

Principal Space and Elasticity

강의명: 금속유동해석특론 (AMB2039)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208 전화: 055-213-3694

HOME PAGE: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

Outline

- Stress space를 이해한다.
- Principal space of stress space를 이해한다.
- Principal values를 구하는 법을 익힌다.
- Invariants를 이해한다.

Recap

- Measurement of force and displacement from tension tests
- Physical quantity to remove the effect of geometry: engineering stress/engineering strain
- Two types of stress (strain):
 - Normal (tension + , or compression -)
 - Shear (forward +, backward -)
- There are three independent planes in 3D; On each plane 1 normal + 2 shears.
- Thus nine independent components comprise the stress (strain) state.
- Coordinate transformation (axes transformation)
 - Coordinate transformation does not change the physical quantity (stress, strain)
 - Coordinate transformation changes the values of components and the directions of planes associated with the stress (or strain).
- Practice coordinate transformation using the Excel, Fortran code, Python code.

Symmetries in stress/strain tensors

- 변형률 텐서의 경우 본래 그 정의에 의해 symmetry를 가진다.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}?$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji})$$

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(d_{ji} + d_{ij})$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - d_{ji})$$

- 응력 텐서의 경우 force equilibrium 조건에 의해 symmetry를 가진다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Stress tensor represented in other forms

- 앞서 응력 텐서가 matrix의 형태로 표현되는 것을 보았다. 하지만 이는 온전히 '편리'를 위해서이다 - 물론 많은 이점이 생긴다.
- 하지만 때에 따라 응력 텐서를 다른 형태로 표기하기도 한다.
- 예를 들어 Voigt notation은 매우 흔히 찾을 수 있는 응력텐서 표기 방법이다 - 3x3 matrix 대신 1x9 형태로 표현

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 위의 symmetric tensor를 9개 component중 3개를 줄여 order를 낮출 수 있다.

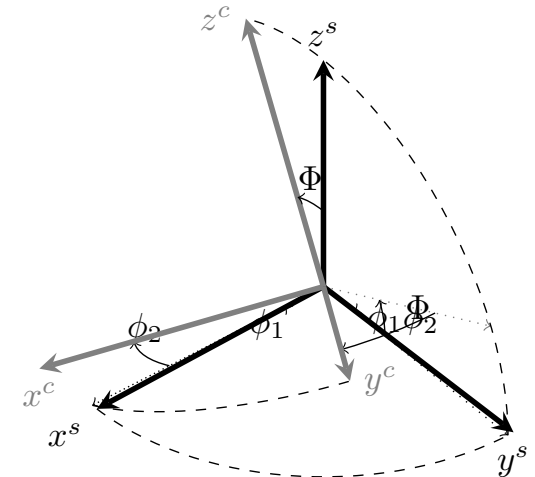
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{의 1x6 array로 표현; 6차원 공간상의 vector 형태가 된다: } \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Stress Space

- Stress tensor의 각 independent 값들이 하나의 '공간' 축을 형성하는 공간.
 - 가령 stress tensor의 symmetry 덕분에 stress state는 일반적으로 각 성분이 축이 되는 6차원 공간에 표현이 가능하다.
 - 하지만 stress tensor의 구성성분중 shear component가 모두 0이 되는 Cartesian coordinate로 표현되는 공간을 얻을 수도 있는데, 이 방법에 대해 간략하게 알아보도록 하겠다.
 - 예1) 알루미늄을 일축 인장 시편을 위해 가공한후, 해당 시편의 길이/폭/두께 방향이 주어진 coordinate system의 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ basis vector방향과 평행할때, 응력 상태를 측정하여 다음과 같이 나타낼 수 있었다.
- $$\sigma = \begin{bmatrix} -30 & 25 & 11 \\ 25 & 1 & -9 \\ 11 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$
- 해당 응력 텐서의 principal space는?
 - A) 주어진 coordinate system을 $\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$ 을 통해 변환시켜 얻은 coordinate system이 해당 응력의 principal space 이다.

Stress Space (확인)

$$\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$$



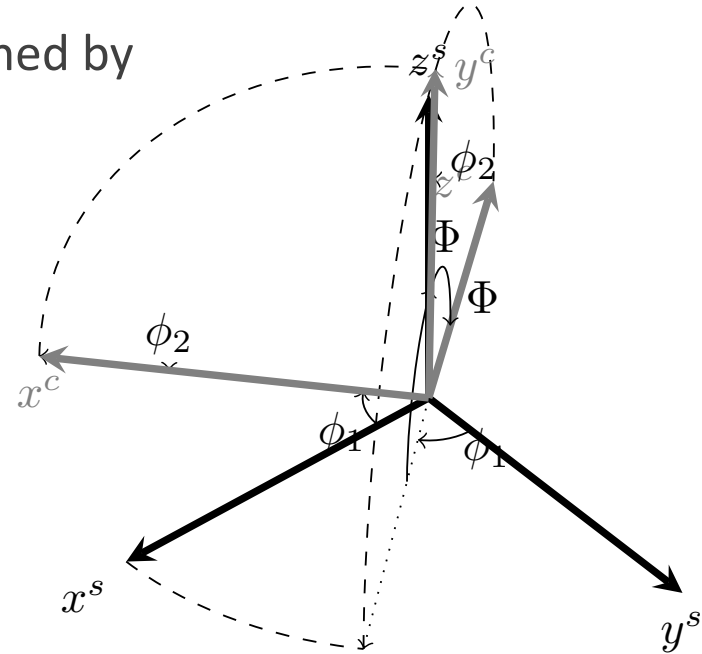
input	output			
This excell sheet proves a means of coordinate system transformation				
		angle	radian	
Three Euler angles	phi1	-1.4	-0.024	
	Phi	24.86	0.434	
	phi2	-30.59	-0.534	
삼각 함수 값들		transformation matrix R		
cos(phi1)	1.000	sin(phi1)	-0.024	0.849 -0.483 -0.214
cos(Phi)	0.907	sin(Phi)	0.420	0.528 0.768 0.362
cos(phi2)	0.861	sin(phi2)	-0.509	-0.010 -0.420 0.907
2nd rank tensor in matrix form		R.T		
-30	25	11	-39.898	22.675 10.049
25	1	-9	7.356	10.707 5.043
11	-9	17	-0.218	-8.843 19.094
1st rank tensor (i.e., vector) in array form		R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation		
1	0	0	0.849	0.528 -0.010

The diagram illustrates a 3D coordinate system transformation. It shows two sets of axes: a fixed set (x^c, y^c) and a rotated set (x^s, y^s) . The rotation is defined by two angles: ϕ_1 (rotation around the x^c axis) and ϕ_2 (rotation around the x^s axis). Dashed lines indicate the intermediate and final orientations of the axes.

(transformation matrix) ^t = R ^t = R ⁻¹		
0.849	0.528	-0.010
-0.483	0.768	-0.420
-0.214	0.362	0.907
R ^t .R.T 2nd rank tensor after coordinate transformation		
-46.979	0.001	-0.002
0.001	13.935	0.000
-0.002	0.000	21.044

More examples

- $\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 300 & 30 \\ 300 & 5 & 25 \\ 30 & 25 & 3 \end{bmatrix}$
- The principal space of the above tensor can be obtained by
- $\phi_1 = -49.5^\circ, \Phi = 96.23^\circ, \phi_2 = -0.11^\circ$
- And the principal values?
 - -251.2, -1.2, 360.5



How did I obtain this?

- An analytical method to obtain 'principal' values:
 - Find the eigenvalues and eigenvectors of 3x3 matrix form of the stress tensor
 - That can be done by following
 - 1. Define a new 3x3 matrix

$$A_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = 1 \text{ (if } i = j \text{)}$$
$$\qquad \qquad \qquad = 0 \text{ (or if } i \neq j \text{)}$$

- 2. Solve the case of λ when $\det(\mathbf{A})=0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

- 3. That's actually solving

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Where

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$I_2 = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

How did I obtain this?

- Okay, we learned how to get eigenvalues. Next question is how we can obtain eigenvectors.
- Once you found the eigenvalues, you solve the equations given by

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_{ij}v_j = 0$$

- Example:

For a 2nd rank tensor $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$

$$\det(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

$\det(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$: The solution of these equations is $\lambda = 4, \lambda = -2$ and $\lambda = -2$ (repeated).

Eigen vectors can be found from

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

How did I obtain this? (continued)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Put the each of the three eigenvalues you obtained in the above to obtain three eigenvectors $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)})$. You'll get

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 0 \quad (1)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0 \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(3)} = 0 \quad (3)$$

For instance, solution of (1) gives

$$x_1^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

$$x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_2^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

Therefore, eigenvector associated with eigenvalue 4 is: $x_3^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (with any arbitrary $x_3^{(1)}$ value). You could do the same for (2) condition, which results in

$$\mathbf{x}^{(2)} = x_3^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2^{(2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

How did I obtain this? (continued)

- 일단 eigenvector들이 구성된다면 이를 토대로 transformation matrix를 얻을 수 있다.
- 다음으로 transformation matrix를 Euler angles로 변환가능
- 물론 저도 이 모든 과정을 연필과 종이로 풀지 않는다.
- 저의 경우 LAPACK으로 eigenvalue와 eigenvector를 수치적으로 얻고, 이를 바탕으로 transformation matrix를 구해서, 다시 Euler angle로 변환하였다.
- 참고: <https://youngung.github.io/principal/>

Principal values / principal space

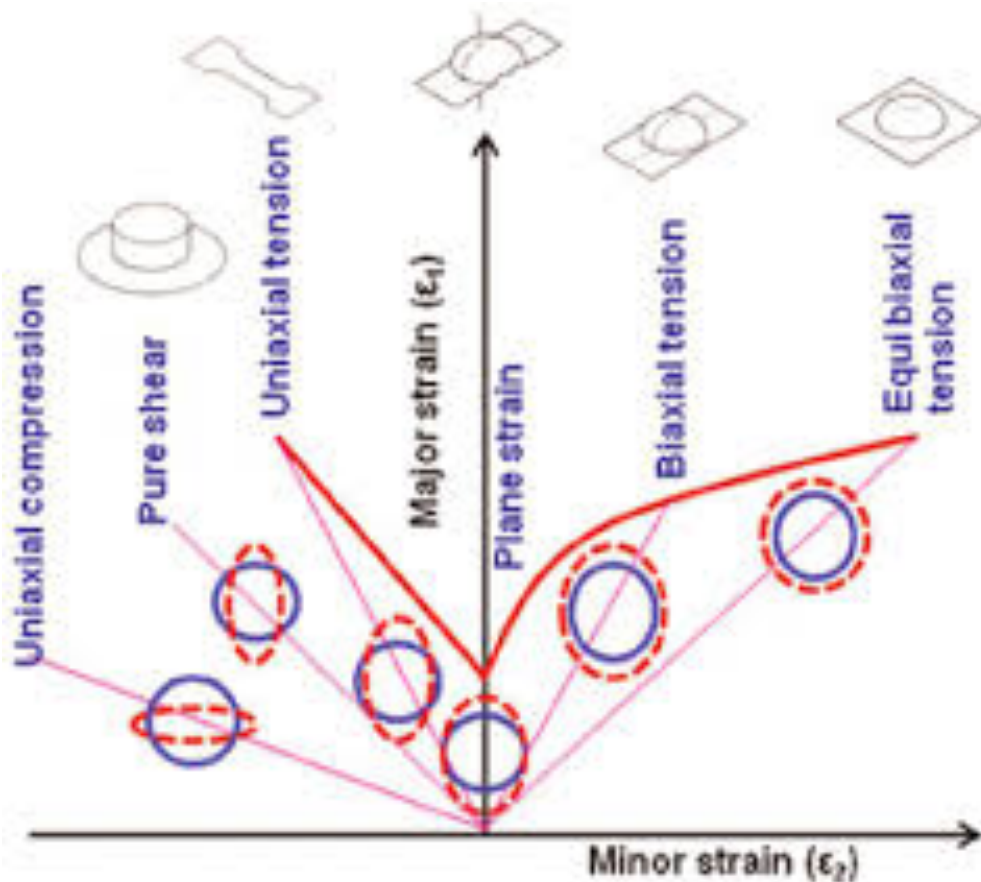
- 어디에 쓰이나?
- Principal space에 응력을 표현하면 문제가 매우 간단해 진다!
- 왜? 일단 생각해야할 component의 수가 줄어든다. 따라서 6D stress space가 3D stress space로 줄어든다 – 3D space는 간단히 Cartesian coordinate로 표현할 수 있다. (시각적으로, 그리고 수치해석적으로도) 6차원 보다는 매우 편리하다.
- 다른 예?

Application: Forming limit diagram

성형 한계 다이어그램은 금속 판재의 성형성을 간단히 나타낼 수 있다.

전통적으로 fracture가 일어난 판재의 minor/major strain을 측정하여 모아 곡선으로 표현한다. 여기서 minor/major strain들은 principal space의 strain component를 의미한다.

어쩌다가 principal space로 표현하게 되었을까?
- FLD 측정 방식에서 유래 (다음 슬라이드에서 계속 ...)



Application: Forming limit diagram

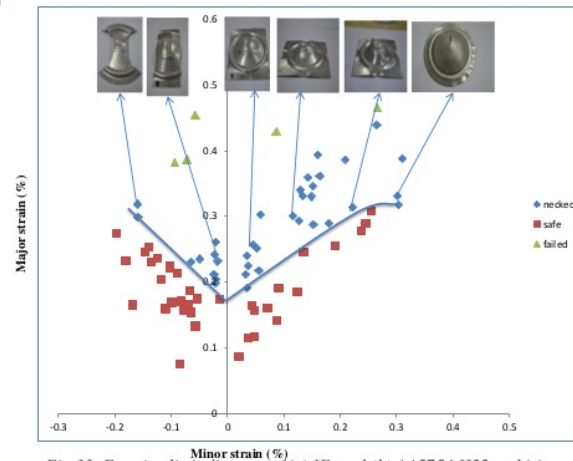
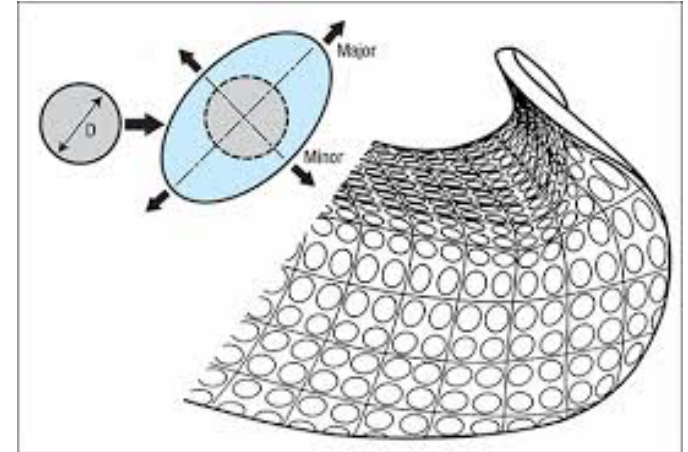
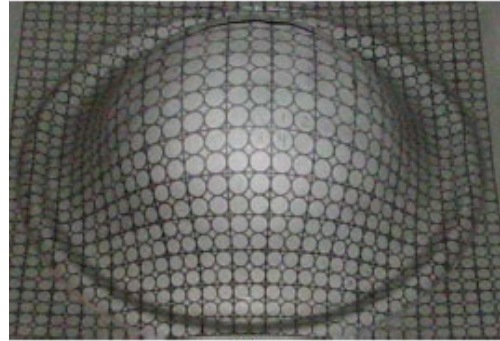


Fig 33: Forming limit diagram of (a) IF steel (b) AA5754-H22 and (c) AA5182-O sheet of thickness 1mm.

Principal space를 사용한다면?

- 응력과 변형률 텐서가 모두 같은 principal space에 표현이 되는 상태라면,
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$
- 이를 간단히 Voigt notation을 차용한다면 3차원 문제가 된다. 따라서
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ 로 표현 가능하다. (각 성분의 첨자가 하나로 줄었다)
- 때로는 principal space에 표현된 응력의 성분임을 좀 더 명확히 하기 위해 로마자 첨자를 사용한다. Ex. $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$

Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- Principal space의 \mathbf{e}_1 방향으로의 가상 '일축 인장' 실험을 생각해보자. 해당 방향에서의 stress component와 해당 방향에서의 strain component 간에는 '선형' 관계가 지켜진다. 이는
- $\sigma_1 = \mathbb{E}\varepsilon_1$ 로 표현가능 - 여기서 \mathbb{E} 는?
- 나머지 principal space의 \mathbf{e}_2 축과 \mathbf{e}_3 축에서는 '수축' 변형이 발생한다. 만약 시편이 'isotropic' 하다면, 그 수축 변형량은 동일하다. 이는
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$ 으로 표현가능 - 여기서 ν 는?

Principal space and Hooke's law (2)

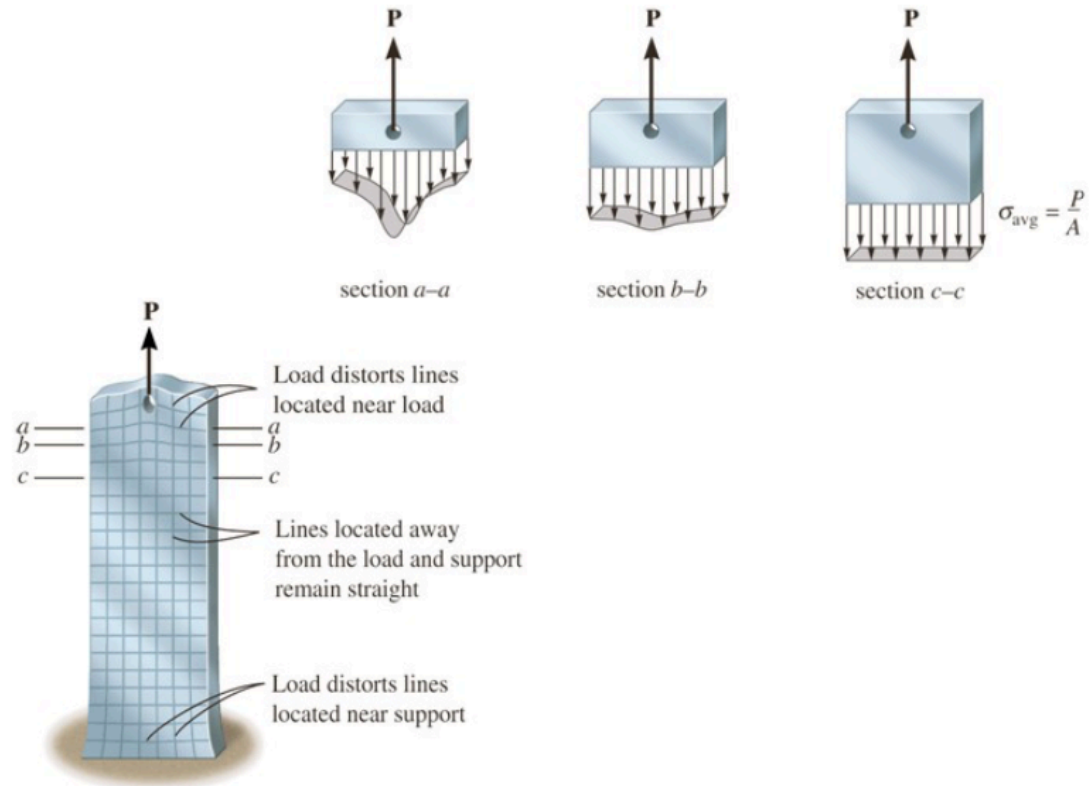
- 앞서 '일축' 인장에 적용된 예들을 좀 더 확장 시켜 '삼축' 모두에 arbitrary한 응력이 걸렸을 경우를 표현할 수 있는 방법이 있다. 이는
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$
- 앞서 우리는 principal space에서 '축약'된 Hooke's law를 살펴보았다. 사실 Full tensor를 사용하면 Hooke's law는 ...
 - $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 혹은 $\varepsilon_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\sigma_{kl}$ (여기서 $\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$)
 - 위를 이용하여
 - $\varepsilon_{11} = \mathbb{C}_{11kl}\sigma_{kl}$
 - $\varepsilon_{22} = \mathbb{C}_{22kl}\sigma_{kl}$
 - $\varepsilon_{12} = \mathbb{C}_{12kl}\sigma_{kl}$

Boundary condition

- 재료 역학 문제를 효율적으로 해결하기 위해서는 적절한 boundary condition (경계조건)을 찾아내고 올바르게 설정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위해 몇몇 유의한 hints를 꼽자면
 - 자유 표면에 수직인 응력은 0이다. 재료의 가장 바깥 표면에 응력을 전달하는 다른 물질이 없이 대기중에 노출되어 있으면, 해당 표면의 방향과 관계된 응력 성분들은 0이다. 예를 들어, 한 물질점이 free surface에 해당하고 z축방향으로 그 법선이 향한다면, $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ 모두 0이다.
 - 마찰이 없는 면에서 전단응력들은 0이다. 해당면이 (위의 예와 유사하게) z축방향으로 그 법선이 향한다면, σ_{yz}, σ_{xz} 모두 0이다.
 - 힘평형 상태에서는 물체의 모든 면에서 힘의 균형이 존재한다.
 - St. Venant 원리

St. Venant (생베낭; 세인트 버난트)원리

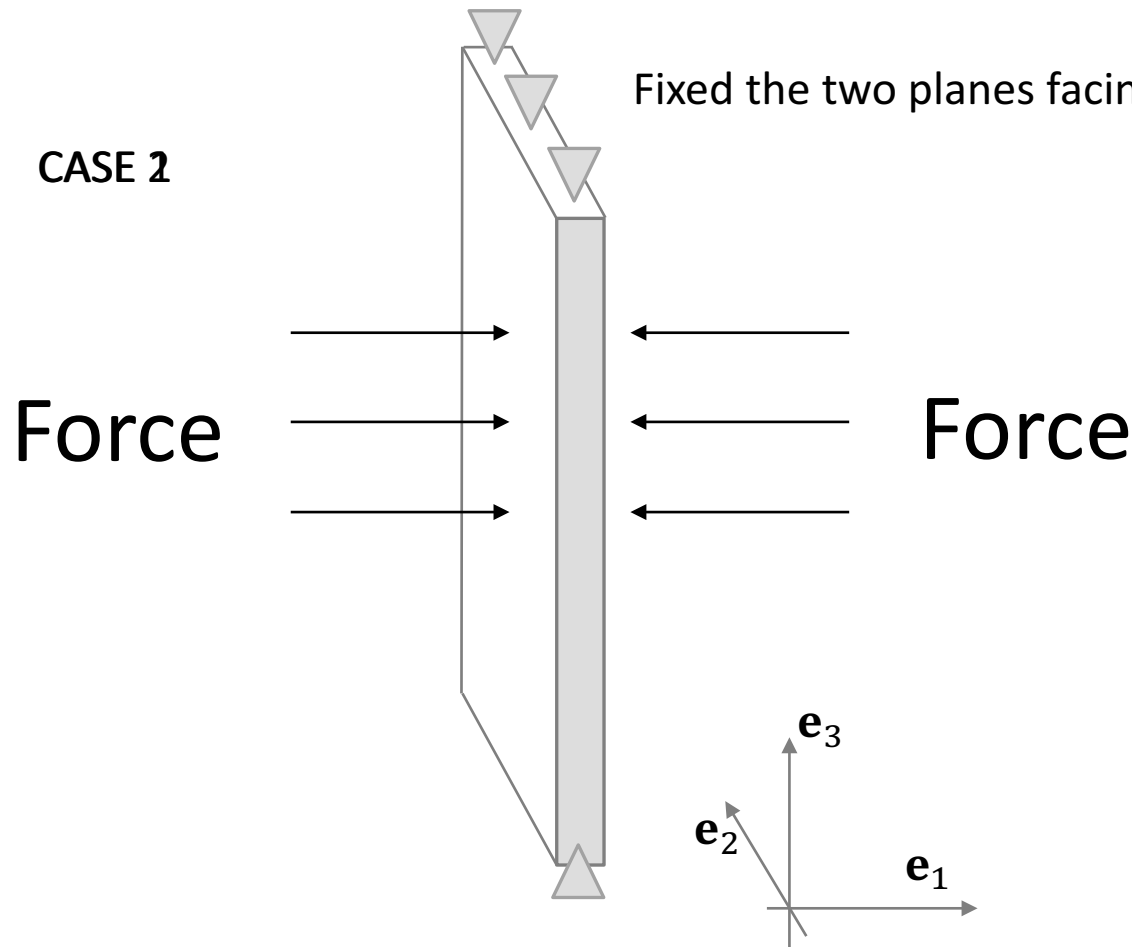
- The stresses and strains in a body at points that are sufficiently remote from points of application of load depends only on the static resultant of the loads and not on the distribution of loads.



- 하중이 가해지는 점에서 충분히 떨어진 곳에서의 응력과 변형률은 그 하중의 정적 결과에만 의존하고, 그 하중의 분포에는 무관하다.

Plane stress condition and free surface

- Plane stress condition을 더 자세히 설명하기에 앞서 free surface를 이해해보자.



$$\sigma^{case1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{case2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} > 0 \end{bmatrix}$$

Plane theory (2D approximation)

- 재료의 기계적 거동을 설명할때, 구조물의 모습과 기대되는 응력/변형률에 의한 방향으로의 구성성분들이 다른 성분들과 비교해 '매우매우매우' 작을 때가 있다.
- 그럴때는 full tensor component를 모두 고려하기 보다는 매우 작은 성분들을 'zero'로 가정하여 문제를 간단화 시키기도 한다.
- 이를 통해, 문제의 복잡성을 줄이고, 수치해석시간(컴퓨터 계산 시간)도 줄어 들 수 있다. 그 뿐만 아니라, 수식도 매우 간편해진다!
- 응력을 예로 들자면, 서로 수직하는 세면중 한면과 관련된 응력 성분들이 모두 zero인 상태 (혹은 그렇게 모사된 상태) 를 일컬어 plane stress condition 즉 평면 응력상태라고 한다.
- 변형률 텐서를 예로 들자면 세 기본 길이 방향중, 한방향과 관련한 normal/shear components가 모두 zero인 상태... plane strain condition (평면 변형률 상태)라고 한다.

Plane stress condition

Plane stress where the components associated with \mathbf{e}_3 basis vector are zero: $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

따라서, 이를 2x2 matrix로 표현 가능하다: $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ 단지 세개의 component만

meaningful. 더욱 축약하여 $\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$ 의 형태로 표현 가능하다.

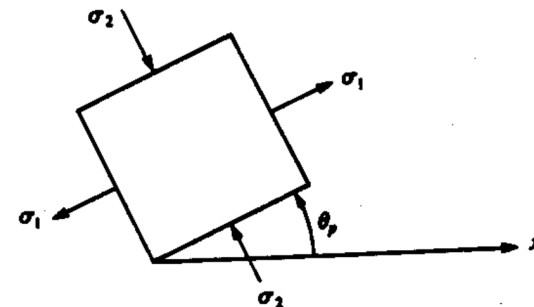
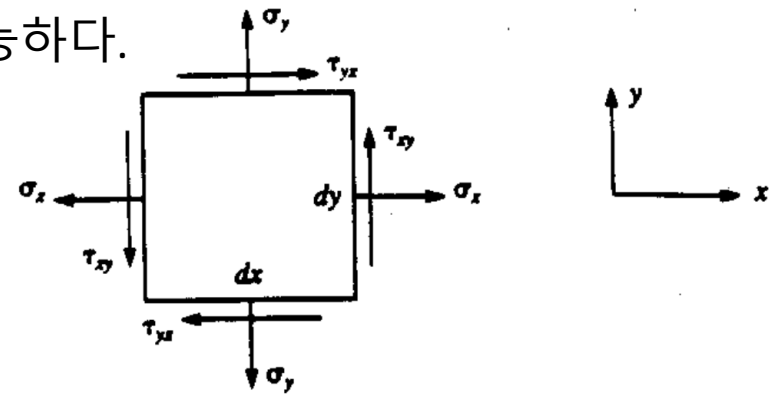
이경우 principal stress와 principal space도 매우 간단히 구해진다.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Principal space를 구하기 위해서는...

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \right) \text{로 얻어진 값으로 회전...}$$



Plane strain condition

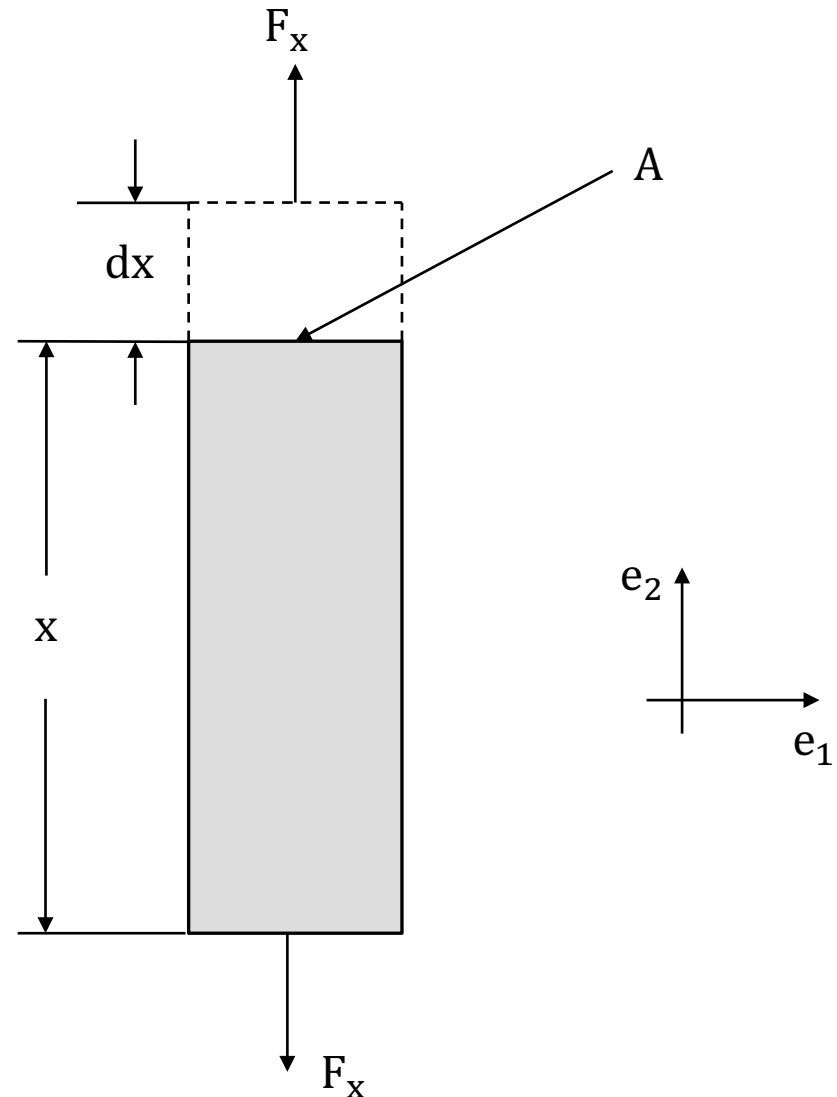
평면 응력상태와 유사한듯 다르게

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Some times, even under plane strain condition, ε_{33} is not zero. 하지만 이럴 경우에도 응력해석에서는 non-zero ε_{33} 를 무시하여도 무방한 경우가 있다.

탄성과 탄성일(탄성변형 에너지)

- 길이 x 단면적 A 인 봉이 일축인장력 F_x
- 로 인해, dx 만큼 변화되었다. 이에 따른 미소(infinitesimal) 일(work) dW 은?
- $dW = F_x dx$
- 단위 부피당 미소 일은?
- $dw = \frac{dW}{\text{Volume}} = \frac{dW}{xA} = \frac{F_x}{A} \left(\frac{dx}{x} \right) = \sigma_x d\varepsilon_x$
- 앞서 다루었던 Hooke's law에 의해 $\sigma_x = E\varepsilon_x$
- $w = \int dw = \int \sigma_x d\varepsilon_x = \int E\varepsilon_x d\varepsilon_x$
$$= E \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}$$
- 같은 아이디어를 general한 텐서에 적용하면...
- $w = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$



References and acknowledgements

■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)

■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.