Stress and strain: Stress tensor

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

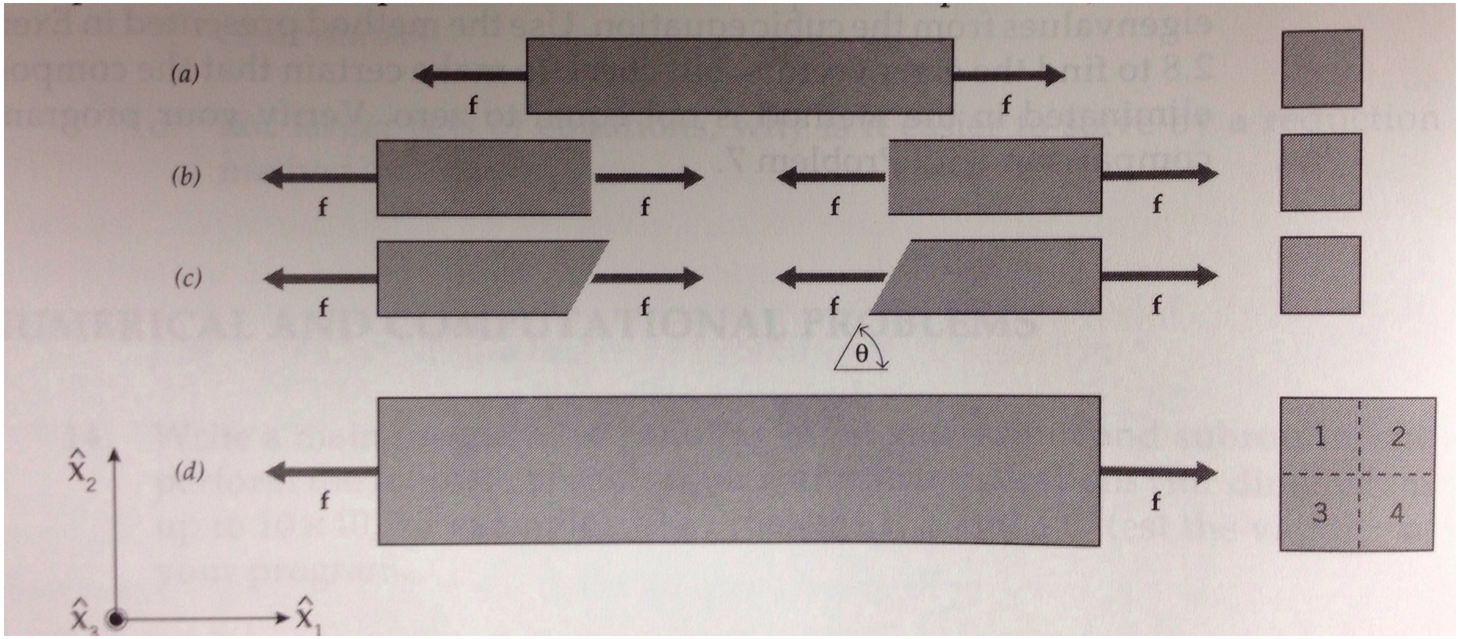
창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Internal stress of materials in force equilibrium

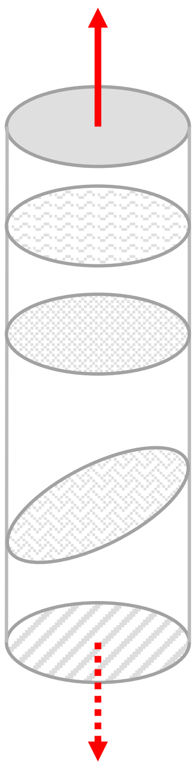


(a) 양끝에 F 라는 힘이 작용하는 막대기가 힘의 평형 상태에 놓여있다 (force equilibrium)
(b) 막대 내부에 작용하는 힘 (internal forces)을 살펴보기 위해 '가상으로 자른' 면 (힘의 방향과 수직 방향)에도 힘이 작용할까?
(c) (b)와 마찬가지, 하지만 비스듬하게 자른 '가상'의 면에는?
(d) 힘과 같은 방향으로 자를 경우?

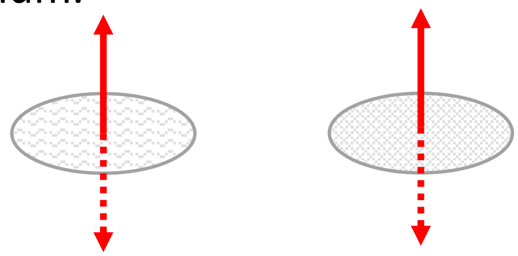
* 가상의 면에서의 힘이 이해가 어려울 경우, 해당 면에 놓은 원자를 생각해보자. 양끝을 당겼을때 당긴면과 떨어진 곳의 격자간의 거리가 어떻게 될까?

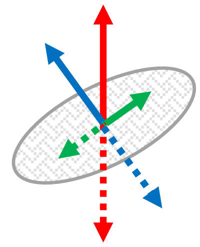
Fundamentals of metal forming, R. H. Wagoner, Jean-Loup Chenot

Recap: Tensile stress acting on a plane



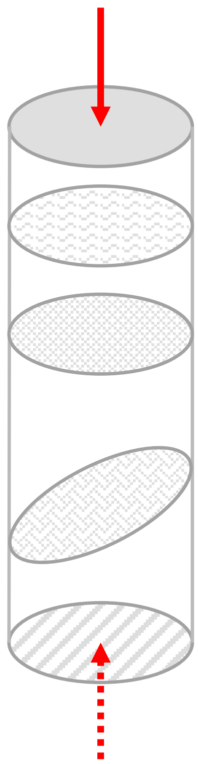
Remember that we deal with materials in force equilibrium; meaning that internal force in any arbitrary internal plane should be in ’force equilibrium’ condition – notice the pair of bold-line arrows and broken line-arrows in below to maintain the force equilibrium.

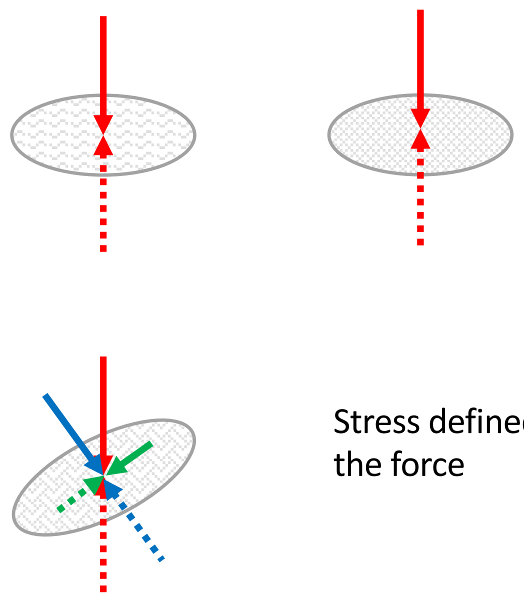




Stress defined by the plane and the force

Recap: Compressive stress acting on a plane





Stress defined by the plane and the force

Louis Cauchy

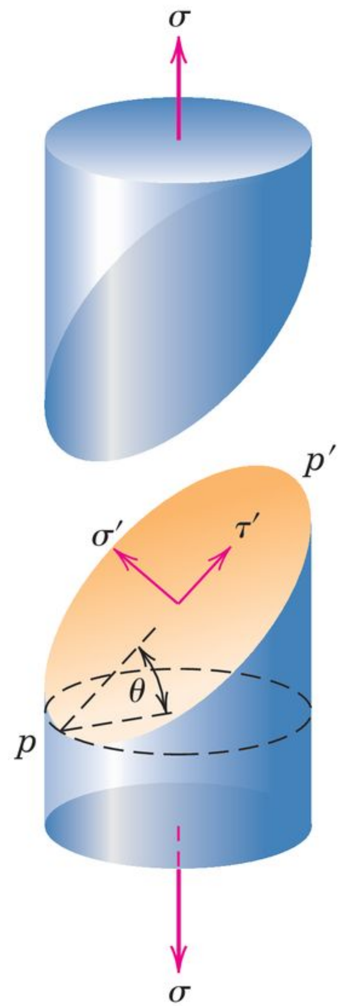
Only two types of stress:

1) Normal (인장+ 혹은 압축-)
2) Shear

Sufficient to define any stress state

응력 상태의 기하학적 고려

- 이때까지 작용한 응력들은 특별한 케이스들로 국한되어있다
  - 응력이 작용한 면과 수직 (압축, 인장)
  - 응력이 작용한 면과 평행 (전단)
- 사실 일반적인 응력 상태는 위의 압축, 인장, 전단이 혼재한 상태이다. 이러한 혼재한 상태는 사실 압축, 인장, 전단의 성분들로 '분류'하여 나타낼 수 있다. 따라서 인장(압축=-인장), 전단 성분들은 응력 상태를 나타낼 수 있는 구성 요소(component)라 할 수 있다.



응력은 항상 특정 '면'에 작용한다는 점을 주지하여, 연속된 봉상에서 주황색 가상의 단면에 작용하는 응력 상태를 살펴보자.

해당 면은 실제로 외부의 응력 σ가 작용하고 있다. 하지만 해당 응력은 관심면과 '수직' 하거나 '평행'하지도 않다. 해당 면에 '수직' 하거나 '평행'한 성분을 찾아야 응력 상태를 명확히 표현할 수 있다 (약속).

σ', τ': 해당 면에대해 수직하고 평행한 성분

stress state (응력상태)

- Stress state consisting of nine separate components
- Out of nine three are called normal components while the remaining six are shear components
- A vector consists of three components in the 3D space.
  - Example in 2D
    - 2차원 평면 동서남북 좌표계에서 영희가 동쪽으로 10m/s , 북쪽으로 5m/s 로 이동중이라면?
  - Example in 3D
    - 우주에서 유영하고 있는 우주인의 속도는 어떻게 나타내나? (기준 좌표계가 필요) 해당 좌표계의 basis axes (basis vectors)들과 평행한 성분들로 ’분해’하여 표현.
- The stress state is represented by nine components. The number of components is reduced to six under force equilibrium and under the cases we deal with materials are always in force equilibrium (quasi-static).

응력과 응력상태를 이루는 구성 요소
Stress state and stress (tensor) components

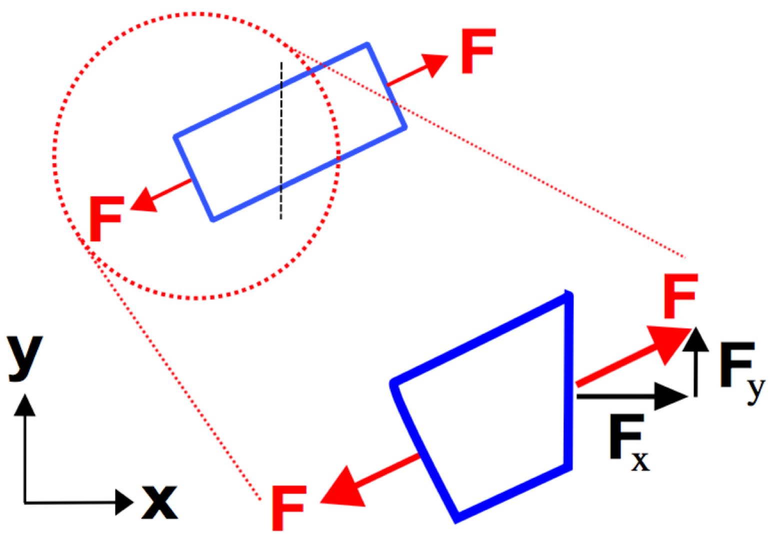
- Stress is defined as the **force** (load) applied to a certain **area**
- The most confusing part when you learn stress in mechanics is that the force does not necessarily lie normal to the plane.
- 앞서 살펴보았듯, 우리는 응력 상태를 표현할때 두가지 이상적인 조건에 만족하는 요소들로만 표현하기로 약속한다.
  A. 힘이 작용한 면적과 평행한 경우 (전단)
  B. 힘이 작용한 면적과 수직인 경우 (압축,인장)
- 대부분의 경우, 응력 상태는 A.와 B.의 경우가 혼재해 있다. 이를 표현하기 위해서는 위의 '성분'들의 각 물리량을 값(숫자, value, quantity)으로 나타내면 되겠다.

Directions in stress

Two types of directions are involved for stress state:

1. The direction of force
2. The direction of the area (plane); which is usually represented by the normal of the plane

- These directions can be also represented by 'values' if you refer to them in a certain coordinate system;
- The magnitude of 'force' can be also 'quantified' – that means it can be represented by 'values')



2차원 좌표계(x-y coordinates),
관심면(plane of interest),
그리고 힘 (Force)

Recap.

- 본 강의는 힘평형(force equilibrium) 조건에 해당하는 문제들로 국한하여 다룬다.
- 응력상태를 구성하는 성분 두가지는:
  - Normal: tensile(+) or compression(-)
  - Shear: forward shear (+) and backward shear (-) (전단의 방향은 'sense' 라고도 한다)
- 응력상태를 표현하기 위해서는 두가지 방향이 필요하다. 그리고 각 방향은 벡터의 성분처럼 projection을 통해 '값(value)'으로 표현이 가능하다. 2nd rank 텐서의 경우, 이 값들은 '두' 방향이 좌표계에 projection되어 얻어진 '세기'.
- Like three different components are the least number of independent components for a vector, there should be the least possible number of components to fully represent any stress state:
  - But, unlike vectors, we have two separate types of stresses (normal, shear) and also the directions for an independent component are 'two' (i.e., the direction of force and the associated plane).
  - How many, at least, different types of 'components' are required to fully describe the stress state then? We'll learn in over the next slides.

Invention of Cauchy stress tensor 코시응력텐서

- Cauchy found that only nine different types of stress components are required to fully describe the stress state; The stress state is represented by Cauchy stress **tensor**.

- Before learning more about stress tensor, let’s review the stress; What is stress?

- You might have some fundamental concept about stress: force/area

Stress at a material point

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

특정한 크기를 가진 면에 작용하는 힘을 이용하여 적당한 크기를 가진 면에 '균일'하게 작용하는 응력을 표현; Within the area (denoted as A), the force is homogeneous.

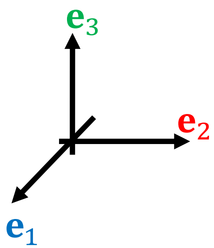
비균질한 재료의 경우, 응력이 재료의 각 점마다 다른 값을 가지며 '분포' 되어 있다. 이를 표현하기 위해서, 각 '점' 마다의 응력 상태를 표현할 수 있어야 한다. 따라서 매우 작은 점의 응력은 '균일'하다 할 수 있다. 이를 수학적으로 표현하자면

$$\sigma = \lim_{\mathrm{A}\to 0} \frac{F}{A}$$

앞으로는 가상의 '면'이 한 물질점(material point)에 귀속되어 있다고 가정한다. 그리고 무한소 큐브를 이용한 응력 상태를 표현하는 방법 (응력 텐서)를 알아보자.

Coordinate system and basis vectors

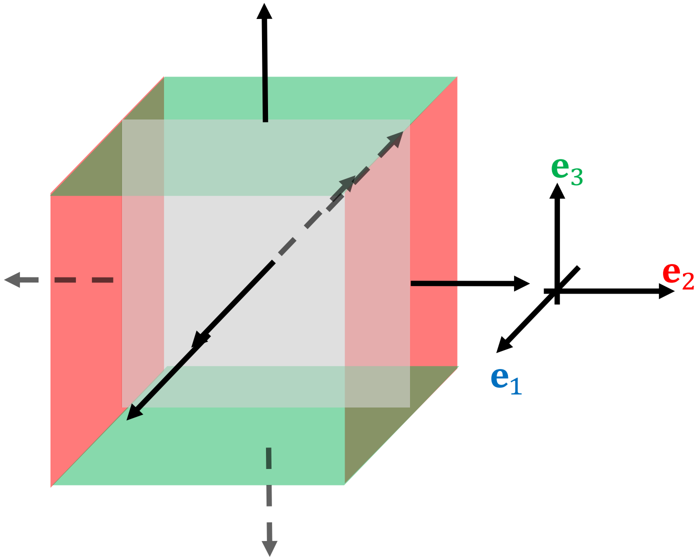
- 앞으로 좌표계를 설명할때 좌표계의 근간이 되는 방향들을 normal vector (즉 크기가 1인 벡터)로 표현.
- Cartesian coordinate system은 orthonormal coordinate system
- 서로 수직한 세 normal vector로 표현이 가능하다.



그 세 normal vector들을 basis vector로 칭하겠다. 그리고 각각 $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ 로 나타내겠다.

앞으로 다루게 될 응력과 변형률 텐서의 성분(component)을 표현할때 쓰이는 subscript들의 인덱스 (1,2,3)는 각각 $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ 벡터들을 뜻한다.

Cauchy stress tensor



응력 텐서는 무한소 큐브의 3면에 작용하는 성분들은 총 '두'가지 방향에 의존한다:
1) 작용하는 면의 수직방향 (normal)
2) 작용하는 힘의 방향 (normal or shear)

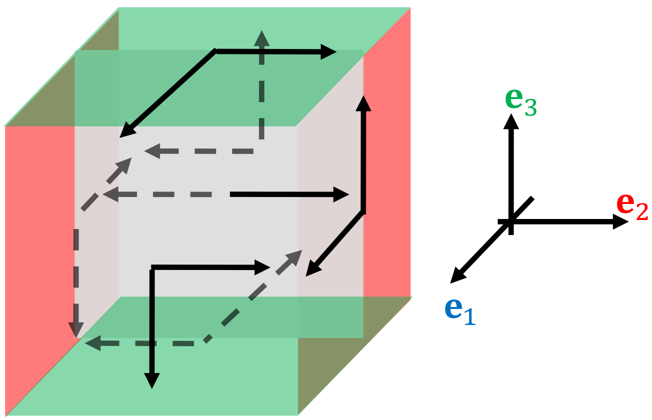
3차원 직교좌표계 (Cartesian coordinate)에서 총 9개의 조합이 가능하다. 즉 9개의 성분으로 표현가능. 하지만 힘의 평형 상태에서는 몇몇의 shear 성분들이 서로 같은 값을 가져야 한다(추후에 다루자). 그에 따라 총 6개의 '독립'적인 성분(component)들만 남게 된다.

The infinitesimal cube represents the smallest possible material point.

즉 주어진 좌표계에서 6개의 독립적인 성분(component)들만 안다면 해당 물질 무한소(material infinitesimal point)의 응력 상태(stress state)를 완벽히 나타낼 수 있다.

왜 6면중 3면만으로?? centro-symmetry

Cauchy stress tensor



응력 텐서는 무한소 큐브의 3면에 작용하는 성분들은 총 '두'가지 방향에 의존한다:
1) 작용하는 면의 수직방향 (normal)
2) 작용하는 힘의 방향 (normal or shear)

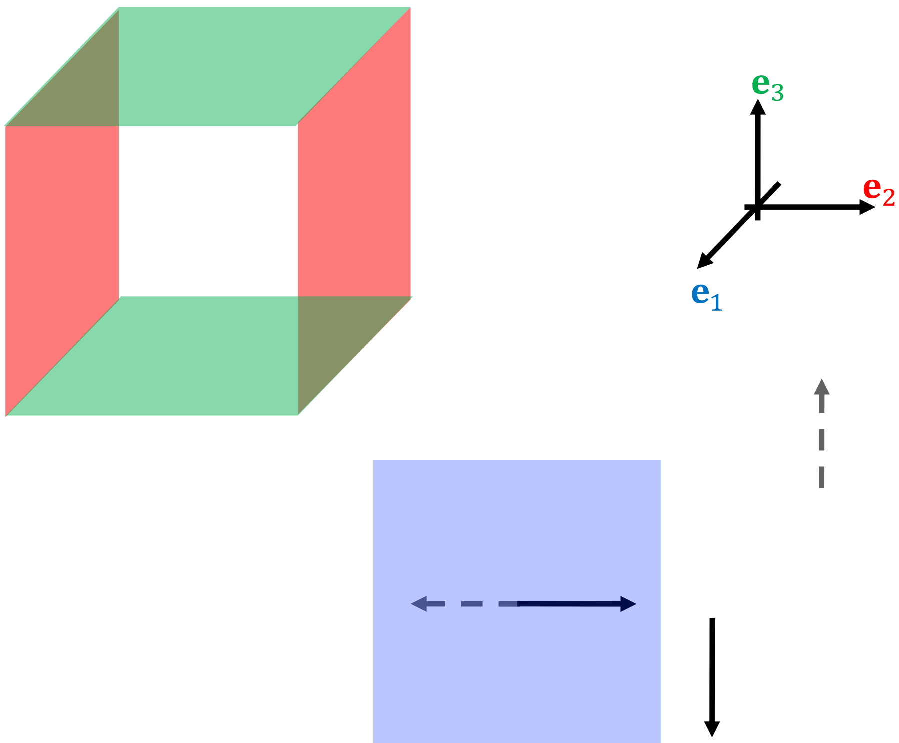
3차원 직교좌표계 (Cartesian coordinate)에서 총 9개의 조합이 가능하다. 즉 9개의 성분으로 표현가능. 하지만 힘의 평형 상태에서는 몇몇의 shear 성분들이 서로 같은 값을 가져야 한다(추후에 다루자). 그에 따라 총 6개의 '독립'적인 성분(component)들만 남게 된다.

The infinitesimal cube represents the smallest possible material point.

즉 주어진 좌표계에서 6개의 독립적인 성분(component)들만 안다면 해당 물질 무한소(material infinitesimal point)의 응력 상태(stress state)를 완벽히 나타낼 수 있다.

왜 6면중 3면만으로?? centro-symmetry

Shear stress (and its sign)



2D stress tensor representation using matrix

- 주어진 (x-y) 좌표계가, 혹은 $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ 좌표계가 명확히 주어졌다면 '행렬'의 방식을 빌려 표현할 수 있다.

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

이 표기법을
앞으로 사용하자

τ (tau) 기호가 전단력을 normal stress component 와 구분하기 위해 종종 사용된다.

각 응력 성분에 붙인 첨자 형태의 수(1,2,3)은 해당 성분과 관련있는 basis vector(e_1, e_2, 혹은 e_3)를 의미한다.

Warning: tensor is not matrix. We just borrow the form of matrix to write down the tensor components.

There are cases where you cannot write down the tensor components to matrix; Tensors can be in multidimension – like 6, or 9.

3D stress tensor represented by matrix

- 2D 응력 텐서의 확장

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

파란색: normal of the plane
빨간색: direction of the force

The subscript number refers to the basis axis, with which the associated direction is parallel.

같은 가로줄에 놓인 성분들(열, 수평축)은 같은 면에 작용한다.

같은 세로축(기둥)에 놓인 성분들은, 관계있는 힘이 같은 방향(+/-)에 작용한다.

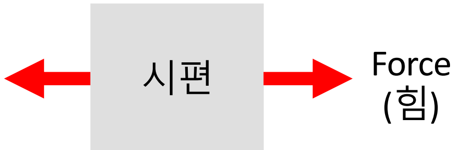
물리법칙과 좌표계

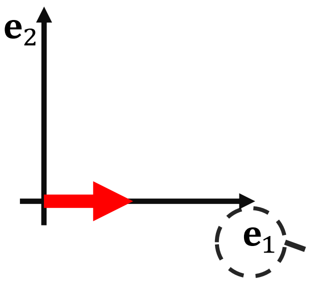
- A: 오늘 내가 강의 끝나고 지우랑 12시 반에 만나서 봉림관에서 밥 먹기로 했어.
- B: 나 방금 지우가 내 오른쪽 방향으로 급히 달려가는 거 봤는데
- A: 아 그렇다면 내 왼손 방향과 정면 사이 방향으로 이동했구나…
- B: 너 정말 …

- 지우의 이동과 관련된 물리량: 속도
- A와 B의 대화에서 알 수 있는 것?
  - 동일한 물리 현상을 설명하는데 다양한 좌표계를 사용하여 설명 가능하다.
  - 한 좌표계에 설명된 물리량을 다른 좌표계로 옮겨 설명할 수 있다.
    - 두 좌표계간의 관계를 알아야 가능

Coordinate transformation: vector in 2D space

Coordinate transformation is also referred to as ‘axes transformation’





Force vector, **F** 또한 주어진 좌표계(coordinate system)이 있다면 행렬의 형태로 표현 가능

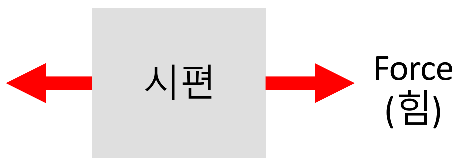
$$\boldsymbol{F} = [F_1 \quad F_2]$$

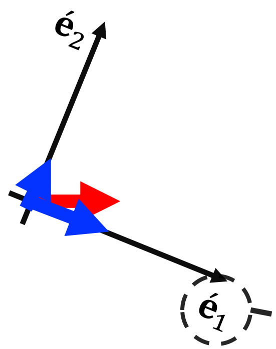
혹은 주어진 좌표계의 ‘basis vector’를 사용하여서 표현 가능

$$\boldsymbol{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$$

F_1, F_2 는 주어진 좌표계 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ basis vector로 이루어진)에서 표현된 Force vector **F**의 성분 (component)

Coordinate transformation: vector in 2D space



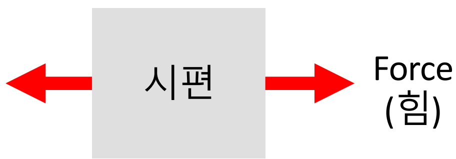


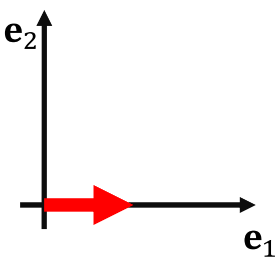
$$\boldsymbol{F} = [\acute{F}_1 \quad \acute{F}_2]$$

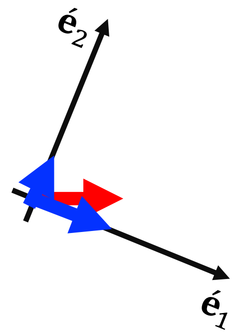
혹은 주어진 좌표계의
'basis vector'를
사용하여서 표현 가능

$$\boldsymbol{F} = \acute{F}_1 \acute{\mathbf{e}}_1 + \acute{F}_2 \acute{\mathbf{e}}_2$$

Coordinate transformation: vector in 2D space



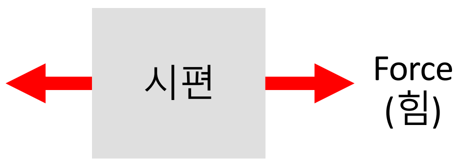


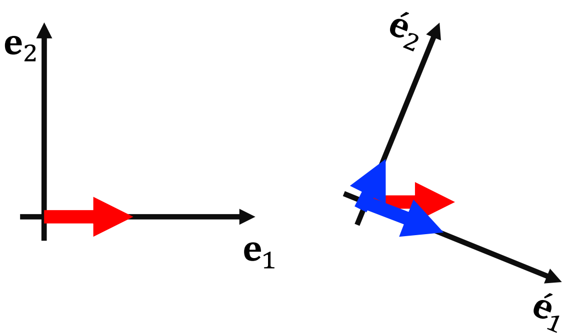


Vector를 나타내는 좌표계의 변환일 뿐,
Force vector 자체의 물리량은 변환없다.
즉 시편에 작용하는 힘은 변화 없다.

$$\boldsymbol{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{F} = \acute{F}_1\acute{\mathbf{e}}_1 + \acute{F}_2\acute{\mathbf{e}}_2$$

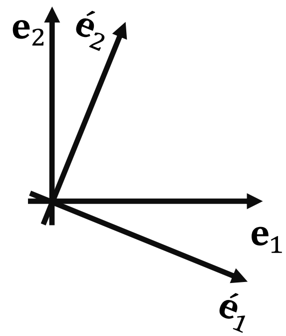
좌표계에 변환: vector in 2D space





$$\boldsymbol{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 = \acute{F}_1\acute{\mathbf{e}}_1 + \acute{F}_2\acute{\mathbf{e}}_2$$

Vector를 나타내는 좌표계의 변환일 뿐,
Force vector 자체의 물리량은 변환없다.
즉 시편에 작용하는 힘은 변화 없다.



두 좌표계간의 ‘관계’를 안다면 F_1, F_2 를 $\acute{F}_1$, $\acute{F}_2$로 ’변환’ 할 수 있다.

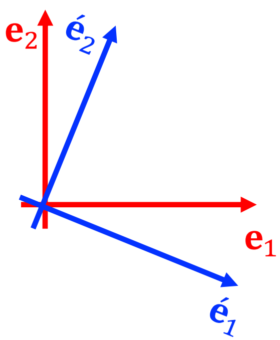
이때의 ‘변환’을
transformation, 즉 ’form’
(형태) 의 trans (바뀜)

Transformation은 각
basis vector간의
관계로 설명이 가능

$\mathbf{e}_1$과 $\acute{\mathbf{e}}_1$그리고 $\mathbf{e}_1$ 과$\acute{\mathbf{e}}_2$
$\mathbf{e}_2$과 $\acute{\mathbf{e}}_1$그리고 $\mathbf{e}_2$ 과$\acute{\mathbf{e}}_2$

관계를 각 basis vector
(좌표계의 축) 간
angle로 표현한다면?

2차원 좌표계 간의 관계



2차원 좌표계의 각 축간의
각도를 표현하려면?

한 좌표계에서 다른 좌표계로
'변환'을 시켜주는 direction
cosine들의 모임을 '행렬'로 표현

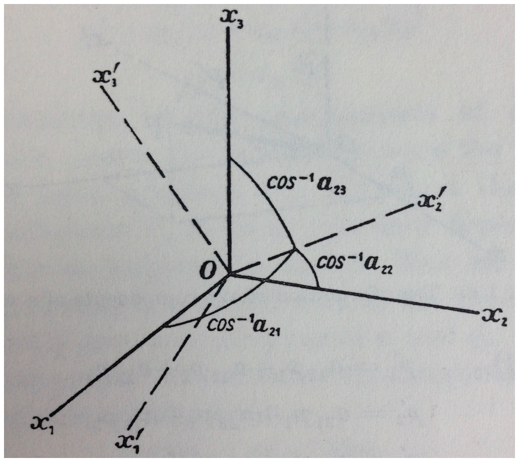
Old co. sys.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix} \\ \text{New co. sys.} \begin{bmatrix}\acute{\mathbf{e}}_1 \\ \acute{\mathbf{e}}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

a_{ij}

Old Co. Sys 의 j 번째 basis vector와 new Co. Sys의 i 번째 basis vector사이의 direction cosine

3차원 좌표계 간의 관계



위 그림에서는 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 로 이루어진 좌표계1과 $\boldsymbol{x}`_1, \boldsymbol{x}`_2, \boldsymbol{x}`_3$로 이루어진 또 다른 좌표계2가 나타나있다. 좌표계 2의 $\boldsymbol{x}`_2$ basis vector와 좌표계 1의 각 basis vector들과의 관계를 $\boldsymbol{a}_{21}$, $\boldsymbol{a}_{22}$, $\boldsymbol{a}_{23}$ 의 direction cosine으로 표현했다.

3차원 좌표계의 각 축간의
각도를 표현하려면?

한 좌표계에서 다른 좌표계로
'변환'을 시켜주는 direction
cosine들의 모임을 '행렬'로 표현

Old co. sys.

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]$$

New co. sys.

$$\begin{bmatrix} \acute{\mathbf{e}}_1 \\ \acute{\mathbf{e}}_2 \\ \acute{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

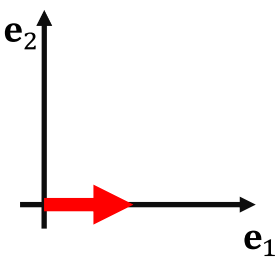
a_{ij}

Old Co. Sys 의 j 번째 basis vector와 new Co. Sys의 i 번째 basis vector사이의 direction cosine

Direction cosine: 주어진 방향 벡터a와 방향
벡터b 사이의 각이 θ라면, $\cos(\theta)$로 정의 된다.

2차원 벡터의 좌표 변환 표기#1

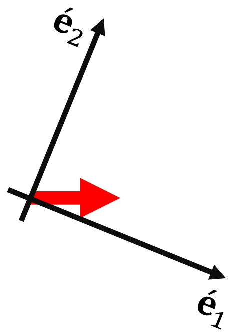
Old coordinate system



$$\boldsymbol{F} = [10\text{N} \quad 0\text{N}]$$

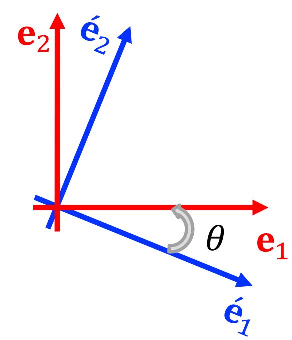
10N의 힘이 작용

New coordinate system



$$\boldsymbol{F} = [?\,N \quad ?\,\text{N}]$$

2차원 coordinate system간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향ccw 기준)의 '각'회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서 $-\theta$ 로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

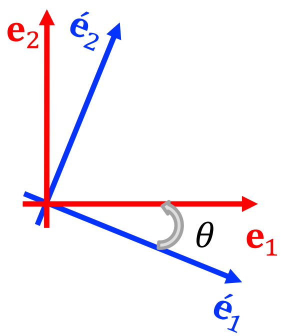
Old co. sys.

$$\begin{array}{c|c} & [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \\ \text{New co. sys.} \begin{bmatrix} \acute{\mathbf{e}}_1 \\ \acute{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$a_{11} = \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$a_{21} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$a_{12} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$$
$$a_{22} = \cos(\theta)$$

2차원 벡터의 좌표 변환 표기#2

2차원 coordinate system간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향ccw 기준)의 '각'회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서 $-\theta$ 로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

Old co. sys.

New co. sys.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}\acute{\mathbf{e}}_1 \\ \acute{\mathbf{e}}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$a_{11} = \cos\theta$$
$$a_{21} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$a_{12} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$$
$$a_{22} = \cos\theta$$

$$\acute{F}_1 = \cos\theta_{11} F_1 + \cos\theta_{12} F_2 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2$$
$$\acute{F}_2 = \cos\theta_{21} F_1 + \cos\theta_{22} F_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2$$

$$\acute{F}_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = \sum_{\mathrm{j}}^{\mathrm{j}=1,2} a_{1\mathrm{j}}F_{\mathrm{j}}$$

$$\acute{F}_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 = \sum_{\mathrm{j}}^{\mathrm{j}=1,2} a_{2\mathrm{j}}F_{\mathrm{j}}$$

2차원 벡터의 좌표 변환 표기#3

$$\acute{F}_1 = \cos\theta_{11} F_1 + \cos\theta_{12} F_2 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2$$
$$\acute{F}_2 = \cos\theta_{21} F_1 + \cos\theta_{22} F_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2$$

$$\acute{F}_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = \sum_{j}^{j=1,2} a_{1j}F_j$$
$$\acute{F}_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 = \sum_{j}^{j=1,2} a_{2j}F_j$$

3차원으로 확장

$$\acute{F}_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 \boxed{+ a_{13}F_3} = \sum_{j}^{j=1,\boxed{3}} a_{1j}F_j$$
$$\acute{F}_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 \boxed{+ a_{23}F_3} = \sum_{j}^{j=1,\boxed{3}} a_{2j}F_j$$
$$\boxed{\acute{F}_3 = a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + a_{33}F_3 = \sum_{j}^{j=1,3} a_{3j}F_j}$$

쉬워보이지만, 직접 연습해보면 생각보다 어려울 수 있습니다.
따라서, 혼자서 연습해보는 게 필요해요.

2차원 벡터의 좌표 변환 표기#4

$$\acute{F}_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + a_{13}F_3 = \sum_{j}^{3} a_{1j}F_j$$

$$\acute{F}_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + a_{23}F_3 = \sum_{j}^{3} a_{2j}F_j$$

$$\acute{F}_3 = a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + a_{33}F_3 = \sum_{j}^{3} a_{3j}F_j$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Transformation 'matrix'.
엄밀하게 얘기하면
tensor가 아니지만,
transformation
tensor라고도 자주 불림

앞을 더욱 축약하자면… 한 coordinate system (**e**$_i$, i=1,2,3) 에서 표기된 벡터 vector **F**를 또 다른 coordinate system (**é**$_i$, i=1,2,3) 으로 변환 (transformation) 하는 작업을 두 coordinate system을 '이어'주는 transformation matrix [a_{ij}] 를 사용하여 다음과 같이 축약하여 이용할 수 있다.

$$\acute{F}_i = \sum_{j}^{3} a_{ij}F_j \qquad (i = 1,2,3)$$

위를 더욱 더 축약하자면 …

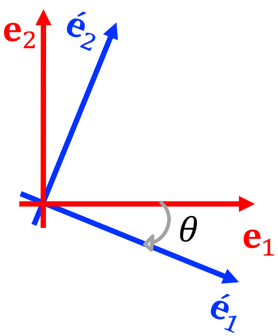
$$\acute{F}_i = a_{ij}F_j \qquad (i, j = 1,2,3)$$

각 좌우변에서 **반복되는** index에 대한 'summation'이 생략되었다.

반대로, 축약된 방식으로 표현된 tensor 'operation'을 보고 생략된 summation 기호를 파악해내어야 한다.

2차원 벡터의 좌표 변환 표기#5

2차원 coordinate system간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향ccw 기준)의 '각'회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서 $-\theta$ 로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

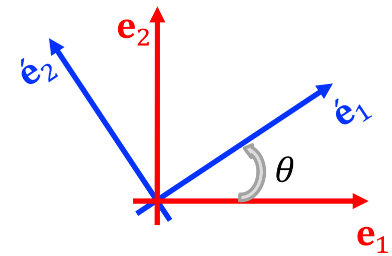
Old co. sys.

$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]$

New co. sys. $\begin{bmatrix}\acute{\mathbf{e}}_1 \\ \acute{\mathbf{e}}_2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$a_{11} = \cos\theta$$
$$a_{21} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$a_{12} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$$
$$a_{22} = \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$



따라서 θ 로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

좌표전환: 2nd order 텐서

Vector의 경우 각 component에 basis vector가 '하나'씩 관련됨

2nd Order tensor의 경우 2개의 basis vector가 관련됨 (힘의 방향과 면의 방향)

Einstein summation convention

아인슈타인 축약 표기법

$$\acute{\sigma}_{ij} = \sum_{k}^{3}\left\{\sum_{l}^{3} a_{ik}a_{jl}\sigma_{kl}\right\} = a_{ik}a_{jl}\sigma_{kl}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

좌표전환 matrix의 transpose?

행렬의 **R**의 transpose operation은 ...

$\mathrm{R^T}$: transformation 행렬 R의 transpose; $(\mathrm{R_{ij}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{R_{ji}}$

$\mathrm{R^T}$: transformation 행렬 R의 transpose; $(\mathrm{R_{ij}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{R^{-1}}$

좌표계 변환의 의미

- 물리학에서 좌표계는 단순히 관찰자의 편의에 의해 설정 된다. 하지만 어떠한 관찰자가 보더라도 물리적 의미와 법칙은 영향을 받지 않는다. 즉 물리량은 임의로 설정된 좌표계와 상관없이 일정하고, 물리 법칙은 관찰자의 좌표계에 무관하다.
- 텐서의 형태로 표현되는 물리량 (혹은 물성) 들도 좌표계 전환에 의해서 바뀌는 것은 아니다.
- 다만, 물리량을 표현하는 텐서의 표기법(약속)에 의해 텐서의 성분값들이 바뀌는 것일 뿐이다. 앞서 우리는 텐서라는 표기법(약속)에 따라 주어진 좌표계에서 또 다른 좌표계로 바뀌어 참조될때 텐서의 성분값들이 어떻게 변하는지 살펴보았다.
- 텐서의 ‘rank’에 따라서 좌표계 전환법이 어떻게 바뀌는지 알아보았다.

Inner dot product

- Tensor 표기를 index에 함께 표기하지 않고 bold-face symbol로 표기하기도 함
  - 예) σ_{ij} 대신 $\boldsymbol{\sigma}$로, F_i 대신 **F** 로 표기.

- Inner dot product는 텐서와 텐서간의 여러 operation중에 하나로, 참여하는 텐서간의 '안쪽' index가 되풀이되어 더해지는(summed) 작업.

- 앞서 보았던 벡터의 좌표변환 (coordinate transformation)을 bold-face로 바꿔 center dot을 사용하여 표기
  - $\acute{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}$ 로 표기
  - $\acute{F}_i = R_{ij} F_j$ (index 표기법)

- 2nd order tensor의 좌표변환은…
  - $\acute{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$
  - $\acute{\sigma}_{ij} = R_{ik} \sigma_{kl} \left(R^T\right)_{lj} = R_{ik} \sigma_{kl} R_{jl} = R_{ik} R_{jl} \sigma_{kl} = R_{jl} R_{ik} \sigma_{kl}$

Double Inner dot product

- Work done to an infinitesimal material point:

$$W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{32}\varepsilon_{32} + \sigma_{33}\varepsilon_{33}$$

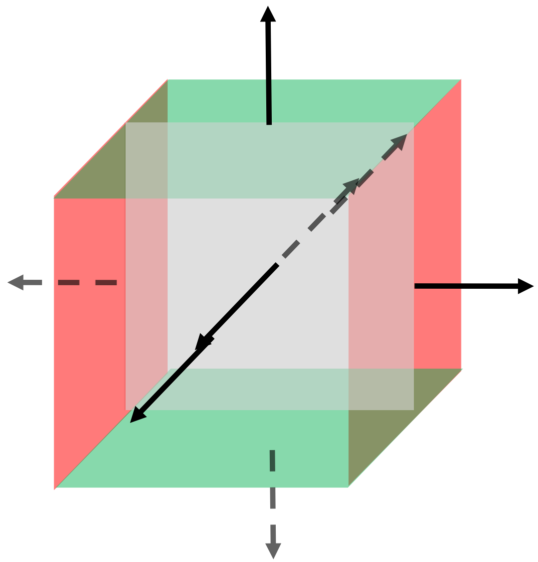
$$W = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

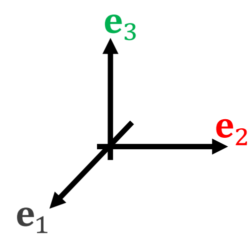
Colon 기호로 double inner dot operation 을 표기

2^{nd} order tensor의 symmetry

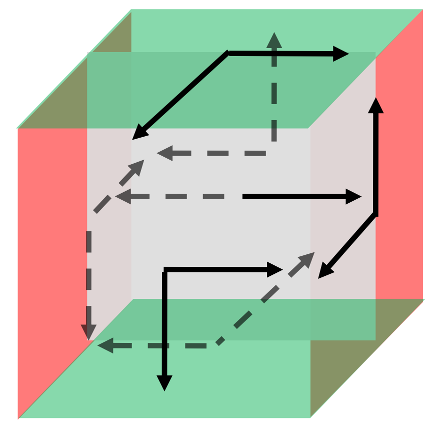
- Centro symmetry
  - 원점에 대한 대칭

Normal stress 의
centro symmetry





Shear stress 의
centro symmetry



- Force (혹은 momentum) equilibrium -> Diagonal symmetry
  - $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$ 즉 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

따라서, 총 6개의 독립적인
component가 존재...

물리량 표기법

- 물리량은 대게 'Greek' alphabet을 기호로 사용하여, 기준이되는 좌표계에의 성분(component)값을 표현하는 index를 대개 subscript (간혹 superscript)로 덧붙여 나타낸다.
- Scalar를 표현하는 기호에는 인덱스가 없다 – 좌표계에 무관
  - 예: 질량 (m) 밀도 (ρ) , 온도(T)
- vector에는 인덱스를 하나 붙인다
  - 예: 속도 (v_i), 힘 (f_i). 이때 각 index는 1,2,3 즉 세개의 구성성분 (component)가 존재.
- 2nd rank tensor에는 두개의 인덱스를 붙인다
  - 예: 응력 (σ_{ij}) 각각의 index i와 j는 1,2,3 세개의 구성성분을 가진다. 따라서 총 9개의 구성성분 (3x3)이 존재한다.
- 3rd rank tensor는 세개의 인덱스 총 3x3x3 27개의 구성성분 필요
- 4th rank tensor는 네개의 인덱스, 총 3x3x3x3, 81개의 구성성분 필요:
  - 응력 탄성계수 (elastic modulus) 텐서
- 벡터는 주로 [1x3] 혹은 [3x1]의 행렬 형태를 빌려 쓴다
- Scalar는 0th rank tensor, vector는 1st rank tensor

type	**No. of Indices (=No. of transformation needed)**	**예시**
Scalar	0	mass, density
Vector	1	velocity, force
2nd rank tensor	2	stress, strain
3rd rank tensor	3	Piezoelectric moduli
4th rank tensor	4	Elastic moduli

참고: Moduli는 modulus의 복수형

Transformation rule for tensor

- Follow this link:

- https://youngung.github.io/tensors/