-0,2}{0,1} = 0,2$$

$$N_3(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1$$

$$y(0,22) \approx 2,38 + 0,2 \cdot 1,41 + \frac{0,2(-0,8)}{2} \cdot 0,24 + \frac{0,2(-0,8)(-1,8)}{6} \cdot (-0,19) \approx 2,63368$$

## Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад, т.к.  $x=0,47$  лежит в второй половине отрезка.

$$\text{Для } x=0,47: \quad t = \frac{(x-x_n)}{h} = \frac{0,47-0,5}{0,1} = -0,3$$

$$\begin{aligned} N_4(x) &= y_4 + t\Delta y_3 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1 \\ &+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0,47) &= 7,14 - 0,3 \cdot 1,7 + \frac{-0,3(-0,3+1)}{2!}0,05 + \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)}{3!}(-0,19) \\ &+ \frac{-0,3(-0,3+1)(-0,3+2)(-0,3+3)}{4!}(-0,15) \approx 6,64208 \end{aligned}$$

# Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

**Пример 7.** Построить многочлен Ньютона, если функция  $y = f(x)$  задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

$n=3, h=1$

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	0	3	-1	1
2	3	2	0	
3	5	2		
4	7			

$$\begin{aligned}
 N_3(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \\
 &= 0 + 3(x - 1) + \frac{-1}{2} (x - 1)(x - 2) + \frac{1}{6} (x - 1)(x - 2)(x - 3) = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5
 \end{aligned}$$



# Погрешность интерполяционного полинома Ньютона

Погрешность интерполяции по формуле Ньютона оценивается также, как и при использовании многочлена Лагранжа, т.е. по формуле:

$$R_n(x) \leq \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)|$$

$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{n+1}(x)$$

Однако, оценить производную высокого порядка часто бывает трудно, а порой и невозможно. Поэтому на практике пользуются следующим правилом: степень интерполяционного полинома должна совпадать с порядком практически постоянных конечных разностей.

Тогда оценка погрешности для первой интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_0 \quad t = \frac{x-x_0}{h}$$

Оценка погрешности для второй интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_n \quad t = \frac{x-x_n}{h}$$



## Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Узлы располагаются слева и справа от центральной точки  $a$ . Пусть требуется найти приближенное значение функции  $f$  в точке  $x$  между  $a$  и  $a+h$ :  $a < x < a+h$ .

Таким образом, поставлена интерполяции табличной функции в середине таблицы.

Идея: выражают входящие в интерполяционный многочлен Ньютона (9) разделенные разности через конечные с заменой переменной:

$$t = \frac{(x - x_0)}{h} = \frac{(x - a)}{h} \Rightarrow x = a + th$$

# Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

$i$	$x_i$	$y_i$
$n - 1$	$a + (-1)^n \left[ \frac{n}{2} \right] h$	$y_{(-1)^n \left[ \frac{n}{2} \right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	$a - 3h$	$y_{-3}$
4	$a - 2h$	$y_{-2}$
2	$a - h$	$y_{-1}$
0	$a$	$y_0$
1	$a + h$	$y_1$
3	$a + 2h$	$y_2$
5	$a + 3h$	$y_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$a + (-1)^{n+1} \left[ \frac{n+1}{2} \right] h$	$y_{(-1)^{n+1} \left[ \frac{n+1}{2} \right]}$



# Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Первая интерполяционная формула Гаусса ( $x > a$ )

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\ &+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots \\ &+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$



# Интерполяционные многочлены Гаусса

Вторая интерполяционная формула Гаусса ( $x < a$ )

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} \\ &+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} \\ &+ \frac{(t+n)(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n)$$



# Интерполяционные формулы Гаусса

**Пример 8.** Используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса найти приближенное значение функции для  $x=0,32$ ,  $x=0,28$  по заданной таблице.

1 формула Гаусса (выделено желтым)

2 формула Гаусса (выделено зеленым)

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_{-2} = 0,1$	$y_{-2} = 1,25$	$\Delta y_{-2} = 1,13$	$\Delta^2 y_{-2} = 0,28$	$\Delta^3 y_{-2} = -0,04$	$\Delta^4 y_{-2} = -0,15$
$x_{-1} = 0,2$	$y_{-1} = 2,38$	$\Delta y_{-1} = 1,41$	$\Delta^2 y_{-1} = 0,24$	$\Delta^3 y_{-1} = -0,19$	
$x_0 = 0,3$	$y_0 = 3,79$	$\Delta y_0 = 1,65$	$\Delta^2 y_0 = 0,05$		
$x_1 = 0,4$	$y_1 = 5,44$	$\Delta y_1 = 1,7$			
$x_2 = 0,5$	$y_2 = 7,14$				

# Интерполяционные многочлены Гаусса

**1 формула Гаусса (выделено желтым):**

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,32-0,3}{0,1} = 0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,32) \approx 3,79 + 0,2 \cdot 1,65 + \frac{0,2 \cdot (-0,8)}{2} \cdot 0,24 + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot (-0,8)}{6} \cdot (-0,19) + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot (-0,8)(-1,8)}{24} \cdot (-0,15) \approx 4,10472$$

**2 формула Гаусса (выделено зеленым):**

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,28-0,3}{0,1} = -0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,28) \approx 3,79 - 0,2 \cdot 1,41 + \frac{-0,2 \cdot 0,8}{2} \cdot 0,24 + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2)}{6} \cdot (-0,04) + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2) \cdot 1,8}{24} \cdot (-0,15) \approx 3,48536$$





## Интерполяционный многочлен Стирлинга

Формула Стирлинга представляет собой среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса. Применяется для интерполирования при значениях  $t$ , близких к 0. На практике ее используют при  $|t| \leq 0,25$ . Строится по нечетному числу узлов

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= y_0 + t \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} \\
 &+ \dots + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\
 &+ \frac{t^2(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}
 \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - n^2)$$

# Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя применяется для интерполирования при значениях  $t$ , близких к 0,5. На практике ее используют при  $0,25 \leq |t| \leq 0,75$ .

Строится по четному числу узлов

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{t(t-1) \Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2!} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2) \Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{4!} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3) \Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{6!} + \dots \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \\
 &+ \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}
 \end{aligned}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - n^2)(t - n - 1)$$



# Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя при  $t = 0,5$

(формула интерполирования на середину):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1))^2}{2^{2n}(2n)!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \end{aligned}$$

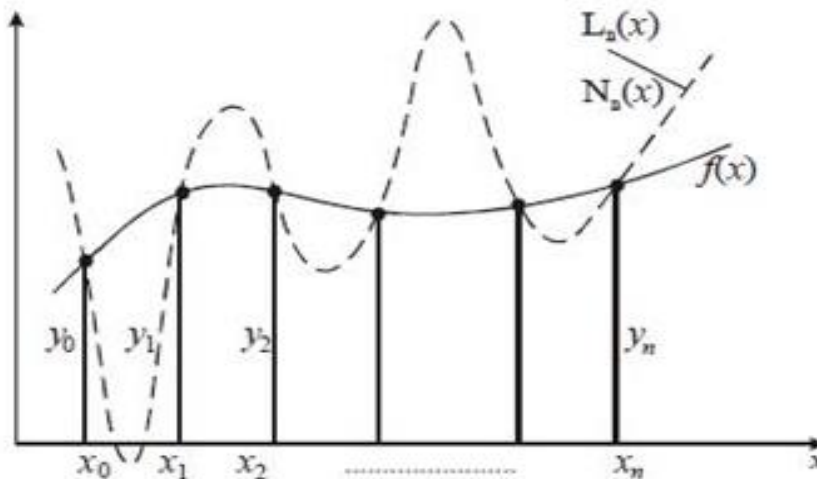
Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx (-1)^{n+1} h^{2n+2} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2}{2^{2n+2}(2n+2)!}$$

# Сплайн-интерполяция

**Глобальная интерполяция**, когда интерполяционный полином строится сразу по всем узлам интерполяции, становится практически непригодна при  $n > 10$ , поскольку:

- при вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления
- интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию
- задача интерполяции может быть плохо обусловлена (проявление колебательных свойств многочлена)

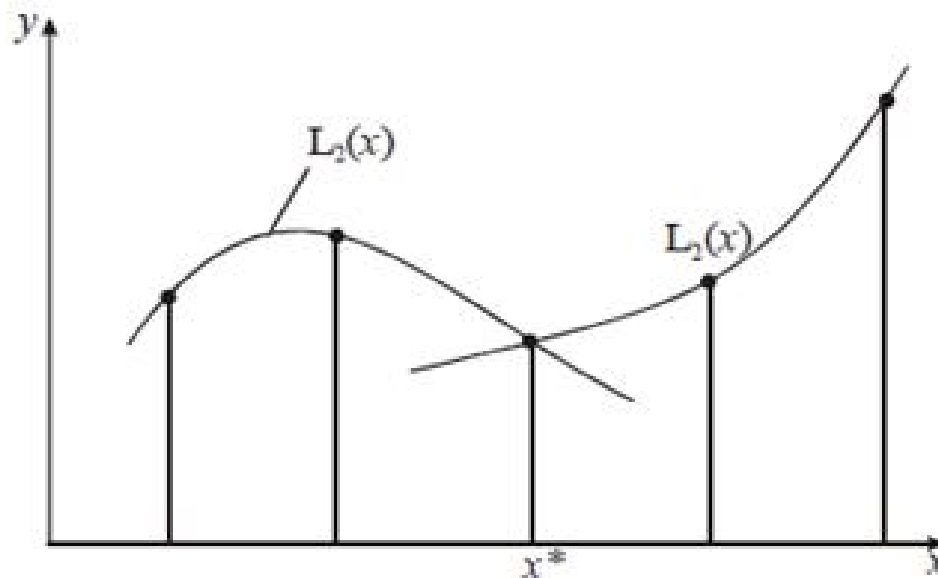


# Сплайн-интерполяция

Можно применить *локальную интерполяцию*.

Отрезок, на котором определена функция, можно разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные полиномы. Обычно полиномиальную интерполяцию осуществляют максимум по 5-7 узлам.

Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции будет содержать точки “излома” - точка  $x^*$ .



# Сплайн-интерполяция

## Альтернатива глобальной интерполяции

Пусть на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  функция  $P(x)$  является некоторым многочленом  $S_i(x)$ , причем для каждого отрезка эта функция своя.

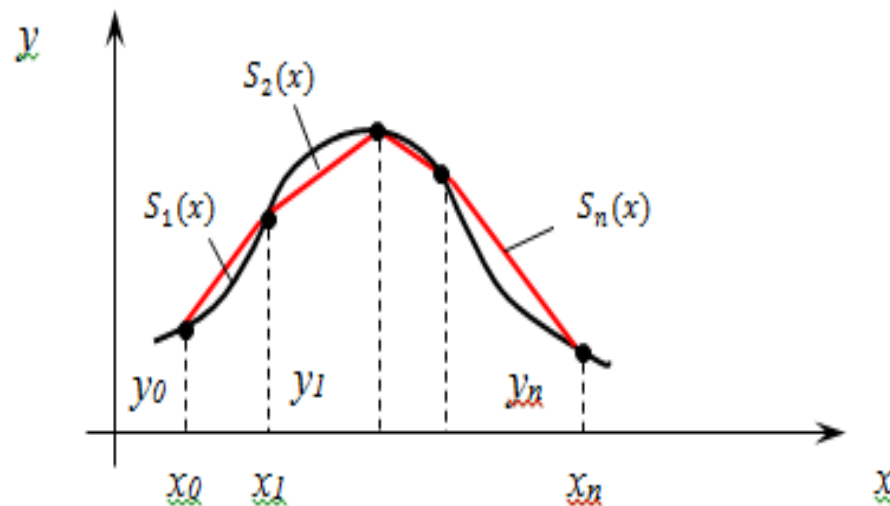
В такой постановке задача имеет множество решений.

Единственность решения можно обеспечить, потребовав от функции  $P(x)$  некоторой гладкости в местах стыков функций  $S_i(x)$ , то есть в узлах интерполяции.

Кусочно-линейная интерполяция.

На каждом отрезке функция аппроксимируется линейно.

Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на  $P(x)$  в данном случае не налагаются.



# Сплайн-интерполяция

Наиболее широко применяемым является вариант, в котором между любыми двумя точками строится многочлен  $n$ -й степени.

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_{ik} x^k, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

который в узлах интерполяции принимает значения интерполируемой функции и непрерывен вместе со своими  $(n - 1)$  производными. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный многочлен называется **сплайном**.

**Сплайном** степени  $n$  называется функция  $S_n(x)$ , обладающая следующими свойствами:

1. Функция  $S_n(x)$  непрерывна на отрезке  $[x_0; x_n]$  вместе со всеми своими производными:  $S_n^{(1)}(x) S_n^{(2)}(x) \dots S_n^{(p)}(x)$  до некоторого порядка  $p$ ;
2. На каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  функция  $S_{n,i}(x)$  является многочленом  $P_{n,i}(x)$  степени  $n$ .

## Характеристики сплайна:

1. Степень сплайна – максимальная из степеней использованных полиномов.
2. Гладкость сплайна – максимальный порядок непрерывной производной.
3. Дефект сплайна – разность между степенью сплайна и его гладкостью.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1  
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1

## Слайн-интерполяция

Наибольшее распространение на практике получили сплайны  $S_3(x)$  3-й степени – кубические сплайны.

**Кубическим интерполяционным сплайном** называется функция  $S(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом интервале  $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, \dots, n$  функция  $S(x)$  является полиномом третьей степени;
2. функция  $S(x)$ , а также ее первая и вторая производные  $S'(x), S''(x)$  непрерывны на отрезке  $[x_0; x_n]$  (гладкость = 2).

**Кубический сплайн** является многочленом третьей степени, который для  $i$ -го участка записывается так:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для  $S_i(x)$  в окрестности точки  $x_i$ . Поскольку  $S_i(x)$  — кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что:

$$a_i = S_i(x_i) \quad b_i = S'_i(x_i) \quad c_i = S''_i(x_i) \quad d_i = S'''_i(x_i)$$



## Сплайн-интерполяция

Для определения коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  на всех  $n$  элементарных отрезках необходимо получить  $4n$  уравнений.

Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции  $S(x)$  через заданные точки:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

$$S(x_i) = y_i$$

Часть дополняет условиями непрерывности сплайна и непрерывности первой и второй производных в узлах интерполяции:

$$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$$

$$S'_i(x_{i-1}) = S'_{i-1}(x_{i-1})$$

$$S''_i(x_{i-1}) = S''_{i-1}(x_{i-1})$$

И добавляют граничные условия:

$$S''(x_0) = 0 \quad S''(x_n) = 0$$

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) = c_i + 3d_i h_i$$

# Сплайн-интерполяция

**Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$**

$$h_i = (x - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$$

$$a_{i-1} = S_{i-1}(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + c_i(x_{i-1} - x_i)^2 + d_i(x_{i-1} - x_i)^3 = a_i - b_i h_i + c_i h_i^2 - d_i h_i^3 \quad i = 2, 3, \dots, n$$

**Выразим условия непрерывности первой и второй производной:**

$$b_{i-1} = S'_{i-1}(x_{i-1}) = S'_i(x_{i-1}) = b_i + 2c_i(x_{i-1} - x_i) + 3d_i(x_{i-1} - x_i)^2 = b_i - 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$c_{i-1} = S''_{i-1}(x_{i-1}) = S''_i(x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i(x_{i-1} - x_i) = c_i - 3d_i h_i \quad i = 2, 3, \dots, n$$

**Выразим условия интерполирования:**

$$a_i = S_i(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**Для  $x_0$  имеем:**

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + c_1(x_0 - x_1)^2 + d_1(x_0 - x_1)^3$$

**Для краевых условий:**

$$c_1 - d_1 h_1 = S''_1(x_0) = 0$$

$$c_n = S''_n(x_n) = 0$$

# Сплайн-интерполяция

Полученную систему линейных уравнений можно упростить до системы уравнений с трехдиагональной матрицей, которую решают методом прогонки (модификация метода Гаусса для частного случая разреженных систем). В результате серии упрощений получится система относительно только значений  $c_1, \dots, c_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ h_1 & \delta_1 & h_2 & & & \\ & h_2 & \delta_2 & h_3 & & \\ & & h_3 & \delta_3 & h_4 & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & h_{n-1} & \delta_{n-1} & h_n \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} a_i &= f_i, \\ b_i &= \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} + \frac{2 \cdot c_i + c_{i-1}}{3} \cdot h_i, \\ d_i &= \frac{c_i - c_{i-1}}{3 \cdot h_i}, \end{aligned}$$

где:  $\delta_i = 2 \cdot (h_i + h_{i+1})$ ,  $\varepsilon_i = 3 \cdot \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right)$ ,  $i \in [1, n - 1]$ .