

유체 정역학 Fluid Statics

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부

정영웅



yjeong@changwon.ac.kr
<https://youngung.github.io>
<https://github.com/youngung>

유체 정역학 (流體靜力學), Fluid statics

- The study of fluids at rest; 정지 상태의 유체(fluid)에 대한 학문
 - 유체 정지 압력
 - 기압
 - 부력

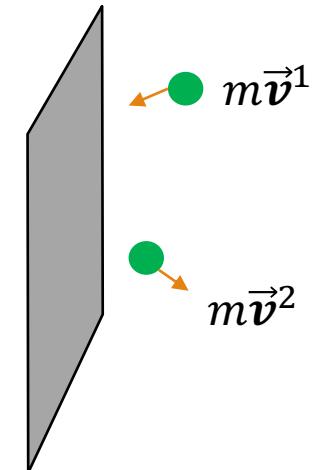


압력의 개념

- 기체를 담고 있는 용기의 벽에 가해진 힘으로 인해 압력 생성
- 압력은 기체 속 원자/분자가 벽과 충돌하여 생긴 운동량의 (시간에 따라 계속하여 발생하는) 변화에 기인
▶ 운동량 변화율 $\equiv \frac{\Delta \text{운동량}}{\text{시간}} = \frac{\Delta(\text{질량} \times \text{속도})}{\text{시간}} = \frac{\Delta(mv)}{t}$
- 단위? – SI system을 사용한다면..
▶ 운동량의 단위는 $\text{kg} \cdot \text{m/s}$; 시간의 단위는 second
▶ 따라서 운동량 변화율의 단위는 $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
▶ 위 단위는 힘의 단위로 알려진 Newton(N)과 같다.
▶ 즉, 운동량 변화율의 단위는 힘(force) 단위와 동일.

기체에 의해 용기의 벽에 가해진 힘은 기체 원자/분자가 용기의 벽과 충돌할 때 생기는 운동량의 변화 때문에 생긴다.

시간에 따른 운동량 변화률: 가상의 면에 작용하는 힘



$$\text{Force} = \frac{m\vec{v}^2 - m\vec{v}^1}{t}$$

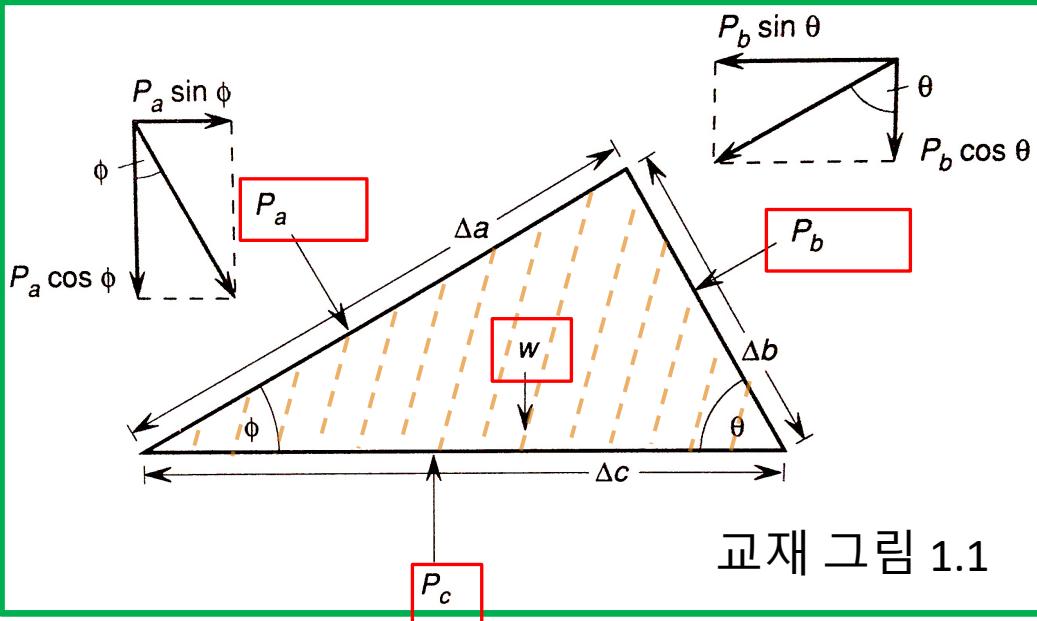
위의 결론은 기체, 액체와 같은 유체(fluid)에 공히 적용된다.



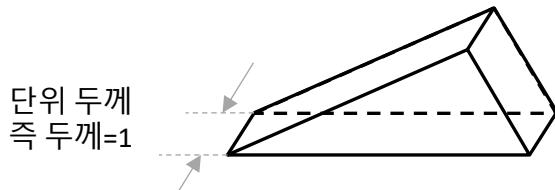
압력의 개념

정지유체; 정적(힘)평형 상태

- ▶ 정지 유체내의 어떤 임의의 점에서도 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.
- ▶ 위를 아래의 유체 요소(element)를 사용하여 증명

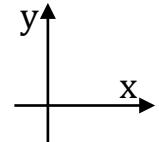


위 유체(빗금)는 중력장(gravity field)에 영향을 받고 있다



힘평형 상태

한 계(system)에서 vector로 표현된 힘은 '어느 방향'에서든 zero.



유체가 '힘평형' 상태라면 어느 방향으로든
힘 평형이 되어야 한다 – 모든 force
component들이 각각 zero

$$F_a = P_a \times \Delta a \times 1$$

$$F_a^x = F_a \sin \phi = P_a \cdot \sin \phi \cdot \Delta a$$

$$F_a^y = -F_a \cos \phi = -P_a \cdot \cos \phi \cdot \Delta a$$

$$F_b = P_b \times \Delta b \times 1$$

$$F_b^x = -F_b \sin \theta = -P_b \cdot \sin \theta \cdot \Delta b$$

$$F_b^y = -F_b \cos \theta = -P_b \cdot \cos \theta \cdot \Delta b$$

$$F_c = P_c \times \Delta c \times 1$$

$$F_c^x = 0$$

$$F_c^y = P_c \cdot \Delta c$$

$$w^y = -w \\ w^x = 0$$



압력의 개념

$$F^x = \sum_i F_i^x = F_a^x + F_b^x + F_c^x + w^x = 0$$

$$F^y = \sum_i F_i^y = F_a^y + F_b^y + F_c^y + w^y = 0$$

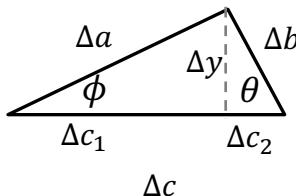


$$F^x = P_a \cdot \sin \phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \sin \theta \cdot \Delta b = 0$$

$$F^y = -P_a \cdot \cos \phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \cos \theta \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

□ A few more inputs considering the geometric features!

- $\sin \theta = \Delta y / \Delta b$
- $\cos \theta = \Delta c_2 / \Delta b$
- $\sin \phi = \Delta y / \Delta a$
- $\cos \phi = \Delta c_1 / \Delta a$



□ Weight (w; body force; 체적력):

$$\rightarrow w = mg = \rho g V = \frac{1}{2} \rho g \Delta c \Delta y$$

$$F^x = P_a \cdot \sin \phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \sin \theta \cdot \Delta b = 0$$

$$\rightarrow P_a \cdot \frac{\Delta y}{\Delta a} \cdot \Delta a - P_b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta b} \cdot \Delta b = 0$$

$$\rightarrow P_a - P_b = 0 \therefore P_a = P_b$$

$$\rightarrow -P_a \cdot \Delta c + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$F^y = -P_a \cdot \cos \phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \cos \theta \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$\rightarrow -P_a \cdot \frac{\Delta c_1}{\Delta a} \cdot \Delta a - P_a \cdot \frac{\Delta c_2}{\Delta b} \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$\rightarrow -P_a \cdot \Delta c_1 - P_a \cdot \Delta c_2 + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$(P_c - P_a) \Delta c - \frac{1}{2} \rho g \Delta c \Delta y = 0$$

$$\rightarrow P_a + \frac{1}{2} \rho g \Delta c \Delta y / \Delta c = P_c$$



압력의 개념

$$P_a = P_b$$

$$P_a + \frac{1}{2} \rho g \Delta y = P_c$$

우리가 사용한 유체 요소가 실제 유체의 ‘한점’을 모형화 (modeling) 한 것이므로, 무한히 작은 부피(체적)을 대표하여

$$P_a \approx P_c$$

정지 유체내의 어떠한 점의 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.

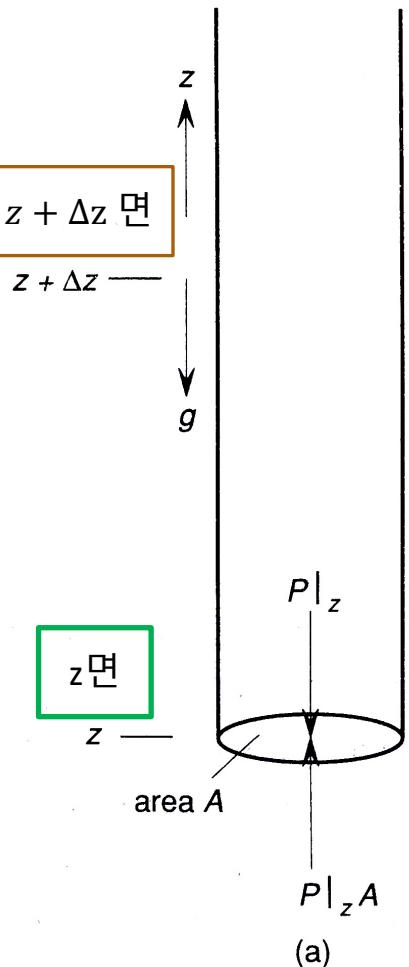
정지 유체내에 유일한 힘은 세면의 수직방향으로 작용하는 힘 (앞에서 F_a, F_b, F_c 으로 표기했던 힘 요소) 그리고 중력장에 의한 무게힘 w (**체적력**; body force) 뿐이다.

앞서 살펴본 바에 따르면, 유한한 크기를 가진 유체 요소에 작용하는 힘 F_a, F_b, F_c, w 를 살펴보았고, 그 중에서 w 는 **위치에 따라 변한다.**



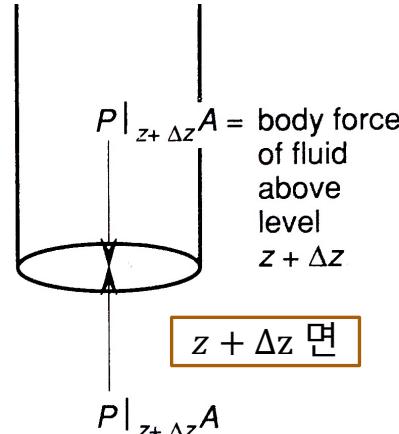
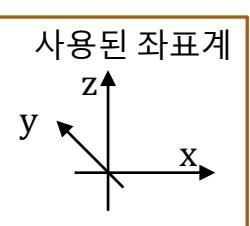
위치에 따라 변하는 w (유체 기둥의 예)

중력장(\vec{g})내의 z면 위에 위치한 유체기둥



$P|_z A$: 중력장에 의해
z 면에 작용하는 z축
방향 수직 압력

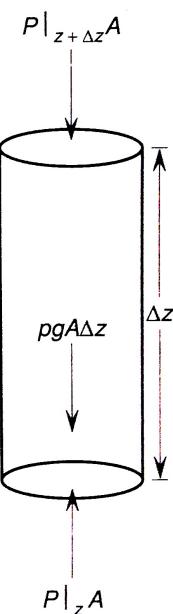
$P|_z \times A$: z 위치에서
작용하는 힘



z 면 과 $z + Δz$ 면

사이에서 z축 방향으로 수직
압력 차이가 존재한다.

- 수직 압력차이는 수직 '힘' 차이로
이어진다.
- 이런 힘 차이는, 중력장에 놓인
유체가 중력작용 방향으로
'두께차' $Δz$ 를 가질 때 생긴다.



Q: $Δz$ 만큼의 두께차이로 인해 달라지는
수직(압)력 차이는 어디에 기인하나?

A: $Δz$ 만큼의 두께 사이에 끼인 유체에
작용하는 중력장의 힘 (즉 무게)

따라서,

$$P|_{z+Δz} \cdot A - P|_z \cdot A = -ρ \cdot \vec{g} \cdot V = -ρ \cdot \vec{g} \cdot A \cdot Δz$$

위를 rearrange:

$$\frac{P|_{z+Δz} \cdot A - P|_z \cdot A}{Δz} = -ρ \cdot \vec{g} \cdot A \rightarrow \frac{P|_{z+Δz} - P|_z}{Δz} = -ρ \cdot \vec{g}$$

$$\frac{dP}{dz} = \lim_{Δz \rightarrow 0} \frac{P|_{z+Δz} - P|_z}{Δz} = -ρ \cdot \vec{g}$$

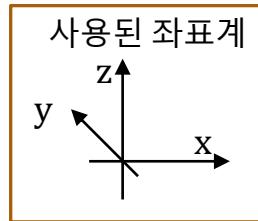
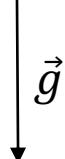
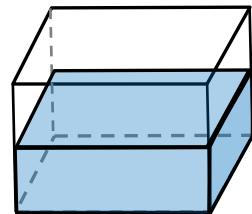


Recap, pause, break

- 압력의 origin (분자/원자의 시간당 운동량의 변화; 운동량 변화율)
- 중력장내에 위치한 유체는 중력장에 의해 중력장 방향으로 '체적힘'을 받게 된다.
- 유체 기둥 모형을 이용하여 중력장에 의한 체적힘을 유체의 밀도(ρ)와 중력장의 세기 (\vec{g} , 즉 중력 가속도)를 사용하여 나타내었더니, 다음의 결론을 얻었다:

➤ $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot \vec{g}$

- 중력장 방향으로 작용하는 유체내의 압력 P 는 중력장이 작용하는 방향(앞서 기준이 되는 좌표계의 z축은 g 방향과 반대로 설정했었다.)으로 이동할 수록 점점 커진다.



$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$



Application to atmosphere

□ 대기 (atmosphere)



만약 대기가 이상기체
거동을 한다면?

$$PV = \frac{RT}{M}$$

만약 대기가 이상기체
거동을 한다면?

P: pressure

V: 단위 질량당 부피 ($= 1/\rho$)

R: 기체 상수

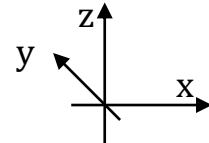
T: 온도 (절대 온도)

M: 기체의 분자량

$$PV = \frac{RT}{M}$$



$$\rho = \frac{1}{V} = \frac{PM}{RT}$$



$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$



$$\frac{dP}{dz} = -g \frac{PM}{RT}$$



$$\frac{dP}{P} = -g \frac{M}{RT} dz$$



이상기체 방정식

□ $PV = nRT = Nk_B T$

- P: Pressure of the gas
- V: Volume of the gas
- n: the amount of substance of gas (the number of moles; 몰수)
- N: The number of gas molecules ($N_A \cdot n$; 아보가드로의 수 × 몰수)
- k_B : Boltzmann constant
- T: the absolute temperature of the gas.

□ Molar form:

- 기체의 '량'을 정확하게 나타내기 위해서 몰수 대신, 정확한 질량을 사용할 수 있다.
- 질량(m)은 분자량 (기호 M; 단위 g/mol^{-1}) 곱하기 몰수(n)로 나타낼 수 있다.
 - ❖ $m = M \cdot n$
 - ❖ $n = m/M$

□ $PV = nRT \rightarrow PV = \frac{m}{M} RT \rightarrow P \left(\frac{V}{m} \right) = \frac{1}{M} RT$

- 여기서 $\frac{V}{m}$ 를 단위 질량 m에 해당하는 부피(\bar{V})로 나타내면 $P\bar{V} = \frac{1}{M} RT$
- 그리고 $\frac{1}{\bar{V}} = \frac{m}{V} = \frac{1}{\rho}$ 로 표현 가능.



Application to atmosphere

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT} dz$$

• 온도, g 가 z 에 무관하다 가정

• At $z = 0$, $P = P_0$

• At $z = z$, $P = P$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{gM}{RT} dz$$
$$= -\frac{gM}{RT} \int_0^z dz$$



$$\ln(P/P_0) = -\frac{gM}{RT} z$$

또는

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{gM}{RT} z\right)$$



기압 공식 (barometric formula)

- 온도는 z 에 영향을 받는다 (온도는 높이 올라갈 수록 떨어진다)

- 예를 들어 1000m 올라 갈 수록 6.5°C 만큼 RT 에서 감소한다면, 다음과 같이 온도 T 는 z 에 대한 함수로 표현 가능하다:

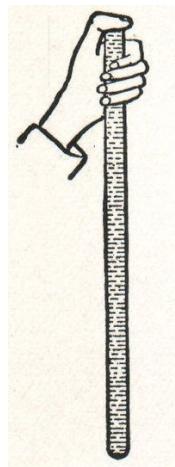
$$T(z) = 298 - \frac{6.5}{1000} z$$



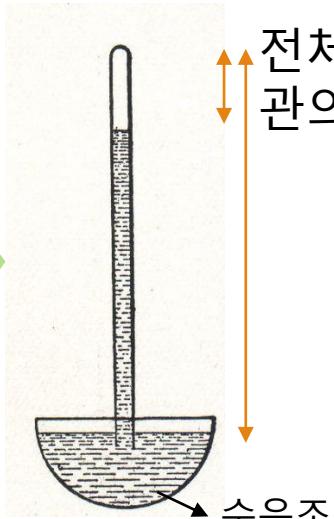
$$\frac{dP}{P} = -\frac{gM}{R \left(298 - \frac{6.5}{1000} z\right)} dz$$



Torricelli experiment



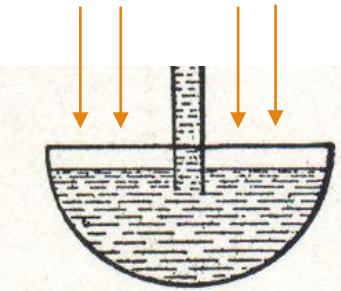
뒤집어



수은이 가득찬 실린더

전체 관에 비해서, 비어있는
관의 길이가 얼마나 긴지 측정

아하! 수은조 내의 대기와의
경계면(≈자유표면)에
작용하는 대기압에 의해
수은이 '정지'해 있군!



다양한 대기압에서
반복시에 빈 관의
길이가 변한다. 왜?

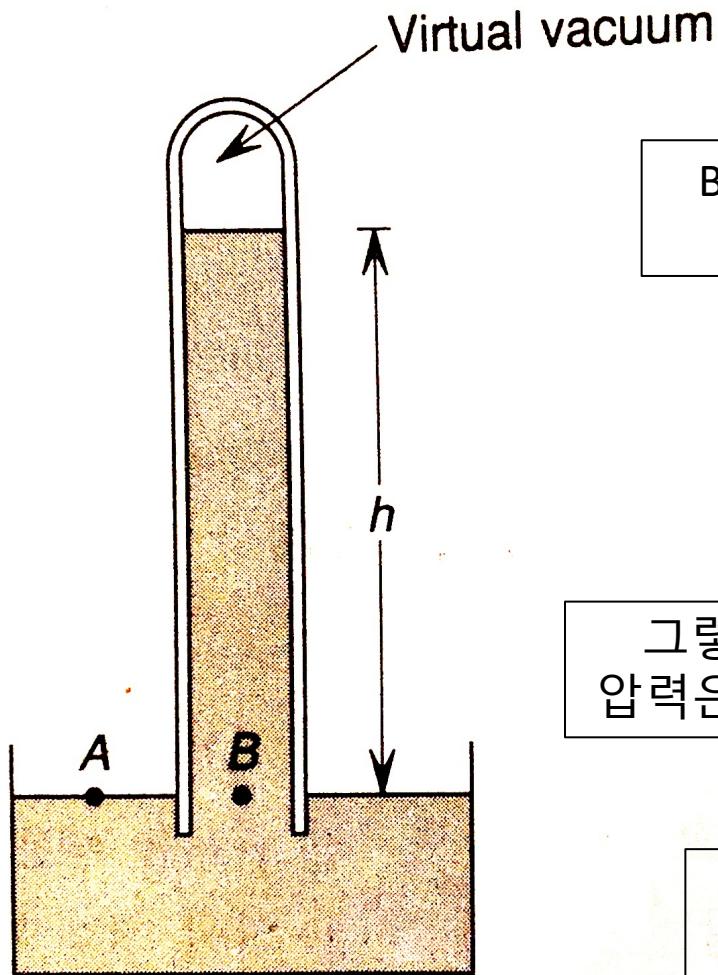
위 수은은 중력장내에서 '정지'한 유체이다.
수은이 정지해 있는 것으로 보아 경계표면의
대기압과, 관내의 수은에 작용하는 중력 사이에
힘평형이 있구나!

자유표면 (free surface): 압력이
작용하지 않는 면; 혹은 압력이
무시해도 될만큼 적거나,
효과적이지 않은 면

https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli



Torricelli experiment



Virtual vacuum

B지점에서의
유체 압력

대기와의 경계표면 A에
작용하는 대기압

따라서, B지점의 압력을 구하여
대기압을 측정할 수 있다!!

그렇다면, B지점의
압력은 어떻게 구하나?

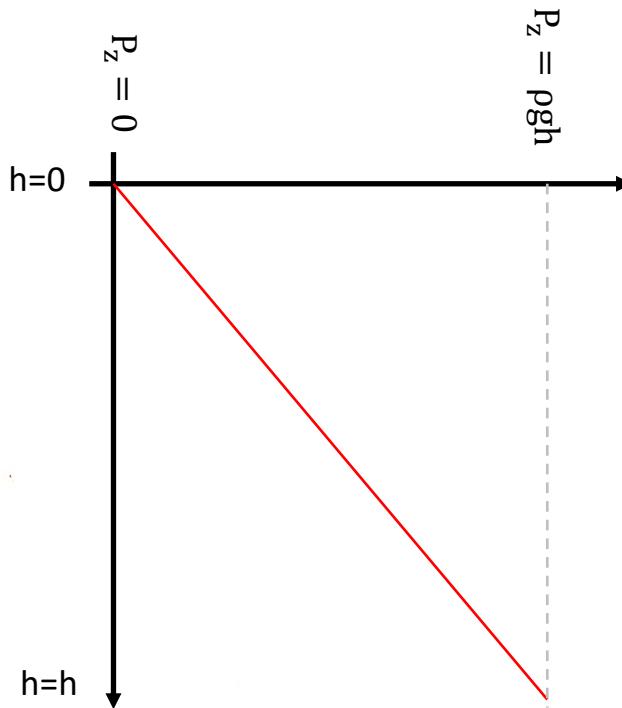
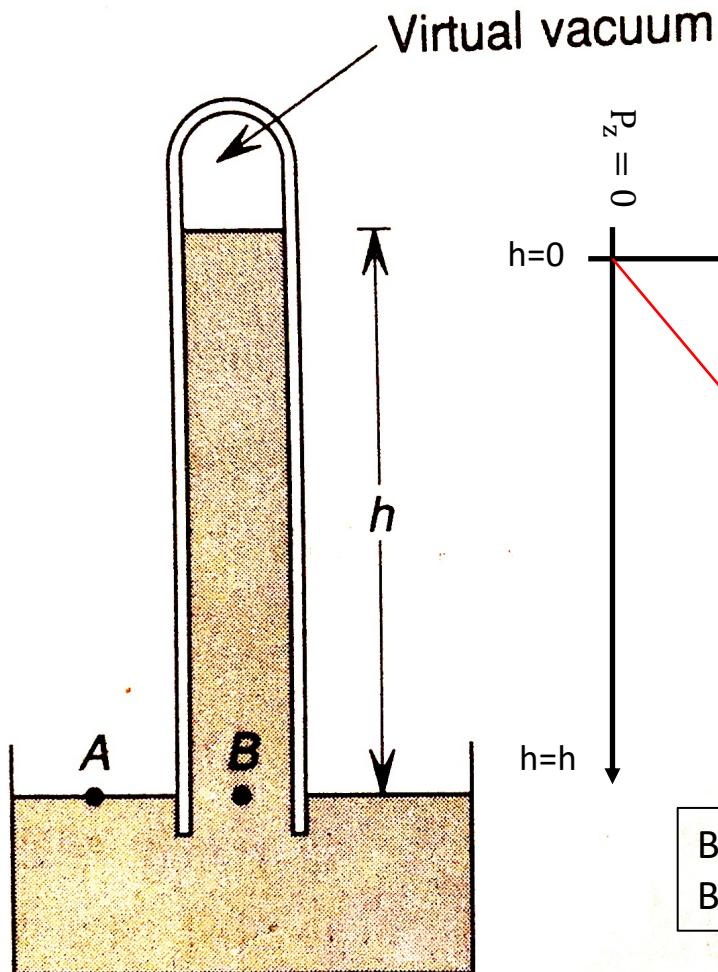
바로, B지점위로 실린더
내에 존재하는 수은기둥에
작용하는 중력(무게)과
관련.

수은이 비압축성(incompressible) 액체라면
높이(압력)에 상관없이 밀도가 일정

B지점에서의 체적력 = $mg = \rho \cdot \text{area} \cdot \text{height} \cdot g$



Torricelli experiment



h 높이의 관내 '자유표면'에서의 압력=0

B지점에서의 z 방향 체적력(F_z) = $mg = \rho \cdot \text{area} \cdot \text{height} \cdot g$
B지점에서의 z 방향 압력: $P_z = F_z/\text{area}$

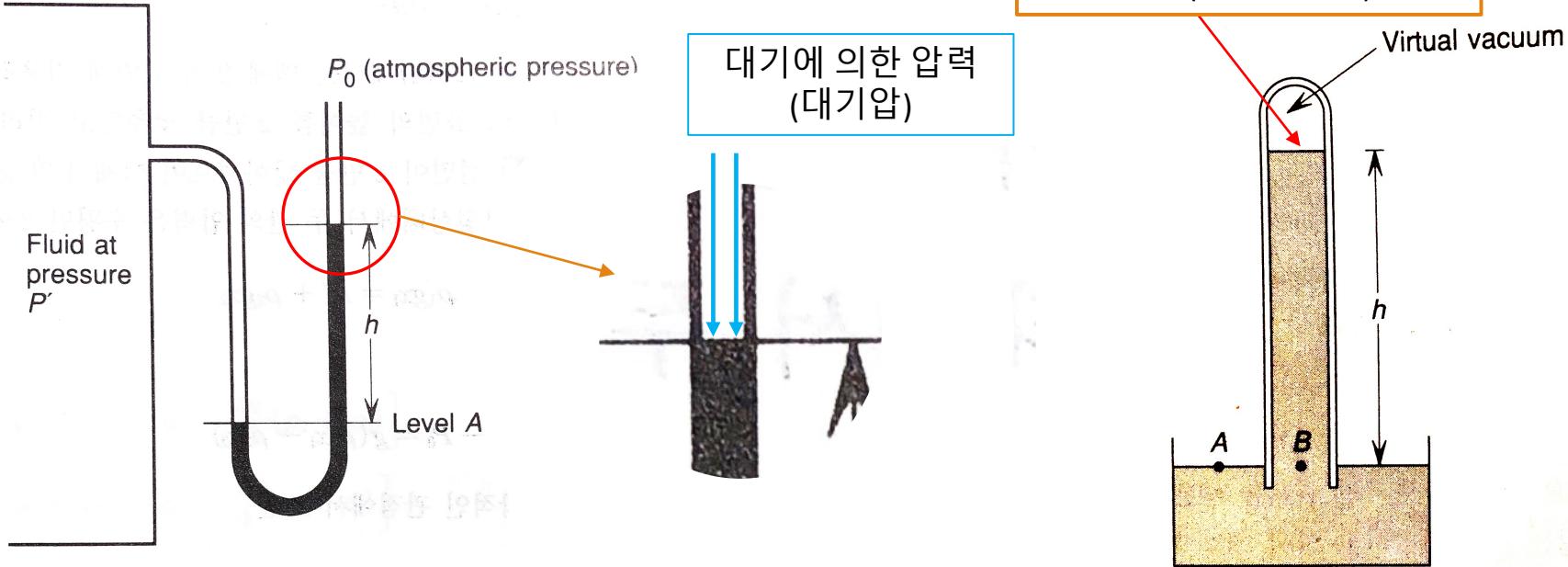
수은의 밀도, 그리고 cylinder의 단면적(area)을 안다면,
수은주 기둥의 높이로 대기압 측정 할 수 있다!



게이지 압력, 절대 압력



□ 타이어의 압력을 측정하는 압력계는, 타이어 내부의 공기압을 측정하는 것이 아니라, 타이어 내부의 공기압과 측정하고 있는 환경에서의 대기압 사이의 차이를 측정하는 것이다.

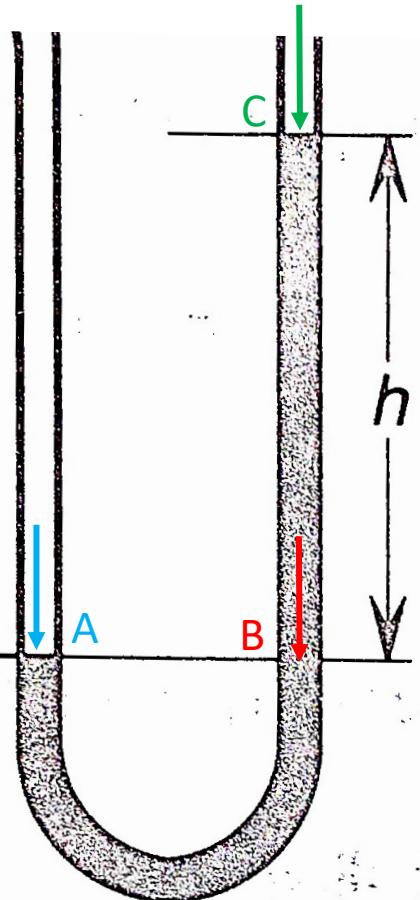


게이지 압력, 절대 압력

중력장 (g) 작용 방향



P_0 : 대기압



P₁:
타이어 내부

A, B 위치에서 같은 단면적을 가지므로,
두 지점사이의 힘평형 조건은 압력평형
조건으로 생각할 수 있다 ($F=PxA$)

$$B \text{ 지점이 } h \text{ 높이만큼의 } C \text{에서의 } P_0 \text{ 대기압 } + \text{ 수은이 주는 체적력} =$$

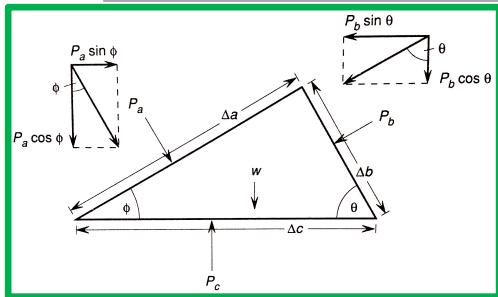
$$P_1 = \rho gh + P_0$$

사실, 압력계는 ρgh 를 통해 $P_1 - P_0$ 값을 측정하며, 이는 대기압과의 '상대적' 압력 크기 차이이다. 이를 '게이지(gauge) 압력'이라 한다.

타이어의 절대 압력값은 P_1 으로 gauge 압력에 대기압을 더해서 구할 수 있다.

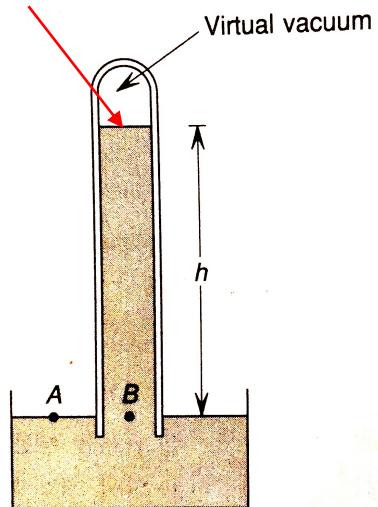


Recap



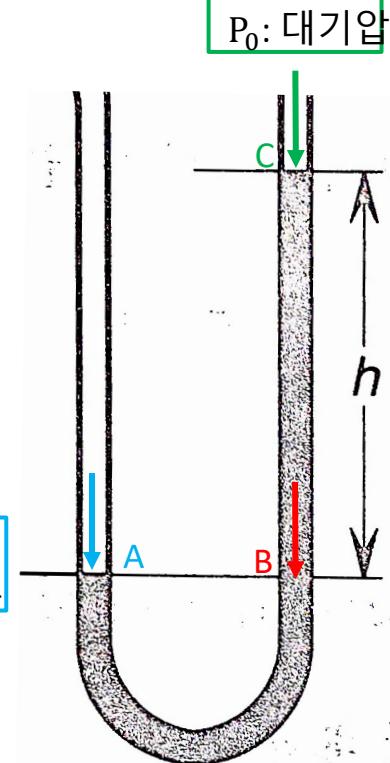
정지 유체내의 어떤
임의의 점에서도 압력은
모든 방향으로 같은 값을
가진다.

진공아래; 표면에 작용하는
압력 없음 (free surface)



중력장 (g)
작용 방향

P_1 :
타이어 내부

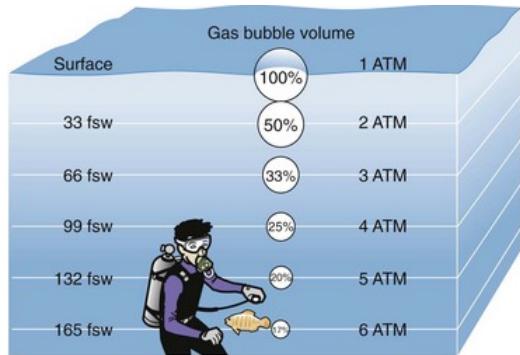


Reading assignment: 두 가지 섞이지 않은 액체로 된 압력계 p16-p17

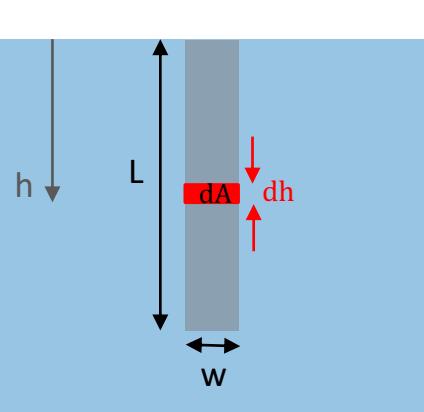
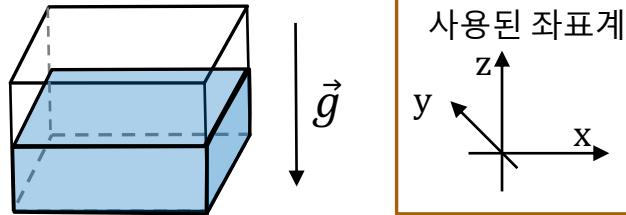


수압

□ 다이버(diver)들이 느끼는 수심에 따른 압력 변화?



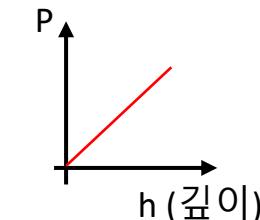
얇은 판



At free surface: $P_z = 0$

At h , what is P_z ? ($P_z = \rho gh$)

At h , What is P_x ? What is P_y ?



y 방향으로 판에 작용하는 힘 (F_y)?

$$dF_y = P \cdot dA$$

박판 전체에 가해지는 '평균 압력'은?

$$\text{전체 힘}/\text{판의 넓이} = \frac{\rho gwL^2}{2} / (wL) = \frac{\rho gL}{2}$$

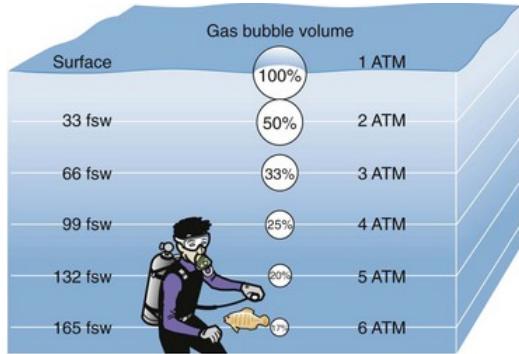
박판의 길이 반쯤에서
작용하는 수압과 같다

$$\begin{aligned} F_{\text{total}} &= \int dF_y = \int_A P \cdot dA \\ &= \int_A P dA = \int_{h=0}^{h=L} P(h) w dh \\ &= \int_{h=0}^{h=L} \rho \cdot g \cdot h \cdot w \cdot dh \\ &= \rho gw \int_{h=0}^{h=L} h dh = \frac{\rho gwL^2}{2} \end{aligned}$$

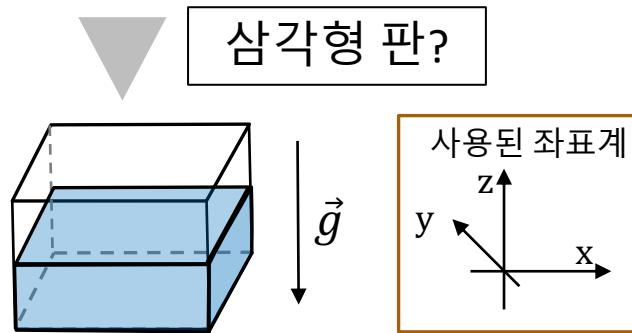


수압

□ 다이버(diver)들이 느끼는 수심에 따른 압력 변화?



삼각형 판?



삼각형 판 전체에 가해지는 '평균 압력'

$$P_{avg} = \frac{\rho g L}{3}$$

풀이 과정은
교재 참고

박판 전체에 가해지는 '평균 압력'은?

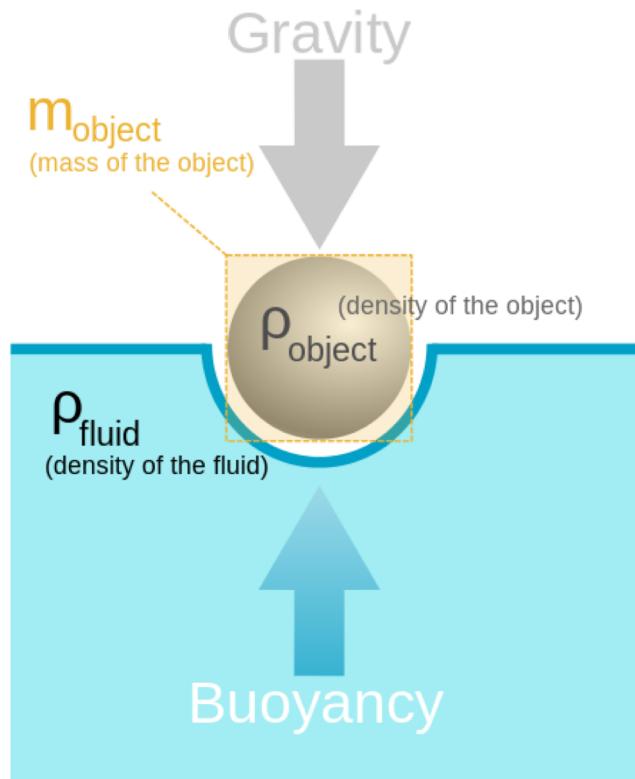
$$P_{avg} = \frac{\rho g L}{2}$$

아하! 수평판에 작용하는 평균 압력은
판의 무게 중심(centroid)에 작용하는
(국소) 압력값과 같구나!



부력 (浮力; buoyancy)

Any object, wholly or partially immersed in a fluid, is buoyed up by a force equal to the weight of the fluid displaced by the object



Archimedes' principle



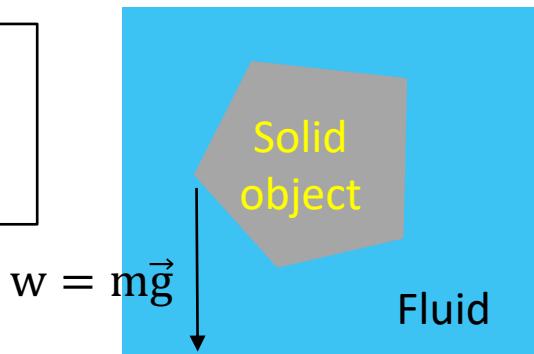
액체 상태의 수은 위에 British pound coin이 부력에 의해 떠있다.

<https://en.wikipedia.org/wiki/Buoyancy>



Archimedes principle

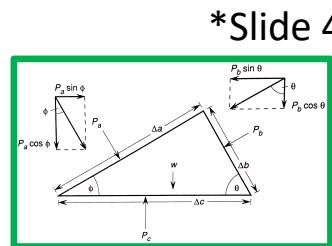
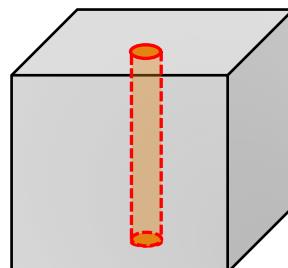
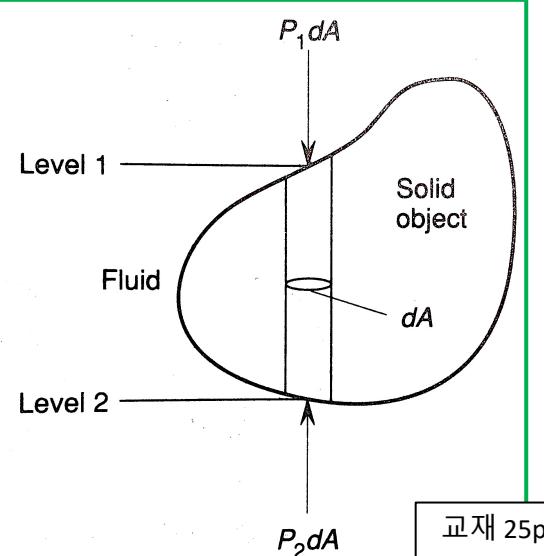
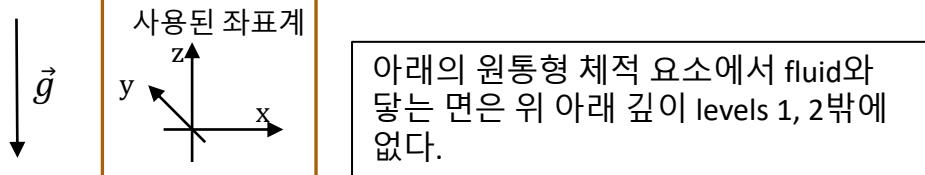
관찰: 물속에서는 무거운 물건을 들어올리는게 더 쉽다.
왜?



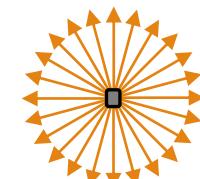
Solid는 중력장의 영향으로 아래로 가라 앉으려는 힘이 작용

물체가 가볍다는 느껴진다는 것은, 무게에 반대 방향으로 떠올리려는 부력 작용하기 때문이다!

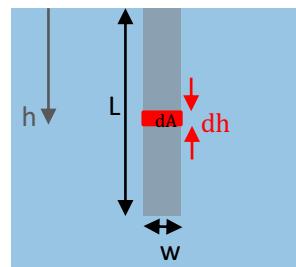
그렇다면 그 부력은 얼마만큼(정량적으로) 작용하는 건가?



정지 유체내의 어떤 임의의 점에서도 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.



*Slide 17

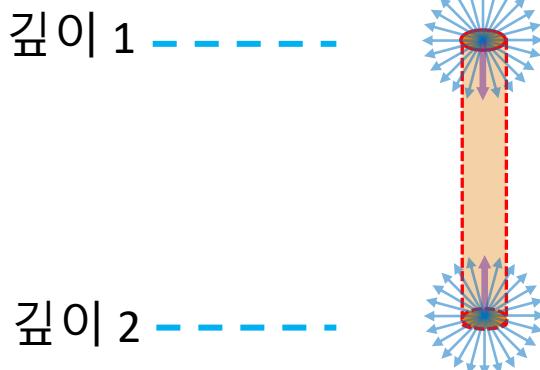
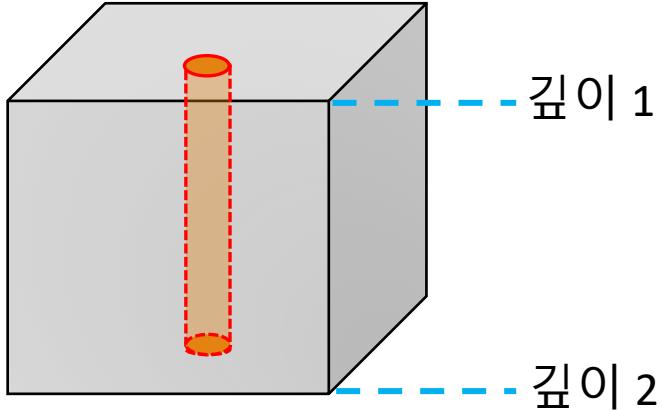


$$F_{\text{total}} = \int dF_y = \int P \cdot dA$$

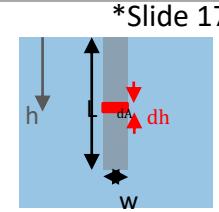


부력

유체에 잠긴 상자의 기둥 체적
요소에 작용하는 부력 구하기



$$dF_z = P_z dA$$



*Slide 17

$$\begin{aligned} F_{\text{total}} &= \int dF_y \\ &= \int_A P \cdot dA \end{aligned}$$

체적 속의 기둥에 실제로
위(z방향)으로 유압에 의해 작용하는
힘은 위아래 두 면 뿐이다.

기둥 요소에 전체에 작용하는 유앞에
의한 '떠오르는 방향의 힘 요소':

$$dF_z = P_z(\text{at level 1}) \cdot dA + P_z(\text{at level 1}) \cdot dA$$

$$= P_2 dA - P_1 dA$$

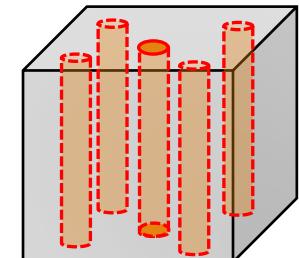
$$= \rho g h_2 dA - \rho g h_1 dA$$

$$F = dF_z^{(1)} + dF_z^{(4)} + dF_z^{(3)} \dots$$

$$= \rho g (h_2 - h_1) dA$$

$$= \rho g dV$$

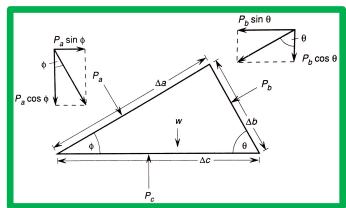
$$F_z = \int_V dF_z = \int_V \rho g dV = \rho g V$$



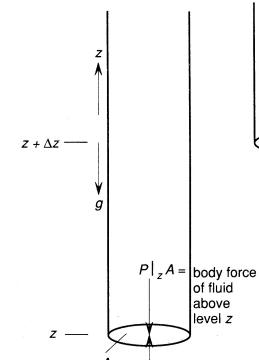
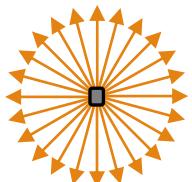
Recap

기체에 의해 용기의 벽에 가해진 힘은 기체 원자/분자가 용기의 벽과 충돌할 때 생기는 운동량의 변화 때문에 생긴다.

*Slide 4



정지 유체내의 어떤
임의의 점에서도
압력은 모든 방향으로
같은 값을 가진다.

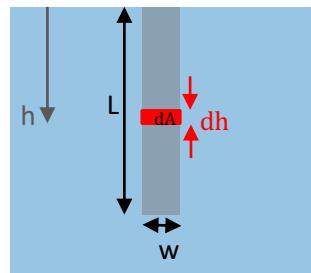


$$\ln(P/P_0) = -\frac{gM}{RT}z$$

또는

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{gM}{RT}z\right)$$

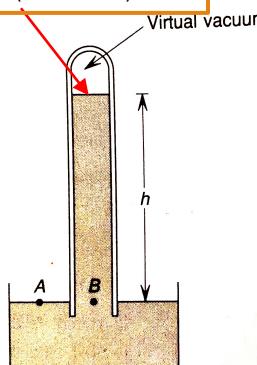
*Slide 17



$$P = \rho gh$$

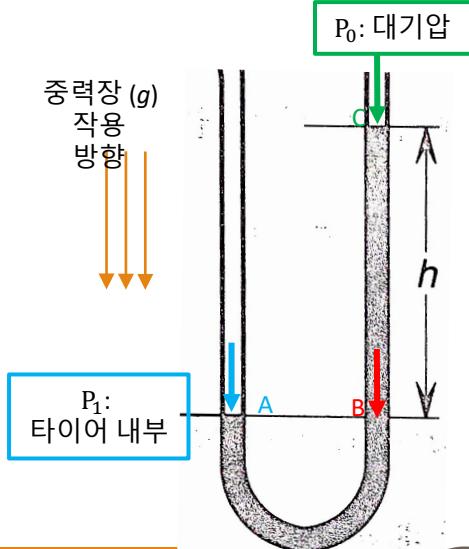
$$F_z = \int_V dF_z = \int_V \rho g dV = \rho g V$$

진공아래, 표면에 작용하는
압력 없음 (free surface)



중력장 (g)
작용
방향

P₁: 타이어 내부



연습 문제 풀이

□ 예제 1.1

□ 사각형 금속 물탱크는 수면에서 아래로 1m 지점에 유리창 가지고 있다.

□ 이때, 1000 kg/m^3 밀도의 물이 창에 작용하는 힘은?

$$\square P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\square F = \int_A P dA$$

