

# Strain Rate and Temperature

---

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

[yjeong@changwon.ac.kr](mailto:yjeong@changwon.ac.kr)

연구실: #52-212    전화: 055-213-3694



[yjeong@changwon.ac.kr](mailto:yjeong@changwon.ac.kr)  
<https://youngung.github.io>  
<https://github.com/youngung>

# Recap

---

□ Stress/strain

□ Yield criterion (as a function of stress state) – yield functions

➤ Tresca

➤ von Mises

□ Flow rule

□ Instability

➤ Considere's criterion for the case of uniaxial tension

➤ Thin-walled tube

➤ Biaxial tension

□ Approach based on inhomogeneity

□ Numerical methods

➤ Newton-Raphson method

➤ Secant method

➤ Various exercises (practice them for your own good)



# Outline

---

- ❑ Strain rate
- ❑ Viscosity
- ❑ Relation between strain rate and flow stress (strain rate sensitivity; SRS)
- ❑ SRS measurement technique
- ❑ Unwanted effect of negative SRS
- ❑ Predicting necking due to inhomogeneity considering
  - Strain rate sensitivity
  - Combined effect of strain rate sensitivity and strain hardening
  - Application of NR method again
    - ❖ Euler method
    - ❖ Euler method + NR example



# Intro

---

- 지금까지 유동 응력(flow stress, 소성 변형을 계속해서 일으키기 위해 필요한 응력)은 변형률에 대한 함수로만 표현했다.
- 이번 챕터에서 우리는 변형률 뿐만 아니라, 변형속도와 온도가 끼치는 영향에 대해 배우도록 한다.



# 변형의 속도, strain rate

- 우리가 변형률을 배웠던 이유는 금속의 고유한 성질을 표현하기에 알맞은 '세기' 성질(intensive property)이었기 때문이다.
- 변형의 속도를 표현하는데 적절한 물리량 또한 따라서 변형률을 사용할 수 있다.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ (변형률 레이트, strain rate)}$$

- ▶ 물리량의 시간에 대한 변화를 가리키는데 자주 사용되는 표현법은 해당 기호위에 점
  - ▶ 예:  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{u}$  등등등...
- 변형률에는 단위가 없다. 하지만 변형률 레이트(strain rate)는 단위가 있다.
    - ▶ 주로  $s^{-1}$  [1/s] 혹은  $[sec]^{-1}$  등으로 표기한다.



# Strain rate와 flow stress의 관계식

□ 변형률과 유동응력은 종종 power law의 형태로 표현된다.

➤  $\sigma = C \dot{\varepsilon}^m$

➤ C: a constant that depends on strain, temperature, material.

➤ m: strain rate sensitivity. (유동응력이 strain rate에 얼마나 민감한지 나타내는 지표)

□ 위의 식에서 m 값에 따라 다른 거동을 설명할 수 있다:

➤ m=0: 유동응력(flow stress)이 strain rate에 무관.

➤ m>0: strain rate 증가가 유동응력 증가로 이어짐 (대개의 금속재료 ~ 0.03, 0.05)

➤ m<0: strain rate 증가가 유동응력 감소로 이어짐 (some aluminum alloys)



# Strain rate와 flow stress의 관계식

□  $\sigma = C \dot{\varepsilon}^m$  (1)

□ 관계식 (1)을 사용하여 같은 재료를 대상으로(즉 C, m 무변) 동일 변형률, 온도에서 상이한 strain rate를 비교하자면

➤  $\sigma^a = C (\dot{\varepsilon}^a)^m$  strain rate가  $\dot{\varepsilon}^a$  일 경우 case a

➤  $\sigma^b = C (\dot{\varepsilon}^b)^m$  strain rate가  $\dot{\varepsilon}^b$  일 경우 case b

➤ 따라서  $\left(\frac{\sigma^a}{\sigma_b}\right) = \left(\frac{\dot{\varepsilon}^a}{\dot{\varepsilon}^b}\right)^m$  으로 표현가능하다.

➤ 자연 로그 ln 을 사용하면  $\ln\left(\frac{\sigma^a}{\sigma_b}\right) = m \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}^a}{\dot{\varepsilon}^b}\right)$

➤ 만약  $\sigma^a \gtrsim \sigma^b$  라면  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_b} = m \ln \frac{\dot{\varepsilon}^a}{\dot{\varepsilon}^b} \approx 2.3 m \log \frac{\dot{\varepsilon}^a}{\dot{\varepsilon}^b}$  (진, 공칭 변형률의 관계에서도 사용했던 관계...)

□ 만약 m 값이 약 0.01 인 재료를 대상으로 strain rate가 10배 증가했다면 약

□  $2.3 m \log \frac{\dot{\varepsilon}^a}{\dot{\varepsilon}^b} \rightarrow 2.3 m \log 10 = 2.3 \times 0.01 = 0.023$

□ 따라서, 변형률이 10배 증가했을때, 응력이 약 2.3% 정도 증가 – 엔지니어링 측면에서 큰값이라고 보기 무리.



# Strain rate의 고려가 필요한 경우?

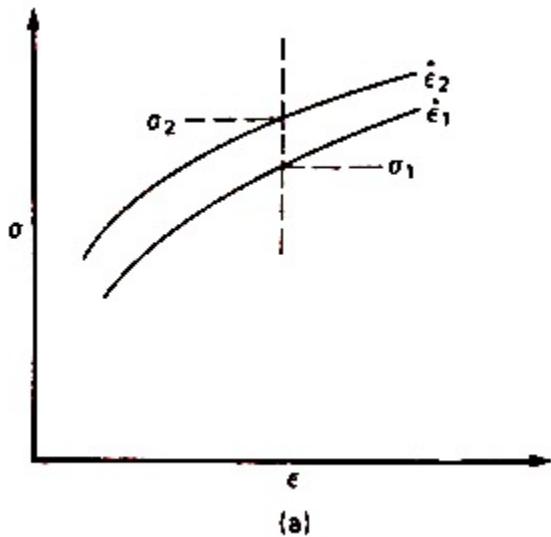
- 일반적으로 제조공정상에서 금속 재료의 소성 가공은 매우 높은 strain rate를 가진 경우가 있다 (rolling이나 drawing에서 빠른 경우  $10^4 s^{-1}$ ) 이에 비해, 해당 금속 재료의 기계적 물성은 낮은 strain rate 상태에서 (대개  $10^{-4} s^{-1} \sim 10^{-3} s^{-1}$ ) 취득되는 경우가 일반적이다. 따라서 낮은 strain rate 조건에서 얻어진 물성을 높은 strain rate 조건으로 변환해줘야 하는 경우가 발생할 수도 있다 – m값과 strain rate의 차이 등을 고려해서 결정.
- 또한 대부분 금속의 경우 온도가 높아짐에 따라서 m 값이 증가한다 ( $m \approx 0.1$  or  $0.2$ ).
- 따라서 소성가공에서 금속의 strain rate sensitivity를 고려할 것인지를 판단하기 위해서는 해당 조건에서, 온도, m, 물성이 취득된 strain rate와 실제 공정상에서 예상되는 strain rate의 차이 등을 고려하여 결정해야 한다.



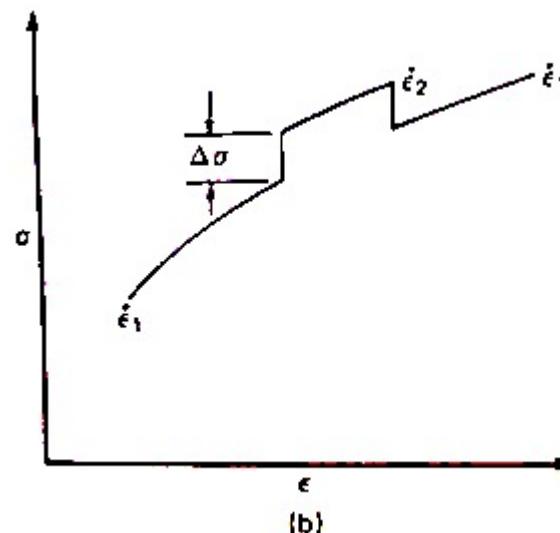
# Strain rate sensitivity (SRS, m) 측정법

- 크게 두 가지로 나뉜다.
- 1. Continuous test
- 2. Abrupt test (a.k.a. jump test)

여러 시편 필요

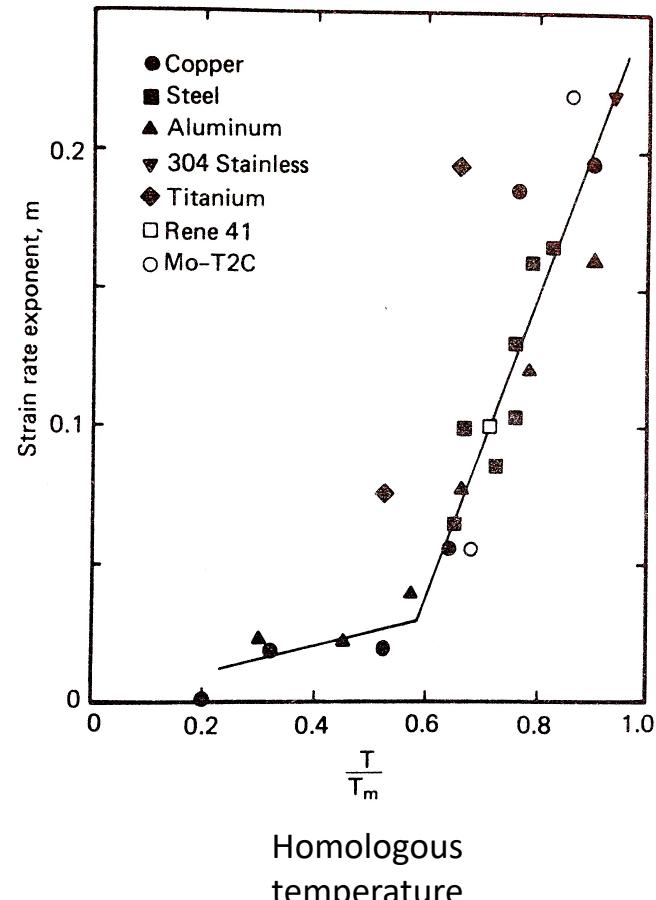


시편이 하나만 소모

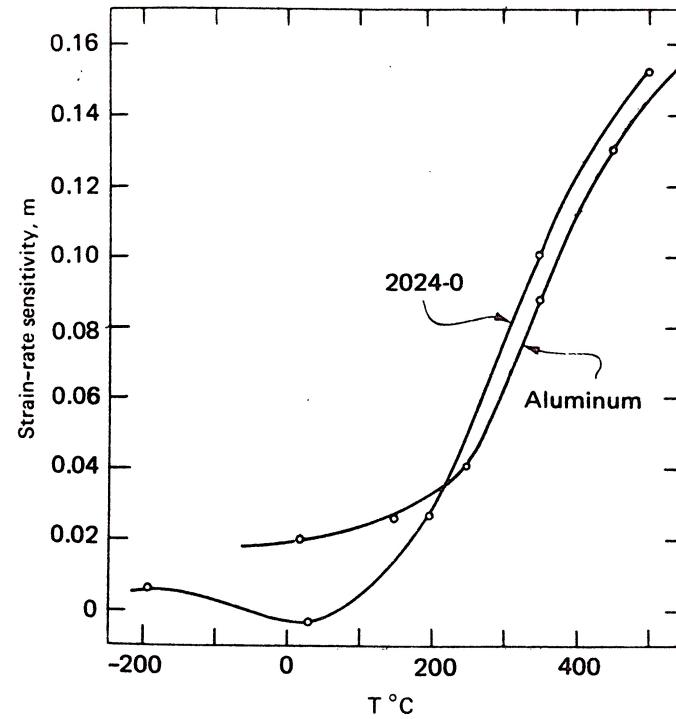


# SRS depends on temperature

녹는점의 반이상의 온도에서 ( $\frac{T}{T_m} \geq 0.5$ )  
SRS가 급격한 증가를 보인다.



Pure aluminum 과 2024-O Al. 비교.



Alloying에 의해 negative 혹은 0에  
가까운 SRS 가지게 되었다.



# High SRS at elevated temp

---

## □ Reasons:

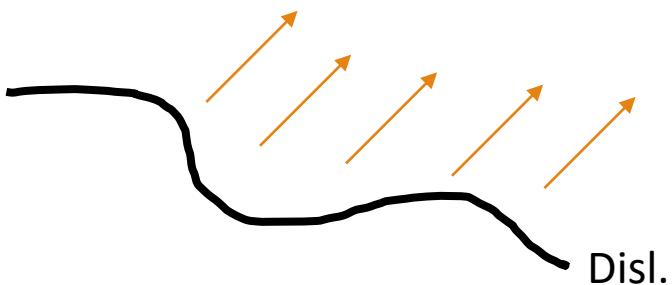
- Deformation mechanisms at high temperature are promoted by 'diffusion'
- Diffusion is a **time-dependent** mechanism
- Therefore, the deformation behavior at high temperature becomes time-dependent
- Strain rate can be viewed as stimuli given at a specific time duration, whereas the stress can be considered as response

## □ What microscopic mechanisms occur behind the scene of creep?

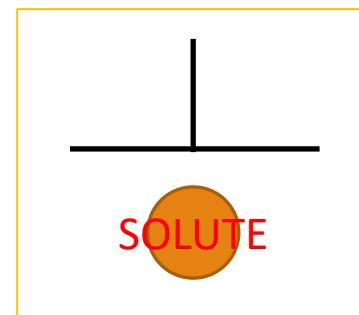
- Thermally activated mechanisms (diffusion-involved) that include 'grain boundary sliding', dislocation climb, and so forth.



# Negative SRS and its effect



Disl.



Difficult for disl.  
to move, leading  
to strengthening.

At low temp (or at high strain rate),  
diffusion of solute becomes slow (the  
dislocation moves too quick for solute  
to diffuse to form the Cottrell locking)

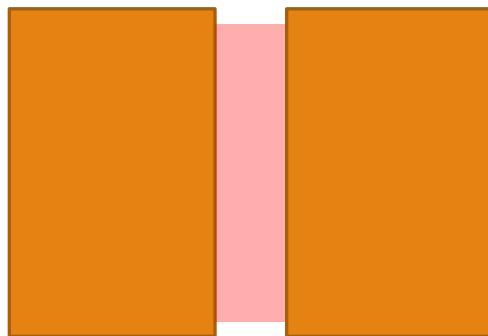


Some alloys exhibit negative  
SRS at low temperature.



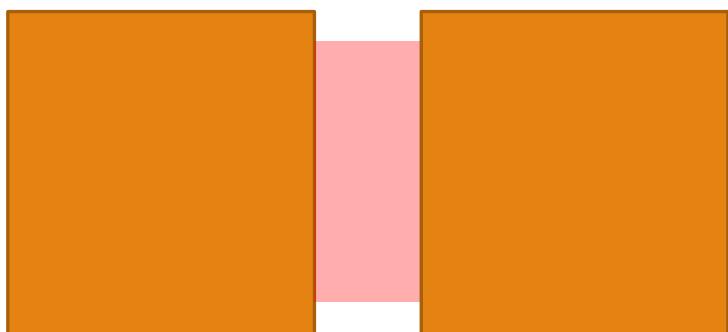
# Why negative SRS is unwanted?

- ❑ Promote Lüders bands
- ❑ Can promote strain localization (much drastically than the case of positive strain rate)



t=0 sec

Inhomogeneous region이 더 많은  
변형이 발생 -> 더 많은 strain  
hardening 발생



t=1 sec

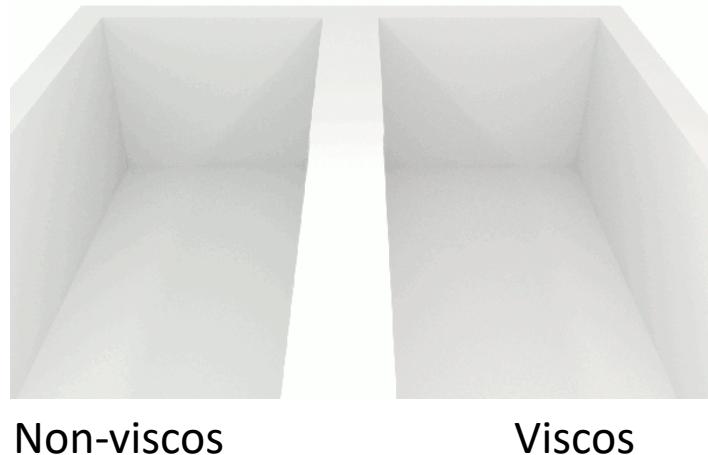
같은 시간동안 더 많은 변형량이 발생.  
따라서 inhomogeneous region이 더 높은  
strain rate 환경.

- $SRS > 0$  높은 strain rate 더 강해진다.
- $SRS < 0$  높은 strain rate 더 약해진다.



# SRS 그리고 재료 점성 (viscosity)

- 재료에 작용하는 shear stress와 그 반응으로 발생하는 전단 변형률이 서로 비례하면 해당 재료는 'Newtonian viscosity'를 갖는다.
- $\tau = \eta \dot{\gamma}$  (앞서 설명한  $\sigma = C \dot{\varepsilon}^m$  와 유사한 형태- 다만  $m=1$ )
- $\eta$  (eta, 에타라고 읽는다)를 전단 점성(viscosity)라고 한다.
- Newtonian viscosity 를 가지는 재료는  $\bar{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}$ 로 그 점성을 표현 가능.



# Superplasticity (초소성)

□ SRS>0.5 현상은 다음과 같은 조건들이 만족될 때 나타난다.

- Extremely fine grain size (수  $\mu m$  혹은  $nm$ ) with uniform and equiaxed grains structure
- High temperature ( $\frac{T}{T_m} > 0.4$ )
- Low strain rate ( $\dot{\varepsilon} \leq 10^{-2} s^{-1}$ )
- 변형시의 미세구조 안정성

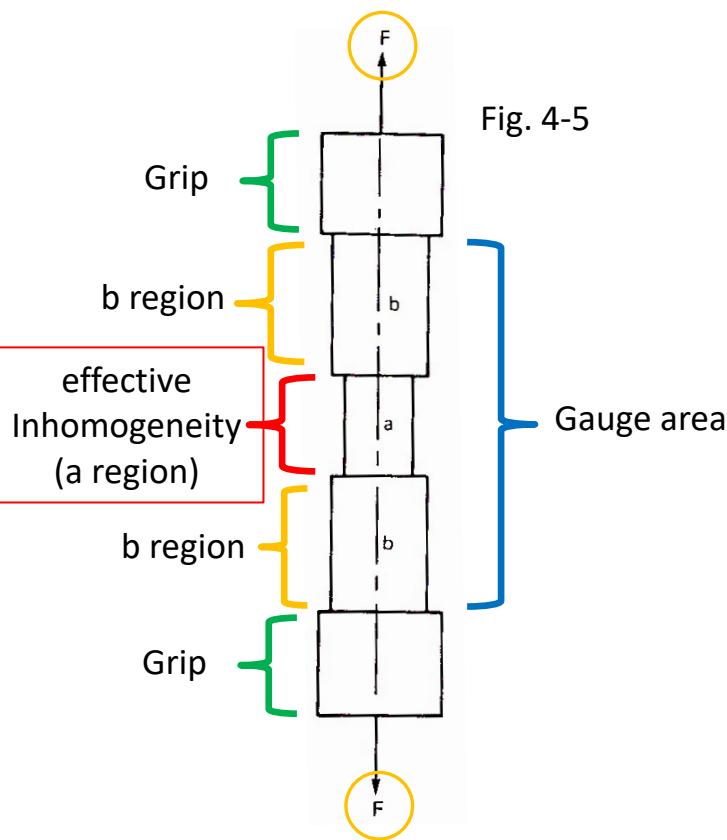
□ 초소성 (superplasticity): 매우 낮은 응력에서 대단히 높은 연신율(elongation)이 관찰되는 현상, 혹은 그러한 특성

□ 초소성 장점:

- 열간가공온도에서 낮은 변형응력으로 가공 가능하다. 초소성 현상이 발생하는 재료를 사용해 매우 복잡한 형상을 가진 부품을 가공할 수 있다.
- 매우 간단한 금형(금속으로 만든 형틀, die)을 사용해 깊은 골의 형상을 갖는 판재부품을 제조할 수 있다.



# 불균질한 단면 효과(4) - 일축인장시험



$$f_0^{\frac{1}{m}} (e^{-\varepsilon_a/m} - 1) = (e^{-\varepsilon_b/m} - 1)$$

a 지역과 b 지역 사이에서도 힘평형 조건이 만족 되어야 한다. 따라서

$$F_a = F_b \rightarrow \sigma_a A_a = \sigma_b A_b \quad (1)$$

두 지역의 '물성차'는 없다 (remember! 우리는 유효 불균질 접근법을 사용중). 따라서 두 지역의 SRS 거동은 동일. 만약  $\sigma = C\varepsilon^m$  을 사용한다면:

$$C\varepsilon_a^m A_a = C\varepsilon_b^m A_b \quad (2)$$

위에서 두 지역이 같은  $C, m$  값 가지나, 두 지역은 다른 strain rate를 가질 수 있다는 조건이 사용되었음을 이해하자. 한편 일축 인장 환경에서 인장변형률은 단면적의 변화로 사용할 수 있다 (즉).

$$\varepsilon = -\ln \left( \frac{A}{A_0} \right) \rightarrow A = A_0 \exp(-\varepsilon) \quad (3)$$

그리고 (3)을 이용하여 위의 초기 불균질 파라미터( $f_0$ )를 사용한 형태의 방정식을 (2)에서 부터 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} C\varepsilon_a^m A_{a0} \exp(-\varepsilon_a) &= C\varepsilon_b^m A_{b0} \exp(-\varepsilon_b) \\ \rightarrow \dot{\varepsilon}_a^m A_{a0} \exp(-\varepsilon_a) &= \dot{\varepsilon}_b^m A_{b0} \exp(-\varepsilon_b) \\ \rightarrow f_0 \dot{\varepsilon}_a^m \exp(-\varepsilon_a) &= \dot{\varepsilon}_b^m \exp(-\varepsilon_b) \\ \rightarrow f_0 \left( \frac{d\varepsilon_a}{dt} \right)^m e^{-\varepsilon_a} &= \left( \frac{d\varepsilon_b}{dt} \right)^m e^{-\varepsilon_b} \end{aligned}$$

Canceling out dt term and raising both sides to the power of (1/m)

$$\rightarrow f_0^{1/m} d\varepsilon_a e^{-\varepsilon_a/m} = d\varepsilon_b e^{-\varepsilon_b/m}$$

If you integrate the above for strain paths for both sides, so that the end strain state of both region becomes  $\varepsilon_a$  and  $\varepsilon_b$ , respectively:

$$\int_0^{\varepsilon_a} f_0^{1/m} e^{-\varepsilon_a/m} d\varepsilon_a = \int_0^{\varepsilon_b} e^{-\varepsilon_b/m} d\varepsilon_b$$



# Again, apply the NR method

---

- 1. Form the objective function to minimize:

➤  $F(\varepsilon_b) = f_0^{\frac{1}{m}}(e^{-\varepsilon_a/m} - 1) - \left(e^{-\frac{\varepsilon_b}{m}} - 1\right) = 0$

- 2. Let's determine  $\varepsilon_b$  as a function of  $\varepsilon_a$  as in Fig. 5-9. To that end, we need  $\partial F / \partial \varepsilon_b$

➤  $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b} = \frac{1}{m} e^{-\frac{\varepsilon_b}{m}}$

- 3. Guess the initial value  $\varepsilon_b$  for the given  $m, \varepsilon_a$  value and repeat:

➤  $\varepsilon_b^{(n+1)} = \varepsilon_b^{(n)} - \frac{F(\varepsilon_b^{(n)})}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b}(\varepsilon_b^{(n)})}$

$\varepsilon_b$ 에 superscript (n) 혹은 (n+1)은 이전 그리고

현재 iterative step을 가르킨다.



# Exercise

$$F(\varepsilon_b) = f_0^{\frac{1}{m}} \left( e^{-\varepsilon_a/m} - 1 \right) - \left( e^{-\frac{\varepsilon_b}{m}} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b} = \frac{1}{m} e^{-\frac{\varepsilon_b}{m}}$$

$$\varepsilon_b^{(n+1)} = \varepsilon_b^{(n)} - \frac{F(\varepsilon_b^{(n)})}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b}(\varepsilon_b^{(n)})}$$

Provided that  $m=0.05$  and  $f_0 = 0.98$ , at  $\varepsilon_a = 0.01$  what is  $\varepsilon_b$ ?

Guess  $\varepsilon_b$  for  $\varepsilon_a = 0.01$  as 0.006230

$$\begin{aligned}\varepsilon_b^{(n+1)} &= \varepsilon_b^{(n)} - \frac{F(0.01)}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b}(0.01)} \\ &= \frac{0.01 - \frac{0.98^{1/0.05} (e^{-0.01/0.05} - 1) - (e^{-0.01/0.05} - 1)}{0.98^{1/0.05} (e^{-0.01/0.05} - 1) - (e^{-0.01/0.05} - 1)}}{\frac{1}{0.05} e^{-\frac{0.01}{0.05}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 0.06320 \\ &\approx 0.06320 \\ &\approx 0.06320 \quad (\text{I guess the solution is converged})\end{aligned}$$

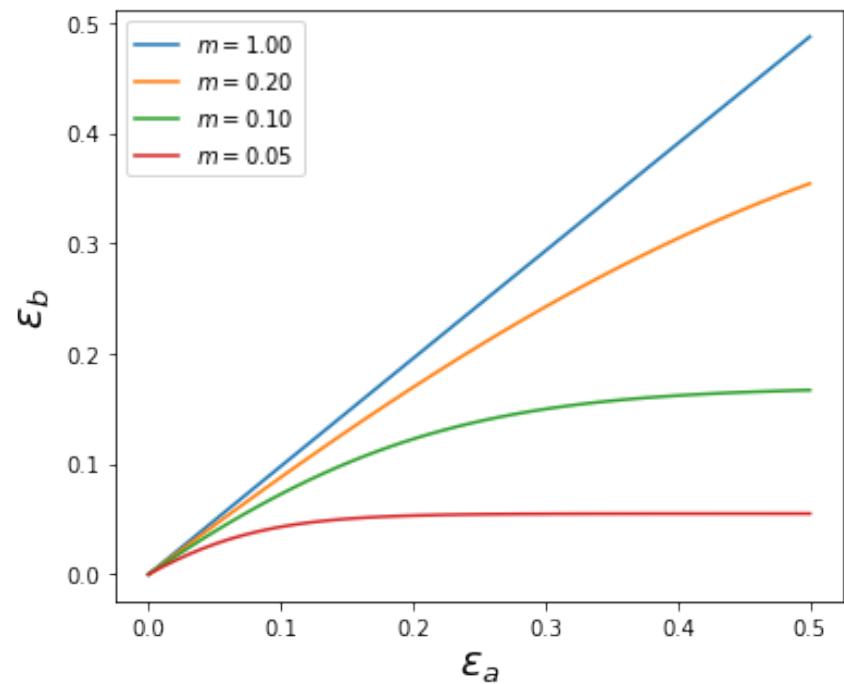


# Result (1)

---

$$f_0^{\frac{1}{m}}(e^{-\varepsilon_a/m} - 1) = (e^{-\varepsilon_b/m} - 1)$$

$f_0 = 0.98$  경우의 수치해석 결과



[https://github.com/youngung/lectures/blob/master/ipynb/fig5-10\\_metalforming\\_hosford%26caddell.ipynb](https://github.com/youngung/lectures/blob/master/ipynb/fig5-10_metalforming_hosford%26caddell.ipynb)

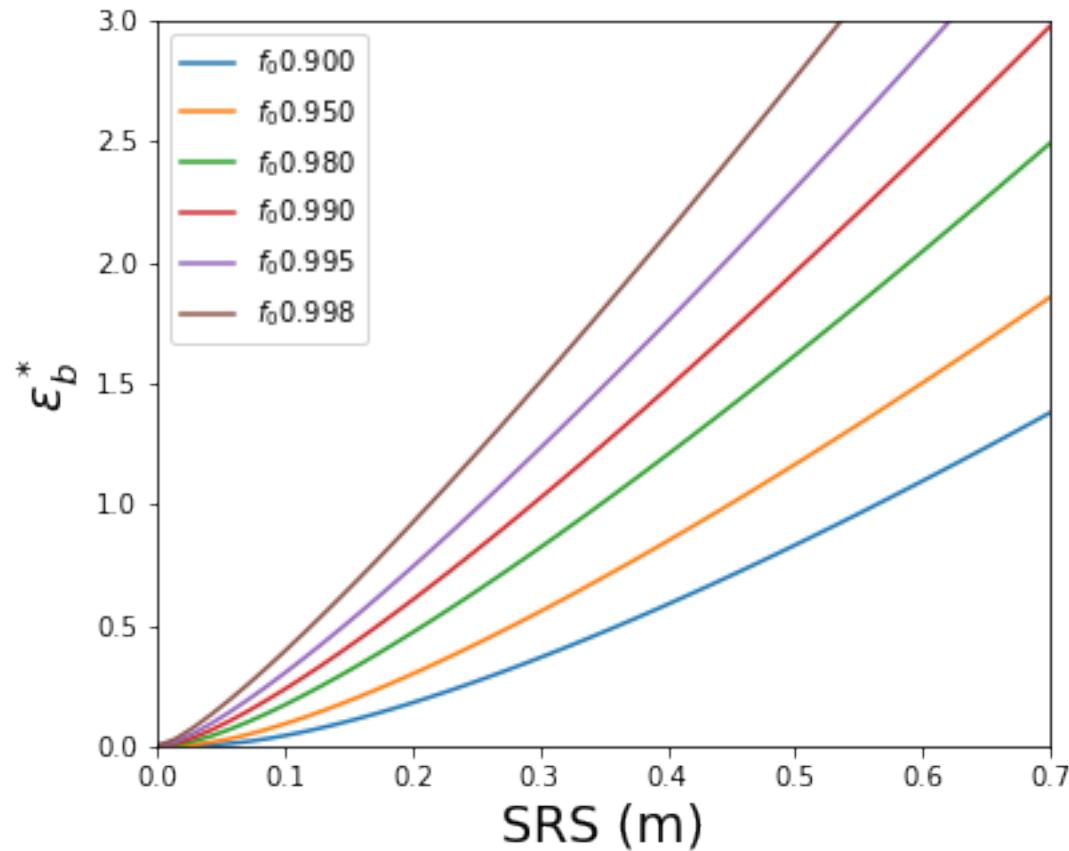


# Result (2)

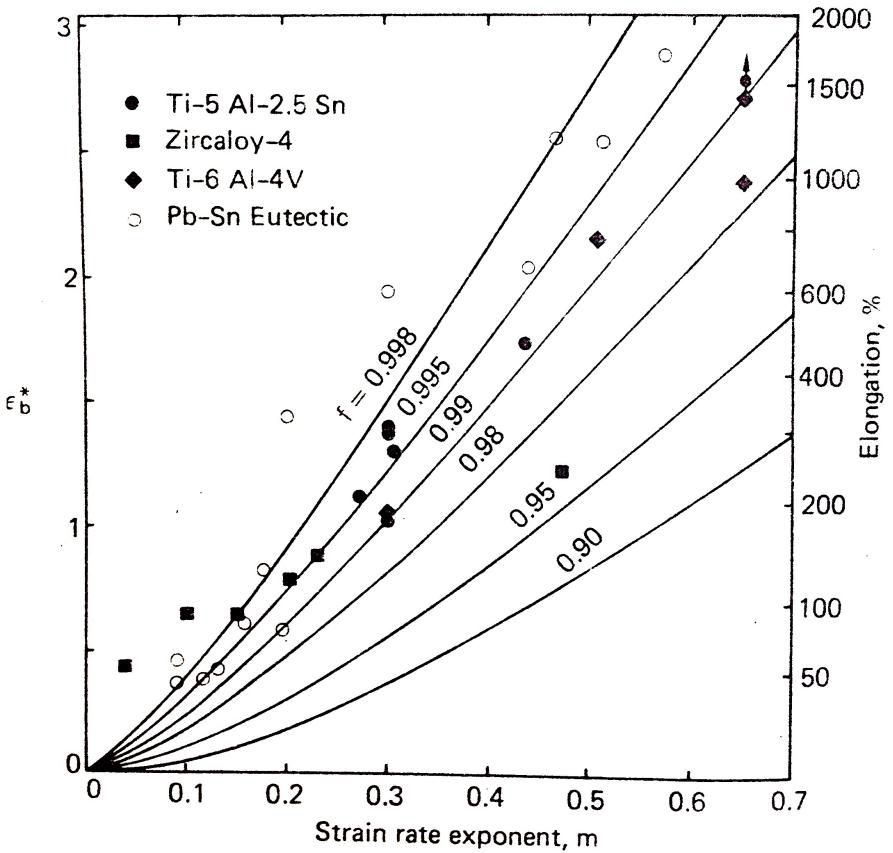
유효 한계 변형률( $\varepsilon_b^*$ )는  $\varepsilon_a \rightarrow \infty$  일때의  $\varepsilon_b$ 로 같음한다.  
따라서

$$f_0^{1/m}(0 - 1) = (e^{-\varepsilon_b/m} - 1)$$

$$\rightarrow \varepsilon_b^* = -m \ln(1 - f_0^{1/m})$$



# Result (2) and experimental observations



- 실험치와 비교하여 effective inhomogeneity parameter (유효불균질파라미터, 교재에는 불균일변형인자값으로 표현)
- 실험치와의 단순비교로부터 effective inhomogeneity parameter를 어느정도 추측할 수 있다.
- 반면, 우리가 해당 결과를 '예측' 혹은 '모델링'하면서 얼마나 다양한 종류의 'assumption'을 해왔는지 생각해보자
  - Hollomon Eq.
  - von Mises
  - SRS equation (지수함수 형태로 approximation)
- Theory and experiments



# Combined strain and strain-rate effects

□ 이때까지 우리는 시편의 유효비균질에 의한 시편의 한계 변형률이 각각 변형률과 strain rate에 의해 지배되는 모델을 이용하여 설명하였다. 지금부터는 이 둘을 모두 고려한 아래와 같은 모델을 살펴보자.

➤  $\sigma = C\varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m$

□ 힘 평형에 위의 모델과  $A = A_0 \exp(-\varepsilon)$  을 고려하면

□  $\text{force}_a = \text{force}_b \rightarrow A_a \sigma_a = A_b \sigma_b$

$$\rightarrow A_{a,0} \exp(-\varepsilon_a) \sigma_a = A_{b,0} \exp(-\varepsilon_b) \sigma_b$$

$$\rightarrow A_{a,0} \exp(-\varepsilon_a) \varepsilon_a^n \dot{\varepsilon}_a^m = A_{b,0} \exp(-\varepsilon_b) \varepsilon_b^n \dot{\varepsilon}_b^m$$

$$\rightarrow \exp(-\varepsilon_a) \varepsilon_a^n \dot{\varepsilon}_a^m = f_0 \exp(-\varepsilon_b) \varepsilon_b^n \dot{\varepsilon}_b^m$$

$$\rightarrow \exp(-x) x^n \left( \frac{dx}{dt} \right)^m = f_0 \exp(-y) y^n \left( \frac{dy}{dt} \right)^m$$



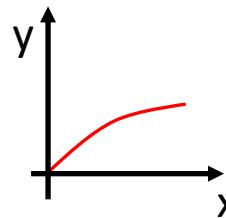
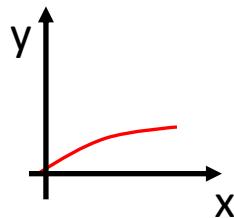
$$\exp(-x) x^n \left( \frac{dx}{dt} \right)^m = f_0 \exp(-y) y^n \left( \frac{dy}{dt} \right)^m$$

위 방정식과 관련하여 풀 수 있는 의문으로는 다음이 있겠다.

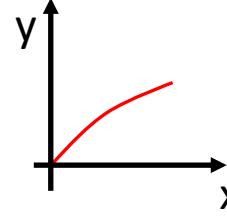
constant한 strain rate로 region b을 변형 할 때, a region의 변형률은  $f_0$ 파라미터에 의해 달라지게 된다. 예를 들어, 일반적으로 region a와 region b의 변형률 속도 비가 10배가 넘으면 파괴가 발생한다고 한다 (즉  $\dot{\varepsilon}_a / \dot{\varepsilon}_b \geq 10$  일 때, 파괴가 발생). 그렇다면  $n, m$  및  $f_0$ 값이 각각 0.20, 0.05 그리고 0.980으로 알려진 시편을 일정한 변형률을 줘서 일축 인장을 할 때, 얼만큼 변형률을 주었을 때 파괴가 발생하나?

시편을 크게 생각해보면 균일하게 볼 수 있으므로, 시편에 가해준 변형률을 region b에 적용할 수 있다. 따라서  $10^{-3}/s$  으로 변형률을 준다면  $\dot{\varepsilon}_b = 10^{-3} \left[ \frac{1}{s} \right]$ 로 놓고  $\dot{\varepsilon}_a \geq 10^{-2}$  조건이 발생할 때의 시편 변형률 (즉  $\dot{\varepsilon}_b$ )을 찾아보자.

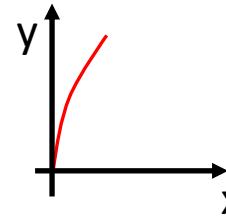
결과적으로 우리는 위의 미분 방정식을 통해 다음과 같은 Graph를 얻고자 한다.



$$n, m, f_0 = 0.3, 0.04, 0.99$$



$$n, m, f_0 = 0.2, 0.05, 0.97$$

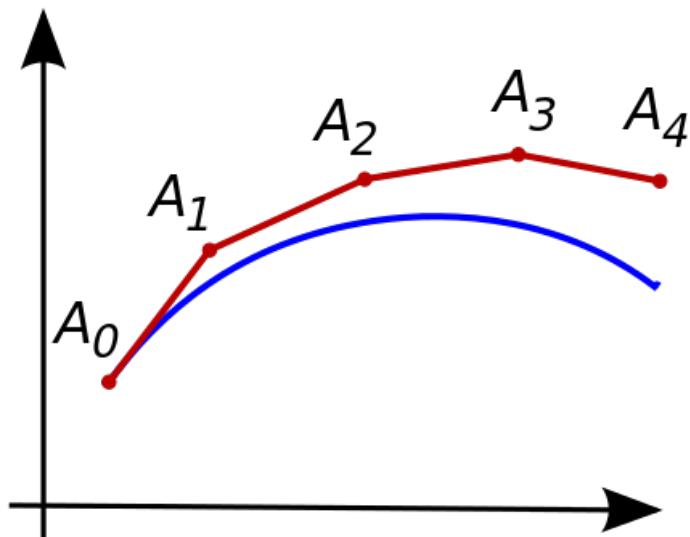


$$n, m, f_0 = 0.1, 0.06, 0.96$$

이를 찾기 위해서는 Euler method를 알 필요가 있다.

# (Forward) Euler method

Euler method는 Ordinary differential equation (ODEs)를 수치적으로 푸는 방법중에 하나다. 주어진 초기 값 (initial value)에 의해 수치 적분 (numerical integration)을 하는 아주 간단한 방법이다.



# Exercise

Let's say you are to solve ODE:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = y$

초기값이  $f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$ 로 주어졌을 때,  $y(4)$ 는 무엇인가?

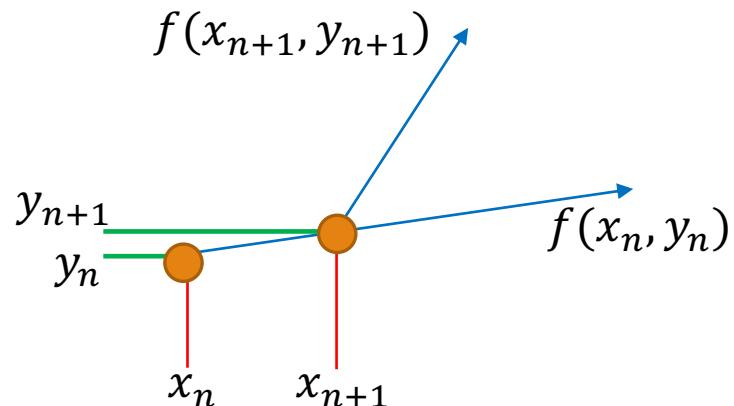
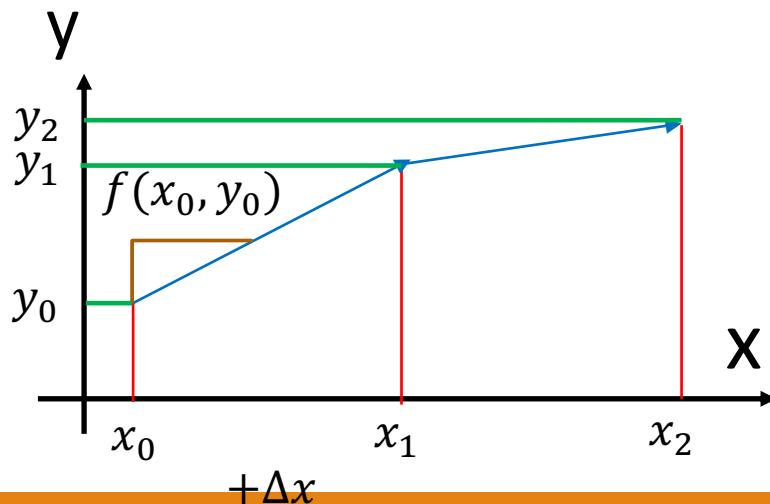
x와 y의 관계가 미분 방정식의 형태로 주어졌다. 따라서,  $y=g(x)$  형태의 함수 꼴을 우리는 알 수 없다. 그럼에도 불구하고, x가 4 일 때, y 값을 찾을 수 있을까?

우선 우리는 미분의 형태로 주어진  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 을 근사한다:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  따라서 충분히 작은  $\Delta x$  값을 사용한다면 그에 해당하는 y의 변화를 활용하여  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 로 근사(approximate).

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n)$$

where  $\Delta x$  is the step size.



# Exercise

Let's say you are to solve an ODE:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = y$

초기값이  $f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$  로 주어졌을 때,  $y(4)$ 는 무엇인가?

1st trial with  $\Delta x = 1$

$n$	$y_n$	$x_n$	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1}$
-----	-------	-------	---------------	-----------

0	1	0	1	$1 + 1 \cdot 1 = 2$
---	---	---	---	---------------------

1	2	1	2	$2 + 1 \cdot 2 = 4$
---	---	---	---	---------------------

2	4	2	4	$4 + 1 \cdot 4 = 8$
---	---	---	---	---------------------

3	8	3	8	$8 + 1 \cdot 8 = 16$
---	---	---	---	----------------------

4	16	4	Fin.
---	----	---	------



# Another example

□  $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$

□ Question:

➤  $l_0 = 5$  이고,  $l = 8$ 이 될 때,  $\varepsilon$ 은 무엇인가? (초기값:  $l = l_0$  일 때,  $\varepsilon = 0$ )

$$\frac{d\varepsilon}{dl} = \frac{1}{l}$$
$$l = 5, \varepsilon = 0$$

1st trial with  $\Delta l = 1$

$n$	$\varepsilon_n$	$l_n$	$f(l_n, \varepsilon_n) = \frac{1}{l_n}$	$\varepsilon_{n+1}$
0	0	5	$1/5$	$0 + 1 \cdot 1/5 = 0.2$

0	0	5	$1/5$	$0 + 1 \cdot 1/5 = 0.2$
---	---	---	-------	-------------------------

1	0.2	6	$1/6$	$0.2 + 1 \cdot 1/6 = 0.367$
---	-----	---	-------	-----------------------------

2	0.367	7	$1/7$	$0.367 + 1 \cdot 1/7 = 0.510$
---	-------	---	-------	-------------------------------

3	0.510	8	$1/8$	$0.510 + 1 \cdot 1/8 = 0.634$
---	-------	---	-------	-------------------------------



# Excel demonstration?

---

Q1.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = y$$

$$\text{초기값 } f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$$

Q2.

$$\frac{d\varepsilon}{dl} = \frac{1}{l}$$
$$l = 5, \varepsilon = 0$$



# Adv. Exercise

$$\exp(-x) x^n \left( \frac{dx}{dt} \right)^m = f_0 \exp(-y) y^n \left( \frac{dy}{dt} \right)^m$$

Let's specify the problem:  $\frac{dx}{dt} = 10^{-3} [s^{-1}]$ ,  $n = 0.25$ ,  $m = 0.05$ ,  $f_0 = 0.995$

$$f(x, y) = \exp(-x) x^n \left( \frac{dx}{dt} \right)^m - f_0 \exp(-y) y^n \left( \frac{dy}{dt} \right)^m = 0$$
$$= \exp(-x) x^{0.25} (10^{-3})^{0.05} - 0.995 \cdot \exp(-y) \cdot y^{0.25} \cdot (\dot{y})^m = 0$$

$$f(x_k, y_k) = \exp(-x_k) x_k^{0.25} (10^{-3})^{0.05} - 0.995 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^{0.25} \cdot (\dot{y}_k)^{0.05} = 0$$

$$\dot{y}_k = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t}$$

Let's set  $\Delta x = 0.5$

Since  $\Delta x / \Delta t = 10^{-3}$ ,  $\Delta t = 0.5 \times 10^3$

At  $x_0 = 0, y_0 = 0$

At  $x_1 = x_0 + \Delta x = 0.5$

What is  $y_1$ ?

We can find  $y_1$  by applying NR to  $f(x_1, y_1) = 0$

How?



# Adv. Exercise (continued)

We can find  $y_1$  by applying NR to  $f(x_1, y_1) = 0$

How?

$$f(x_k, y_k) = \exp(-x_k) x_k^{0.25} (10^{-3})^{0.05} - 0.995 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^{0.25} \cdot (\dot{y}_k)^{0.05} = 0$$

$$\dot{y}_k \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t}$$

$$f(x_k, y_k) \rightarrow f(x_k, y_k, y_{k+1})$$

$$f(x_k, y_k, y_{k+1}) = \exp(-x_k) x_k^{0.25} (10^{-3})^{0.05} - 0.995 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^{0.25} \cdot \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{0.05}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} = -0.995 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^{0.25} \cdot \frac{\partial \left( \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{0.05} \right)}{\partial y_{k+1}}$$

$$= -0.995 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^{0.25} \cdot 0.05 \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{0.05-1} \frac{1}{\Delta t}$$

$$= -f_0 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^n \cdot m \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{m-1} \frac{1}{\Delta t}$$



# Adv. Exercise (continued)

$$\frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} = -f_0 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^n \cdot m \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{m-1} \frac{1}{\Delta t}$$

$$f(x_k, y_k, y_{k+1}) = \exp(-x_k) x_k^n (\dot{x}_k)^m - f_0 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^n \cdot \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^m$$

My initial guess for  $y_{k+1}$  (denoted as  $y_{k+1}^0 = x_{k+1}$ )

My next guess for  $y_{k+1}$  (denoted as  $y_{k+1}^1 = y_{k+1}^0 + \frac{f(y_{k+1}^0)}{\frac{\partial f}{\partial y_{k+1}}(y_{k+1}^0)}$ )



You have found  $y_{k+1}$  that satisfies  $|f(x_k, y_k, y_{k+1})| < \text{tolerance}$

Then repeat the above NR iteration for the next step ( $k \leftarrow k + 1$ )

New  $x_k = x_{k-1} + \Delta x$

Repeat this while  
 $\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} < 10\dot{x}$



# Advanced exercise Excel demonstration

---

$$\frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} = -f_0 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^n \cdot m \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^{m-1} \frac{1}{\Delta t}$$

$$f(x_k, y_k, y_{k+1}) = \exp(-x_k) x_k^n (\dot{x}_k)^m - f_0 \cdot \exp(-y_k) \cdot y_k^n \cdot \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} \right)^m$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

Initial guess on NR method seeking  $y_{k+1}$ ?

Candidates:

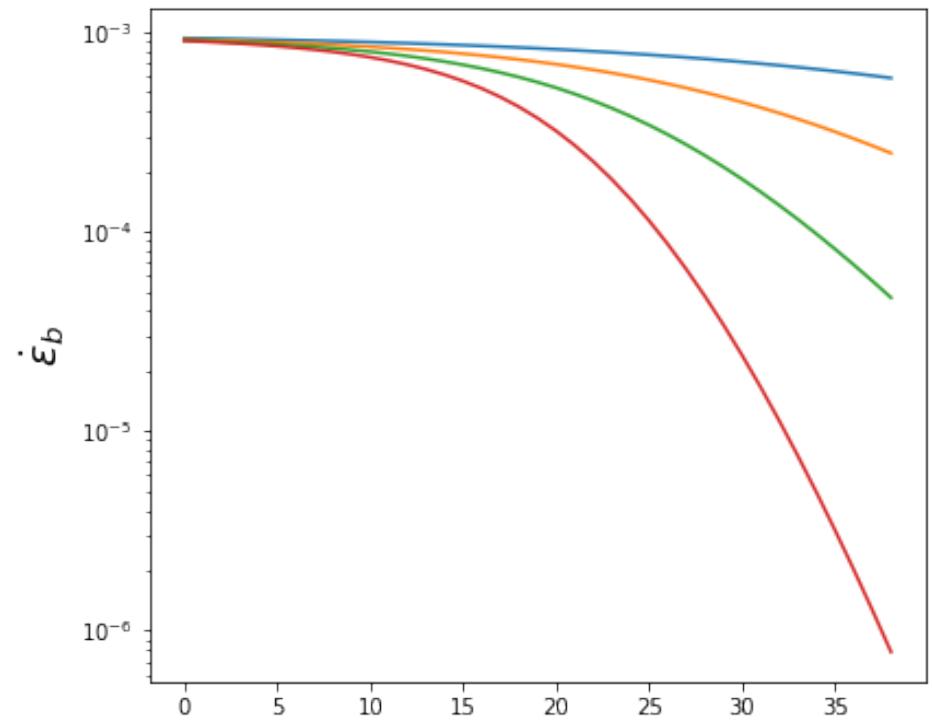
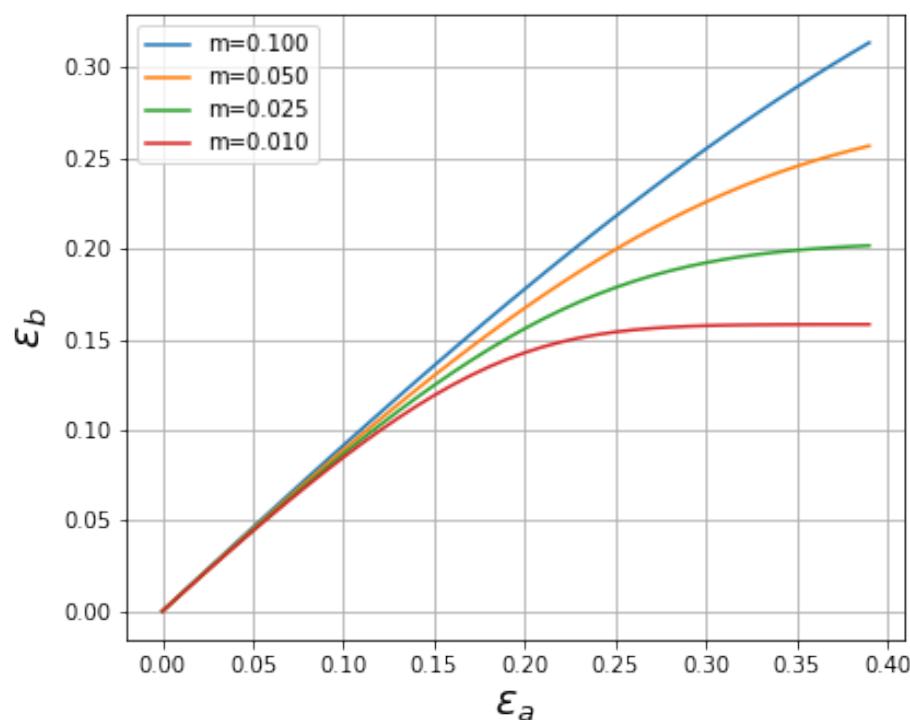
1.  $x_k$
2.  $x_{k+1}$
3.  $y_k$
4.  $y_k + \Delta x$
5.  $(y_k - y_{k-1}) + y_k$



# Results

Case of  $f_0 = 0.98$  and  $\dot{\varepsilon}_a = 0.001 \text{ s}^{-1}$

Solve the same equation with fixing  $\dot{\varepsilon}_a = 0.001 \text{ s}^{-1}$



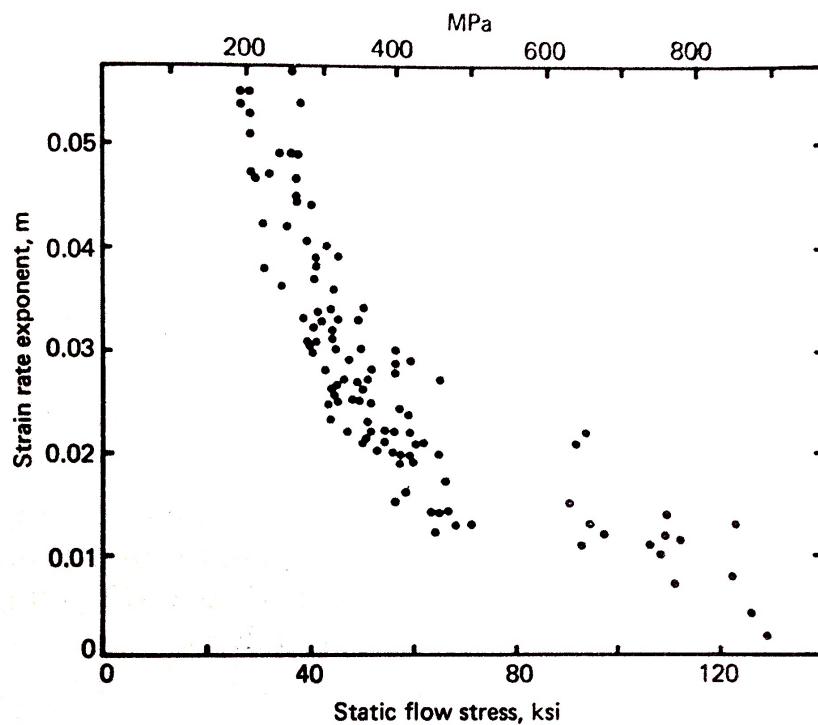
Numerical Solution can be found in below link:

<https://github.com/youngung/lectures/blob/master/ipynb/Eq5-14-Hosford-Caddell.ipynb>



# Alternative description of strain-rate dependence

- 앞서 우리는 유동응력의 strain-rate dependence를 다음과 같이 나타내었다.  
➤  $\sigma = C \dot{\epsilon}^m$
- 위 description은 철강의 경우 잘 들어맞지 않는다. 실험을 통해 철강(steel)의 경우  $m$  값이 소성경화량(the amount of hardening due to plastic deformation)에 따라 달라지는 것을 관찰 할 수 있었다.



□ SRS  $m$  값이 유동응력의 inverse와 비례하는 것을 보여준다.



# Alternative description of strain-rate dependence

---

- SRS m 값이 유동응력의 inverse와 비례하는 것을 보여준다.
- 따라서 다음과 같은 description이 아마도 더 낫다:  $\frac{d\sigma}{d(\ln \dot{\varepsilon})} = m'$
- 위를 적분하는 구간에서 변형률 속도가  $\dot{\varepsilon}_0$ 에서  $\dot{\varepsilon}_1$ 로 변화했고, 그에 대한 반응으로 응력또한  $\sigma_0$ 에서  $\sigma_1$ 로 변했다면 아래와 같이 완전 적분이 가능하다.
  - $d\sigma = m' d(\ln \dot{\varepsilon}) \rightarrow \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} d\sigma = \int_{\dot{\varepsilon}_0}^{\dot{\varepsilon}_1} m' d(\ln \dot{\varepsilon}) = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_0}$
  - $\rightarrow \sigma_1 - \sigma_0 = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_0} \rightarrow \sigma_1 = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_0} + \sigma_0$
- 앞에서 유동 응력은 strain rate 뿐만 아니라, strain에 의해서도 변화함을 보았다 (변형경화현상; strain hardening). 응력  $\sigma_0$ 은 strain rate  $\dot{\varepsilon}_0$  뿐만 아니라 변형률에 대한 함수임을 알 수 있다
- 위의 방정식에서 주의해서 봐야하는 점은 유동응력에 영향을 주는 1) 변형률 강화와 2) SRS효과의 응력 상승에 대한 기여(contribution)가 additive한 형태로 표현된다는 점이다.
- 앞서 우리는 그와 다르게 1)변형률 강화와 2) SRS 효과가 ‘곱해진’ 형태로 나타냈던 점과 대비된다:
- $\sigma = C\varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m$



# Alternative description of strain-rate dependence

---

- $\sigma_1$ 의 변형률에 대한 의존성은  $\sigma_0$ 을 통해 다음과 같이 describe 할 수 있다.
- $\sigma_1 = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_0} + K' \varepsilon^{n'}$       $K'$  과  $n'$  은 특정 변형률 속도 ( $\dot{\varepsilon}_0$ ) 에서 측정된  $K$ ,  $n$  값이다  
( $K$ ,  $n$ 이 strain rate에 따라 달라질 수 있다고 가정하였다).
- 한 기준 strain rate  $\dot{\varepsilon}_0$ 와 strain  $\varepsilon$ 에서 응력이  $K' \varepsilon^{n'}$  같다면, 같은 strain  $\varepsilon$  이지만 다른 strain rate  $\dot{\varepsilon}$  환경에서의 응력을 다음과 같이 표현할 수 있다:
- $\sigma = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} + K' \varepsilon^{n'}$



# Alternative description of strain-rate dependence

□ 아래와 같은 형태로 유동응력을 표현하였다.

$$\square \sigma = m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} + K' \varepsilon^{n'} \quad (1)$$

□ 우리는 앞서 유동응력을 Hollomon equation으로 묘사하였다.

$$\square \sigma = K \varepsilon^n$$

□ 그리고  $\partial\sigma/\partial\varepsilon$  값을 구하면서 다음과 같은 관계를 알아내었다.

$$\square \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = n K \varepsilon^{n-1} = K \varepsilon^n \times \frac{n}{\varepsilon} = \sigma \frac{n}{\varepsilon} \rightarrow n = \frac{\varepsilon \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}}{\sigma} \quad (2)$$

□ (1)과 (2)를 사용하면

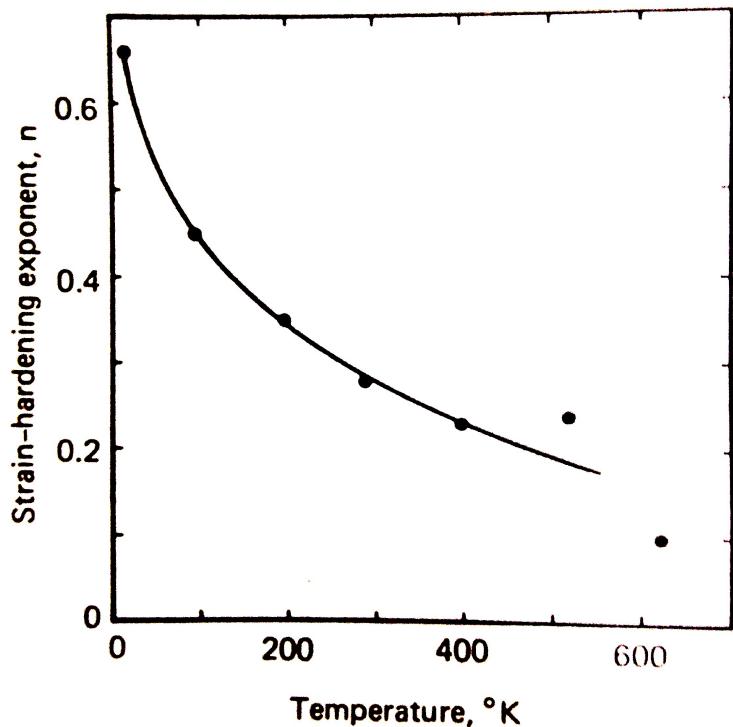
$$\square n = \frac{\varepsilon \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} n' K' \varepsilon^{n'-1} = \frac{\varepsilon}{m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} + K' \varepsilon^{n'}} n' K' \varepsilon^{n'-1} = \frac{n' K' \varepsilon^{n'}}{m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} + K' \varepsilon^{n'}} = \frac{n'}{\frac{m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}}{K' \varepsilon^{n'}} + 1}$$

$$\square n = \frac{n'}{\frac{m' \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}}{K' \varepsilon^{n'}} + 1} \quad (\text{만약 } n', m' \text{ 이 정말 상수라면, } n \text{ 값은 } \dot{\varepsilon} \text{ 값이 증할 수록 감소})$$



# Temperature dependence of flow stress

□ 고온에서의 strain-hardening rate ( $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ )는 온도 상승에 따라 급격히 ‘감소한다’.



# Zenner and Hollomon

□ Adapted Arrhenius equation to describe the effect of temperature on strain rate.

$$\square \dot{\varepsilon} = A \exp(-Q/RT)$$

□ Q: Activation energy, T: temperature; R: the gas constant (기체상수); A: 비례상수

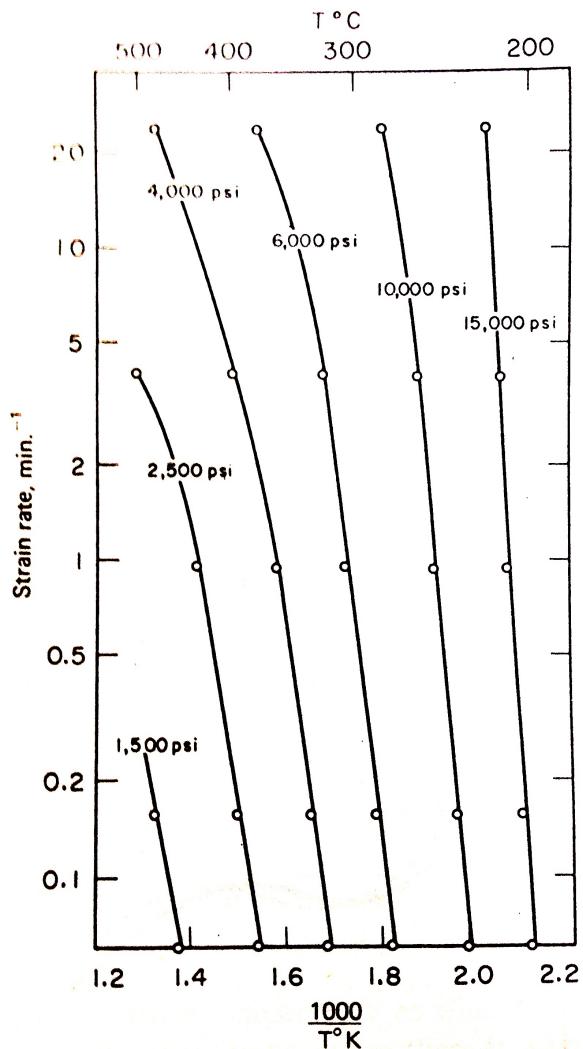
□ At constant strain, A is described as a function of stress alone:

$$\square A \equiv A(\sigma) = \dot{\varepsilon} \exp(-Q/RT)$$

□ 혹은 더 간단히 응력은 Zenner Hollomon parameter Z에 대한 함수로 표현한다:

$$\square \sigma = f(Z)$$

$$\square \text{where } Z = \dot{\varepsilon} \exp(Q/RT)$$



# Recap

---

- ❑ Strain rate
- ❑ Viscosity
- ❑ Relation between strain rate and flow stress (strain rate sensitivity; SRS)
- ❑ SRS measurement technique
- ❑ Unwanted effect of negative SRS
- ❑ Predicting necking due to inhomogeneity considering
  - Strain rate sensitivity
  - Combined effect of strain rate sensitivity and strain hardening
  - Application of NR method again
- ❑ Zenner-Hollomon



# References and acknowledgements

---

## □ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)
- <http://youngung.github.io> (본 강의에서 다룬 NR method에 대해 찾아보세요)

## □ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.

