운동량 전달과 뉴튼 점성 이론
Momentum Transfer and Newtonian Viscosity

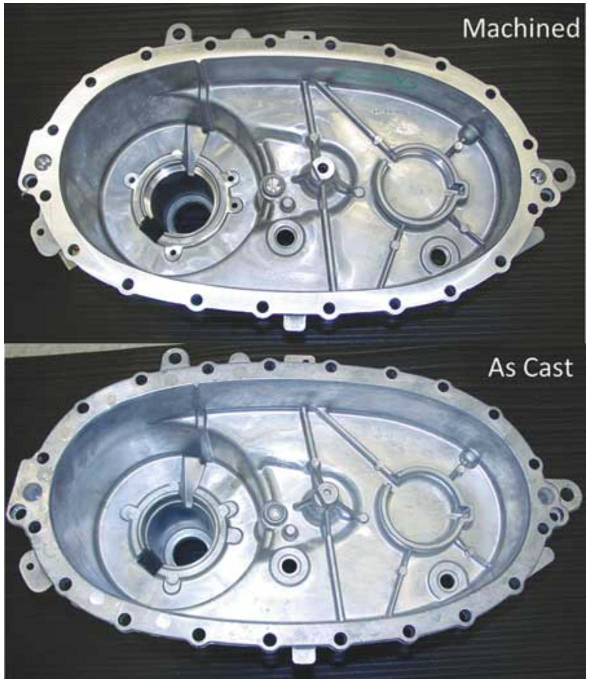
이동현상이론 (MSA0013)

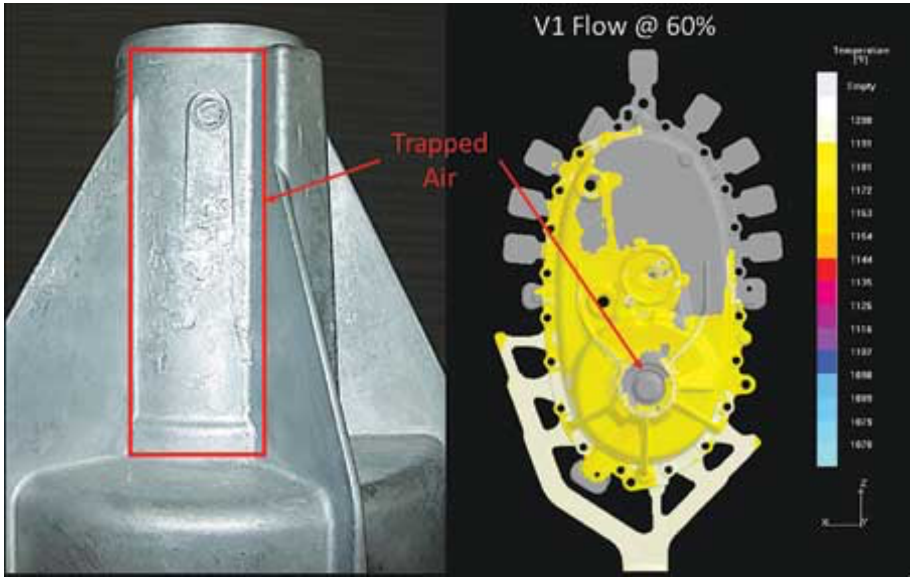
창원대학교 신소재공학부
정영웅

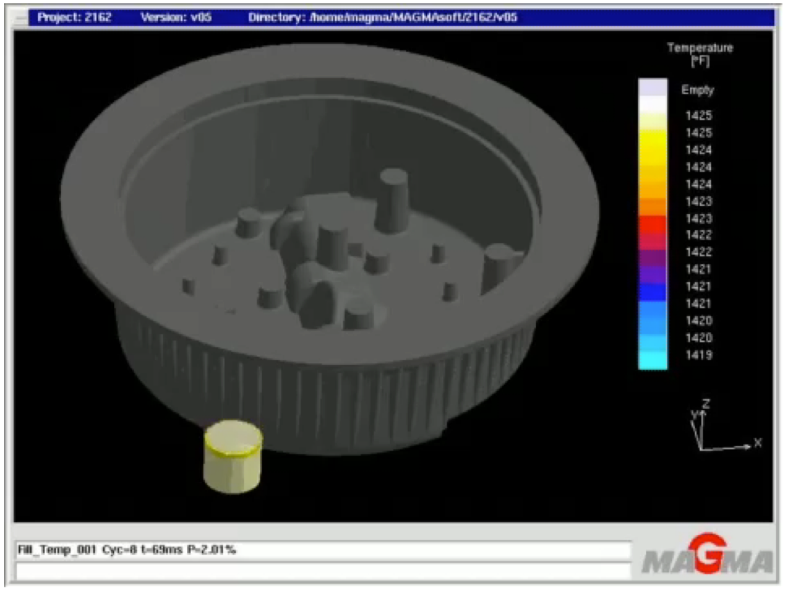
yjeong@changwon.ac.kr
https://youngung.github.io
https://github.com/youngung

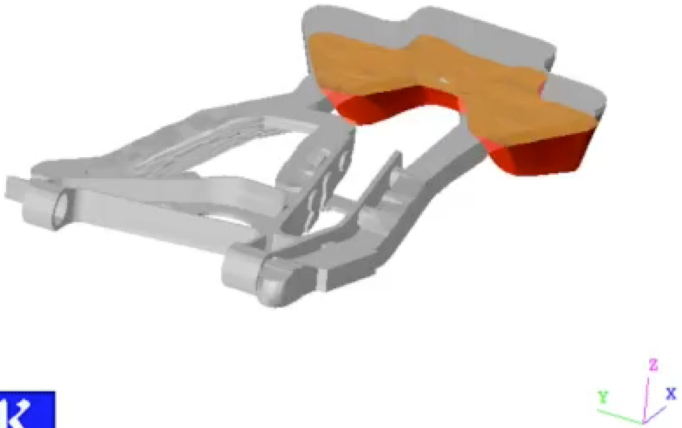
Headlines

- Previously,
  - Fluid statics: ’정지’해 있는 유체에 작용하는 ’힘’, 압력 등에 대해 살펴보았다.
- 이동중인 유체에 대해 배운다 (정상상태에 이른 이동중인 유체에 대해; steady state)
- Fluid may ‘flow’.


Machined
As Cast


Trapped Air
V1 Flow @ 60%

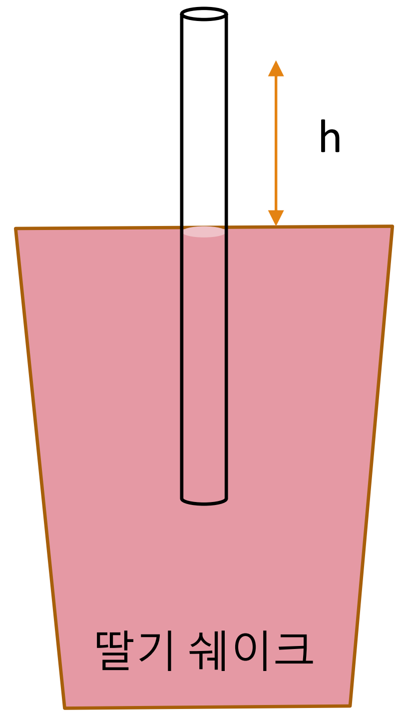

Project: 2162 Version: v05 Directory: /home/magma/MAGMAsoft/2162/v05
Temperature [°F]
Empty
1425
1425
1424
1424
1424
1423
1423
1422
1422
1421
1421
1421
1420
1420
1419
Fill_Temp_001 Cyc=8 t=69ms P=2.01%
MAGMA



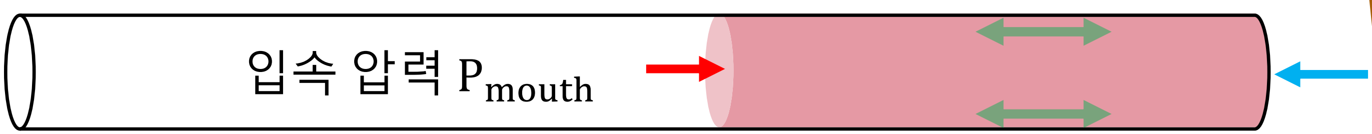
EKK

Intro

❑유체 유동(fluid flow)에서 있어서 중요한 유체의 성질은 **밀도(density, ρ)**와 **점도(viscosity, η)**



Cross section: A



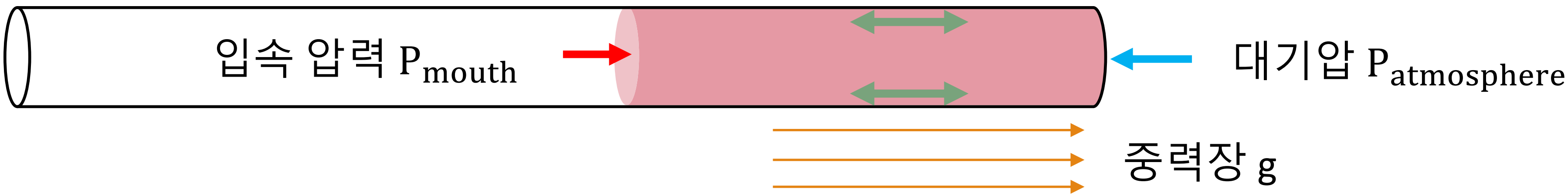
대기압 $\mathrm{P_{atmosphere}}$

$\mathrm{P_{mouth}} \cdot A + \rho g h \cdot A = P \cdot A$ (마찰이 없는 힘평형)

$\mathrm{P_{mouth}} \cdot A + \rho g h \cdot A \neq P \cdot A$ (마찰이 있는 힘평형)

중력장 g

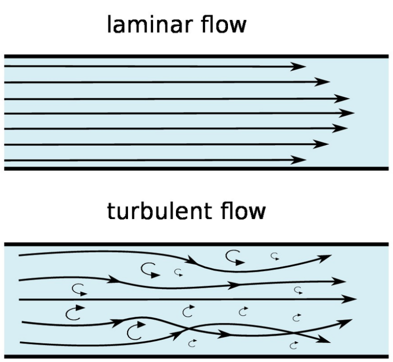
층류, 난류



$P_{mouth} \cdot A + \rho g h \cdot A = P \cdot A$ ➡ 정지 (혹은 등속) 상태

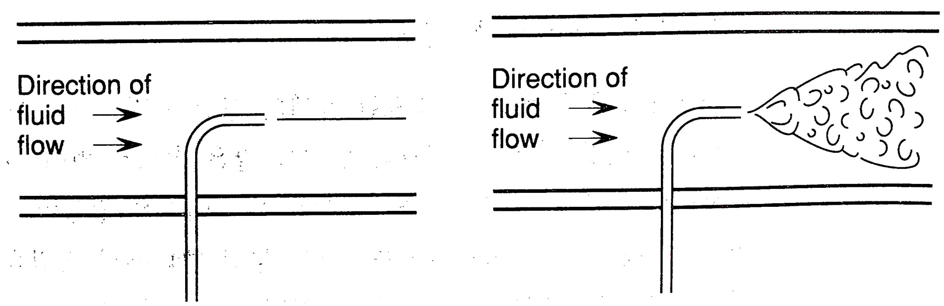
$P_{mouth} \cdot A + \rho g h \cdot A \neq P \cdot A$

- $|F_{net}| = |P_{mouth} \cdot A + \rho g h \cdot A - P \cdot A| =$ 마찰, 점성력
  Steady flow
- $|F_{net}| = |P_{mouth} \cdot A + \rho g h \cdot A - P \cdot A| >$ 마찰 , 점성력
  Accelerated flow

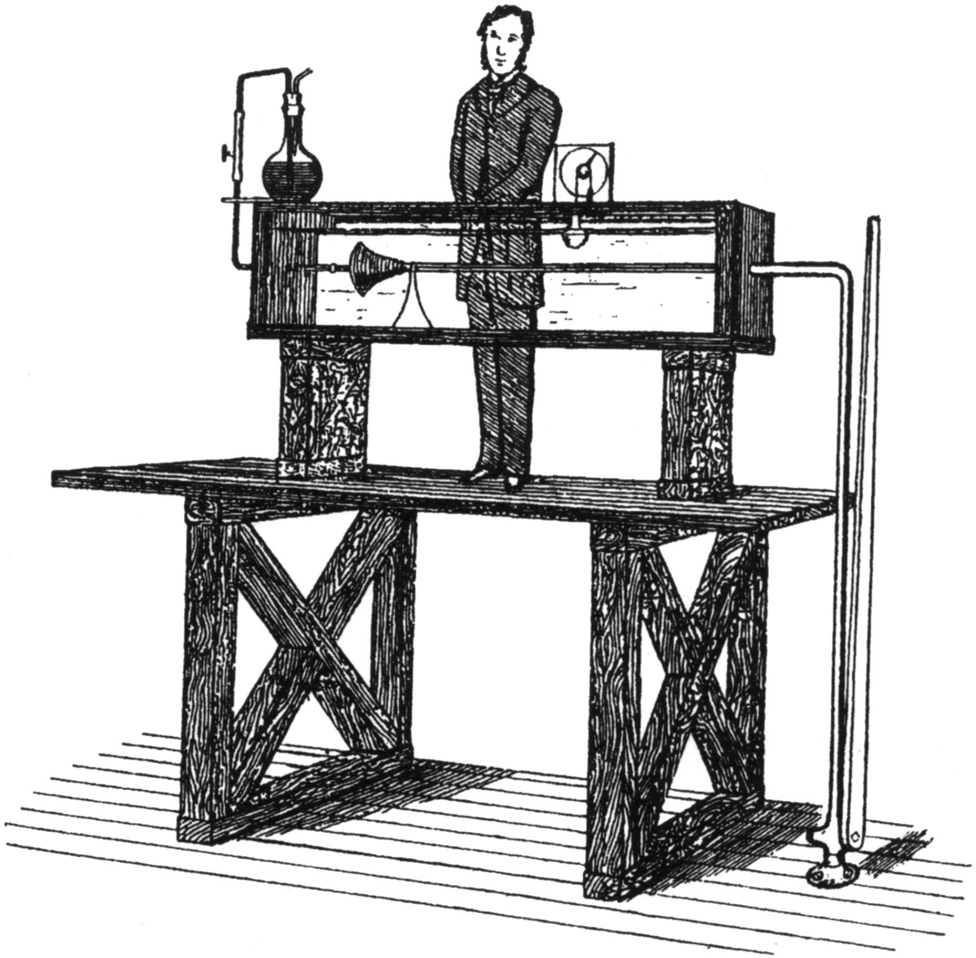


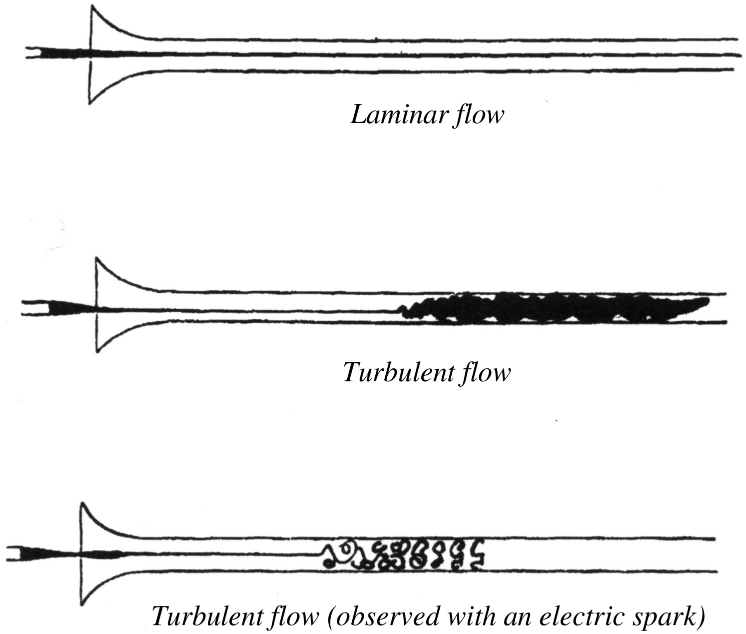
층류

난류



Reynolds 실험





https://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds

층류, 난류

- Fluid의 속도 (유속)이 낮을 때는 층류의 형태로 유체가 서로 섞이지 않으며 유선(stream)은 관의 축과 나란한 형태로 나타나며 유체가 이동한다.
- 하지만 유속이 어떠한 임계값을 넘어서면서 유체의 유선(stream)은 빨리 흐트러진다.

Reynolds 수 (Re 로 표기): 유체의 이동 특성이 특정 Reynolds 값 이상이면 층류에서 난류로 '천이'

$$Re = \frac{(\text{특성길이})\times(\text{유체 평균속도})\times(\text{유체 밀도})}{\text{유체의 점도}}$$

원형 단면적을 가진 파이프의 경우

$$Re = \frac{D v \rho}{\eta}$$

$Re_D < 2300$: 층류
$Re_D > 2600$: Fully tubulent

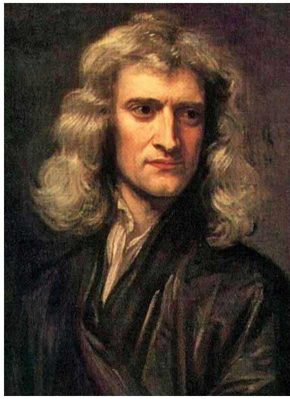
D: 특성 길이 (파이프 관의 직경)
v: 유속 (flow rate)
ρ: 밀도
η: 점도

1. 관의 직경 커지면 천이가 생기는 평균 속도가 감소
2. 유동 속도가 커지면 층류 유동이 존재하는 최대의 관 직경이 줄어든다

1. 층류유동은 기본적인 물리법칙을 지켜서 (obey) 물리학 기본 법칙으로부터 이해 가능
2. 난류운동은 그렇지 않다. 따라서, '현상학적으로 접근' – 실험을 통해 관심있는 물리량을 측정해볼 수 밖에...

Newtonian fluids

❑Newtonian fluids는 Newton의 점성 법칙을 따르는 유체를 일컫는다.



Newton의 점성 법칙?

$$\tau = \eta \times \dot{\gamma}$$

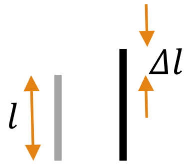
τ: 전단응력
$\dot{\gamma}$: 전단변형속도 (shear rate)
η: 점성

응력: 단위 면적당 작용하는 힘 (압력과 같은 단위)

- 수직 응력 (normal stress σ) — F 방향 = 작용면의 법선 방향
- 전단 응력 (shear stress τ) — F 방향 ⊥ 작용면의 법선

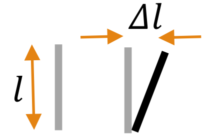
변형률: 길이(vector)가 변하는 정도를 나타낸 물리량

- 수직 변형률 (normal strain ε)



$\varepsilon = \Delta l / l$

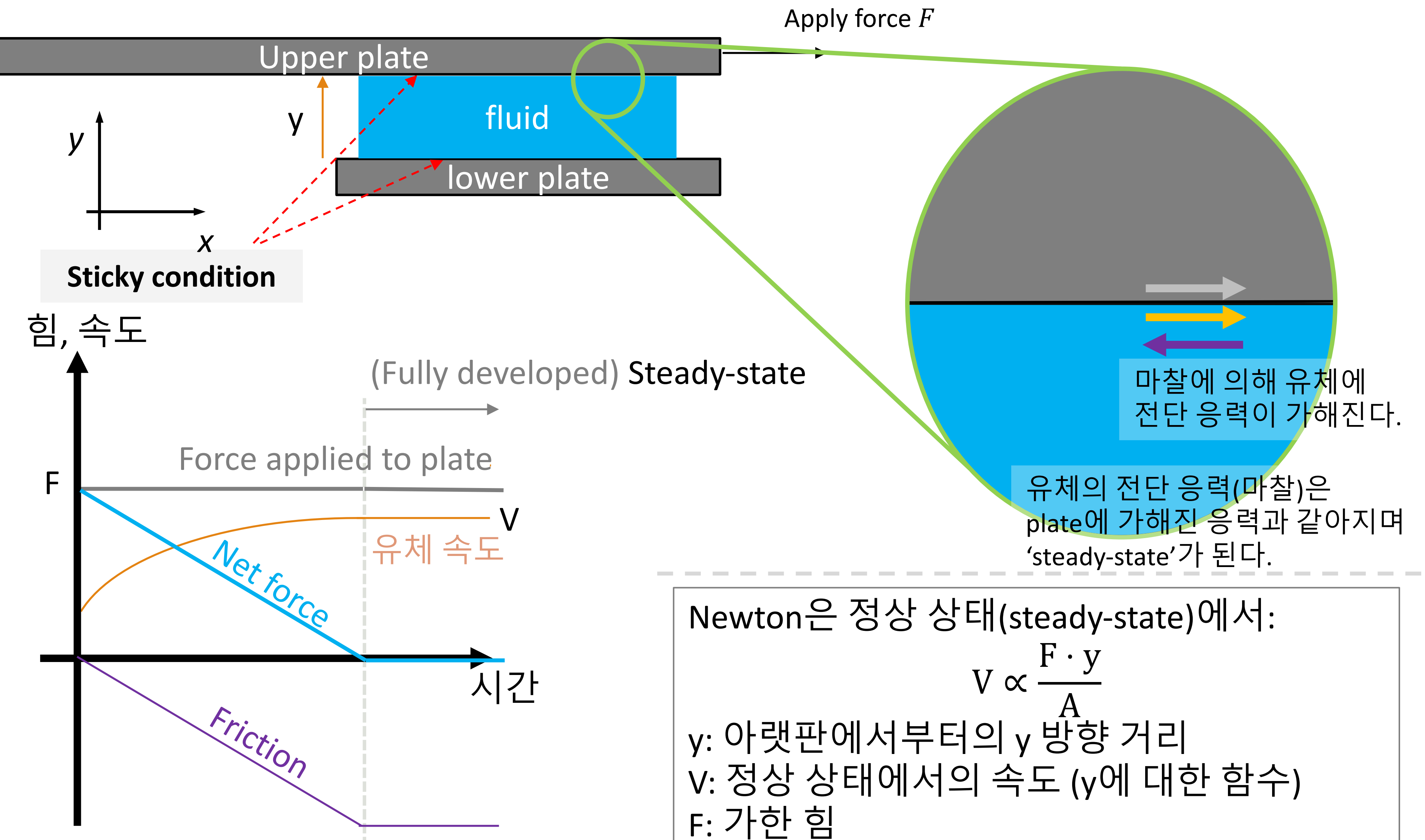
- 전단 변형률 (shear strain γ)



$\gamma \approx \Delta l / l$

전단 변형 속도: $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$

두 평판 사이의 유체 거동



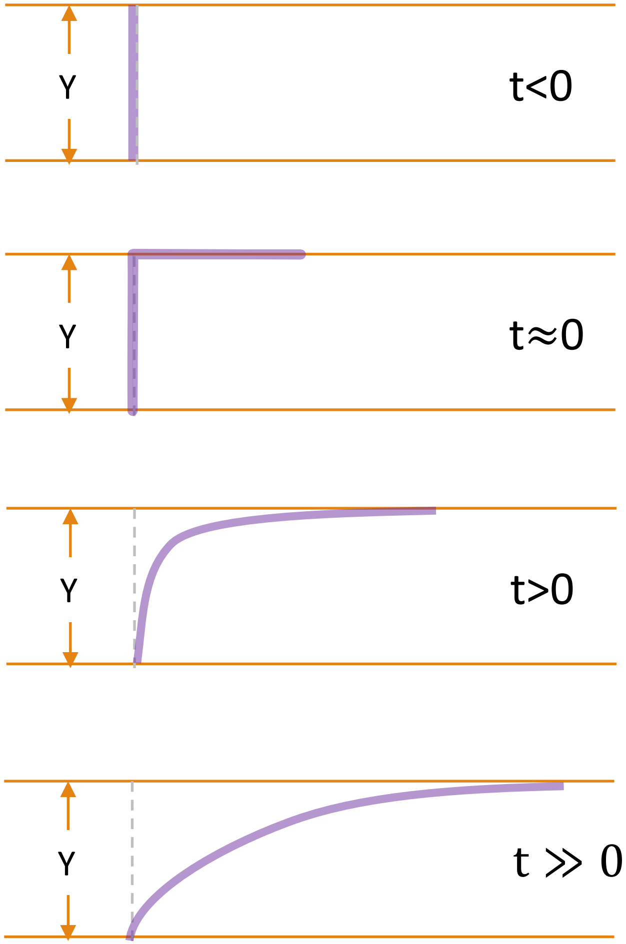
Newton은 정상 상태(steady-state)에서:

$$V \propto \frac{F \cdot y}{A}$$

y: 아랫판에서부터의 y 방향 거리
V: 정상 상태에서의 속도 (y에 대한 함수)
F: 가한 힘

두 평판 사이의 유체 거동 (잉크 위치)

정상상태에 다다를 때 까지, 유체에 삽입된 잉크의 위치 변화



정지된
유체

상부 평판
운동 시작

비정상상태
유동에서
잉크의 모습

Transient region

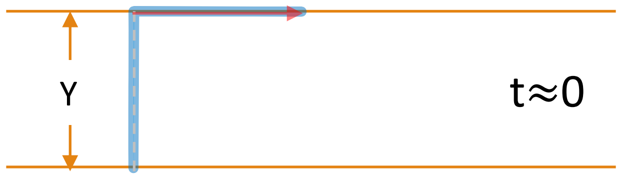
정상상태 유동에서
잉크는 점점 ‘눕는’
형태로 발달

Fully developed steady state

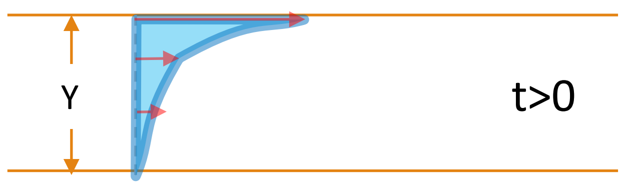
두 평판 사이의 유체 거동 (속도 구배)

Vector인 velocity (velocity of fluid)는 시간에 따라 달라지는 field variable이다.

정지된
유체

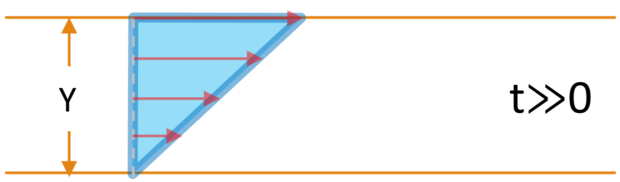


상부 평판
운동 시작



비정상상태
유동에서 속도
gradient 형성

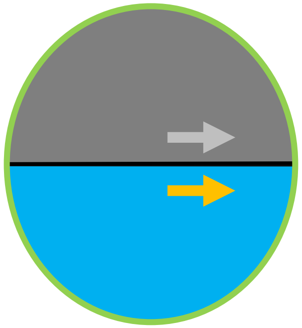
Transient region



정상상태
유동에서 속도
gradient 형성

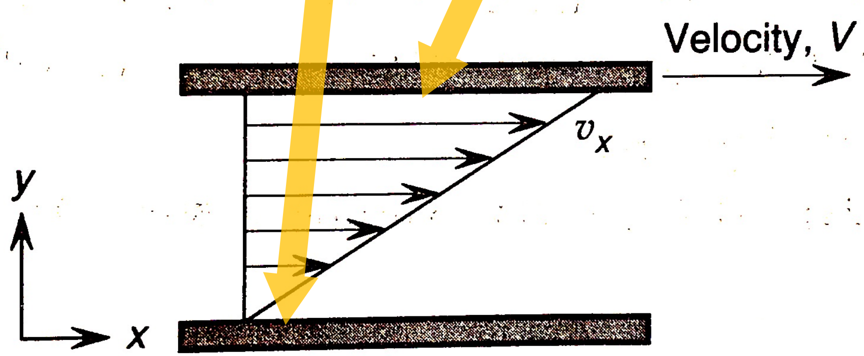
Fully developed steady state

두 평판 사이의 유체 거동

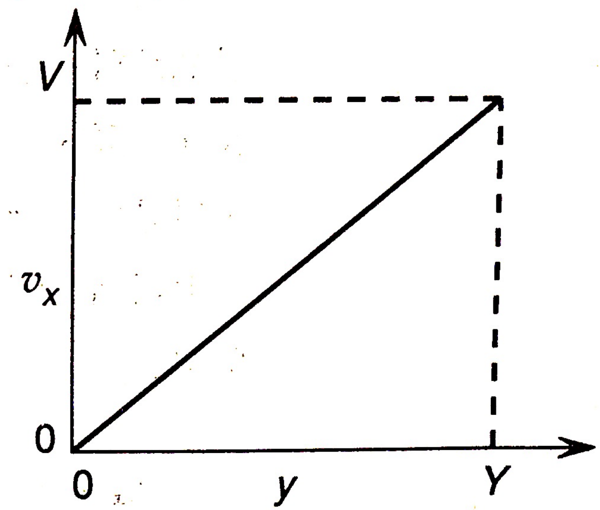


판과 유체 사이의 계면에서 미끄럼이 없다면 (혹은 완벽한 마찰=sticky condition) 유체의 가장 윗부분은 계면과 같은 속도로 움직인다.

마찬가지로 유체의 가장 아랫부분은 고정된 판과 같이 속도가 zero

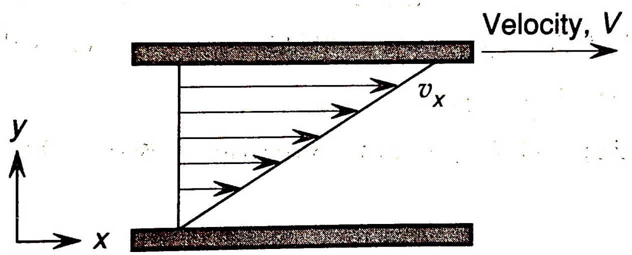


(a)



(b)

두 평판 사이의 유체 거동



$v_x(y)$: x 방향으로의 속도는 y에 대한 함수

A_y: normal이 y방향인 면의 면적 (힘이 작용하는 면)

$\frac{v}{y}$의 미분 형식: $\frac{dv_x}{dy}$

Newtonian fluid는 정상 상태(steady-state)에서 다음을 따른다:

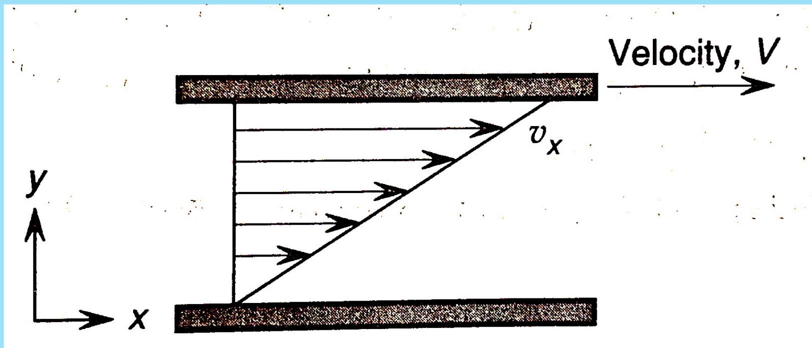
$$V \propto \frac{F \cdot y}{A}$$

V: 정상 상태에서의 속도 (y에 대한 함수)
F: 가한 힘
y: 아랫판에서부터의 거리

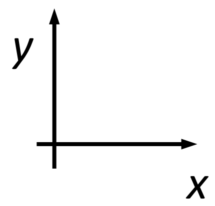
$$\frac{F_x}{A_y} \propto \frac{v_x(y)}{y} \Rightarrow \tau \propto \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow \boxed{\tau = -\eta \frac{dv_x}{dy}}$$

η: 점도 (viscosity)
$\frac{dv_x}{dy}$: 평판 속도 구배

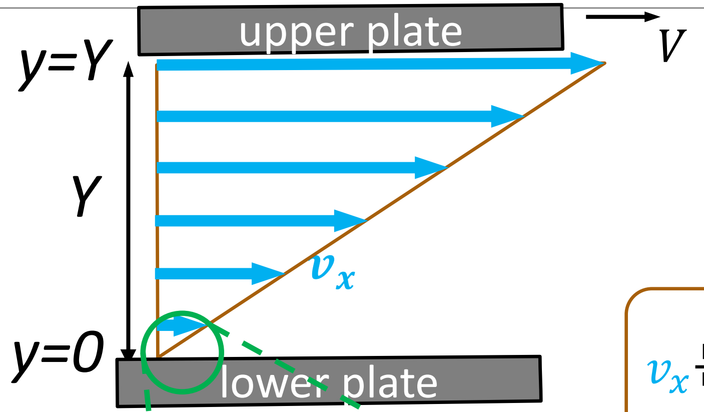
$$\Rightarrow \boxed{\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} = -\eta \dot{\varepsilon}_{yx}}$$

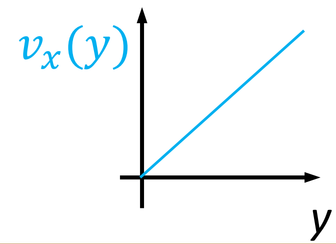


층류에서의 운동량 전달



공간 좌표계

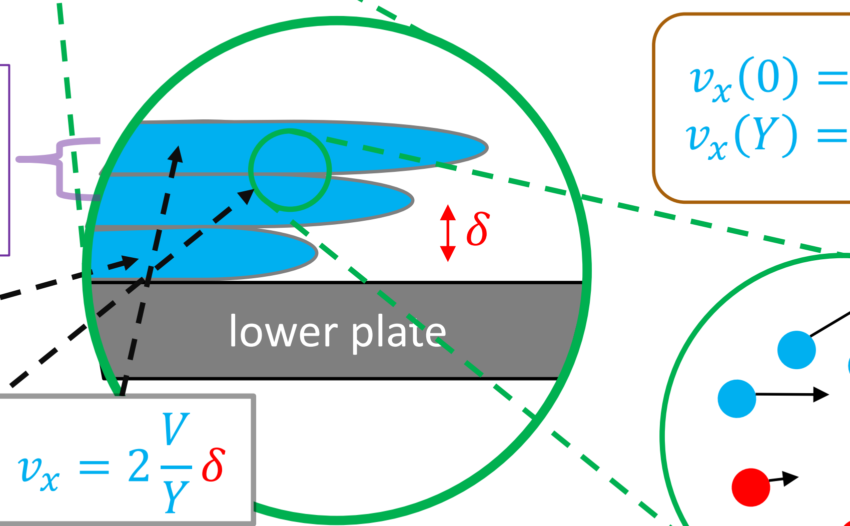




v_x는 y좌표에 의존: $v_x(y) = \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot y$

$v_x(0) = 0$
$v_x(Y) = V$
$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V-0}{Y-0} = V/Y$

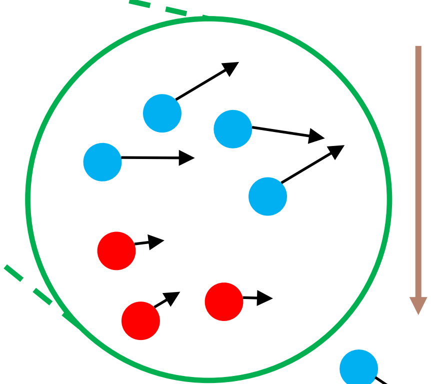
두께가 δ인 층류간에는 속도차이 $\frac{V}{Y} \cdot \delta$ 존재: 따라서 층류 사이의 전단 응력 작용



$v_x = 0$

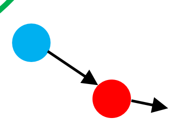
$v_x = \frac{V}{Y}\delta$

$v_x = 2\frac{V}{Y}\delta$



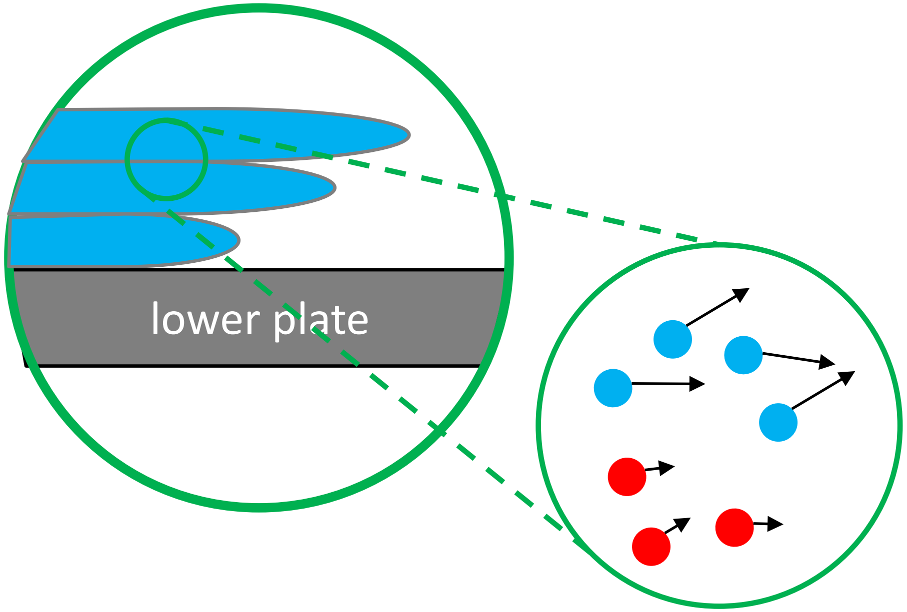
위쪽 층류 속의 분자/원자들이 가진 운동량(mv)이 아래로 전달 **(momentum transfer)**

두 층 사이의 **<u>유속의 차이</u>**는 upper plate에 작용한 힘(전단력)에 의해 유지된다. 만약 upper plate에 작용한 힘이 없어 진다면 층류 사이의 전단 응력에 의해 유동이 사라진다.



충돌로 운동량 아래로 전달

전단응력과 운동량 전달



층류 사이의 전단 응력으로 인해 운동량이 전달 된다.

층류 사이의 **전단 응력과 운동량 전달률은 밀접한 관계**를 가진다.

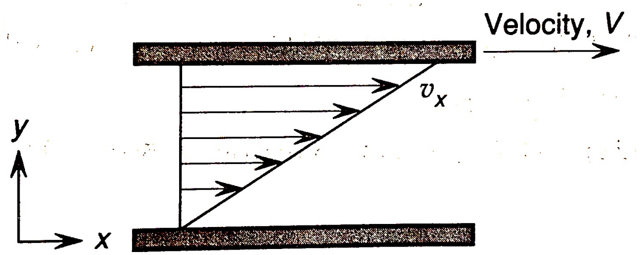
$$\text{전단응력} = \text{힘}/\text{면적} = \text{질량}\times\frac{\text{길이}}{\text{시간}^2}\times\frac{1}{\text{면적}} = \text{질량}\times\frac{\text{길이}}{\text{시간}}\times\frac{1}{\text{시간}}\times\frac{1}{\text{면적}}$$

$$= \frac{\text{질량}\times\text{속도}}{\text{시간}\times\text{면적}} = \frac{\text{운동량}}{\text{시간}\times\text{면적}}$$

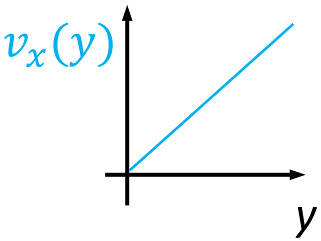
단위 면적, 시간당 운동량의 전달량

단위면적당 운동량 전달률

Newtonian fluid



속도 구배 (velocity gradient), 즉 공간에 따른 속도의 변화



속도 구배 $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ 는 왼쪽 그래프에서 기울기

운동량의 ‘이동방향’은 –y
즉, 운동량 이동방향은 $\frac{\partial v_x}{\partial y}$의 반대방향
운동량 이동방향과 속도구배는 서로 반대 방향 (즉 서로 부호가 다르다)

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} = -\eta \dot{\varepsilon}_{yx}$$

- τ_{yx}의 단위는 $kg/(m \cdot s^2)$ 혹은 파스칼 [Pa]
- $\frac{dv_x}{dy}$는 $1/s$ 단위를 가진다.
- 점도 η는 $\frac{kg}{m \cdot s}$ 단위(혹은 $Pa \cdot s$)를 가진다.

우리가 살펴본 것과 같이, 움직이는 평판과 고정된 평판 사이에 점도가 있는 유체의 유동을 Couette flow(꾸에뜨 유동)이라고 한다.

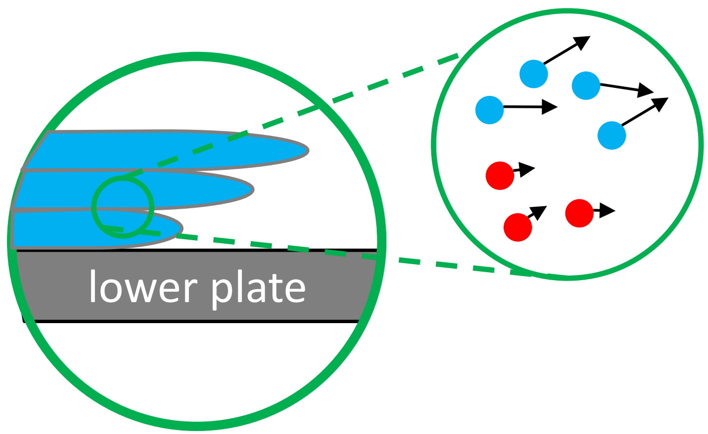
예제 2.1 풀이 및 p42 읽어보기

정상상태의 유동에서 운동량 전달

❑유체의 특성은 **검사체적 (control volume) 내에서 운동량 수지(입/출)**를 생각하여 결정하게 된다. 다음의 두 가지 형태의 운동량 전달을 고려해야 한다.

1. 점성운동량전달 (viscous momentum transfer)

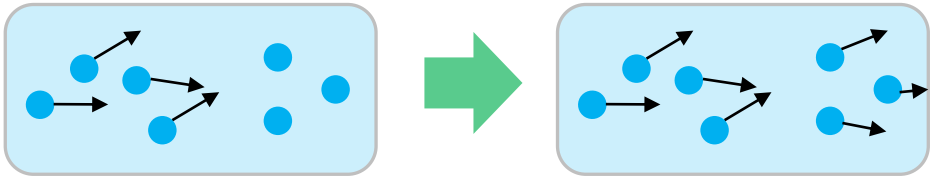
유체 유동의 방향에 수직한 방향으로 속도 구배에 의한 운동량 전달



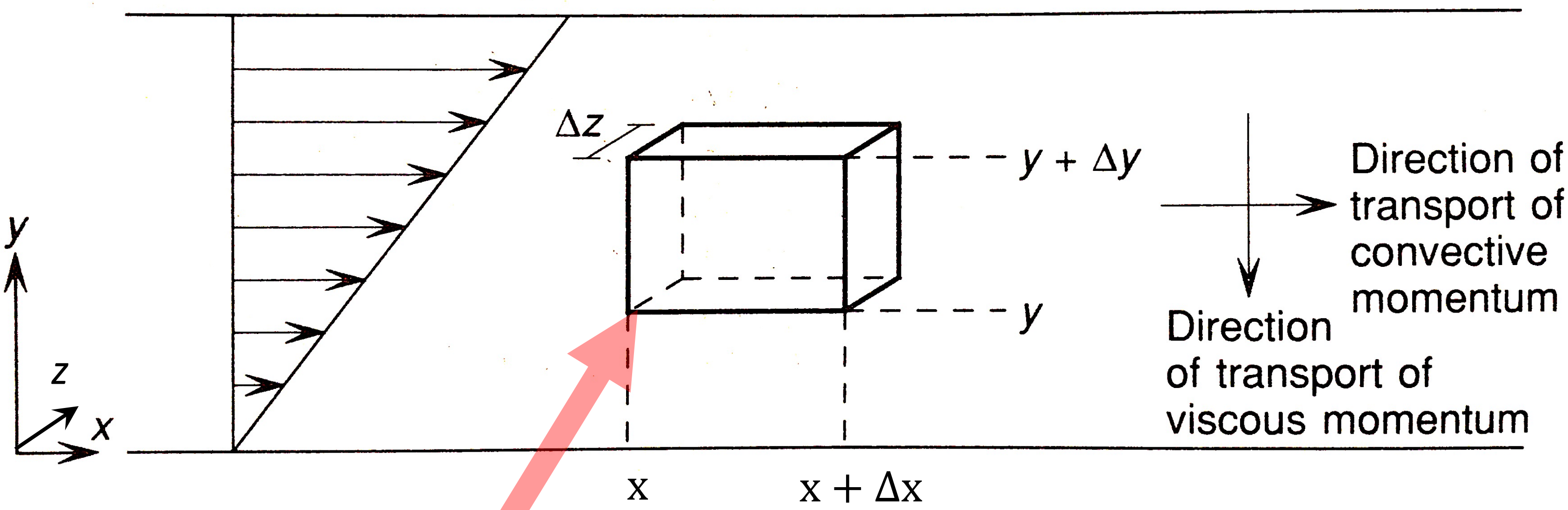
$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} = -\eta \dot{\varepsilon}_{yx}$$

2. 대류운동량전달 (convective momentum transfer)

유동 방향으로 유체 자체의 움직임에 의한 운동량 전달



Couette 유동에서 대류 및 점성운동량



앞으로, 공간상에서 고정된 검사체적($\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$)을 설정하여, 검사체적 내외로의 운동량 출입(수지)을 살펴볼 것이다.

예를 들어, 가장 많이 수행할 작업중에 하나는:

1. 검사체적 내로 들어오는 운동량률(운동량의 시간에 따른 변화량),
2. 검사체적 밖으로 나오는 운동량률 계산

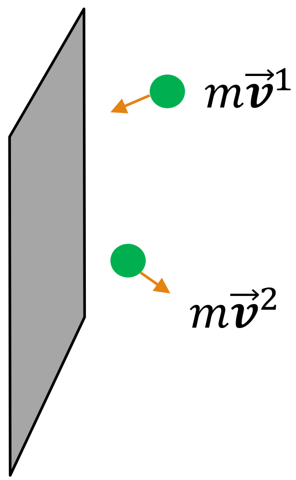
총 검사체적량에 '머무는' (혹은 쌓이는) 운동량률은=
들어오는 운동량률 – 나오는 운동량률

운동량 수지?

Couette 유동에서 대류 및 점성운동량

운동량 수지?

검사체적량에 '머무는' (<u>전달되는</u>) 총 운동량률은=
들어오는 운동량률 – 나오는 운동량률



$$\text{Force} = \frac{m\vec{v}^2 - m\vec{v}^1}{t}$$

운동량률의 변화는 '힘'의 형태로 이해될 수 있다.

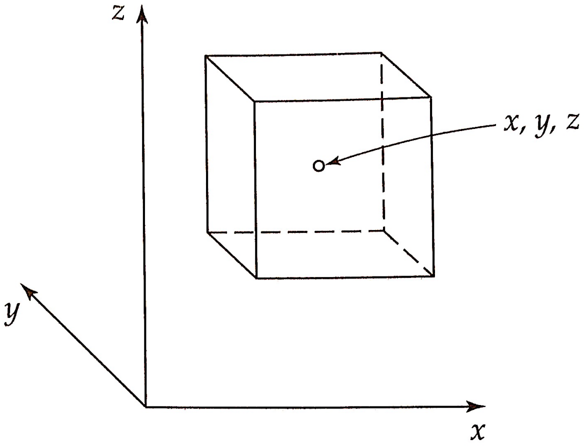
따라서, 검사체적에 전달되는 총 운동량률은 검사체적내의 유체에 작용하는 힘의 합(net force)과 같다.

운동량 수지 방정식

(검사체적으로 들어가는 운동량률)
-(검사체적에서 나오는 운동량률)
+(검사체적 '내'의 유체에 작용하는 힘의 합)=0

(Moment rate transferred in)
-(Moment rate transferred out)
+(force applied)=0

유체 검사체적

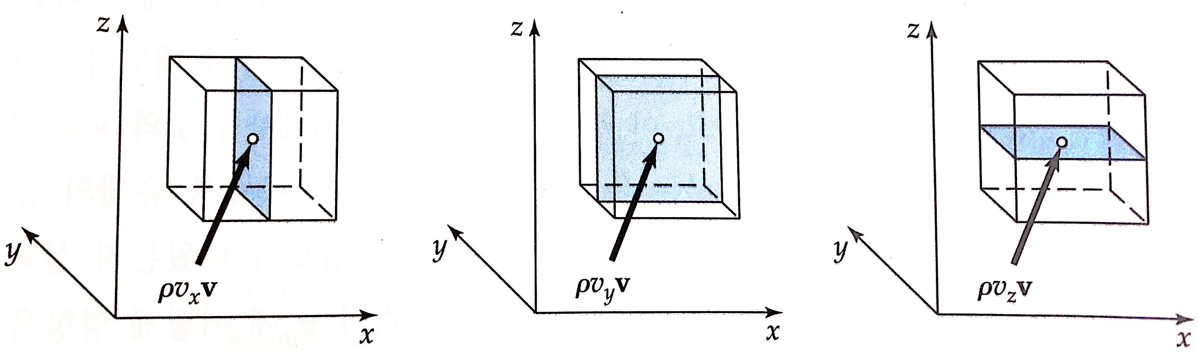


한 점에서의 물리 현상은 '유한한' 크기를 가진 요소를 바탕으로 유추할 수 있다.

해당 물리현상이 '공간'에 따라 달라지거나, 방향에 따라 달라진다면, '직각' 성분들로 각각 분해하여 해석.

얻어진 결과를 '무한히' 작은 요소에 도입 (≈ 미분)

무한히 작은 요소의 결과를 다른 여러 '공간점'에서 되풀이하여 해석 (≈적분)

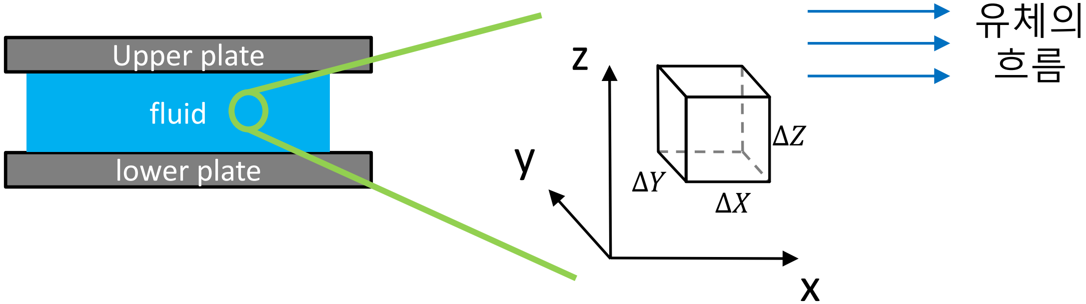


유체 역학에서 다루는 미분 방정식과 경계 조건

- 고체-유체 계면에서 유체의 속도는 고체 표면이 움직이는 속도와 같다 (sticky condition)
- 액체-액체 계면 평면에서는 유속(v) 및 응력(σ, τ)이 ‘연속적’이다.
- 액체-기체 계면 평면에서 해당 평면과 관련된 응력은 0으로 둔다 – Free surface 개념.
  - 기체의 점도가 액체보다 매우매우매우 작으므로 reasonable

- 유체의 운동량에 영향을 주는 것들:
  - 수직 성분 유속 차이(유속 구배)에 의한 대류 운동량 차이
  - 전단 성분 유속 차이(유속 구배)에 의한 점성 운동량 차이
  - 중력 작용
  - 외부에서 주어져 유체 전체에 고루 (전달되어) 작용하는 압력 (유압 펌프, 기압 등)

운동량 전달 (점성 운동량 전달)



대류 운동량 전달 방향//x

점성 운동량 전달 방향//-z

1. 점성운동량전달 (viscous momentum transfer)
2. 대류운동량전달 (convective momentum transfer)

현재 살펴보는 예제에서,
검사체적 '내'의 유체에 작용하는 힘의 합=0

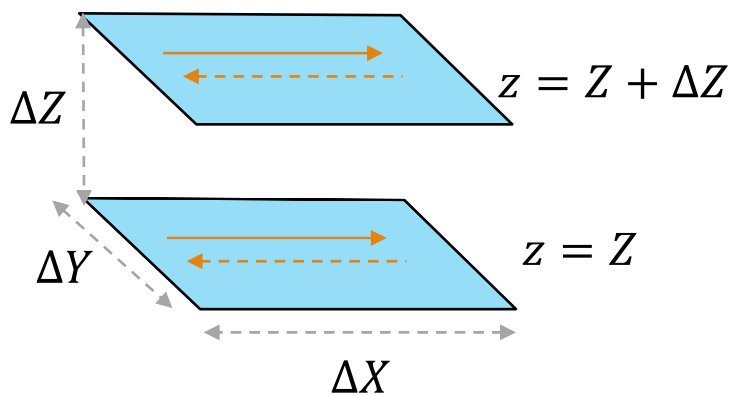
(At slide#13) 층류 사이의 전단력은 단위 시간, 단위 면적당 운동량 변화량과 같다.

z면에 x방향으로 작용하는 전단응력 (τ_{zx})

$$\frac{\Delta\{m\cdot\vec{v}\}}{t} = \Delta\{Shear\ stress \cdot Area\}$$

$$= \Delta\{\tau_{zx}(\text{위치}) \cdot Area\}$$

전단 응력이 공간(space, 위치)에 따라 달라지므로, 위치에 따른 함수로 표현 가능

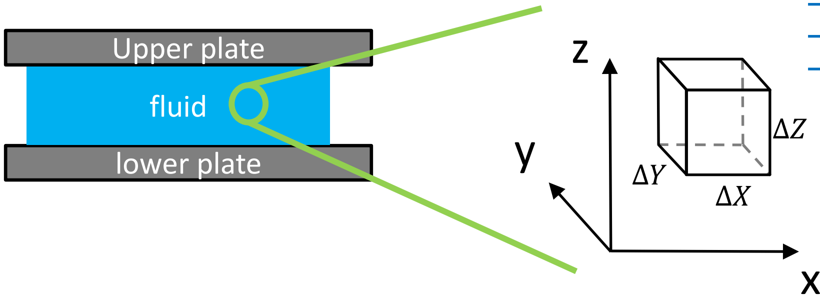


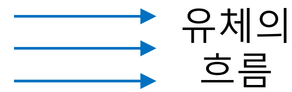
면 위의 유동에 의한 힘 방향

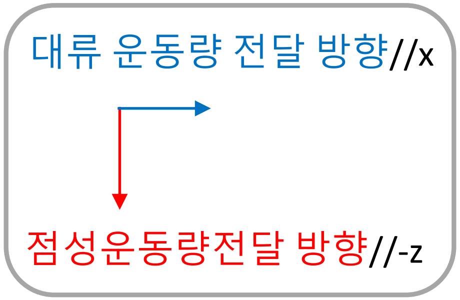
면 아래의 마찰 (혹은 저항)력 방향

$$= \{\tau_{zx}(z = Z + \Delta Z) - \tau_{zx}(z = Z)\} \cdot \Delta Y \cdot \Delta X$$

운동량 전달 (대류 운동량 전달)







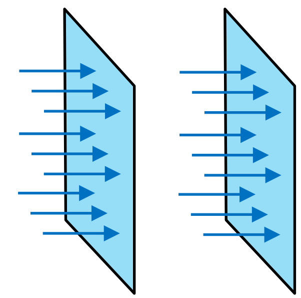
1. 점성운동량전달 (viscous momentum transfer)
2. 대류운동량전달 (convective momentum transfer)

$$\frac{\Delta\{m \cdot \vec{v}\}}{t} = \frac{\Delta\{\rho \cdot V \cdot \vec{v}\}}{t} = \frac{\Delta\{\rho(\text{공간}) \cdot V(\text{공간}) \cdot \vec{v}(\text{공간})\}}{t}$$

유체의 밀도(ρ), 부피(V), 흐름 속도($\vec{v}$)가 공간(space)에 따라
달라진다면, 그 모두를 각각 공간에 대한 함수 형태로 나타낼 수 있다.

$$= \Delta\{\rho(\text{공간}) \cdot A(\text{공간}) \cdot \vec{v}(\text{공간}) \cdot \vec{v}(\text{공간})\}$$

V(공간)/t 으로 표현된 물리량은 면적 A를 통과하는 ρ
밀도를 가진 유체의 속도로 대체하여 표현할 수 있다.



면적 $A = \Delta Y \cdot \Delta Z$

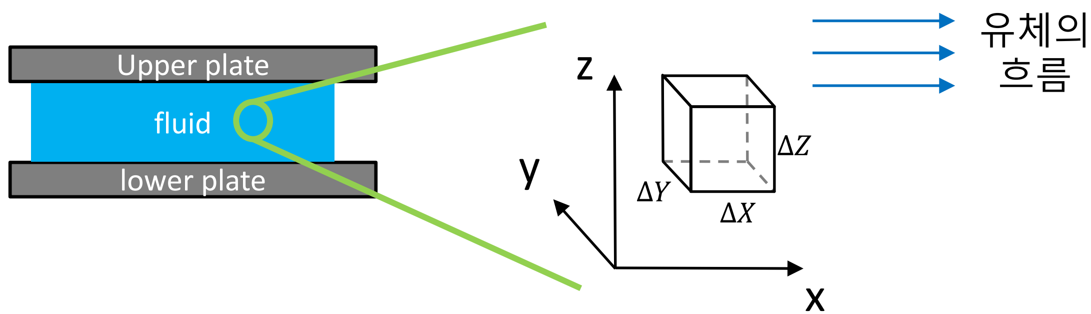
at $x = X$ at $x = X + \Delta X$

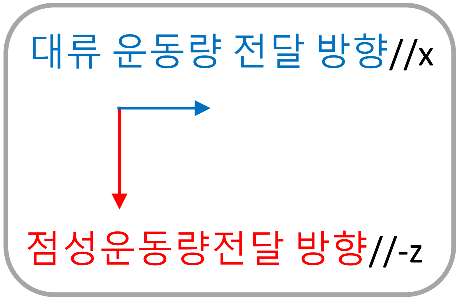
$\vec{v}_x(x = X)$ $\vec{v}_x(x = X + \Delta X)$

만약, ρ가 공간에 무관하게 상수라면
즉, 비압축(incompressible) 유체라면)

$$= \rho \cdot A \cdot \{-\vec{v}_x^2(x = X + \Delta X) + \vec{v}_x^2(x = X)\}$$
$$= \rho \cdot A \cdot \left(-v_x^2\Big|_{X+\Delta X} + v_x^2\Big|_{X}\right)$$

운동량 전달 (점성+대류)





1. 점성운동량전달 (viscous momentum transfer)
2. 대류운동량전달 (convective momentum transfer)

At steady state

$$\frac{\Delta\{m\cdot\vec{v}\}}{t} = \left\{\tau_{zx}\Big|_{Z+\Delta Z} - \tau_{zx}\Big|_{Z}\right\}\cdot\Delta y\cdot\Delta x + \rho\cdot A\cdot\left(-v_x^2\Big|_{X+\Delta X} + v_x^2\Big|_{X}\right) = 0$$

점성 운동량 수지　　대류 운동량 수지

$$\frac{\Delta\{m\cdot\vec{v}\}}{t} = \left\{\tau_{zx}\Big|_{Z+\Delta Z} - \tau_{zx}\Big|_{Z}\right\}\cdot\Delta y\cdot\Delta x = 0$$

v_x is function of only z and

$$v_x\Big|_{X} = v_x\Big|_{X+\Delta X}$$

$$\left\{\tau_{zx}\Big|_{Z+\Delta Z} - \tau_{zx}\Big|_{Z}\right\}\cdot\Delta y\cdot\Delta x\cdot\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z} = 0 \Rightarrow \frac{\tau_{zx}(Z+\Delta Z)-\tau_{zx}(Z)}{\Delta z} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\tau_{zx}(Z+\Delta Z)-\tau_{zx}(Z)}{\Delta z} = \frac{d\tau_{zx}}{dz}$$

(Couette flow에서) 운동량 전달

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\tau_{zx}(Z+\Delta Z) - \tau_{zx}(Z)}{\Delta Z} = \frac{d\tau_{zx}}{dz} = 0$$

τ_{zx}는 z 방향으로 constant; 따라서

Let's set, $\tau_{zx} = C_1$

Slide #14, Newtonian Fluid

$$\boxed{\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz} = -\eta \dot{\varepsilon}_{zx}} = C_1$$

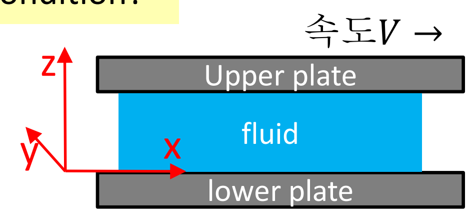
$$\frac{dv_x}{dz} = -\frac{C_1}{\eta}$$

Let's integrate $\frac{dv_x}{dz} = -\frac{C_1}{\eta}$

$$\int_a^b dv_x = -\int_c^d \frac{C_1}{\eta} dz$$

$$\rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\eta} z + C_2$$

What is the boundary condition?



At $z = Z$, $v_x = V$

At $z = 0$, $v_x = 0$

$$\int_0^V dv_x = -\int_0^Z \frac{C_1}{\eta} dz$$

$$\rightarrow V - 0 = -(Z-0)\frac{C_1}{\eta}$$

$$\rightarrow V = -\frac{C_1}{\eta} Z + C_2$$

$$At\ z = 0, v_x = 0$$
$$\rightarrow 0 = 0 + C_2$$

$$\rightarrow V = -\frac{C_1}{\eta} Z$$

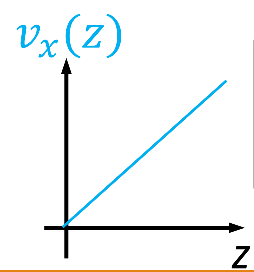
$$\rightarrow C_1 = -\eta \frac{V}{Z}$$

$$\rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\eta} z$$

$$\rightarrow v_x = \frac{\frac{\eta V}{Z}}{\eta} z$$

$$\rightarrow v_x = \frac{V}{Z} z$$

- v_x는 속도구배(V/Z)에 비례하고, 점도(η)에 무관.



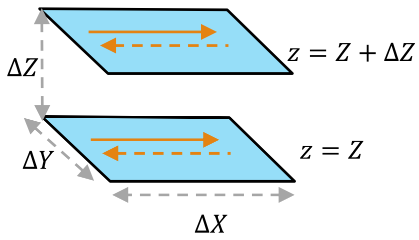
속도 구배 $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ $(= V/Z)$ 는 왼쪽 그래프에서 기울기

Recap and physical interpretation

Q:정상상태의 유동에서 운동량 전달?

Task: 운동량 수지식 설정후, 전단응력과 속도 분포를 구하자.

Process1: 검사체적(control volume)에 대한 운동량 수지식을 설정하고, 이를 전단응력τ를 포함한 미분방정식으로 나타낸다.



$$\boxed{\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz} = -\eta \dot{\varepsilon}_{zx}}$$

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\tau_{zx}(Z+\Delta Z) - \tau_{zx}(Z)}{\Delta z} = \frac{d\tau_{zx}}{dz}$$

Process2: process 1에서 얻어진 미분 방정식을 적분하여 τ 구하기.

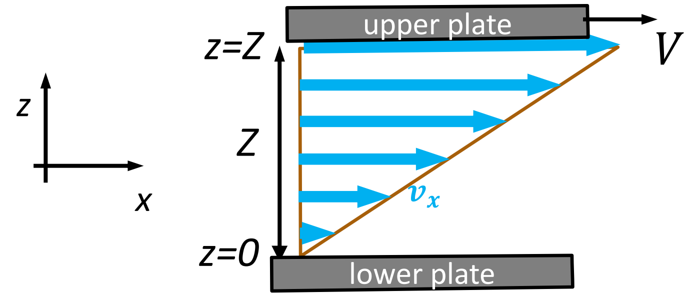
정상 상태에서 τ_{zx}는 z에 무변한 상수가 됨을 밝힘: $\tau_{zx} = C_1$

Process3: Put $\tau_{zx} = C_1$ into Newtonian fluid's law and integrate

$$\int_0^V dv_x = -\int_0^Z \frac{C_1}{\eta} dz \rightarrow V = -\left(\frac{C_1}{\eta}\right) Z$$

$$\rightarrow V = -\left(\frac{\tau_{zx}}{\eta}\right) Z \rightarrow \tau_{zx} = -\frac{V}{Z}\eta$$

$\tau_{zx} = -\frac{V}{Z}\eta$ 의 물리적 의미?

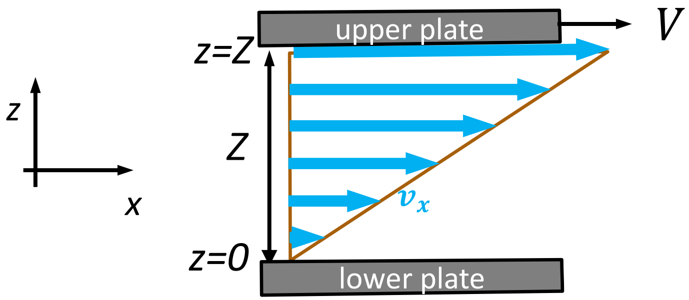


위와 같은 공간에 선형적으로 분포하는 유속을 가진 fluid가 steady state에 다다를 때, 각 층간에는 속도가 달라 전단 응력이 존재한다. 이 전단 응력은 z위치에 무관하고, 두 plate 사이의 거리(Z), upper plate 속도(V), 그리고 점성 (η)에 대한 함수

그러한 전단응력은 upper plate의 속도가 빠를수록 (절대값이) 커지고, coutte flow가 발생한 공간이 '좁을 수록' (즉 z값이 작을 수록) (절대값이) 커진다.

$\frac{V}{Z}$를 속도의 공간에 대한 '분포' 즉 속도 구배로 표현하자면, 각 층간의 전단 응력은 속도 구배(velocity gradient)와 점성(viscosity)에 의해 지배된다.

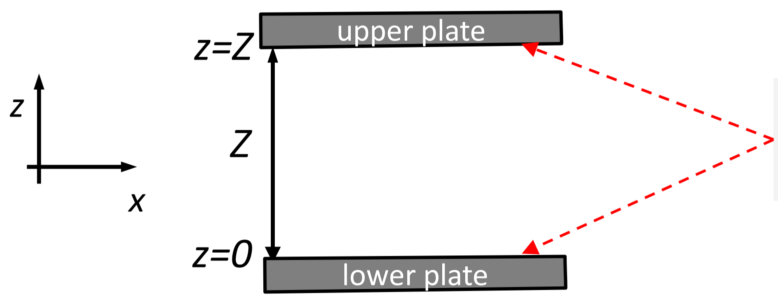
Fluid flowing between two parallel (and static) plates



Under Couette flow condition, $v_x = +\frac{Vz}{Z}$

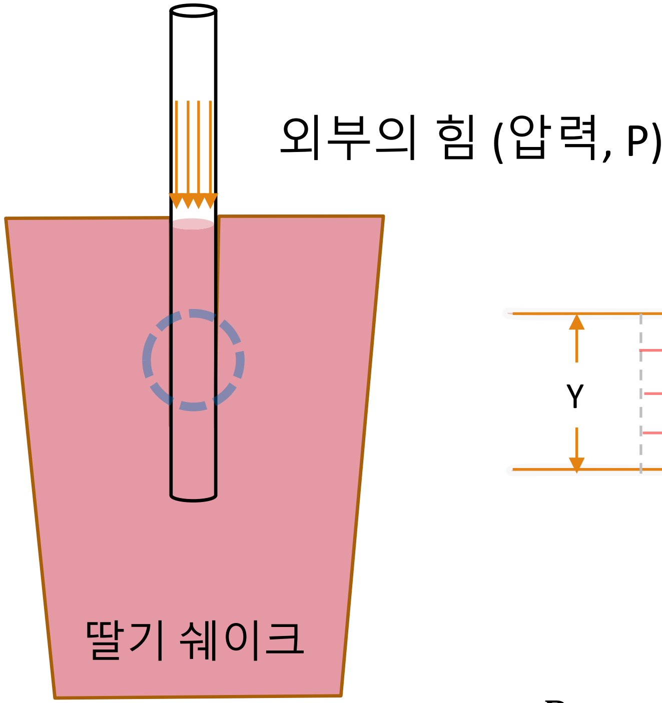
Under Couette flow condition, $\tau_{zx} = -\eta\frac{V}{Z}$

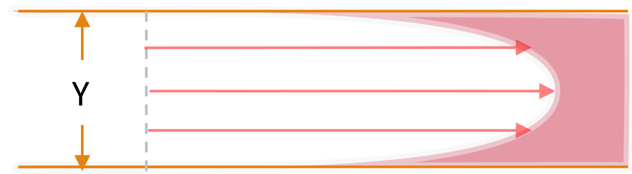
정지된 수평 평판 사이에서의 외력을 받는 유체의 거동

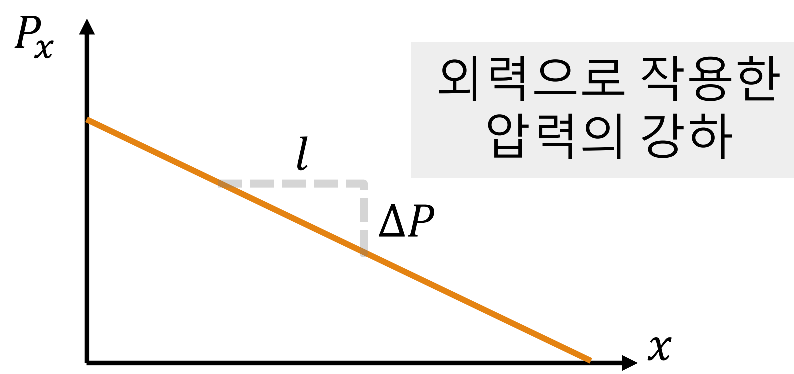


마찬가지로 주어진 조건: Sticky condition, 즉 평판과 접한 부분의 유체의 유속=0

Fluid flowing between two parallel (and static) plates

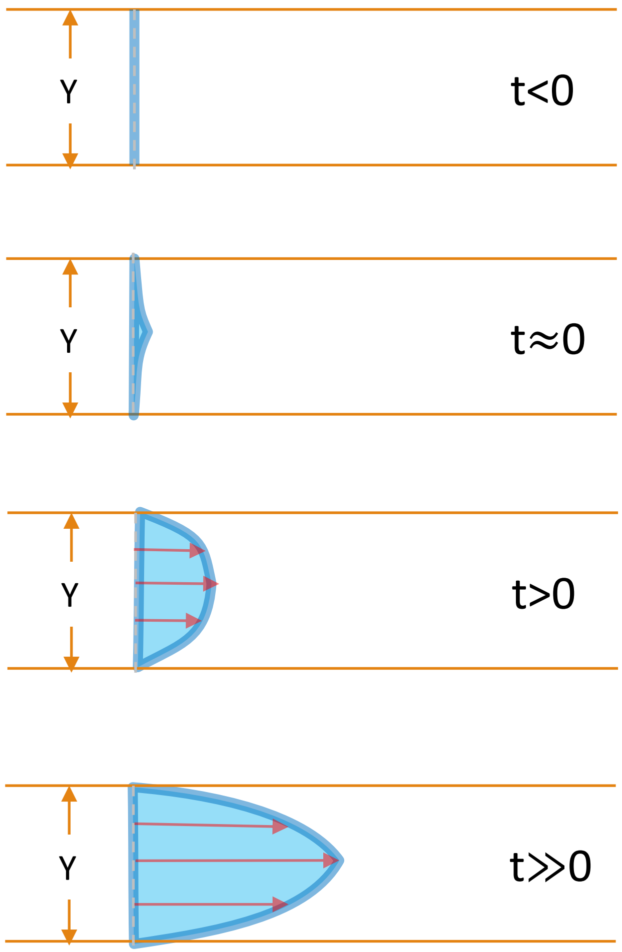






고정된 두 평판 사이의 유체 거동 (속도 구배)

Vector인 velocity (velocity of fluid)는 시간에 따라 달라지는 field variable이다.



정지된
유체

유체 중앙
부분 운동
시작

비정상상태
유동에서 속도
gradient 형성

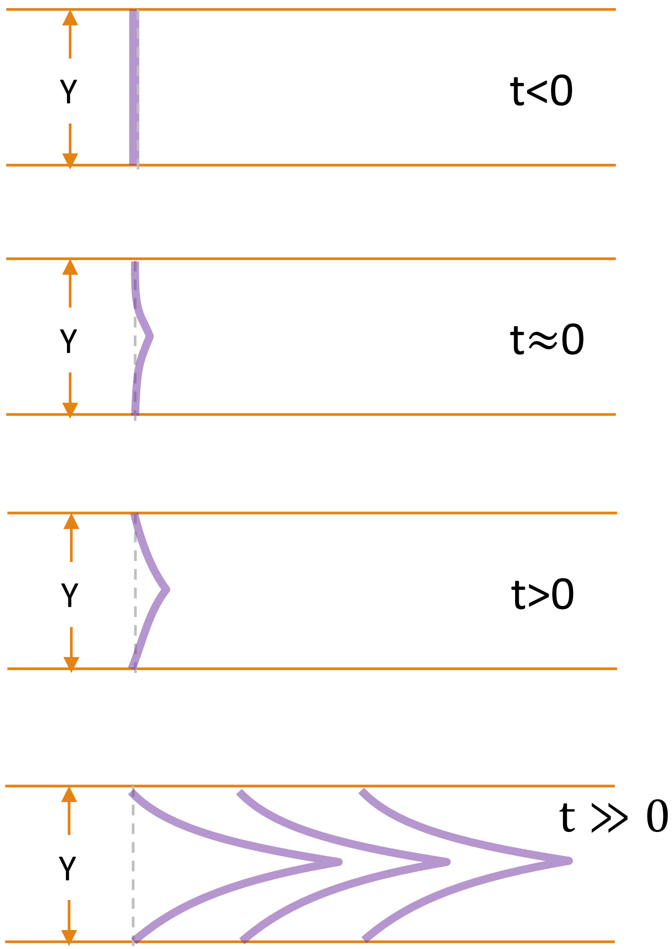
Transient region

정상상태
유동에서 속도
gradient 형성

Fully developed steady state

고정된 두 평판 사이의 유체 거동 (잉크 위치)

정상상태에 다다를 때까지, 유체에 삽입된 잉크의 위치 변화



정지된
유체

유체 중앙
부분 운동
시작

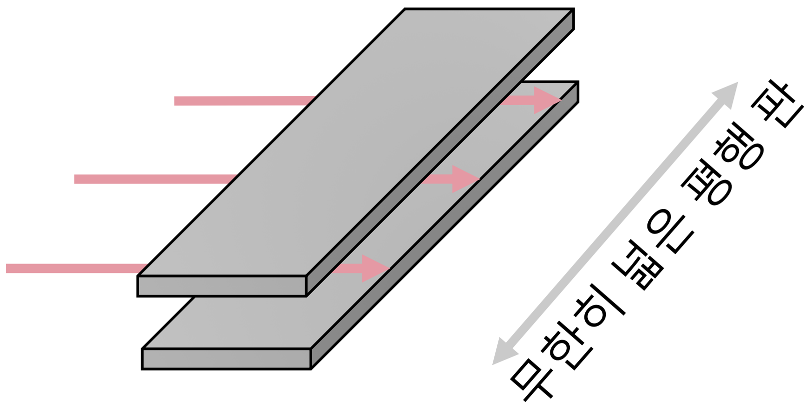
비정상상태
유동에서
잉크의 모습

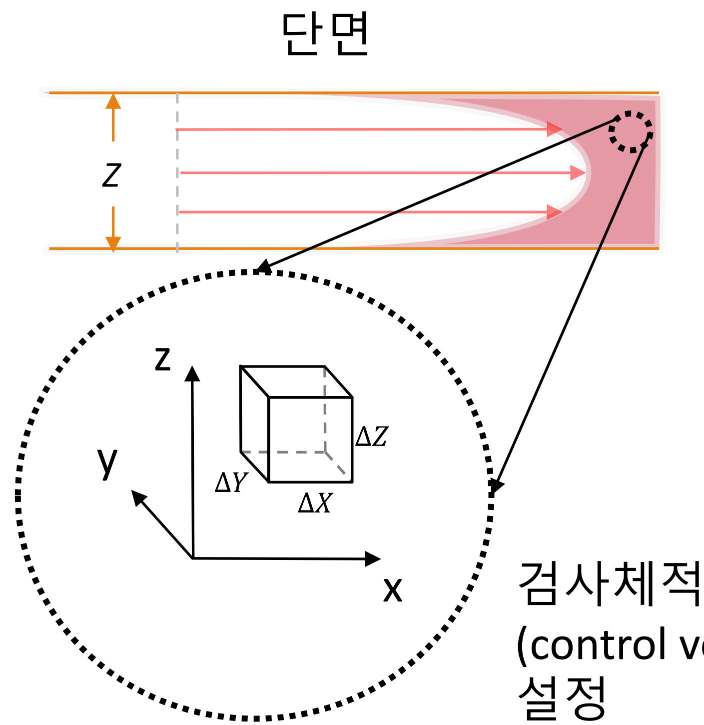
Transient region

정상상태 유동에서
잉크는 활처럼 휘어짐

Fully developed steady state

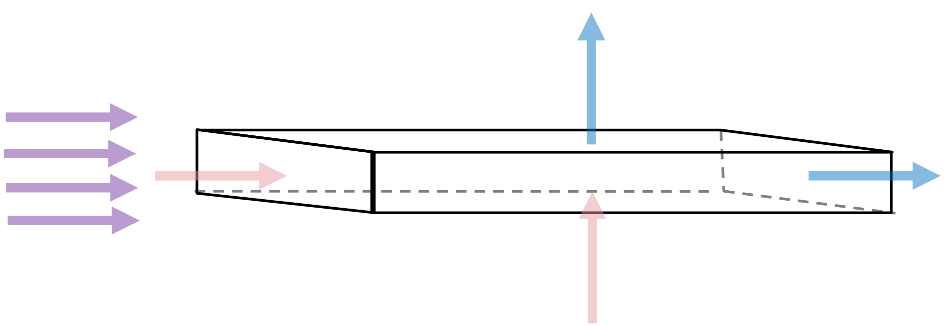
고정된 두 평판





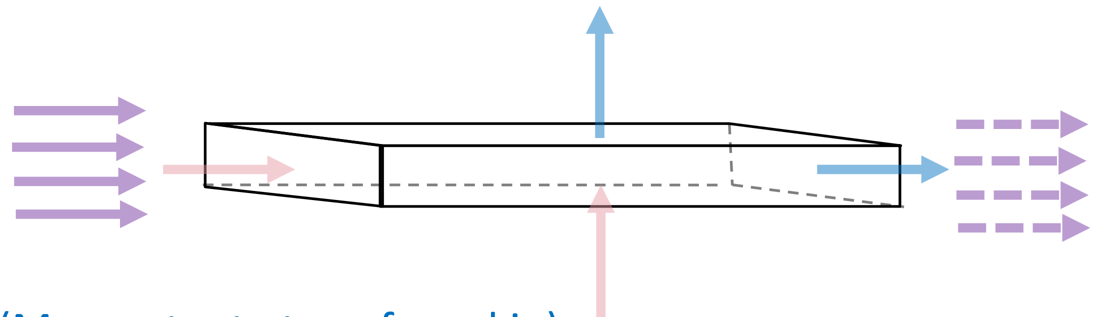
대류운동량전달 (convective momentum transfer)

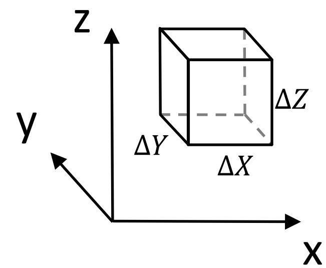
점성운동량전달 (convective momentum transfer)



(Moment rate transferred in)
-(Moment rate transferred out)
+(body force applied)=0

고정된 두 평판 운동량 수지식





(Moment rate transferred in)
-(Moment rate transferred out)
+(body force applied)=0

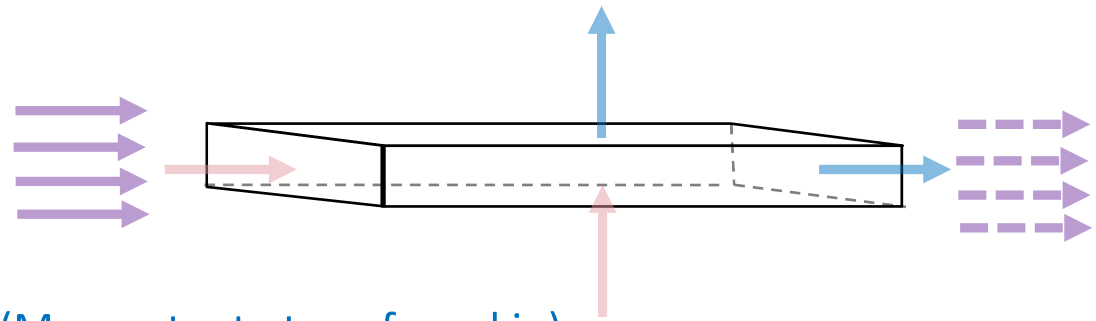
$$\rho v_x^2\Big|_X \Delta Y \Delta Z \qquad \tau_{zx}\Big|_Z \Delta X \Delta Y \qquad P\Big|_X \Delta Y \Delta Z$$

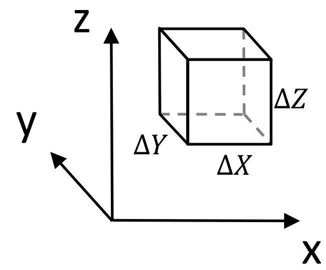
$$\rho v_x^2\Big|_{X+\Delta X} \Delta Y \Delta Z \qquad \tau_{zx}\Big|_{Z+\Delta Z} \Delta X \Delta Y \qquad P\Big|_{X+\Delta X} \Delta Y \Delta Z$$

$$\rho v_x^2\Big|_X \Delta Y \Delta Z - \rho v_x^2\Big|_{X+\Delta X} \Delta Y \Delta Z + \tau_{zx}\Big|_Z \Delta X \Delta Y - \tau_{zx}\Big|_{Z+\Delta Z} \Delta X \Delta Y + P\Big|_X \Delta Y \Delta Z - P\Big|_{X+\Delta X} \Delta Y \Delta Z = 0$$

$$\frac{\rho v_x^2|_X - \rho v_x^2|_{X+\Delta X}}{\Delta X} + \frac{\tau_{zx}|_Z - \tau_{zx}|_{Z+\Delta Z}}{\Delta Z} + \frac{P|_X - P|_{X+\Delta X}}{\Delta X} = 0$$

고정된 두 평판 운동량 수지식





(Moment rate transferred in)
-(Moment rate transferred out)
+(body force applied)=0

$$\frac{\rho v_x^2|_X - \rho v_x^2|_{X+\Delta X}}{\Delta X} + \frac{\tau_{zx}|_Z - \tau_{zx}|_{Z+\Delta Z}}{\Delta Z} + \frac{P|_X - P|_{X+\Delta X}}{\Delta X} = 0$$

해당 문제에서, velocity(v_x)는 z축으로만 바뀐다.

With $\Delta X \to 0$ and $\Delta Z \to 0$,

$$\frac{\tau_{zx}|_Z - \tau_{zx}|_{Z+\Delta Z}}{\Delta Z} + \frac{P|_X - P|_{X+\Delta X}}{\Delta X} = 0$$

$$\to -\frac{d\tau_{zx}}{dz} - \frac{dP_x}{dx} = 0$$

압력 P는 x 축을 따라서 선형적으로 감소하며, 그 구배(gradient)가 가령

$$\frac{\Delta P}{L}$$

로 표현된다고 하자. 해당 구배는 음의 값을 가져야 한다 (감소되니까..)

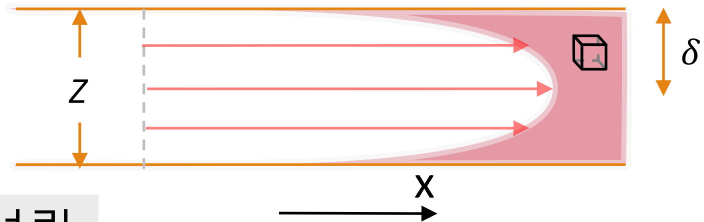
따라서 다음의 관계식 성립:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$$

$$-\frac{d\tau_{zx}}{dz} - \frac{dP_x}{dx} = 0 \to -\frac{d\tau_{zx}}{dz} + \frac{\Delta P}{L} = 0$$

고정된 두 평판 유체속도와 응력

$$-\frac{d\tau_{zx}}{dz}-\frac{dP_x}{dx}=0 \rightarrow -\frac{d\tau_{zx}}{dz}+\frac{\Delta P}{L}=0$$



$z=+\delta$

$z=0$

$z=-\delta$

$$\rightarrow \frac{d\tau_{zx}}{dz}=\frac{\Delta P}{L}$$

전단응력에 대한 미분 방정식 성립

적분하면...

$$\rightarrow \tau_{zx}=\frac{\Delta P}{L}\cdot z+C_1$$

경계조건?

At $z=0, \tau_{zx}=0$

$\therefore \mathrm{C}_1=0$

$$\rightarrow \tau_{zx}=\frac{\Delta P}{L}\cdot z$$

$$\boxed{\tau_{zx}=-\eta\frac{dv_x}{dz}=-\eta\dot{\varepsilon}_{zx}}$$

Slide #14, Newtonian Fluid

$$\rightarrow \frac{\Delta P}{L}\cdot z=-\eta\frac{dv_x}{dz}$$

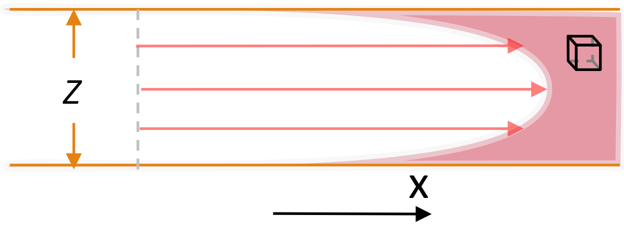
$$\frac{\Delta P}{L}\cdot z=-\eta\frac{dv_x}{dz}\rightarrow\frac{\Delta P}{L}\cdot z\,dz=-\eta\,dv_x$$

$$\rightarrow \int_z^{\delta}\frac{\Delta P}{L}\cdot z\,dz=\int_{v_x}^{0}-\eta\,dv_x$$

$$\rightarrow \frac{\Delta P}{L}\frac{\delta^2-z^2}{2}=\int_{v_x}^{0}-\eta\,dv_x=-\eta(0-v_x)=\eta v_x$$

$$\rightarrow v_x(z)=\frac{\Delta P}{L}\frac{\delta^2-z^2}{2\eta}$$

고정된 두 평판 결과 및 Couette flow와 비교



$z = +\delta$

$z = 0$

$z = -\delta$

At z=0, Max. v_x

$$v_x(0) = \frac{\Delta P}{L}\frac{\delta^2}{2\eta}$$

$$\rightarrow v_x(z) = \frac{\Delta P}{L}\frac{\delta^2 - z^2}{2\eta}$$

$\frac{\Delta P}{L}$: 유체의 흐름 방향(x)으로의 압력 구배
δ: half of spacing between the two fixed plates
η: viscosity of the fluid
$v(z)$: velocity of fluid as a function of z position

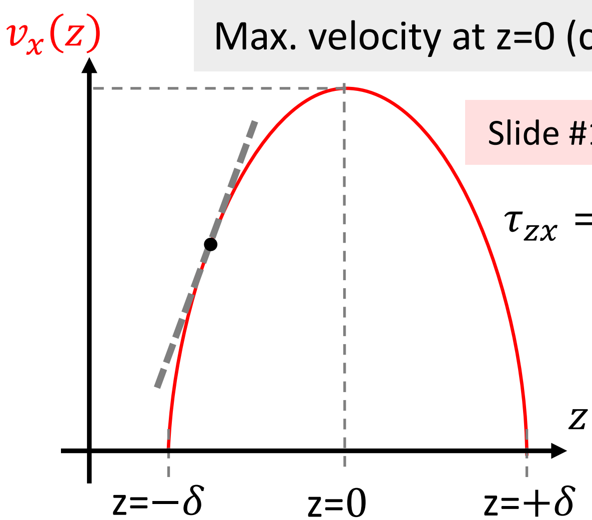
v_x는 z축 좌표에 대한 2차 함수 형태 (포물선)

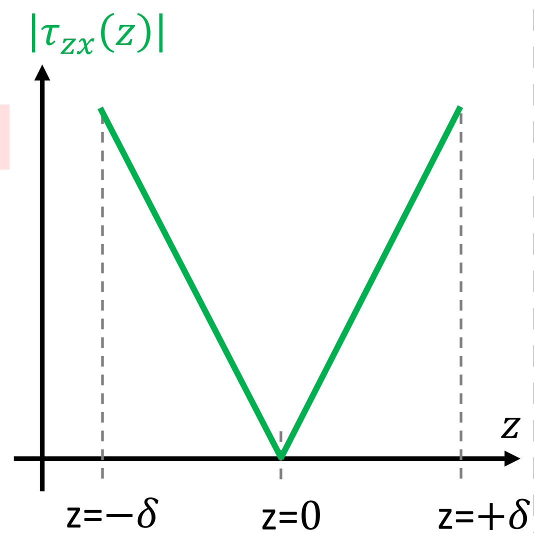
τ_{zx}: 는 유동이 흐르는 방향인 z 좌표에 대한 1차 함수 (선형)

Max. velocity at z=0 (center)

Slide #14, Newtonian Fluid

$$\tau_{zx} = -\eta\frac{dv_x}{dz}$$

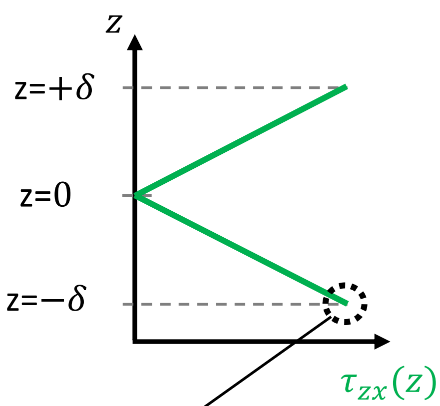


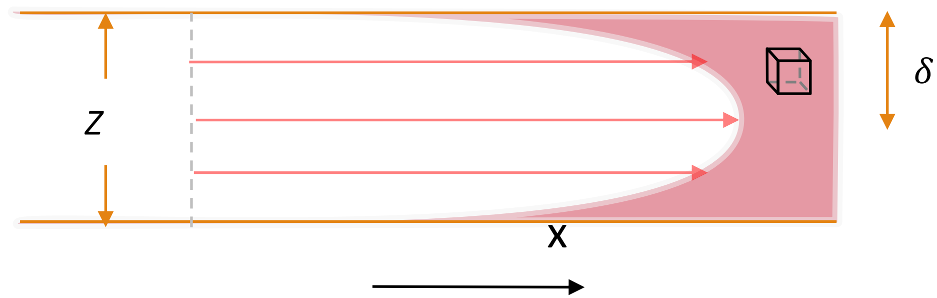


Couette flow

$$\tau_{zx} = -\frac{V}{Z}\eta$$
$$v_x = -\frac{V}{Z}z$$

평균 유속 및 유량

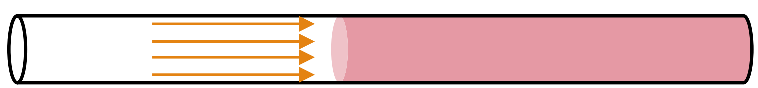




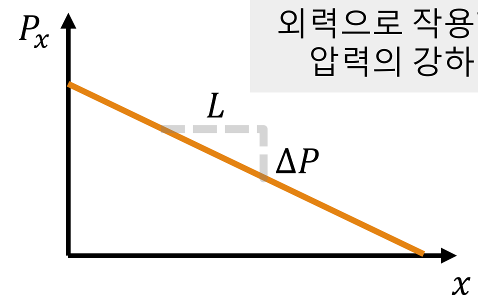
$z = +\delta$

$z = 0$

$z = -\delta$



애초에 유체가 흘렀던 이유는 유동방향으로
외부의 압력이 가해졌기 때문이다.



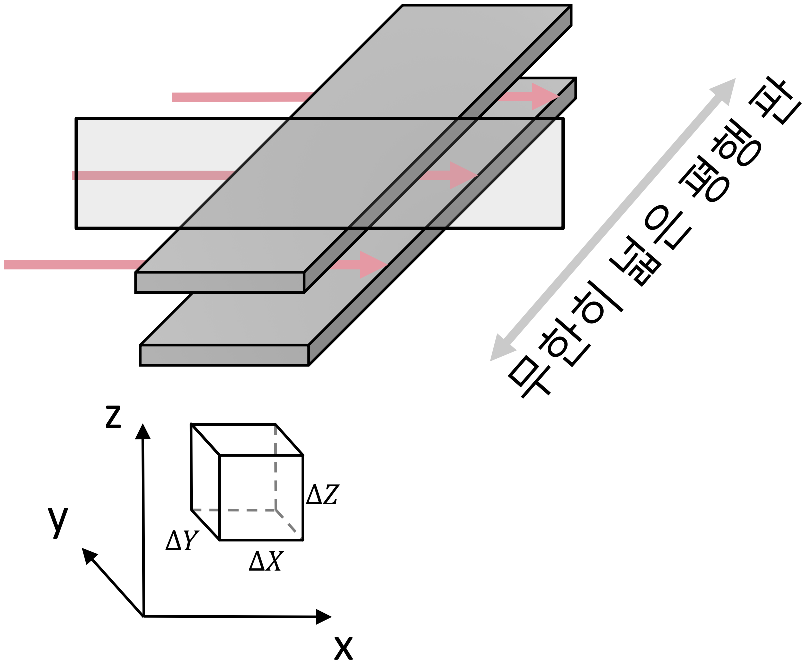
외력으로 작용한
압력의 강하

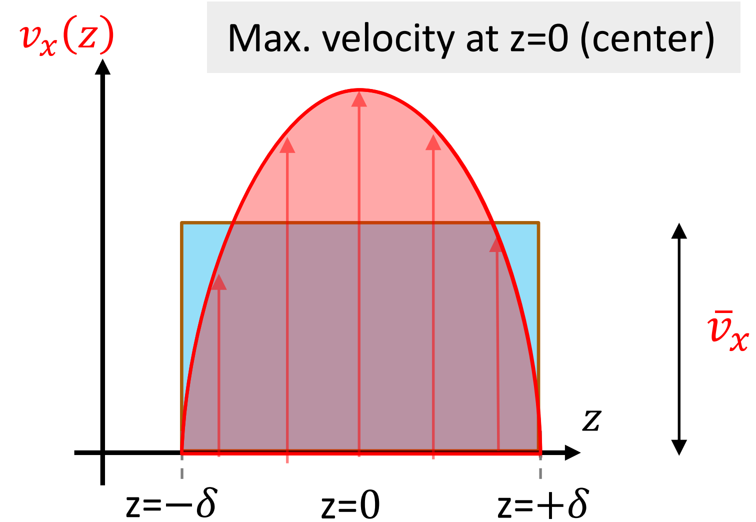
평판에 작용하는 전단응력은
유동에 의해 발생

$z = \pm\delta$ 에서의 힘평형
조건(steady state)

$$(\text{전단 응력}) \cdot (\text{면적}) = \tau_{zx}\big|_{z=\delta} \cdot (\text{면적})$$
$$= \frac{\Delta P}{L}\delta \cdot (\text{면적})$$

평균 유속 및 유량





유속 $v_x(z)$는 z 축 위치에 따라 달라진다.
그렇다면, 평균 유속은?

구간 $-\delta \sim +\delta$ 폭 사이를 통과하는 유체의 속도 $\bar{v}_x$가 일정하다면, 그 유속으로 인해 통과하는 유체의 통과량을 구할 수 있다.

=

구간 $-\delta \sim +\delta$ 폭 사이를 통과하는 유체의 속도 $v_x(z)$ 가 위와 같이 불균일하다고 한다면, 그 유속의 공간 분포를 적분하여서 해당 구간을 통과하는 유체의 총 통과량을 구할 수 있다.

$$\bar{v}_x \cdot (2\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} v_x(z)dz$$

$$\bar{v}_x \cdot (2\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\Delta P}{2L\eta}(\delta^2 - z^2)dz$$

$$2\delta \cdot \bar{v}_x = 2\int_{0}^{\delta} \frac{\Delta P}{2L\eta}(\delta^2 - z^2)dz = \frac{2\Delta P}{2L\eta}\left(\delta^2 z - \frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^{\delta}$$

$$2\delta \cdot \bar{v}_x = \frac{2\Delta P}{2L\eta}\left(\delta^3 - \frac{1}{3}\delta^3\right) \rightarrow \bar{v}_x = \frac{\Delta P}{3L\eta}\delta^2$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta P}{3L\eta}\delta^2 = \frac{2}{3}\max(v_x)$$

체적 유량, 질량 유량

$$\boxed{\bar{v}_x = \frac{\Delta P}{3L\eta}\delta^2}$$

평균 이동 속도

$$\boxed{\dot{V} = \bar{v}_x \cdot A}$$

평균 체적 유량 속도
(average volume flow rate)

단위 시간당 통과하는
(이동하는) 유체의 부피

$$\boxed{\dot{M} = \dot{V} \cdot \rho}$$

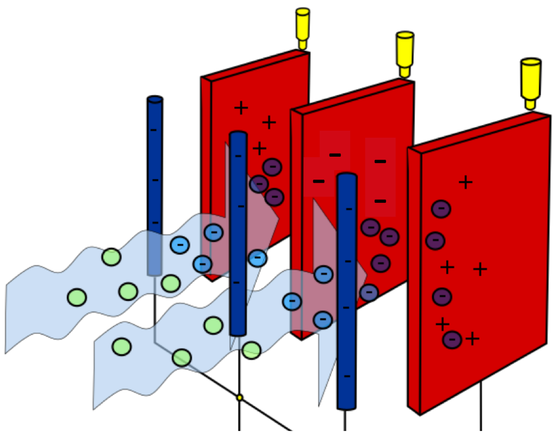
평균 체적 유량 속도
(average volume flow rate)

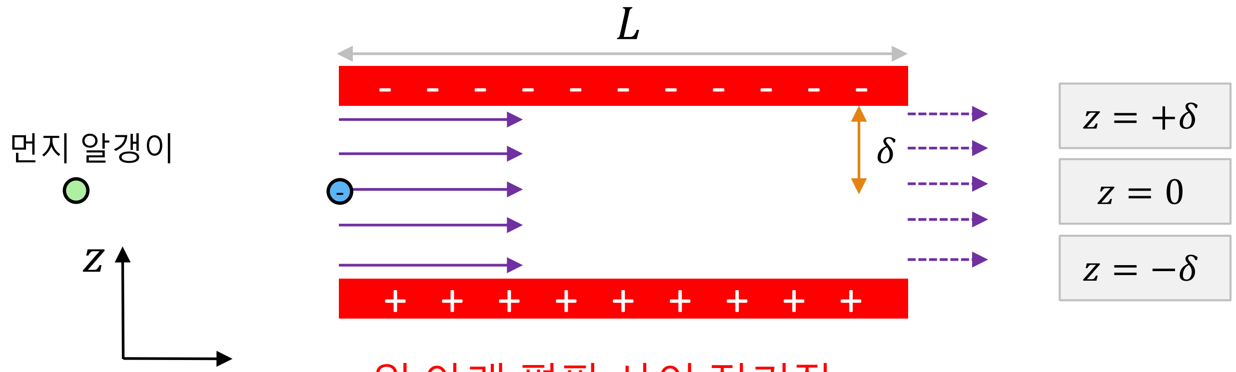
단위 시간당 통과하는
(이동하는) 유체의 질량

예제 2.2

정전기 집진기 (electrostatic dust precipitator)

먼지를 포함한 기체의 x 방향 압력 $\dfrac{\Delta P}{L}$





위 아래 평판 사이 전기장 E

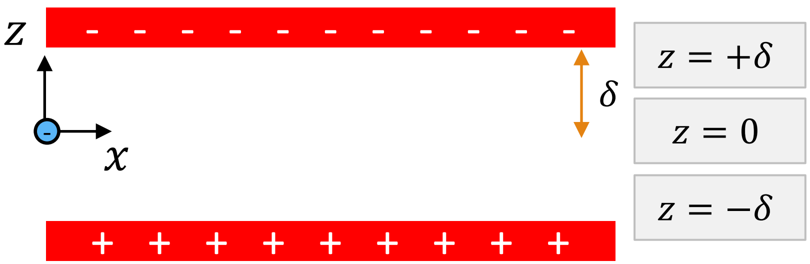
먼지의 x방향 운동은, 먼지가 포함된 기체의 운동에 의해 결정된다.

$$\rightarrow v_x(z) = \frac{\Delta P}{L}\frac{\delta^2 - z^2}{2\eta}$$

먼지의 z방향 운동은, 두 평판 사이의 전기장에 영향을 받는다.

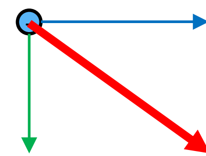
$$F = mass \times acceleration$$
$$= (charge) \times E$$

예제 2.2



위 아래 평판 사이 전기장 E

먼지 입자의 속도?



v_x: follows from the air flow

v_z: follows from the electric field

Q: 모든 분진이 포집되기 위해 필요한 최소한의 평판 길이?

= 하전된 먼지 입자가 최대한으로 이동할 수 있는 거리

=하전된 먼지 입자가 평판에 닿을 때 까지 수평방향으로 이동할 수 있는 최대한의 거리

하전된 먼지 입자의 속도를 우선 살펴보자.

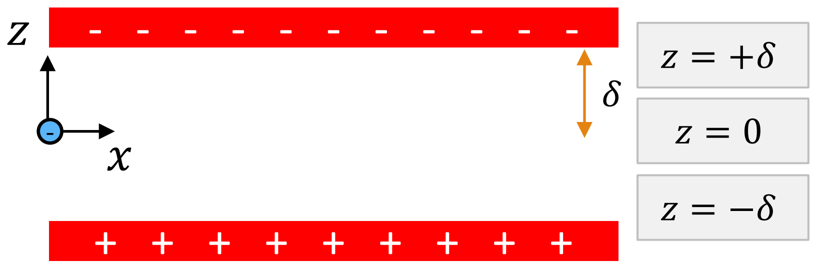
입자가 $-z$ 방향으로 이동한 후 집진된다.

x 방향으로 가장 멀리 이동 후 집진이 되는 먼지의 최대 -z방향 이동 거리는 2δ 이다.

얼마나 시간이 흘러야 $-z$ 방향으로 2δ만큼 이동가능한가?

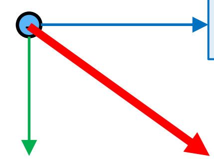
우선 v_z 속도를 안다면, 2δ 이동하기까지 걸린 시간을 유추할 수 있을 것이다

예제 2.2



위 아래 평판 사이 전기장 E

먼지 입자의 속도?



v_x: follows from the air flow

v_z: follows from the electric field

v_z 속도는 얼마 인가?

$$F_z = m \times a_z$$

$$F_z = (charge) \times E$$

$$-e \times E = m \times a_z$$

$-e$: 전자의 전하량

$$a_z = \frac{-e \cdot E}{m}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{-e \cdot E}{m}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{-e \cdot E}{m}$$

$$dv_z = \frac{-e \cdot E}{m} dt$$

$$\int_0^{v_z} dv_z = \int_0^t \frac{-e \cdot E}{m} dt$$

$$v_z = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t$$

$$dz = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t\, dt$$

$$\int_\delta^z dz = \int_0^t \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t\, dt$$

$$z - \delta = \frac{-eEt^2}{2m}$$

$$t = \sqrt{\frac{2m(z-\delta)}{-eE}}$$

With $z = -\delta$, t becomes the time required for this dust to be collected.

with $z = -\delta$, $t = \sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$

따라서, 먼지가 $\sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$ 시간 이후 집진됨을 알 수 있다.

따라서 먼지가 x방향으로 이동할 수 있는 거리는

$$v_x \cdot \sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$$

예제 2.2

따라서 x축으로의 이동 거리는? $v_x \times t$? 즉 $v_x \cdot \sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$ 인가?

$$L = \int_0^{t=\sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}} v_x(t)\,dt$$

$$v_x = \frac{\Delta P}{2L\eta}(\delta^2 - z^2)$$

$$z = \delta + \frac{-eEt^2}{2m}$$

$$v_x = \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \left(\delta + \frac{-eEt^2}{2m}\right)^2\right\}$$

$$v_x = v_x(z) \quad \rightarrow v_x = v_x(z(t)) \quad \rightarrow v_x = v_x(t)$$

$$\int_0^{t=\sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}} \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \left(\delta + \frac{-eEt^2}{2m}\right)^2\right\} dt$$

$$\frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \left(\delta + \frac{-eEt^2}{2m}\right)^2\right\} = \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \left(\delta^2 + 2\times\frac{-eEt^2}{2m}\delta + \left(\frac{-eEt^2}{2m}\right)^2\right)\right\}$$

$$= \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \delta^2 + \frac{eEt^2}{m}\delta - \left(\frac{eEt^2}{2m}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\frac{eEt^2}{m}\delta - \left(\frac{eEt^2}{2m}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\frac{eE\delta}{m}t^2 - \left(\frac{eE}{2m}\right)^2 t^4\right\}$$

$$= \frac{1}{L}(At^2 - Bt^4)$$

$$A = \frac{\Delta P}{2\eta}\frac{eE\delta}{m}$$

$$B = \frac{\Delta P}{2\eta}\left(\frac{eE}{2m}\right)^2$$

$$L = \int_0^{t=\sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}} \frac{1}{L}(At^2 - Bt^4)\,dt$$

$$L = \frac{A}{L}\frac{1}{3}t^3 - \frac{B}{L}\frac{1}{5}t^5 \quad \text{with } t = \sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$$

$$L^2 = \frac{A}{3}t^3 - \frac{B}{5}t^5 \quad \text{with } t = \left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{1/2}$$

$$L^2 = \frac{\frac{eE\delta}{m}\frac{\Delta P}{2\eta}}{3}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{3/2} - \frac{\frac{\Delta P}{2\eta}\left(\frac{eE}{2m}\right)^2}{5}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{5/2}$$

예제 2.2

$$L^2 = \frac{\frac{eE\delta}{m}\frac{\Delta P}{2\eta}}{3}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{3/2} - \frac{\frac{\Delta P}{2\eta}\left(\frac{eE}{2m}\right)^2}{5}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{5/2}$$

$$L^2 = \frac{\frac{eE\delta}{m}\frac{\Delta P}{2\eta}}{3}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{\Delta P}{2\eta}\left(\frac{eE}{2m}\right)^2}{5}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^2\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L^2 = \frac{2\delta^2\frac{\Delta P}{\eta}}{3}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2\delta^2\frac{\Delta P}{\eta}}{5}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L^2 = \frac{4\delta^2\frac{\Delta P}{2\eta}}{3}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{4\delta^2\frac{\Delta P}{2\eta}}{5}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)4\delta^2\frac{\Delta P}{2\eta}\left(\frac{4m\delta}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L^2 = \left(\frac{8}{15}\right)\delta^{5/2}\frac{\Delta P}{\eta}\left(\frac{m}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \sqrt{\left(\frac{8}{15}\right)\delta^{5/2}\frac{\Delta P}{\eta}\left(\frac{m}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

예제 2.2

$$z(t) = \delta + \frac{-eEt^2}{2m}$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(t)\,dt$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\Delta P}{2L\eta}\left\{\delta^2 - \left(\delta + \frac{-eEt^2}{2m}\right)^2\right\} dt$$

$$= \frac{\Delta P}{L\eta}\int_0^t \frac{1}{2}\left\{\cancel{\delta^2 - \delta^2} + \delta\frac{eE}{m}t^2 + \left(\frac{eE}{2m}\right)^2 t^4\right\} dt$$

$$x(t) = \frac{\Delta P}{L\eta}\int_0^t (A' t^2 - B' t^4) dt$$

$$A' = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\delta$$

$$B' = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{2m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{eE}{m}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{eE}{m}\frac{A'}{\delta}$$

$$x(t) = \frac{\Delta P}{L\eta}A'\int_0^t t^2 dt - \frac{\Delta P}{L\eta}B'\int_0^t t^4 dt$$

$$x(t) = \frac{\Delta P}{L\eta}\left(\frac{A'}{3}t^3 - \frac{B'}{5}t^5\right)$$

$$\frac{m}{eE} = 20\left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}\right] \therefore \frac{eE}{m} = 0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$\delta = 0.05\ [\mathrm{m}]$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta \mathrm{P}}{3\mathrm{L}\eta}\delta^2 = 1\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\frac{3\bar{v}_x}{\delta^2} = \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{L}\eta} = \frac{3\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}{0.05^2\ [\mathrm{m}^2]} = 1200\left[\frac{1}{\mathrm{m\ s}}\right]$$

$$A' = \frac{1}{2}\frac{1}{20}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] 0.05[\mathrm{m}] = \frac{0.05}{40}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$B' = \frac{1}{4}\ 0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\frac{0.05}{40}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]\frac{1}{0.05\ [\mathrm{m}]}$$

$$= \frac{0.05}{160}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}\right] = 0.0003125\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}\right]$$

$$x(t) = 1200\left[\frac{1}{\mathrm{ms}}\right]\left(\frac{\frac{0.05}{40}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]}{3}t^3 - \frac{0.0003125}{5}\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}\right]t^5\right)$$

$$x(t) = 1200\left(\frac{\frac{0.05}{40}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right]}{3}t^3 - 0.0000625\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\right]t^5\right)$$

$$x(t) = 0.5\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right]t^3 - 0.075\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\right]t^5$$

예제 2.2

$$\frac{m}{eE} = 20\left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}\right] \therefore \frac{eE}{m} = 0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$\delta = 0.05\ [\mathrm{m}]$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta\mathrm{P}}{3\mathrm{L}\eta}\delta^2 = 1\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$z(t) = \delta + \frac{-eEt^2}{2m}$$

$$z(t) = 0.05\ [\mathrm{m}] - 0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \times \frac{t^2}{2}$$

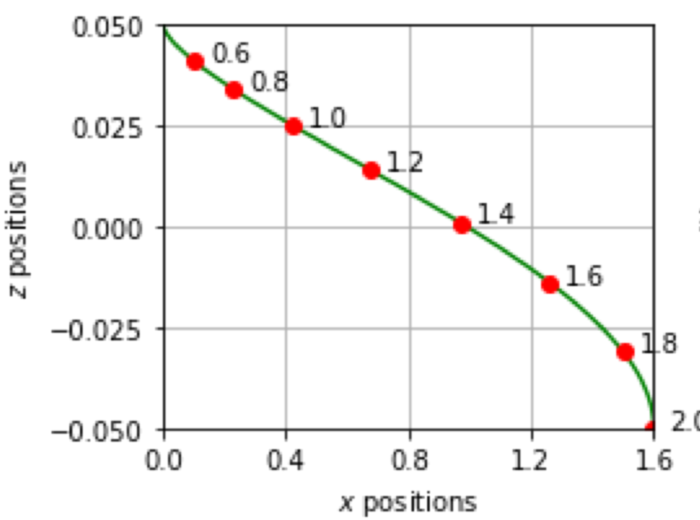
$$z(t=2) = 0.05\ [\mathrm{m}] - 0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \times \frac{2^2[s^2]}{2} = -0.05\ [\mathrm{m}]$$

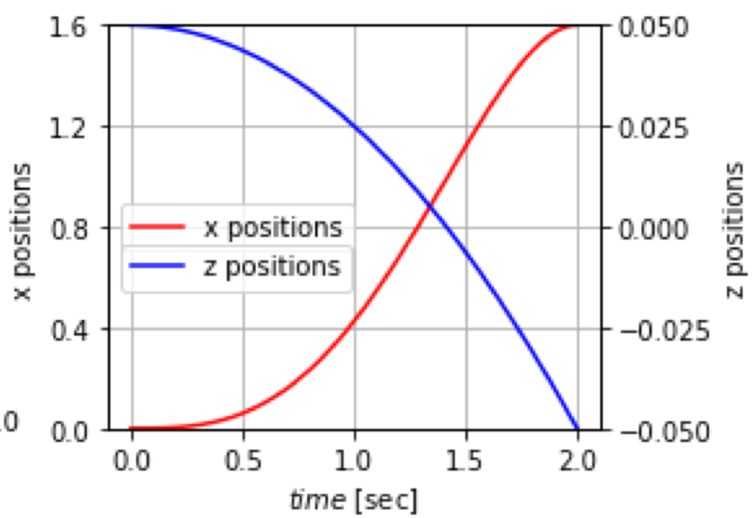
$$x(t) = 0.5\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right]t^3 - 0.075\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\right]t^5$$

$$x(t=2) = 0.5\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right]2^3[s^3] - 0.075\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\right]2^5[s^5] = 1.6\ [sec]$$

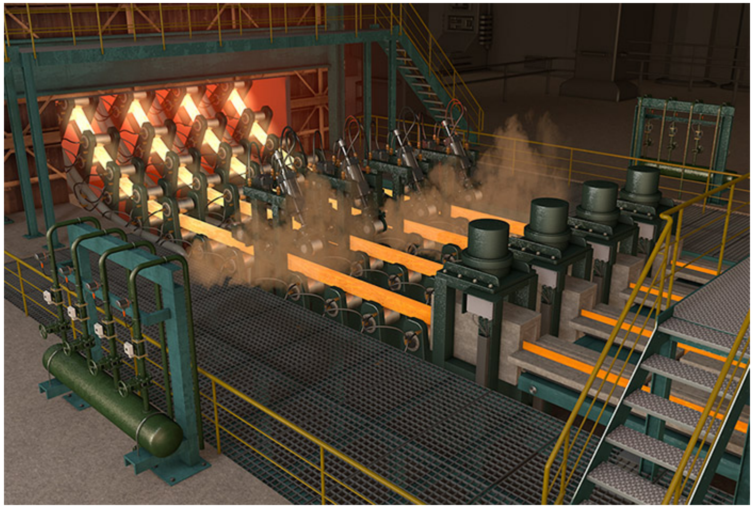
먼지가 $\sqrt{\frac{4m\delta}{eE}}$ 시간 이후 집진됨

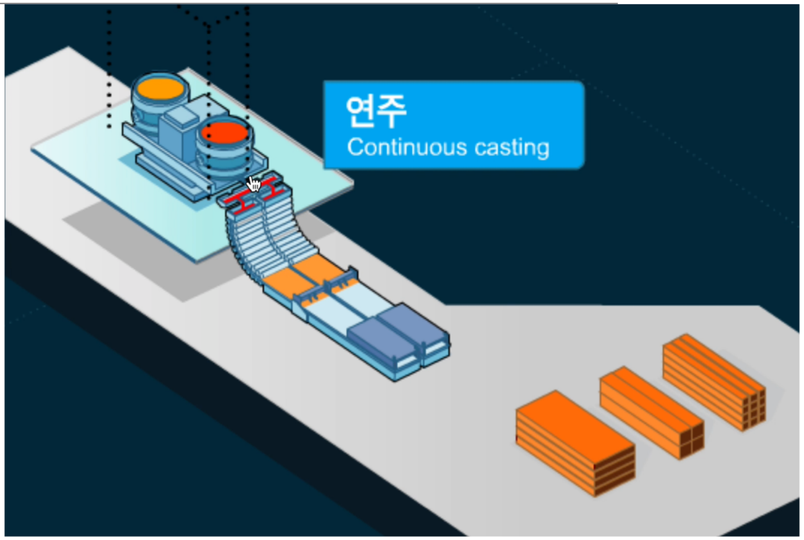
먼지가 $\sqrt{\frac{4\times0.05\ [\mathrm{m}]}{0.05\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}} = 2\ [s]$ 시간 이후 집진됨

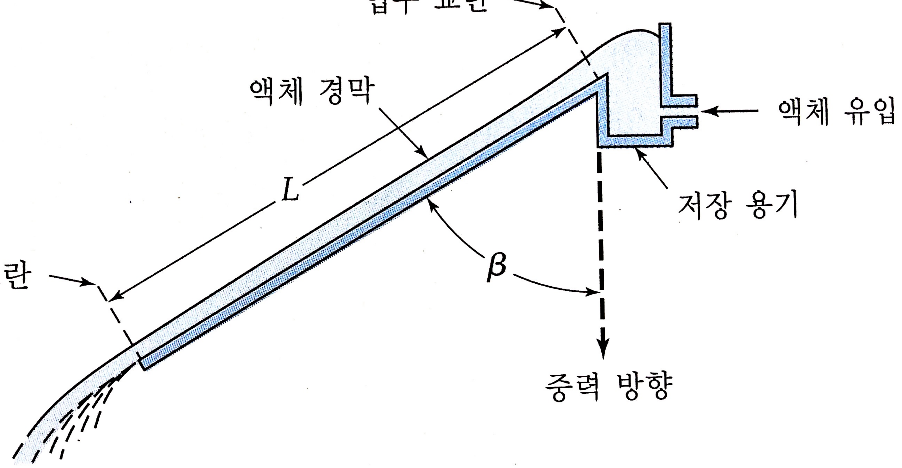




경사면을 흐르는 유체 (중력에 의한 유동)

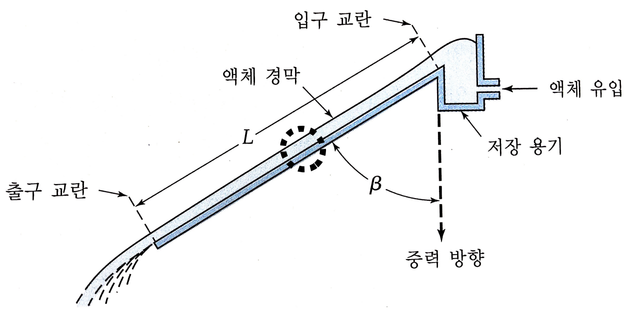


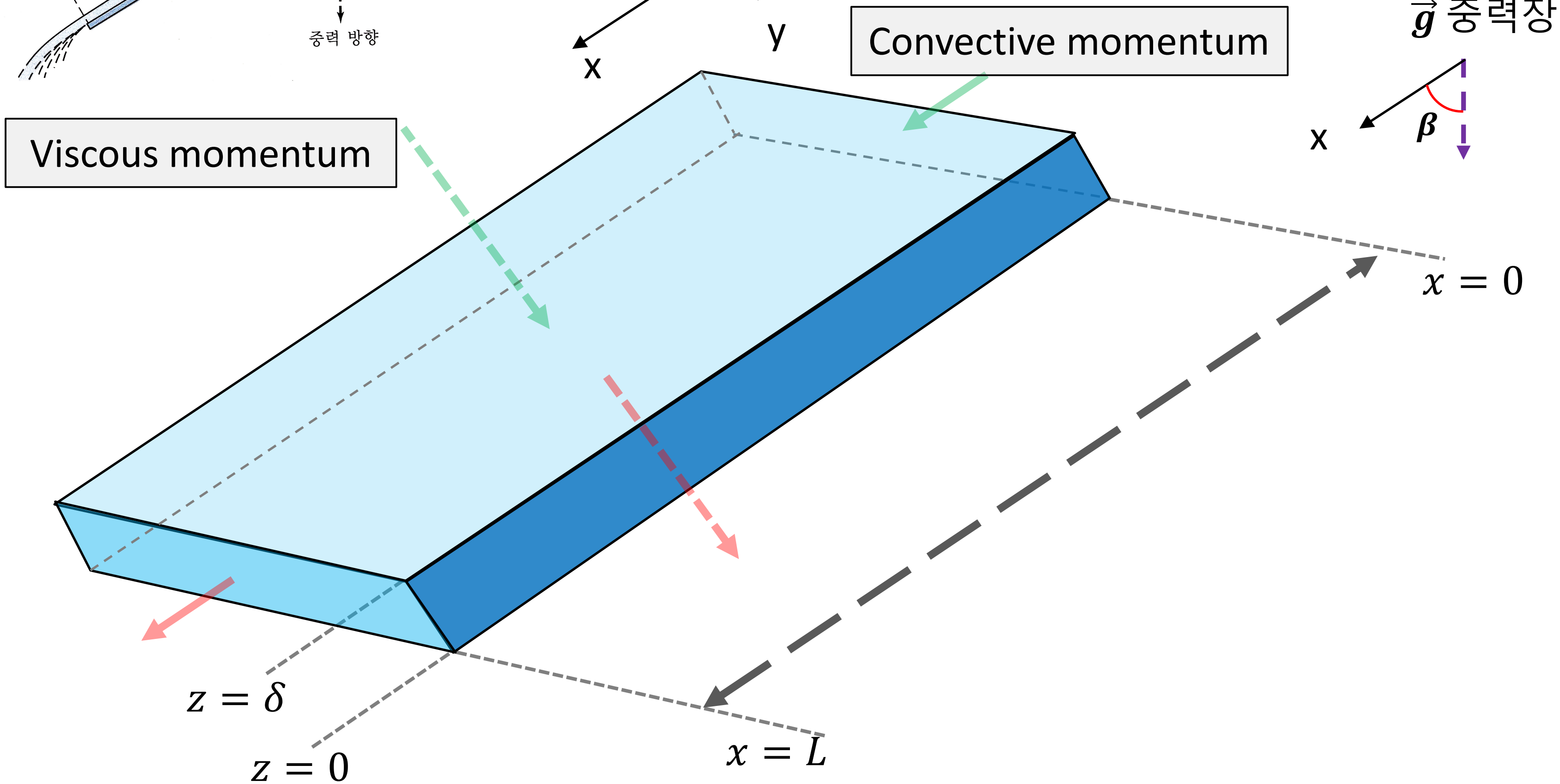




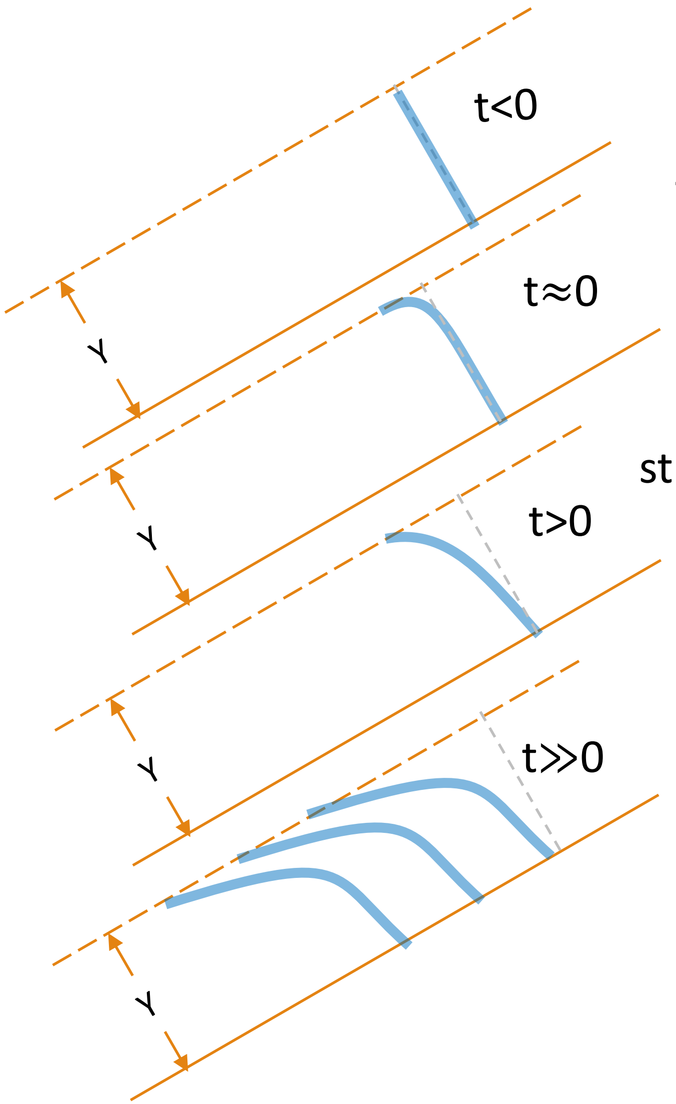
포스코 철강 생산 공정 웹페이지:
http://www.posco.co.kr/homepage/docs/kor5/html/product/exper/s91c5000103p.html
이동현상, Bird, Stewart, Lightfoot (이재욱 역)

(중력에 의해) 경사면을 흘러내리는 유체 유동





경사면 강하 유체 - 잉크 profile 변화



정지된
유체

유체 윗 부분
운동 시작

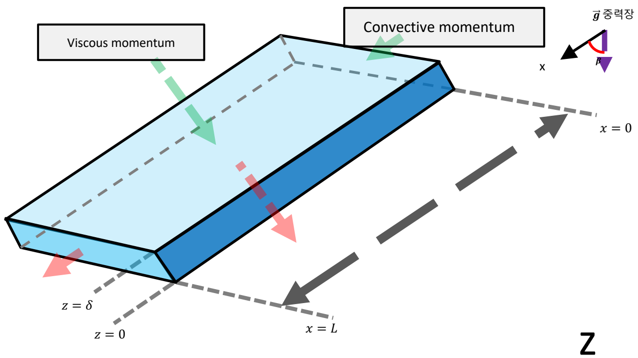
비정상상태 –
sticky condition의
영향 보임

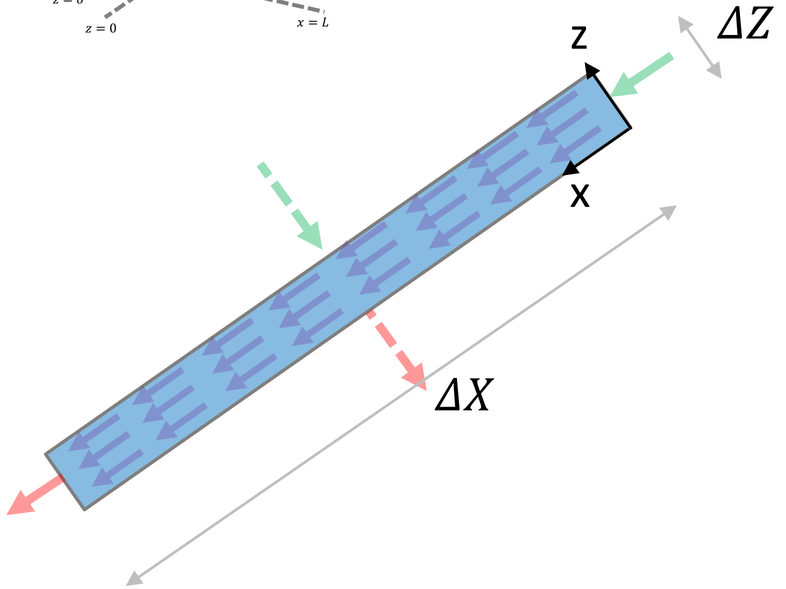
Transient region

정상상태
유동에서 속도
gradient 형성

Fully developed steady state

경사면 유동의 수지식





(Momentum rate transferred in)
-(Momentum rate transferred out)
+(body force applied)=0

Body force applied

$$= \mathrm{m} \cdot g \cdot \cos\beta$$
$$= \rho \cdot (\Delta X \Delta Y \Delta Z) \cdot g \cdot \cos\beta$$

(Viscous momentum rate transferred in)

$$= \left(-\tau_{zx}\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y$$

(Viscous Momentum rate transferred out)

$$= \left(-\tau_{zx}\Big|_{z=Z}\right) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y$$

(Convective Momentum rate in/out)

$$= \rho \cdot \Delta Y \Delta Z \cdot \left(-v_x^2\Big|_{X+\Delta X} + v_x^2\Big|_{X}\right) = 0$$

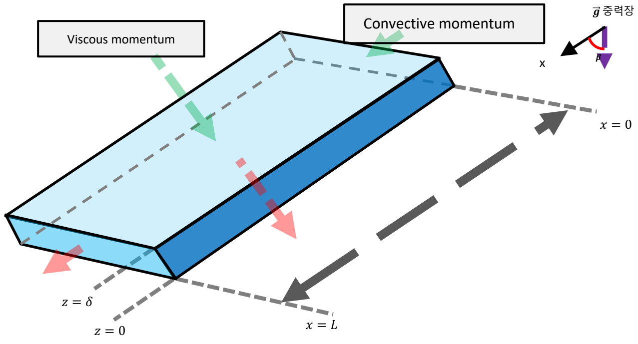
τ_{zx}: $+z$면에 $+x$방향으로 작용하는 전단응력

(Momentum rate transferred in)-(Momentum rate transferred out)+(body force applied) $= 0$

$$\rightarrow \left(-\tau_{zx}\Big|_{z=Z+\Delta Z} + \tau_{zx}\Big|_{z=Z}\right)\Delta X \Delta Y + \rho \cdot (\Delta X \Delta Y \Delta Z) \cdot g \cdot \cos\beta = 0$$

$$\rightarrow -\frac{d\tau_{zx}}{dz} + \rho g \cos\beta = 0$$

경사면 유동의 수지식



$$\frac{d\tau_{zx}}{dz} = \rho g \cos\beta$$

Integrate

$$\tau_{zx}(z)$$

Use the Newtonian fluid rule and integrate

$$v_x(z)$$

$$\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz} = -\eta \dot{\varepsilon}_{zx}$$

$$\int_{\tau_{zx}}^{0} d\tau_{zx} = \int_{z}^{\delta} (\rho g \cos\beta)\, dz$$

At $z = \delta$, free surface, thus $\tau_{zx}(z = \delta) = 0$

Leads to $0 - \tau_{zx} = \rho g \cos\beta\,(\delta - z)$

Leads to $\tau_{zx}(z) = \rho g \cos\beta\,(z - \delta)$

Leads to $\tau_{zx}(z) = \rho g \cos\beta\,(z - \delta) = -\eta \dfrac{dv_x}{dz}$

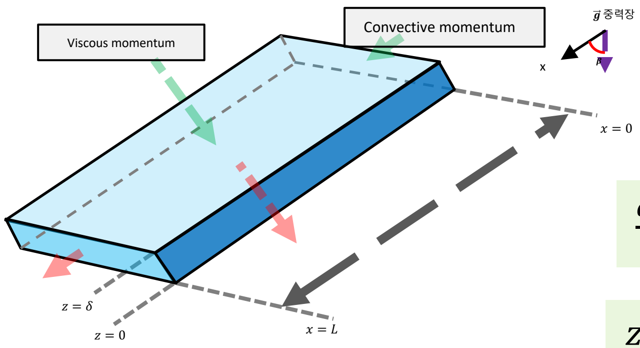
Leads to $-\dfrac{\rho g \cos\beta\,(z - \delta)}{\eta}\, dz = dv_x$

Leads to $-\displaystyle\int_0^z \frac{\rho g \cos\beta\,(z - \delta)}{\eta}\, dz = \int_0^{v_x} dv_x$

At $z = 0, v_x = 0$ (sticky condition)

Leads to $-\dfrac{\rho g \cos\beta\left(\frac{1}{2}z^2 - \delta z\right)}{\eta} = v_x$

경사면 유동의 전단 응력 및 속도 분포



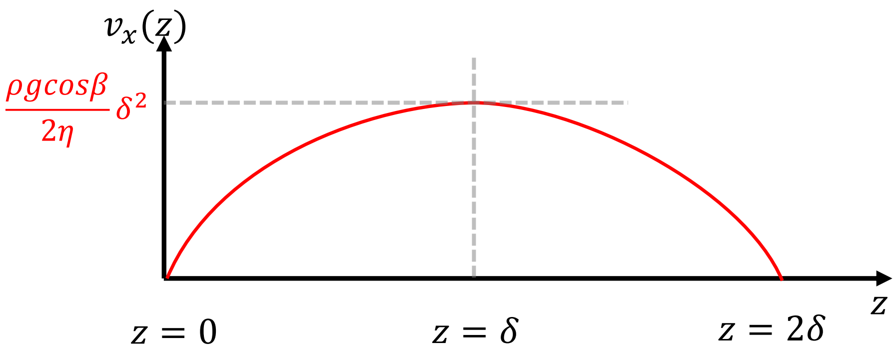
$$v_x(z) = -\frac{\rho g \cos\beta \left(\frac{1}{2}z^2 - \delta z\right)}{\eta} = \frac{\rho g cos\beta}{2\eta}(2\delta - z)z$$

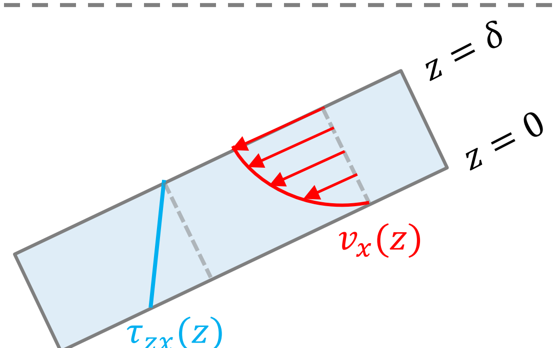
$\frac{dv_x(z)}{dz} = 0$ 이 되는 z 값은?

$$\tau_{zx}(z) = \rho g \cos\beta\,(z - \delta) = -\eta\frac{dv_x}{dz}$$

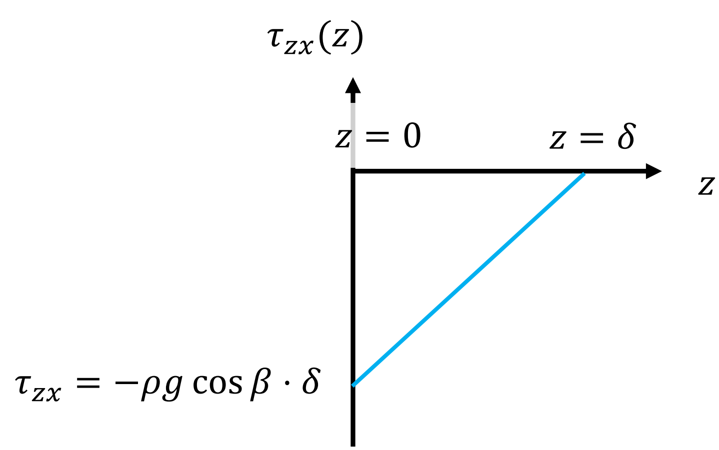
$z = \delta$ 일 때 $v_x(z)$ 가 maximum

$$v_x(z = \delta) = \frac{\rho g cos\beta}{2\eta}\delta^2$$





$$\tau_{zx}(z) = \rho g \cos\beta\,(z - \delta)$$



경사면 유동의 최대, 평균 속도 및 질량, 체적 유량

$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_x(z)dz\,dy}{\int_0^W \int_0^\delta dz\,dy}$$

Leads to

$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^W \int_0^\delta \frac{\rho g cos\beta}{2\eta}(2\delta - z)z dz\,dy}{\int_0^W \delta dy}$$

Leads to

$$\bar{v}_x = \frac{\frac{\rho g cos\beta}{2\eta}\int_0^W \left[\delta^3 - \frac{\delta^3}{3}\right] dy}{\delta W}$$

Leads to

$$\bar{v}_x = \frac{\frac{\rho g cos\beta}{2\eta}\left(\frac{2\delta^3}{3}\right) W}{\delta W}$$

Leads to

$$\bar{v}_x = \frac{\rho g cos\beta}{\eta}\left(\frac{\delta^2}{3}\right)$$

$$\max(v_x) = \frac{\rho g cos\beta}{2\eta}\delta^2$$

$$\bar{v}_x = \frac{2}{3}\max(\mathrm{v_x})$$

$$\dot{V} = \bar{v}_x \cdot W \cdot \delta = \frac{\rho g cos\beta}{\eta}\left(\frac{W\delta^3}{3}\right)$$

$$\dot{M} = \bar{v}_x \cdot W \cdot \delta \cdot \rho = \frac{\rho^2 g cos\beta}{\eta}\left(\frac{W\delta^3}{3}\right)$$

$$\dot{V} = \bar{v}_x \cdot A$$

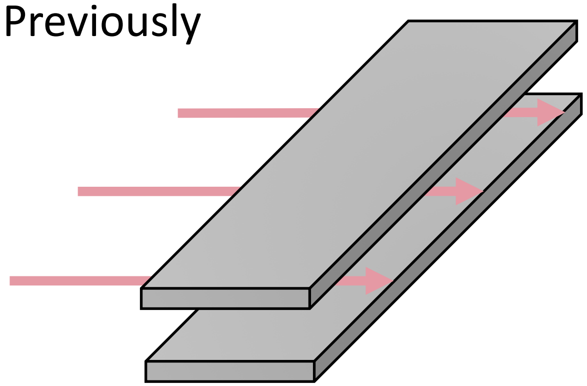
평균 체적 유량 속도
(average volume flow rate)

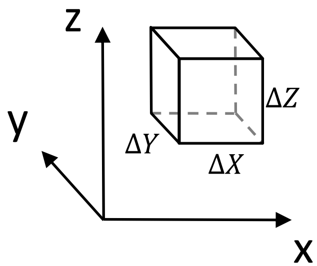
$$\dot{M} = \dot{V} \cdot \rho$$

평균 체적 유량 속도
(average volume flow rate)

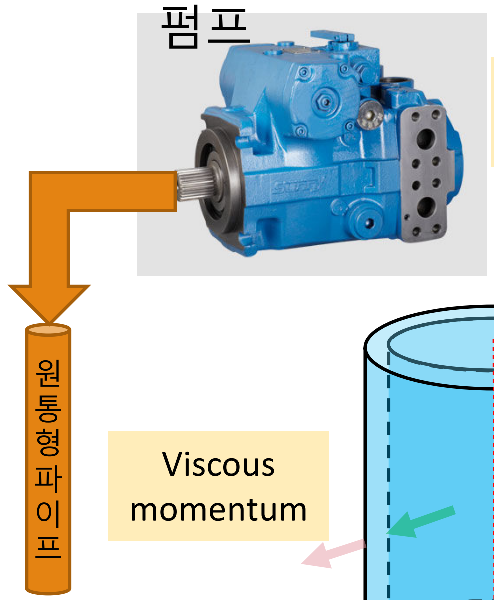
수직 원통형관 내의 중력과 외부 압력에 의한 유체 유동

Previously



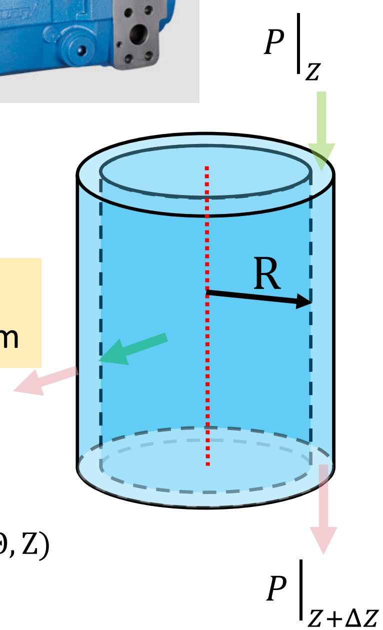


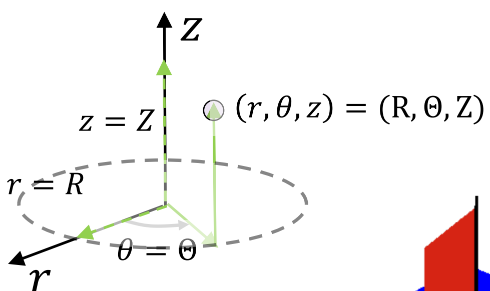
Cartesian coordinate system



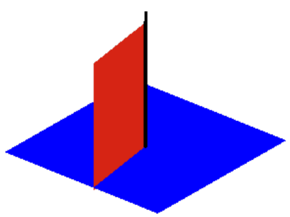
Convective momentum

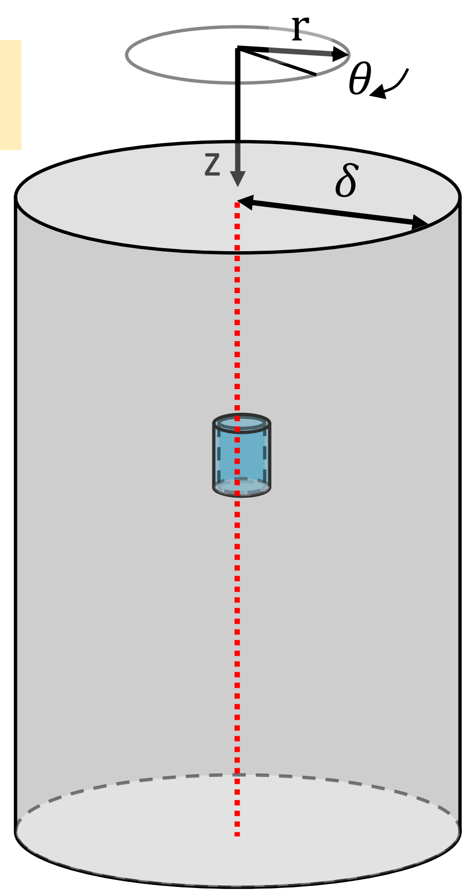
Viscous momentum





Cylindrical coordinate system





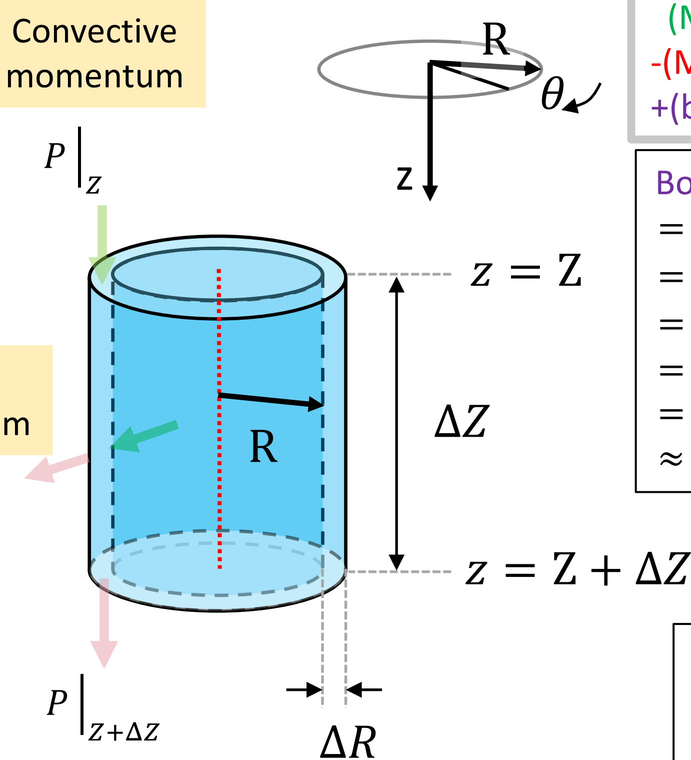
z축 기준으로 회전 대칭

Zhenhu PDC Hydraulic CO.,LTD
http://korean.pistonhydraulicpump.com/sale-3449946-a4vso-125-180-250-axial-piston-rexroth-hydraulic-pumps.html

수직 원통형관 내의 중력과 외부 압력에 의한 유체 유동의 수지식

Convective momentum

Viscous momentum



(Momentum rate transferred in)
-(Momentum rate transferred out)
+(body force applied)=0

(Viscous momentum rate transferred in)

$$= (\tau_{rz} \cdot 2\pi R \cdot \Delta Z)\Big|_{r=R}$$

Body force applied

$$= \mathrm{m} \cdot g = \rho \cdot g \cdot V$$
$$= \rho g\,(\text{바깥 원기둥 부피} - \text{안쪽 원기둥 부피})$$
$$= \rho g\{\pi(R+\Delta R)^2\Delta Z - \pi R^2 \Delta Z\}$$
$$= \rho g \pi\{(R+\Delta R)^2 - R^2\}\Delta Z$$
$$= \rho g \pi(2 \cdot R \cdot \Delta R - (\Delta R)^2)\Delta Z$$
$$\approx 2\rho g \pi \cdot R \cdot \Delta R \cdot \Delta Z \quad \because \mathrm{R}\Delta\mathrm{R} \gg (\Delta R)^2$$

(Viscous Momentum rate transferred out)

$$= \{\tau_{rz} \cdot 2\pi(R+\Delta R) \cdot \Delta Z\}\Big|_{\mathrm{r=R+\Delta R}} \approx \{\tau_{rz} \cdot 2\pi R \cdot \Delta Z\}\Big|_{\mathrm{r=R+\Delta R}}$$

(Convective Momentum rate in/out due to velocity

$$= \left(v_z\Big|_{z=Z}\rho - v_z\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right)\pi\{(R+\Delta R)^2 - R^2\}$$
$$= 0 \because \text{At steady state, } v_z \text{ is funtion of only r}$$

$$\left[(R \cdot \tau_{rz})\Big|_{r=R} - (R \cdot \tau_{rz})\Big|_{r=R+\Delta R}\right] 2\pi\Delta Z + \rho g \cdot 2\pi R \cdot \Delta R \cdot \Delta Z + \left(P\Big|_{z=Z} - P\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right) 2\pi R \cdot \Delta R = 0$$

Divide by $(2\pi\Delta R\Delta Z)$

$$\left[(R \cdot \tau_{rz})\Big|_{r=R} - (R \cdot \tau_{rz})\Big|_{r=R+\Delta R}\right] \cdot \frac{1}{\Delta R} + \rho g R + \frac{(P|_{z=Z} - P|_{z=Z+\Delta Z})R}{\Delta Z} = 0$$

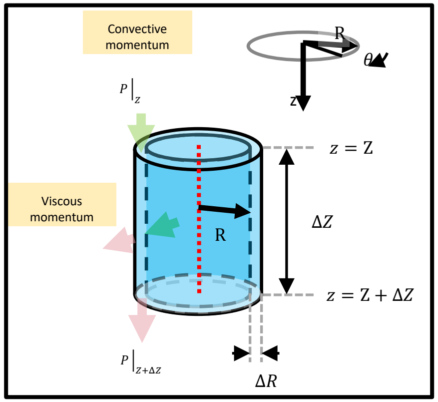
Rearrange the above and apply limits

$$-\frac{d(R \cdot \tau_{rz})}{\mathrm{d}R} + \rho g R - R\frac{dP}{\mathrm{d}Z} = 0$$

(Convective Momentum rate in/out due to ext. P gradient)

$$= \left(P\Big|_{z=Z} - P\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right)\pi\{(R+\Delta R)^2 - R^2\}$$
$$= \left(P\Big|_{z=Z} - P\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right)\pi(2R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2)$$
$$\approx \left(P\Big|_{z=Z} - P\Big|_{z=Z+\Delta Z}\right)\pi(2R \cdot \Delta R) \because R\Delta R \gg (\Delta R)^2$$

수직 원통형관 내의 중력과 외부 압력에 의한 유체 유동의 수지식



$$-\frac{d(R\cdot\tau_{rz})}{\mathrm{d}R}+\rho g R - R\frac{dP}{\mathrm{d}Z}=0$$

Integrate

$\tau_{rz}(R)$

$v_z(R)$

Use the Newtonian fluid rule and integrate

$$\tau_{rz}=-\eta\frac{dv_z}{dR}$$

$$-\frac{d(R\cdot\tau_{rz})}{\mathrm{d}R}+\rho g R - R\boxed{\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}Z}}=0$$

외부 펌프의 압력에 의한 파이프내 압력 구배

정상상태에서 P가 z축 방향으로 일정한 선형 구배 (즉 $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dZ}}=-\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{L}}$) 를 가진다고 가정하면…

$$-\frac{d(R\cdot\tau_{rz})}{\mathrm{d}R}+\rho g R + R\frac{\Delta P}{L}=0$$

$$\frac{d(R\tau_{rz})}{dR}=\left(\rho g+\frac{\Delta P}{L}\right)R$$

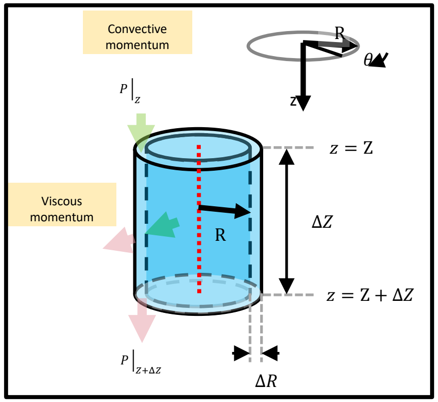
$$R\cdot\tau_{rz}=\left(\rho g+\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R^2}{2}+C_1$$

At $R=0, \tau_{rz}=0$

$$\tau_{rz}=\left(\rho g+\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2}+\frac{C_1}{R}$$

C_1 should be zero, otherwise $\tau_{rz}\to\infty$ at $R=0$

수직 원통형관 내의 중력과 외부 압력에 의한 유체 유동의 수지식



$$-\frac{d(R\cdot\tau_{rz})}{dR} + \rho g R - R\frac{dP}{dZ} = 0$$

Integrate

$$\tau_{rz}(R)$$

Use the Newtonian fluid rule and integrate

$$v_z(R)$$

$$\tau_{rz} = -\eta\frac{dv_z}{dR}$$

$$\tau_{rz} = \left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2}$$

$$\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2} = -\eta\frac{dv_z}{dR}$$

$$dv_z = -\frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2}}{\eta}dR$$

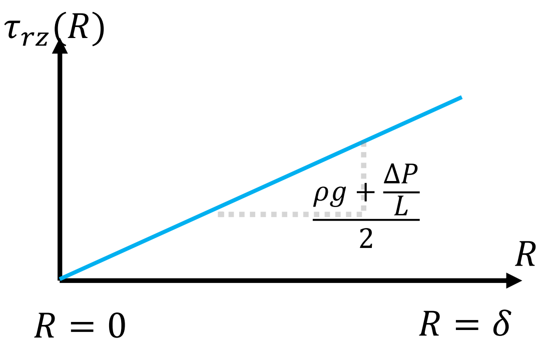
$$\int_0^{v_z} dv_z = \int_\delta^R -\frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2}}{\eta}dR$$

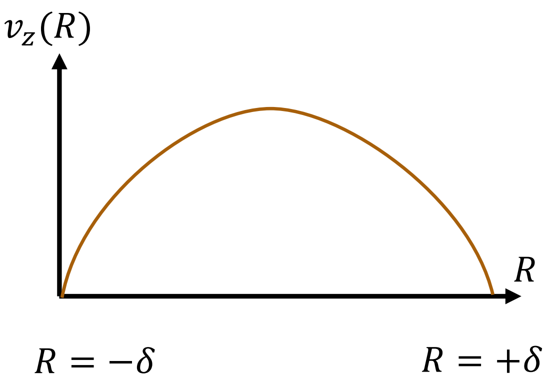
$$v_z = -\frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)(R^2 - \delta^2)}{4\eta}$$

전단 응력 및 속도 분포

$$\tau_{rz} = \left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\frac{R}{2}$$

$$v_z = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)(\delta^2 - R^2)}{4\eta}$$





Maximum v_z는?

$$v_z(R=0) = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\delta^2}{4\eta}$$

평균속도

$$v_z = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)(\delta^2 - R^2)}{4\eta}$$

평균 속도 $\bar{v}_z$?

$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} v_z \cdot R \cdot dR\ d\theta$$

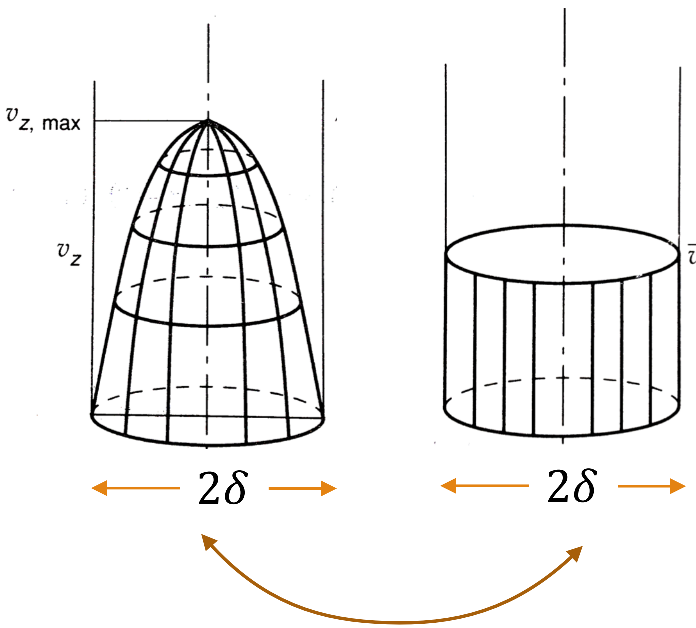
$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)(\delta^2 - R^2)}{4\eta} R \cdot dR\ d\theta$$

$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)}{4\eta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} (\delta^2 - R^2) R dR\ d\theta$$

$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)}{4\eta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \delta^2 R - R^3\ dR\ d\theta$$

$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)}{4\eta}\int_0^{2\pi} \frac{\delta^2\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\ d\theta$$

$$\bar{v}_z \pi \delta^2 = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)}{4\eta}\left(\frac{\delta^4}{4} 2\pi\right) = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\pi\delta^4}{8\eta}$$



두조건에서 속도 분포의 '체적' 이 동일한 조건을 사용하면 평균 속도 $\bar{v}_z$ 구할 수 있다.

$$\bar{v}_z = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\delta^2}{8\eta}$$

$$v_z(R=0) = \frac{\left(\rho g + \frac{\Delta P}{L}\right)\delta^2}{4\eta}$$

예제 2.4

- 밀도와 점도의 상대적인 영향을 조사하기 위해 25°C에서 0.08 m 의 직경을 가진 원통형관에서 기름, 물 및 공기의 유동을 개별적으로 고려하여 보자.

Data	viscosity $[Pa \cdot s]$	density $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Oil	0.8	888
Water	8.57×10^{-4}	997
Air	1.85×10^{-5}	1.177

층류 유동인 (Re=2100) 상태에서 수평관 내에서 각 유체의 최대 평균 속도를 생각해보자.

$$Re = 2100 = \frac{\bar{v}_x D\rho}{\eta} \rightarrow \bar{v}_x = 2100 \boxed{\frac{\eta}{D\rho}}$$

평균 유속은 일정한 직경의 관 내에 주어진 Re 수의 유동에 대해, $\frac{\eta}{\rho}$비율로 비례.

$\frac{\eta}{\rho}$를 동점도 (kinematic viscosity) 또는 ν로 표기 (단위: stoke = cm^2/s)

Oil:

$$\bar{v}_x = 2100\frac{0.8}{0.08\times888} = 23.65 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Water:

$$\bar{v}_x = 2100\frac{8.57\times10^{-4}}{0.08\times997} = 0.0226 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Air:

$$\bar{v}_x = 2100\frac{1.85\times10^{-5}}{0.08\times1.177} = 0.412 \left[\frac{m}{s}\right]$$

At RT,

기름 $9.01\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$

물 $8.60\times10^{-7}\,\frac{m^2}{s}$

공기 $1.57\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$

0.08 m 직경의 수평 파이프에 평균 유속 0.0226 $\frac{m}{s}$을 얻기위한 압력 강하를 생각해보자.

$$\bar{v}_z = \frac{\left(\cancel{\rho g} + \frac{\Delta P}{L}\right)\delta^2}{8\eta}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{\bar{v}_z 8\eta}{\delta^2}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\times0.0226\,[\frac{m}{s}]\eta}{0.04\times0.04\,[m^2]} = 113\,\eta\left[\frac{1}{m\cdot s}\right]$$