

# Macroscopic Plasticity and Yielding

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

창원대학교 신소재공학부

[YJEONG@CHANGWON.AC.KR](mailto:YJEONG@CHANGWON.AC.KR)

연구실: #52-208    전화: 055-213-3694

HOME PAGE: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Recap 1

---

- Stress/strain
- Yield criterion (as a function of stress state) – yield functions
  - Tresca
  - von Mises
- Yield surface/ yield locus in various subsets of stress space (principal, pi-plane ...)
- Effective stress / effective strains
- Plasticity independent of hydrostatic pressure (means tress)
  - Deviatoric stress space

# Recap 2

---

- Uniaxial tension test
  - Mechanical properties that can be obtained from uniaxial tension tests such as
  - YS, TS, Poisson ratio, Elastic modulus,  $r$  (단면 가공도, area of reduction in process) , %EL, %RA, toughness ...
- Necking and pre- and post-necking
  - Instability – Considere's criterion
  - Bridgmann method (correction)
- Other mechanical tests
  - Direct compression
  - Bulge
  - Plane-strain compression test
  - Torsion tests
- Hollomon equation
  - Effective stress-effective strain obtained from various mechanical tests.

# Outline

---

- Uniaxial tension test and work hardening
- A few mechanical properties
  - %EL
  - %RA
- Engineering stress vs. engineering strain curve / true stress vs. true strain curve
- Mathematical model for work-hardening (Hollomon equation)
- Necking
- Other mechanical tests to avoid necking
  - Compression
  - Bulge tests
  - Plane-strain compression (rolling)
  - Torsion

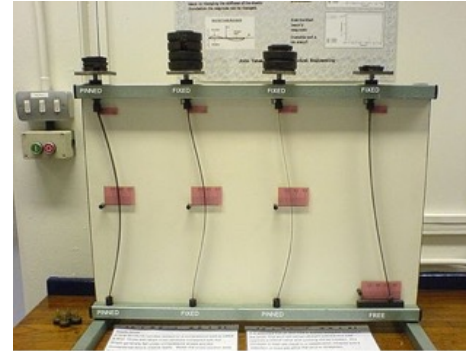
# Intro

---

- 앞서 우리는 일축 인장 시험 중 necking이 발생하여 가공경화거동의 측정이 특정한 변형률 이후로는 이루어질 수 없음을 배웠다.
- 그 대안으로써 다음과 같은 시험법에 대해 살펴보았다.
  - Direct compression test
  - Bulge test
  - Plane-strain compression test
- 위의 시험법을 통해서 (일축 인장 보다) 더 많은 소성 변형을 '안정적'으로 부과하여 가공경화거동을 더욱 높은 변형률까지 측정할 수 있음을 살펴보았다.
- 금속을 어느 정도 변형시킬 수 있는지는 소성 가공에서 매우 중요한 질문이다.  
따라서 소성의 '한계점'을 결정하는 요인을 살펴볼 필요가 있다.

# Intro

- 수직한 기둥에 충분히 큰 ‘압축’ 응력이 작용하면, buckling (좌굴)이 발생할 수 있다. Column이 unstable해지는 critical load가 존재 (Euler)



Euler의 critical load는  $\sigma_{cr} = \frac{\pi EI}{(KL)^2}$   
E: elastic modulus  
I: minimum area moment of inertia  
L: unsupported length of column  
K: column effective length factor

압축 뿐만 아니라, 다양한 응력 상태 및 구조물의 기하학적인 형태로 인해 instability 발생 가능하다. 또한 탄성 구간 뿐만 아니라, 소성 변형 구간에서도 instability 발생한다. 이번 강의에서 우리는 소성변형 구간에서 발생하는 instability 현상을 몇몇 역학시험하에서 면밀히 살펴볼 것이다.

# General approach to instability – uniaxial tension

---

- 본 강의에서 우리는 Hollomon equation으로 금속의 변형 경화를 설명하고 있다.
- $\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$  (Hollomon equation)
- 그런 조건아래에서 많은 경우 instability 조건들은 위의  $n$ 값에 대한 함수로 나타난다.
- 이러한 함수는 매우 유용하다. 여러분들이 이 함수를 안다면, 여러분들은
  - Instability가 예상되는 지점까지 발생하는 '균일한' 변형률이  $n$  값과 관계있기 때문이다. (추후에 도출할 것이다.)
  - 이를 통해 불안정성이 예상되는 실제 하중(Force)를 얻을 수 있다.
- 다음장에서부터 일축 인장의 예를 더욱 자세히 다뤄보자.

# Plastic instability in uniaxial tension

- Ductile 한 금속의 인장시험에서 necking (혹은 plastic instability의 시작점, 혹은 불균일 변형의 시작점)은 시험시에 '최대하중'이 발생하는 점과 일치한다. 최대 하중이 유효응력과 단면적에 대해 표현이 하자면

- $\bar{\sigma} = \frac{F}{A}$  를 통해  $F = \bar{\sigma}A$  (1)

- 최대의 하중은  $dF = 0$  조건에서 발생한다. (1)에서

- $dF = \bar{\sigma}dA + Ad\bar{\sigma} = 0$

- 따라서  $\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = -\frac{dA}{A} = d\bar{\epsilon}$

- 이는  $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\sigma}$  (2)

- 조건 (2)를 Hollomon equation ( $\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$ )에 대입하기 위해 우선 flow stress를 strain에 대해 미분하면 다음을 얻는다:

- $d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon} = nK\bar{\epsilon}^{n-1}$  (3)

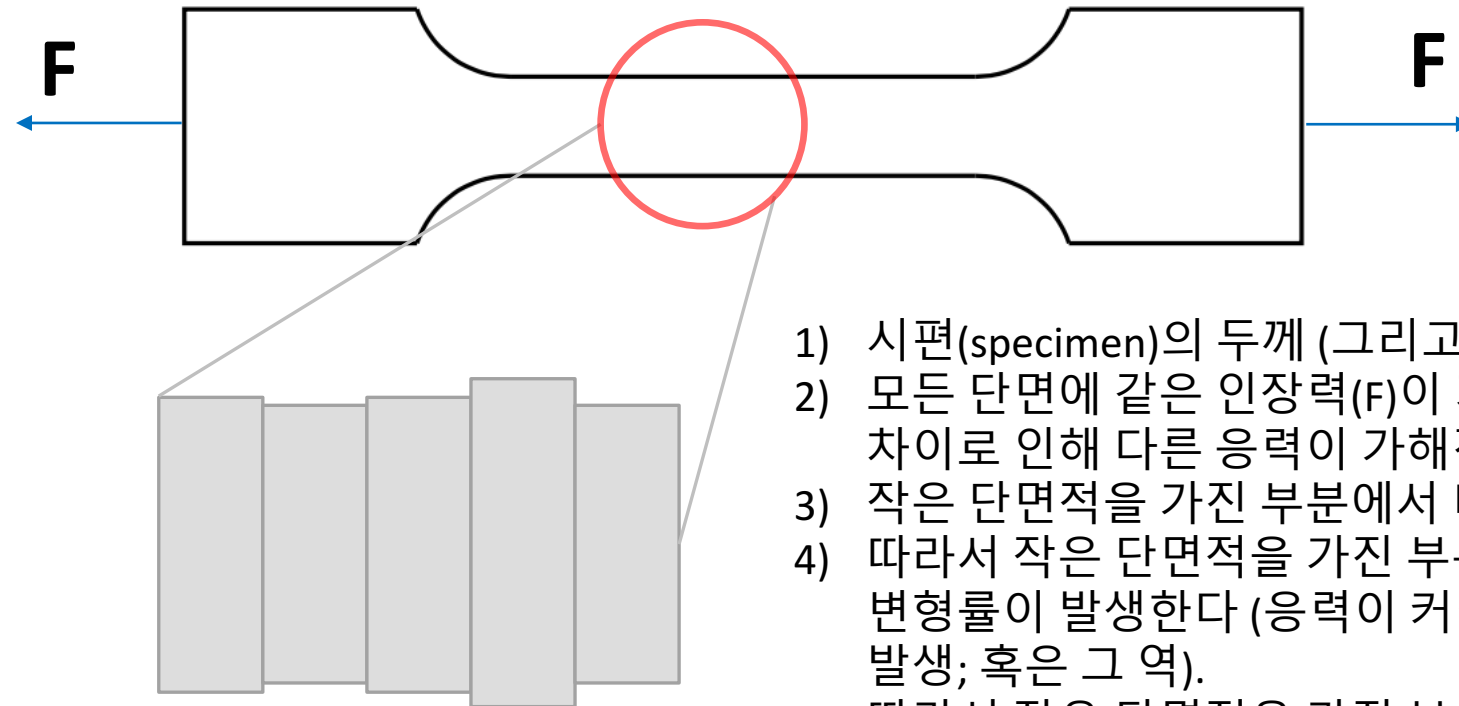
- Instability 조건인 (2)를 (3)에 대입하면 다음과 같이 새로운 형식으로 쓰인 instability 조건을 얻을 수 있다:

- $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = nK\bar{\epsilon}^{n-1} = \bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$  (4)

- 위 (4)에서 instability 조건에서  $n = \bar{\epsilon}$  관계식이 성립함을 알게되었다. 따라서  $n$  값을 안다면 instability가 발생하기 전까지의 균일한 최대 변형률을 얻을 수 있다.



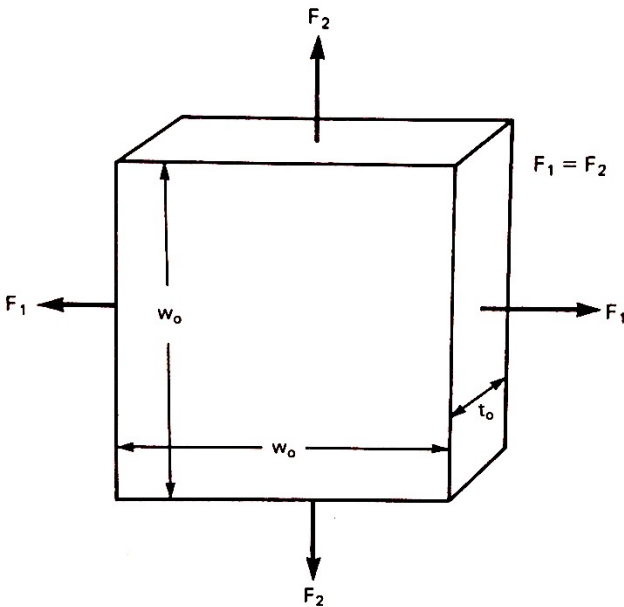
# 불균질한 단면 효과(1)



- 1) 시편(specimen)의 두께 (그리고 폭)의 불균질성 존재.
- 2) 모든 단면에 같은 인장력( $F$ )이 가해지지만, 단면적의 차이로 인해 다른 응력이 가해진다.
- 3) 작은 단면적을 가진 부분에서 더 큰 응력이 작용.
- 4) 따라서 작은 단면적을 가진 부분에서 더 많은 변형률이 발생한다 (응력이 커질수록 더 많은 변형 발생; 혹은 그 역).
- 5) 따라서 작은 단면적을 가진 부분에 더 많은 가공경화가 발생하고,
- 6) 작은 단면적이 더 강해져서 안정적으로 변형 가능.
- 7) 하지만 변형경화의 증가량( $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$ )은 점점 감소한다.
- 8) 따라서 결국엔 instability 발생... 이것은 변형경화의 증가량의 거동(즉  $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$  혹은 Hollomon Eq.에서의  $n$ 값)과 연관이 있다.

# Balanced biaxial tension

- Balanced biaxial tension은 판재 (sheet)의 넓은 면 속에서 (in-plane) 서로 수직인 방향으로 동일한 크기의 인장력(F)이 작용하는 상태를 의미한다.



$$F_1 = \sigma_{11}A_1, \quad F_2 = \sigma_{22}A_2$$

$$dF_1 = \sigma_{11}dA_1 + A_1d\sigma_{11}, \quad dF_2 = \sigma_{22}dA_2 + A_2d\sigma_{22}$$

Plastic instability condition:

$$dF_1 = 0 \text{ \& \; } dF_2 = 0$$

$$dF_1 = 0 \rightarrow \sigma_{11}dA_1 + A_1d\sigma_{11} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dA_1}{A_1} + \frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = -\frac{dA_1}{A_1} = d\varepsilon_{11}$$

$$\text{마찬가지로 2축 방향으로 } \frac{d\sigma_{22}}{\sigma_{22}} = d\varepsilon_{22}$$

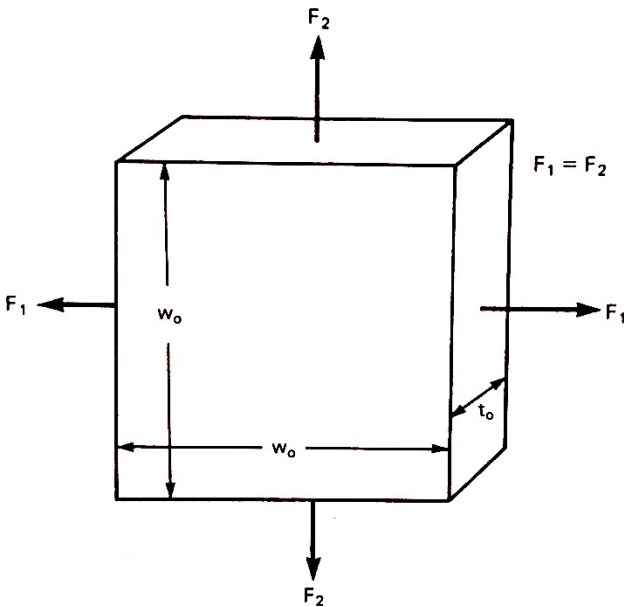
$$\text{VM 사용하면 유효응력 } \bar{\sigma} = \sigma_{11} = \sigma_{22}$$

$$\text{유효 변형률은 } \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}}{\bar{\sigma}} = 2\varepsilon_{11}$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = d\varepsilon_{11} \rightarrow \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = \sigma_{11} \rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{1/2d\bar{\varepsilon}} = \bar{\sigma} \rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

# Balanced biaxial tension

- Balanced biaxial tension은 판재 (sheet)의 넓은 면 속에서 (in-plane) 서로 수직인 방향으로 동일한 크기의 인장력(F)이 작용하는 상태를 의미한다.



$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

위를

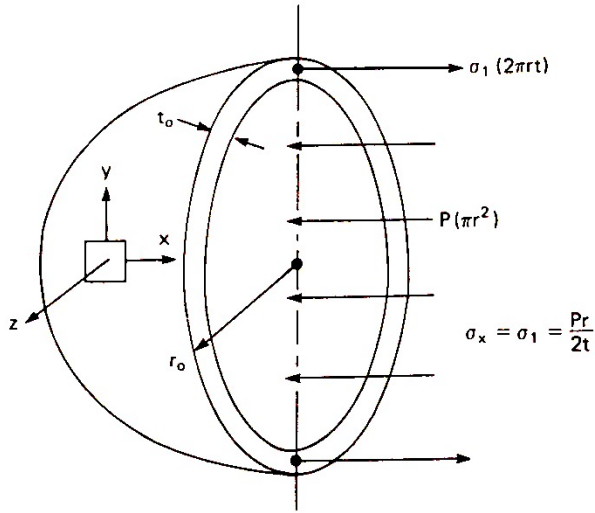
$\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$  에 대입하여 instability condition은 다음과 같다

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = nK\bar{\epsilon}^{n-1} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$\text{따라서 } n = \frac{\bar{\epsilon}}{2}$$

위는 isotropic 하고 Hollomon equation으로 묘사되는 변형경화 현상을 보이는 재료가 balanced biaxial tension 응력하에 있을 때 적용되는 instability condition이다.

# Thin-walled sphere under internal pressure



앞에서 비슷한 예제들을 풀이 한 바 있다 (Bulge test 예제 참고)  
우선, 내부 압력과 시편의 응력과의 관계를 다시 떠올려보면

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{Pr}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pr}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon_{11} \end{bmatrix}$$

목표: instability가 발생하는 지점의 유효변형률을 Hollomon equation을 사용하여 Hollomon equation의 parameter의 함수로 표현하라.

앞서 예제와 유사한듯 조금 다른 점은 외부의 '힘 (F, 하중)' 형태가 아니라 '압력 (p)'의 형태로 자극이 가해졌다는 점이다. 어쨌든, instability 조건은 유사하다:

$$dP = 0 \quad \dots (1)$$

그리고 내부에 가해진 압력을 다른 변수들의 함수로 정리하면:  $P = \frac{2\sigma_{11}t}{r}$

따라서 P는 세변수의 함수 즉,  $P = P(\sigma_{11}, t, r)$ 이며, 위의 instability 조건 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \sigma_{11}} d\sigma_{11} + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr = \frac{2t}{r} d\sigma_{11} + \frac{2\sigma_{11}}{r} dt - \frac{2\sigma_{11}t}{r^2} dr = 0 \quad \dots (2)$$

Instability 조건(2)는 양변에  $\frac{r}{2t\sigma_{11}}$ 를 곱해 다음으로 이어진다:

$$\frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} + \frac{dt}{t} - \frac{dr}{r} = 0 \quad (3)$$

그런데 각각  $\frac{dt}{t}$ 와  $\frac{dr}{r}$  값은 반지름 그리고 두께 방향으로의 수직 '진' 변형률이다. 따라서 (3)을 우리가 익숙한 notation을 사용하면

$$\frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} + d\varepsilon_{33} - d\varepsilon_{11} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{11}} - 3d\varepsilon_{11} = 0 \quad (4)$$

앞서 BB에서의  $\bar{\sigma} = \sigma_{11}$  (즉  $d\bar{\sigma} = d\sigma_{11}$ ) 이었다.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{11}\varepsilon_{22}}{\sigma_{11}} = 2\varepsilon_{11} \rightarrow \bar{\varepsilon} = 2\varepsilon_{11} \rightarrow \frac{d\bar{\varepsilon}}{2} = d\varepsilon_{11}$$

(4)에 빨강,파랑 대입하면  $\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} - \frac{3}{2}d\bar{\varepsilon} = 0$  혹은  $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{3}{2}\bar{\sigma}$  (5)

$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$  에서  $d\bar{\sigma} = nK\bar{\varepsilon}^{n-1}d\bar{\varepsilon} \rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = nK\bar{\varepsilon}^{n-1} = K\bar{\varepsilon}^n \left(\frac{n}{\bar{\varepsilon}}\right) = \bar{\sigma} \left(\frac{n}{\bar{\varepsilon}}\right)$  따라서

$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{3}{2}\bar{\sigma} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \bar{\sigma} \left(\frac{n}{\bar{\varepsilon}}\right)$  (보라색은 instability 조건, 녹색은 가공경화 거동)

가공 경화 거동에 따라 instability 조건이  $\frac{3}{2}\bar{\sigma} = \bar{\sigma} \left(\frac{n}{\bar{\varepsilon}}\right)$  으로 표현된다. 이는  $\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}n$  으로 표현된다.

# Thin-walled sphere under internal pressure

- 따라서 Max pressure를 기준으로 예상한 instability 조건은 Hollomon 변형 경화 방정식의  $n$  값을 기준으로 다음의 유효 변형률이 주어질 때 만족된다:  $\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}n$
- Instability 조건에서의 내부 압력을 구해볼 수 있을까?
- 1) 내부 압력과 응력의 관계:  $\frac{Pr}{2t} = \sigma_{11}$  즉  $P = \frac{2t\sigma_{11}}{r}$
- 2) 두께와 반지름을 유효 변형률로 나타낼 수 있나?
- $\epsilon_{33} = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \rightarrow \frac{t}{t_0} = \exp(\epsilon_{33}) \rightarrow t = t_0 \exp(\epsilon_{33})$  비슷하게  $r = r_0 \exp(\epsilon_{11})$
- 그런데  $\bar{\epsilon} = 2\epsilon_{11} = 2\epsilon_{22}$  (그리고  $d(\text{volume})=0$ 에 의해  $\epsilon_{22} = -\epsilon_{33}$ )
- 따라서  $t = t_0 \exp(-\bar{\epsilon})$ ,  $r = r_0 \exp\left(\frac{\bar{\epsilon}}{2}\right)$  이를  $P = \frac{2t\sigma_{11}}{r}$  에 대입하면
- $P = \frac{2t_0\sigma_{11}}{r_0} \exp\left(-\bar{\epsilon} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\right) = \frac{2t_0\bar{\sigma}}{r_0} \exp\left(-\frac{3}{2}\bar{\epsilon}\right) = 2K\bar{\epsilon}^n \frac{t_0}{r_0} \exp\left(-\frac{3}{2}\bar{\epsilon}\right)$
- Max P occurs at  $\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}n$ :
- $P_{\max} = 2K\left(\frac{2}{3}n\right)^n \frac{t_0}{r_0} \exp(-n)$

판재의 변형가공경화식을 알고 초기 두께와 반지름을 알면 instability condition을 예측할 수 있다.

# Thin-walled sphere ...

- 비록 앞에서 thin-walled sphere의 경우 instability 조건으로  $\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}n$  을 찾아보았습니다. 하지만 일반적으로 위의 조건이 만족될 때 변형집중이나 급작스러운 파괴는 발생하지 않습니다. Max pressure를 지나서도 thin-walled sphere는 균일한 팽창을 합니다. 사실 벽에는 균등 2축인장이 작용하기 때문에, 균등 이축인장 조건에 따라, 힘(하중)은  $\bar{\epsilon} = 2n$  까지 증가합니다. 하지만 심지어 이때도 날카로운 네킹이 발생하지 않습니다.
- 왜냐하면, 한 조그만 부분의 변형률 집중이 국부적인 radius of curvature 감소로 이어지게 된다.
- 그 상황아래에서  $P = \frac{2\sigma_{11}t}{r}$  에 의해 같은 internal pressure하에서 응력의 감소로 이어지게 된다.
- 이와같이 thin-walled sphere의 경우 파괴의 조건을 찾지 못했는데, 사실 다음과 같은 다양한 이유때문에 결국 파괴가 발생한다.
  - 해당 재료의 불균질성
  - 만약 재료의 strain rate sensitivity가 작거나 혹은 음수 라면 ... (차후에 더 다루겠다.)

# 불균질한 단면 효과(2)

## 재료자체의 불균질성

- 결정립크기, 집합조직, 고용원소의 농도, 등의 물성이 균질하지 못한 경우.

지역(위치, 어느 곳의 물질점을 보느냐에)에 따라 물성치가 다르다.

## 시편의 기하학적 불균질성

- 시편의 두께, 폭 등의 불 균질성.

물성치는 지역과 상관없이 동일 (시편의 형태가 일정)

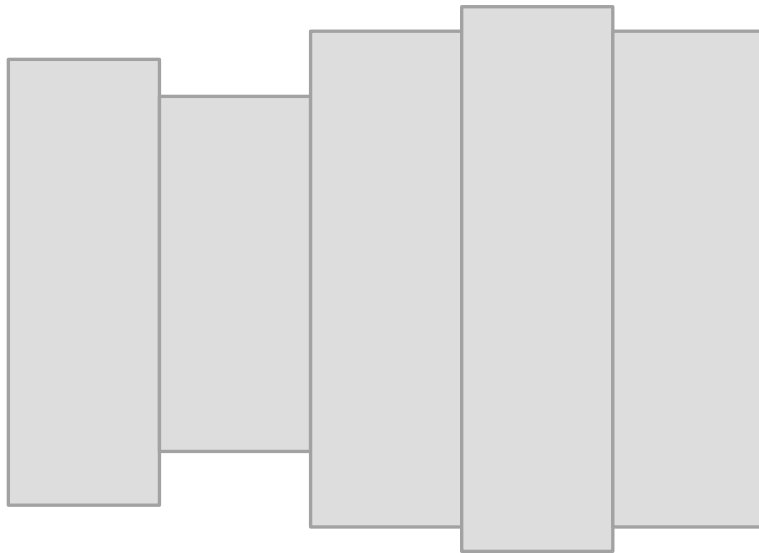
구조물을 구성하는 재료에는 위의 두종류 불균질성이 모두 존재한다. 하지만 수학적 표현의 편리를 위해 (A)타입의 불균질성을 (B)타입에 포함하여 설명하는 것이 편리하다.



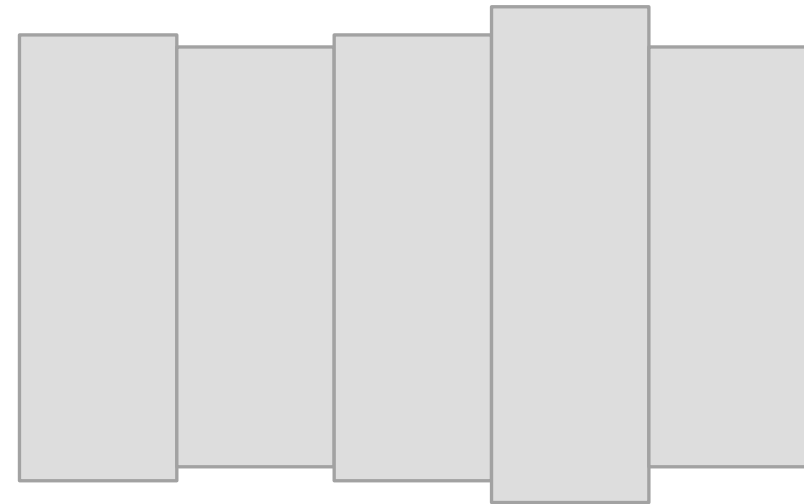
## 물성의 불균질성



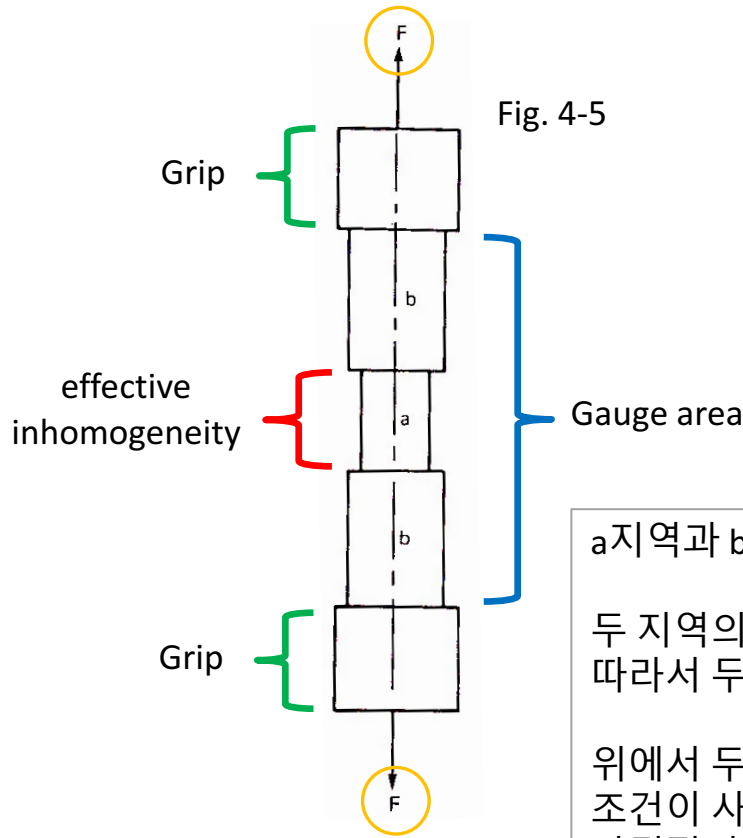
## 시편의 기하학적(형태적) 불균질성



## \*유효\* 기하학적 불균질성



# 불균질한 단면 효과(3) - 일축인장시험



- Physical quantity that parameterizes such 'effective inhomogeneity' present in the specimen:  $f$
- 기하학적인 불균질성만 존재할때,  $f$ 는 시편의 단면적 차이(혹은 판재의 경우 두께 차이)로 이해할 수 있다.
- $f = A_a/A_b$  (a, b 지역의 단면적 차이)
- 시편의 변형전 불균질성을 특별히  $f_0 = A_{a0}/A_{b0}$ 로 표현하자.

a지역과 b 지역 사이에서도 힘평형 조건이 만족 되어야 한다. 따라서

$$F_a = F_b \rightarrow \sigma_a A_a = \sigma_b A_b \quad (1)$$

두 지역의 '물성차'는 없다 (remember! 우리는 유효 불균질 접근법을 사용중). 따라서 두 지역의 변형률 경화 거동은 동일. 만약 Hollomon eq. 사용한다면:

$$K \epsilon_a^n A_a = K \epsilon_b^n A_b \quad (2)$$

위에서 두 지역이 같은  $K, n$  값 가지나, 두 지역은 다른 변형률을 가질 수 있다는 조건이 사용되었음을 이해하자. 한편 일축 인장 환경에서 인장변형률은 단면적의 변화로 사용할 수 있다 (즉).

$$\epsilon = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \rightarrow A = A_0 \exp(-\epsilon) \quad (3)$$

그리고 (3)을 이용하여 위의 초기 불균질 파라미터( $f_0$ )를 사용한 형태의 방정식을 (2)에서 부터 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} K \epsilon_a^n A_{a0} \exp(-\epsilon_a) &= K \epsilon_b^n A_{b0} \exp(-\epsilon_b) \\ \rightarrow \epsilon_a^n A_{a0} \exp(-\epsilon_a) &= \epsilon_b^n A_{b0} \exp(-\epsilon_b) \\ \rightarrow f_0 \epsilon_a^n \exp(-\epsilon_a) &= \epsilon_b^n \exp(-\epsilon_b) \end{aligned}$$

# 불균질한 단면 효과(3) - 일축인장시험

$$f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) = \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$$

위의 방정식을 통해  $n$ 과  $f_0$  값을 알고 있다면 네킹이 일어나는 변형률인  $\varepsilon_a = n$  까지  $\varepsilon_a$  함수로  $\varepsilon_b$ 를 얻을 수 있다. 하지만 위의 공식을 예를 들어  $y = \text{Function}(x)$  형태의 explicit 한 함수의 형태로 나타내기는 힘듭니다. (울프람알파에서 explicit 한 형태를 얻을 수 있을까?)

이렇게 수학적으로 정확한 해를 구하지 못할 때는 '수치적(numerical)' 접근이 필요합니다.

수치해석법이란, 위처럼 explicit한 형태의 '해석적(analytical)' 해를 구하기 힘들거나 혹은 불가능할 때, 컴퓨터를 이용한 근사해 (approximate solution) 를 구하는 방법입니다. 공학에서 가장 많이 쓰이는 방식의 수치해석법은 Newton Raphson method입니다.

위의 방정식을 풀이 하기 필요한 NR method를 배워보자.

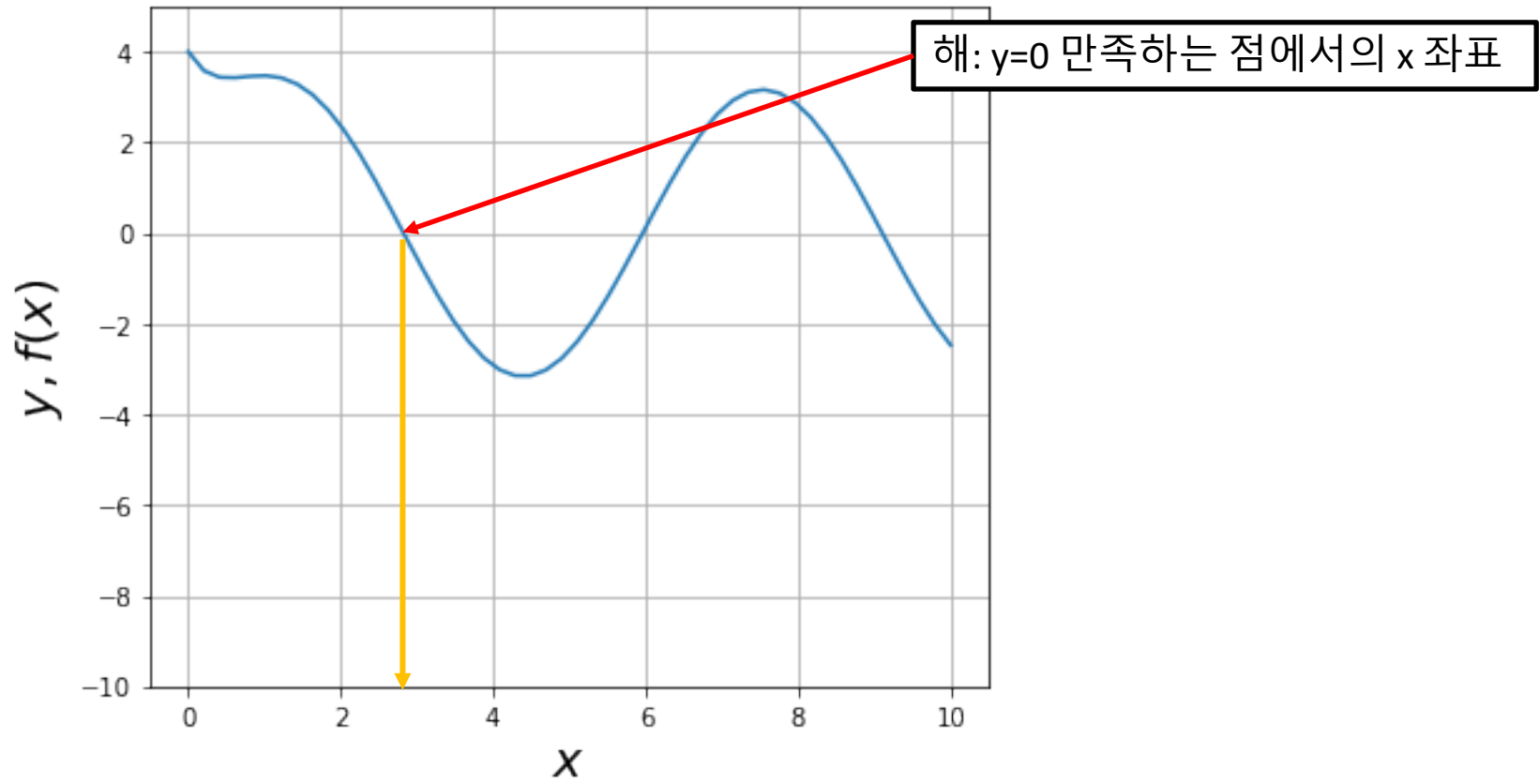
# 수치해석법

---

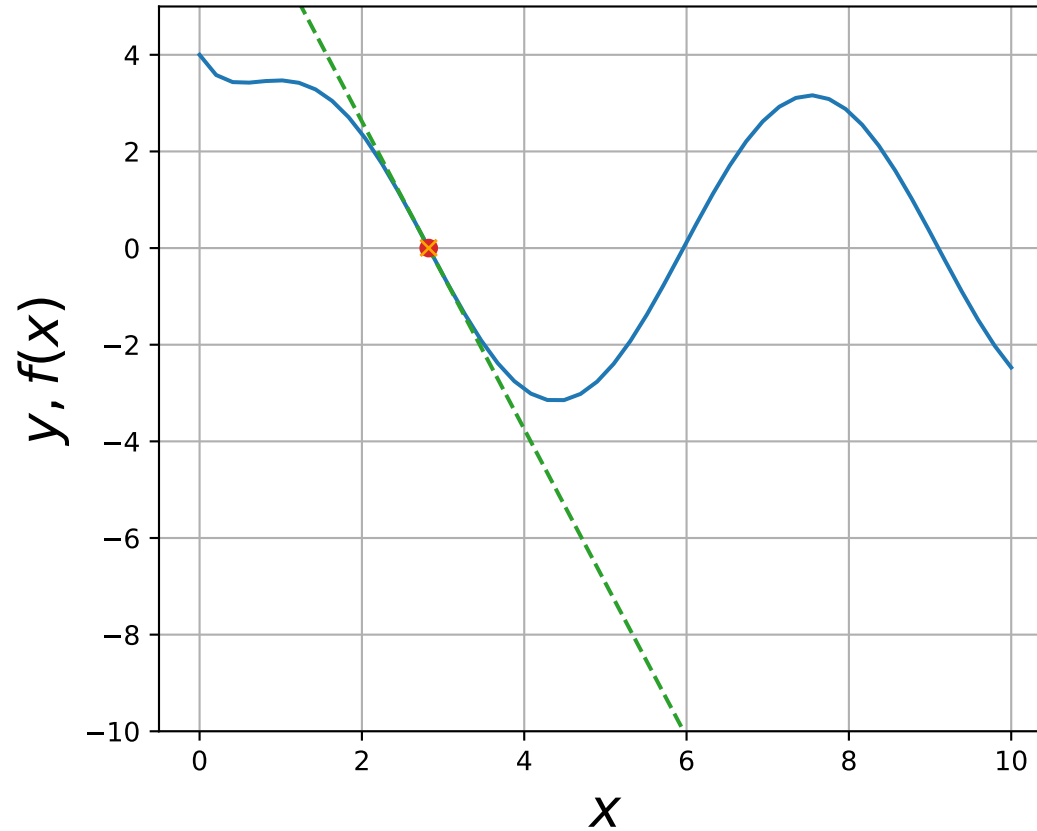
- 나의 경험
  - 학부에서의 수강경험
  - 대학원 학위중 그리고 그이후의 연구 활동중 매우 유용함
- 많은 방법들이 존재하나, Newton-Raphson 방법이 매우 널리 쓰인다. 해당 강의에서는 Newton-Raphson method와 Secant method로 제한하여 다뤄본다.

# 가령 예를 들어...

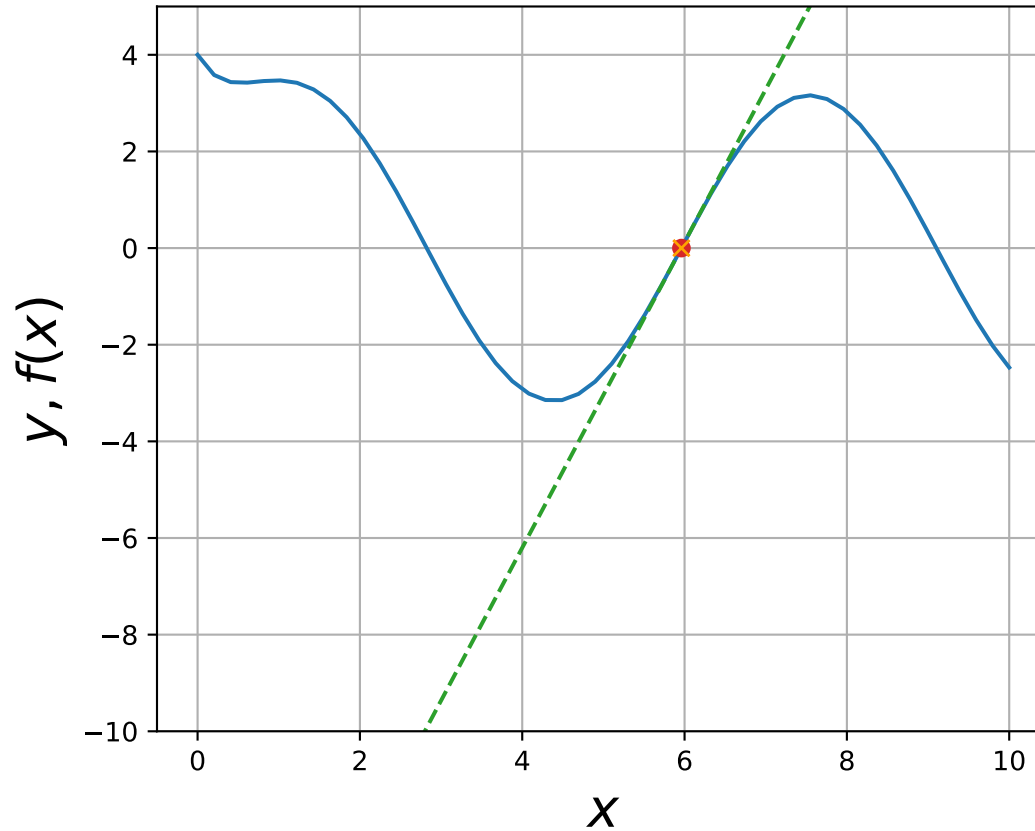
■  $f(x)=y=\cos(x)+3\sin(x)+3\exp(-2x)=0$  의 해를 찾아보자.



# Visual illustration of NR (ex 1)



# Visual illustration of NR (ex 2)



# Newton Raphson Method - Algorithm

- 1. Guess  $x$  value and let's name it as  $x_0$  where the subscript 0 means 'initial'.
- 2. Obtain new guess  $x_1$  by following the below tasks.
  - Estimate  $f(x_0)$  and  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . In case  $\frac{\partial f}{\partial x}$  is a function of  $x$ . For the first attempt, use  $x_0$ .
  - Obtain the next guess  $x_1$  by drawing a tangent line at the point of  $(x_0, f(x_0))$  and obtain its intercept with  $x$ -axis. You can do it by defining the line function derived from the tangent line, i.e.,

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Find the intercept of the line with  $x$ -axis, i.e.,  $y = 0$ , which gives  $x_1$ :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \times (x_1 - x_0) + f(x_0) \rightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

- 3. We are using this intercept as the new  $x$ . And repeat 2-1/2-2 steps until  $f(x_n) \approx 0$ .

이 페이지를 확인하세요: [https://youngung.github.io/nr\\_example/](https://youngung.github.io/nr_example/)



# NR summary

---

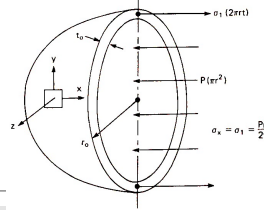
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n)}$
- Repeat the above until  $f(x_n) < \text{tolerance}$
- Of course, you can do it manually, step-by-step. Usually, people make computer do the repetitive and tedious tasks.

# Apply NR to $f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) = \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$

---

- Given  $\varepsilon_a$  value, obtain  $\varepsilon_b$  or vice versa.
- First, rearrange the objective function such as
- $F(x) = 0$
- For a constant  $\varepsilon_a$  and given  $f_0$  and  $n$  parameters, the objective function is a function of solely  $\varepsilon_b$ .
- $F(\varepsilon_b) = f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) - \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$
- Find the value of  $\varepsilon_b$  that satisfies  $F(\varepsilon_b) \approx 0$  using NR method. You'll need  $\partial F / \partial \varepsilon_b$ :
- $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_b} = -n \varepsilon_b^{n-1} \exp(-\varepsilon_b) + \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$
- Now, make the proper initial guess on  $\varepsilon_b$  for the first step, and use
- $\varepsilon_{b,(n+1)} = \varepsilon_{b,(n)} - \frac{f(\varepsilon_{b,(n)})}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_b}(\varepsilon_{b,(n)})}$

# Exercise



Thin-walled tube를 제작하는 업체에 엔지니어로 취업한 여러분에게 직장 상사가 기존의 304 stainless steel을 대체할 수 있는 강재를 찾아서 thin-walled tube를 제작하라는 업무를 내렸다. 해당 구조물 설계도에 따르면 두께( $t_0$ )와 곡률반경( $r_0$ )이 각각 1 mm 여야 한다. 대체재로 찾을 강재가 Hollomon equation으로 잘 설명되는 변형경화 거동을 보이고, 등방성을 띄는 재료라고 할 때, 다음의 방정식으로 instability조건을 설명할 수 있다.

$$P_{\max} = 2K \left( \frac{2}{3} n \right)^n \frac{t_0}{r_0} \exp(-n)$$

해당 구조물의 instability가 300 MPa의 압력 이후로 발생하고, 그 K 값이 300 MPa로 주어졌을 때, 최소한의 n 값을 NR method를 사용하여 구하여라 (유효숫자 4자리 까지 적을 것)

## 해결 방법

$P_{\max} = 500$  [MPa] 일 때의 n 값을 찾으면, 그 값이 해당 조건의 최소한의 n 값이 된다.

$f(n) = 0$  변수 n에 대한 objective function (목적 함수 설정)

$$f(n) = P_{\max}(n) - 300 = 0$$

$$f(n) = 2 \cdot 300 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^n n^n \cdot \exp(-n) - 300 = 0$$

Find  $\frac{\partial f(n)}{\partial n}$

$$\frac{\partial n^n}{\partial n} = n^n (n + 1)$$

$$\frac{\partial a^n}{\partial n} = a^n \ln a$$

$$\frac{\partial f(n)}{\partial n} = 600 \cdot \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{2}{3} \right)^n \ln n \cdot n^n \cdot \exp(-n) \\ &+ \left( \frac{2}{3} \right)^n n^n (n + 1) \cdot \exp(-n) - \left( \frac{2}{3} \right)^n n^n \exp(-n) \end{aligned} \right]$$

# Exercise

$$f(n) = 2 \cdot 300 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n n^n \cdot \exp(-n) - 300 = 0$$

$$\frac{\partial f(n)}{\partial n} = 600 \cdot \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln n \cdot n^n \cdot \exp(-n) \\ &+ \left(\frac{2}{3}\right)^n n^n (n+1) \cdot \exp(-n) - \left(\frac{2}{3}\right)^n n^n \exp(-n) \end{aligned} \right]$$

Initial guess of n value; Let's start with  $n_0 = 0.1$

$$f(n_0) = 45.08 \dots \text{ and } \frac{\partial f(n)}{\partial n} \text{ using } n_0 = 0.1 \text{ gives: } -1589.$$

$$n_1 = n_0 - \frac{f}{\frac{df}{dn}} = 0.1 - \frac{45.08}{-1589} = 0.1283$$

$$n_2 = n_1 - \frac{f(n_1)}{\frac{df(n_1)}{dn}} = 0.1283 - \frac{0.0001}{-11067} = 0.1283$$

# Newton Raphson method: application (1)

- 주어진 재료의 초기 불균질성 파라미터( $f_0$ )가 0.990 이다. 해당 재료의 일축 인장 flow stress-strain curve를 Hollomon equation에 적용하여 찾은  $n$  값은 0.2로 판단되었다. 이때 앞서 다룬  $f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) = \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$  식을 사용하여  $\varepsilon_a$ 가 0.1 일 때 기대되는  $\varepsilon_b$  값을 찾아보자.
- 위의 방정식을  $f(\varepsilon_b) = 0$  인 형태로 나타내고, 주어진 parameter 값들을 사용한다면 다음을 얻는다.
- $\varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b) - f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) = 0 \rightarrow \varepsilon_b^{0.2} \exp(-\varepsilon_b) - 0.990 \times 0.1^{0.2} \times \exp(-0.1) = 0$
- 따라서  $f(x) = x^{0.2} \exp(-x) - C = 0$  where  $C=0.56520467632558069....$
- $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0.2 x^{-0.8} \exp(-x) - x^{0.2} \exp(-x)$

# Newton Raphson method: application (2)

$$f(x) = x^{0.2} \exp(-x) - C = 0 \quad \text{where } C=0.56520467632558069....$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0.2 x^{-0.8} \exp(-x) - x^{0.2} \exp(-x)$$

Find x value that satisfies  
 $|f(x)| < 0.000001$

Step 0: I'd pick the initial guess of x (denoted as  $x_0$ ) as 0.1 – Why?

Step 1: Let's calculate  $f(0.1)$ :  $f(0.1) = 0.0057091381447028633... > 0.000001$

Step 2:  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}(0.1)$ ?  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}(0.1) = 0.57091381447 ...$

Step 3: Find the linear function - and let's call it  $g(x)$  - that satisfies two conditions – 1: slope should be 0.5709138144 ... and it goes through the point of (0.1, 0.0057091381447028633...).

Step 4: Find the x value that satisfies  $g(x)=0$  and use it as the new guess.

Repeat the steps 1 through 4 until  $|f(x)| < 0.000001$

# Exercise using Excel

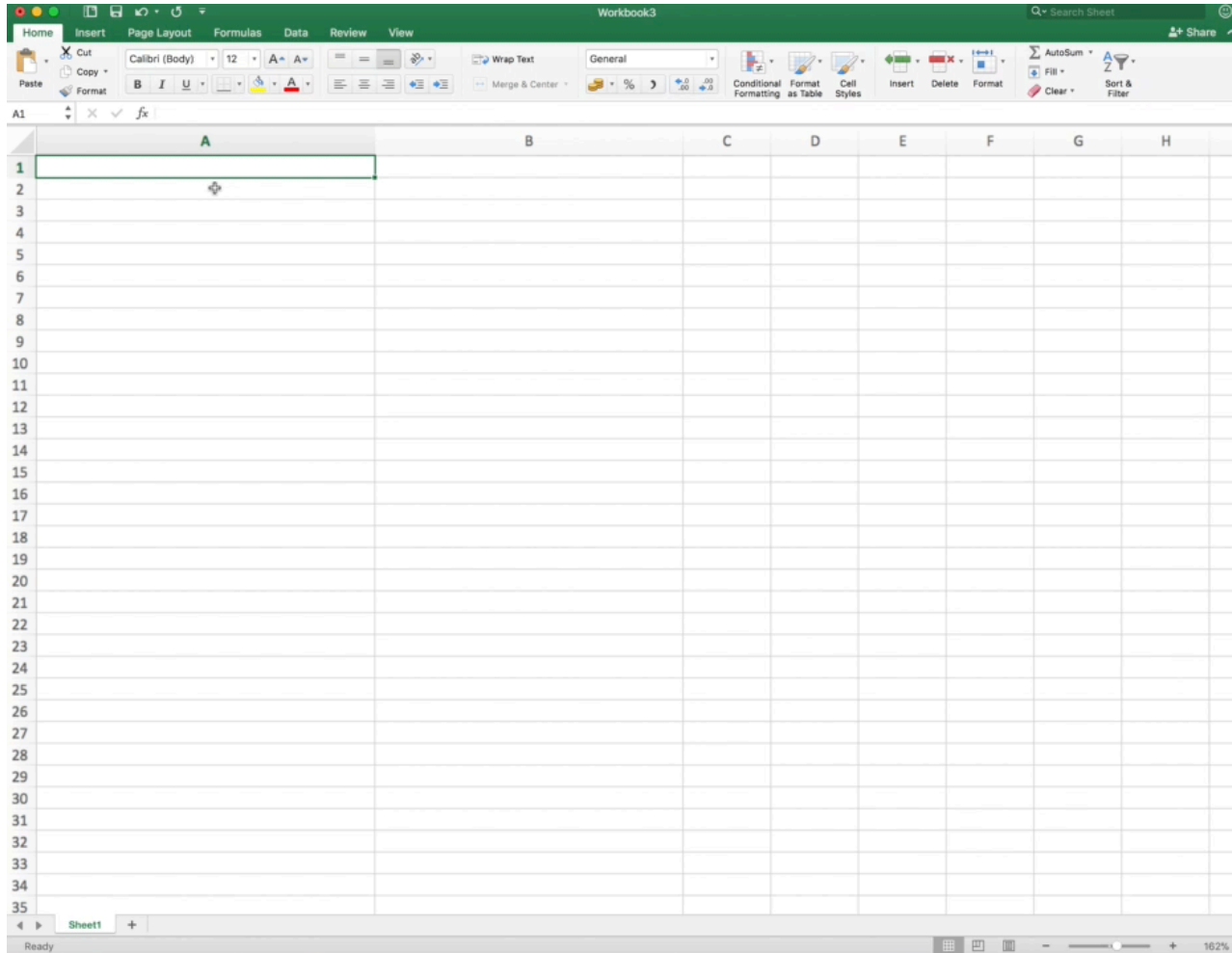
---

- I will be demonstrating how to use Microsoft Excel for the NR method



# Exercise using Excel

- Just in case I fail to demonstrate in time (also available <https://youtu.be/lxwJ8XfAl80>)





# Exercise

NR method to find the approximate solution of  $x$  that satisfies  $f(x) \approx 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n)}$$

$$f_0 \varepsilon_a^n \exp(-\varepsilon_a) = \varepsilon_b^n \exp(-\varepsilon_b)$$

Question: For an inhomogeneous material with  $f_0 = 0.995$ , what would be the strain of inhomogeneous region (a) when the homogeneous region (b) is deformed to be 0.2? FYI, the material follows the Hollomon equation and its  $n$  value is 0.2

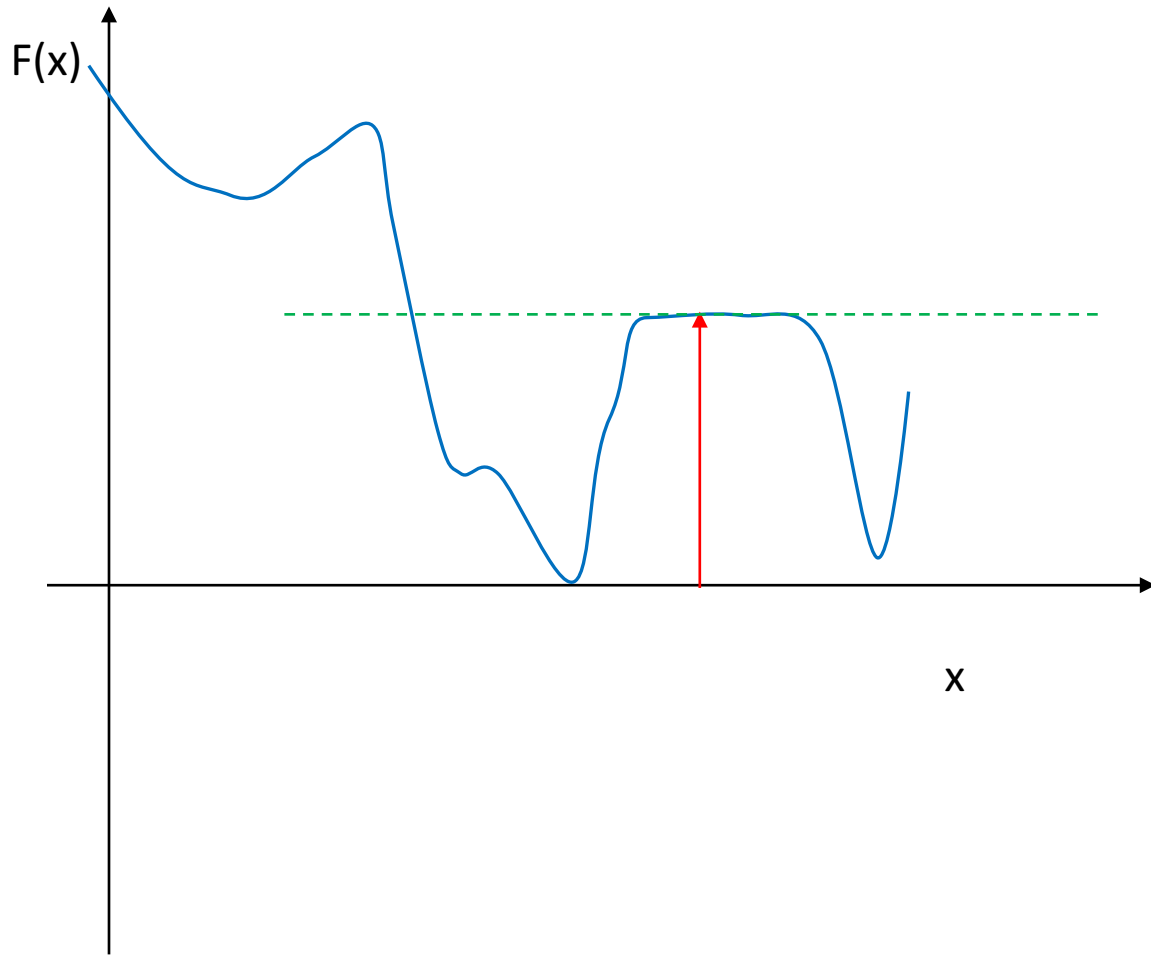
$$f(\varepsilon_a) = 0.995 \varepsilon_a^{0.2} \exp(-\varepsilon_a) - 0.2^n \exp(-0.2)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon_a)}{\partial \varepsilon_a} = 0.995 \{0.2 \varepsilon_a^{-0.8} \exp(-\varepsilon_a) - \varepsilon_a^{0.2} \exp(-\varepsilon_a)\}$$

$$\varepsilon_a^{(n+1)} = \varepsilon_a^{(n)} - \frac{f(\varepsilon_a^{(n)})}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_a}(\varepsilon_a^{(n)})}$$

Take your pick! Let's guess  $\varepsilon_a = 0.2$

# Stability of numerical analysis (divergence)

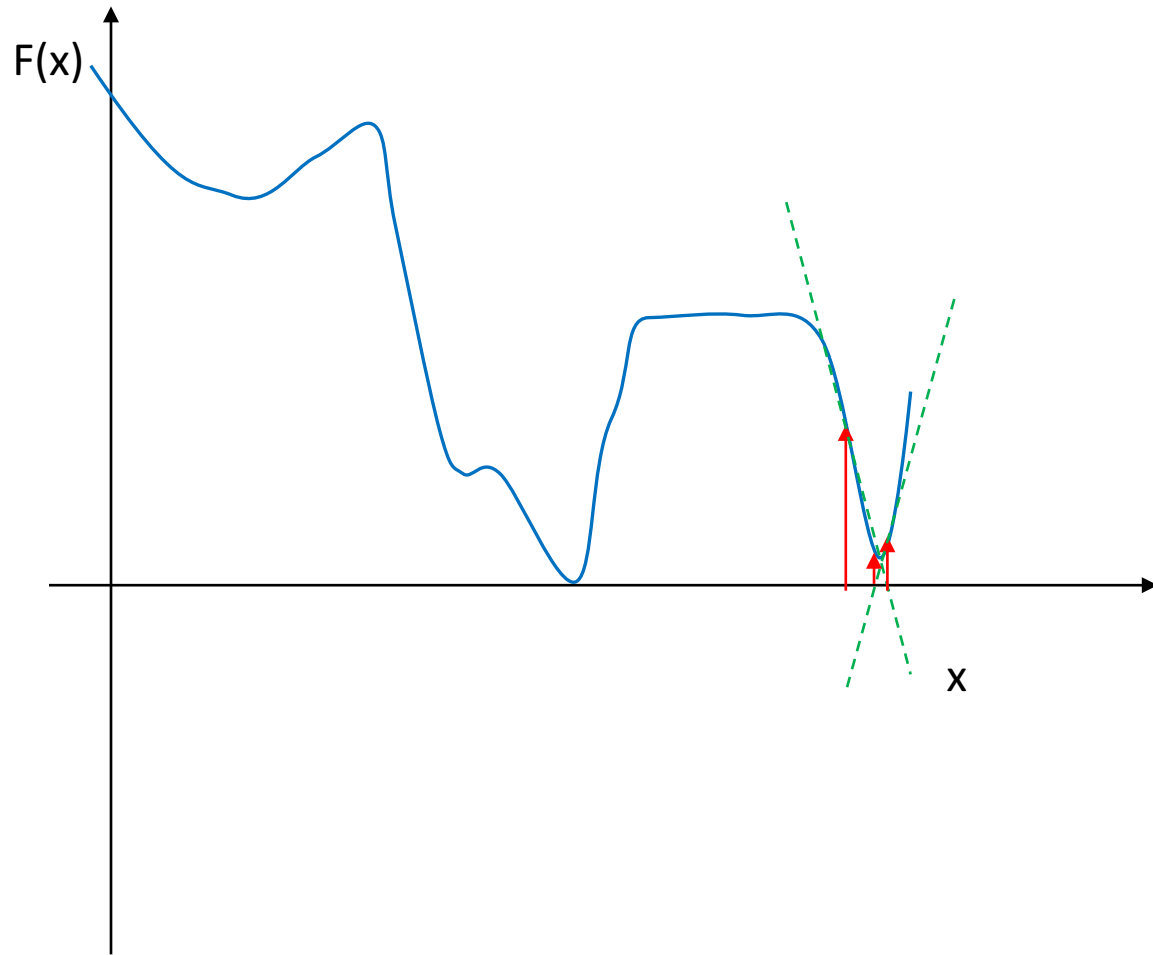


You ended up landing on a flat region that gives you zero slope

$$\varepsilon_a^{(n+1)} = \varepsilon_a^{(n)} - \frac{f(\varepsilon_a^{(n)})}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_a}(\varepsilon_a^{(n)})}$$

Shouldn't be zero ...

# Stability of numerical analysis (divergence)



Local minima

# In case that $\frac{\partial f}{\partial x}$ cannot be obtained?

---

- We have assume that we know the analytical solution of  $\frac{\partial f}{\partial x}$  at any point of  $x$ .
  - Some times, this is not the case and you are not able to make use of the Newton-Raphson method.
- 
- Luckily, mathematicians and scientists developed numerical methods that do not require one to know the derivative.

# Secant method

---

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Secant method

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\frac{df}{dx}(x_{n-1})}$$

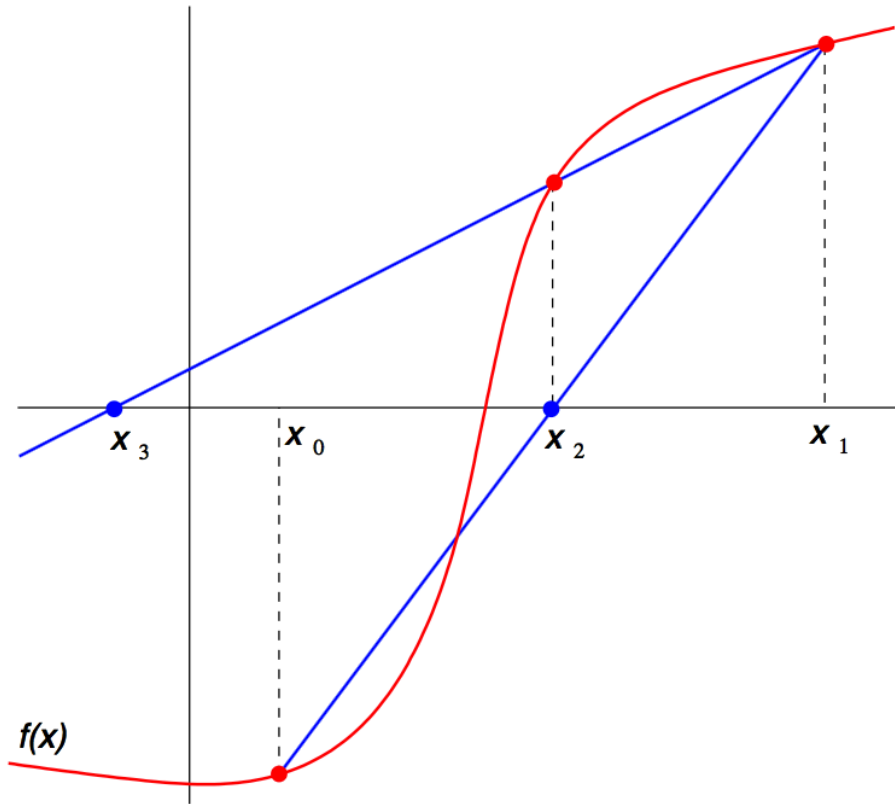
Newton-Raphson method

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}$$

Secant method (Rearranged)

시컨트 메소드는 미지의 함수의 derivative를 구할 수 없을 때 유용하다.

# Example



# Find the numerical solution

- If you read this slide as in pdf file on a computer, simply click the below link:
- [https://github.com/youngung/lectures/blob/master/ipynb/fig4-6\\_metalforming\\_hosford%26caddell.ipynb](https://github.com/youngung/lectures/blob/master/ipynb/fig4-6_metalforming_hosford%26caddell.ipynb)

- You'll find something like

THIS

- There is a special task for advanced students in the bottom of the note.

```
def derive(n,x,y):
    return -(y**(n-1))*np.exp(-y)*(y**n)*exp(-y)
def obj(f0,n,x,y):
    return f0*(x**n)*np.exp(-x) - (y**n)*np.exp(-y)

# 주어진 재료의 성질 (n은 불균질 계수이다.)
n=0.35
x=0.25
# x=0.2로 설정한후 해당 지점에서의 y 값을 찾겠다.
x=0.2

# 초기 스텝에서 y의 초기 값을 'guess'.
y0=x*1. # guesses y value
df = derive(n,x,y0)
f = obj(f0,n,x,y0)
print 'y0:',y0
print 'f0:',f

# 첫번째 스텝에서 y1 값을 전의 y0 값, 그리고 f, df 를 활용하여 또 다시 guess
y1 = y0 - f/df
df = derive(n,x,y1)
f = obj(f0,n,x,y1)
print 'y1:',y1
print 'f1:',f

# 두번째 스텝: 비슷하게 진행합니다. f 값이 얼마나 줄어드는지 확인하세요.
y2=y1 - f/df
df = derive(n,x,y2)
f = obj(f0,n,x,y2)
print 'y2:',y2
print 'f2:',f

# 세번째 스텝: f 값이 얼마나 줄어드는지 확인하세요 - 이미 매우 작은 값일 겁니다.
y3=y2 - f/df
df = derive(n,x,y3)
f = obj(f0,n,x,y3)
print 'y3:',y3
print 'f3:',f

y0: 0.2
f0: -0.00547518253507
=====
y1: 0.16
f1: 0.00310001755206
=====
y2: 0.170225034213
f2: 0.000256511034942
=====
y3: 0.171236112515
f3: 2.31643551873e-06

# 위의 스텝들을 계속해서 반복할 필요가 있습니다.
# 하지만 위치를 비슷하게나, 비슷한 영향을 미치면 차기 보다는 좀 더 멋지고 간략하게 나타낼 수 있는 방법
# 이 필요할 것 같습니다.
# 아래의 위의 방법을 좀 더 간략하고 몇차례 수행하는 함수를 적어보았습니다.

def newton_raphson(f0,n,x):
    # guesses y value.
    y=x*1.
    # 처음에 초기 값 y를 더 알맞은 방식으로 설정해야 할 필요가 있습니다.
    # 이와 관련된 내용은 한 jupyter notebook의 마지막 cell을 참고해주세요.

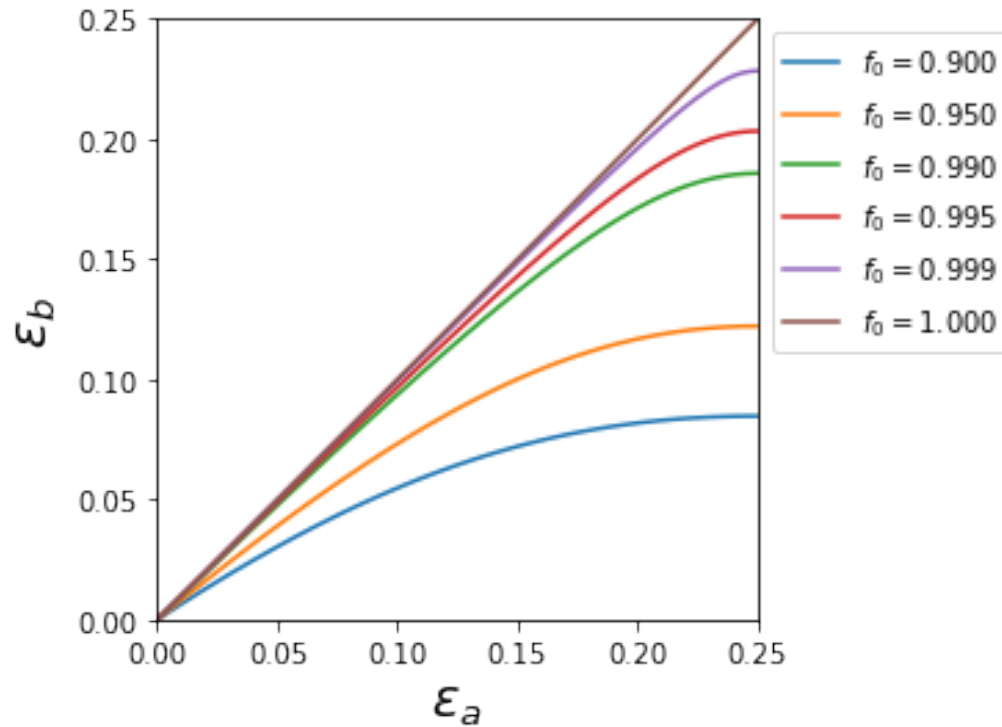
    # tolerance는 f의 절대값이 tolerance보다 작을 때 '반복'되는
    # loop를 빠져나오는 기준이 됩니다 (사용자의 목적에 맞게 조정하면 되겠습니다.)
    tol=1e-10

    f=obj(f0,n,x,y)
    it=0

    # Loop 시작
    while (abs(f)>tol): # Loop를 abs(f)값이 tolerance보다 크다면 계속해서 진행합니다.
        it=it+1
        df = derive(n,x,y) # 주어진 y값에서의 df/dy 값.
        f = obj(f0,n,x,y) # 주어진 y값에 대한 평가 - 함수 f=0이면 완벽한 상황, abs(f)<tol 가 우리가 원하는 수를 초안!
        y = y - f/df # 다음 스텝에서의 y값 guess.
    # Loop 끝.

    return y
```

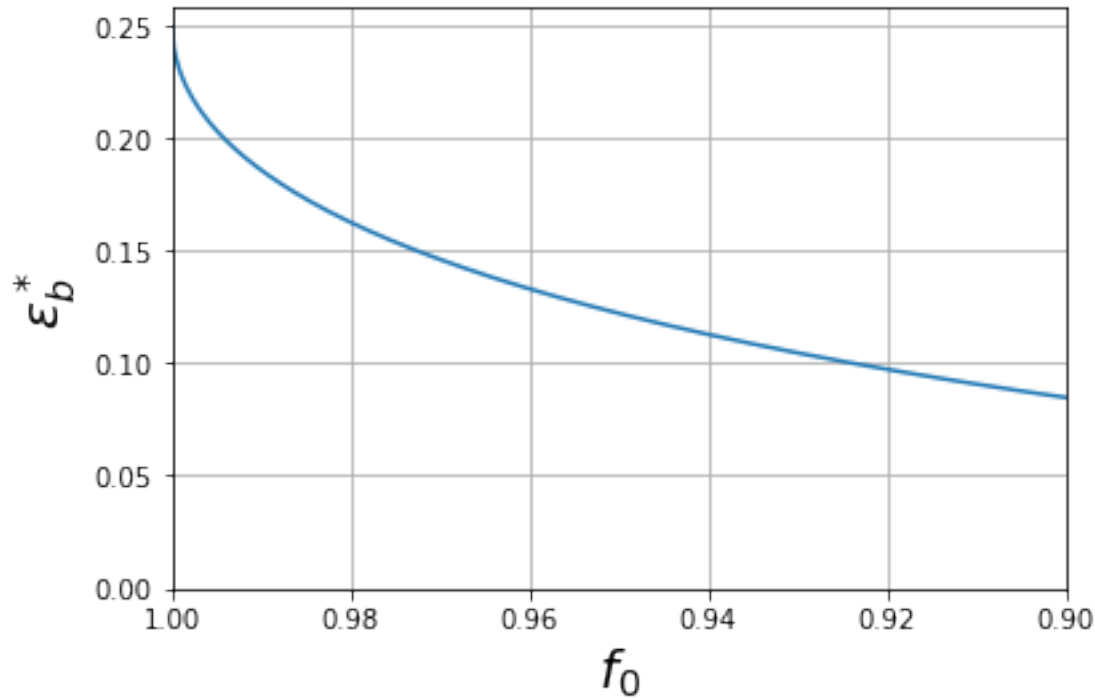
# Results



$f_0 = 1$  제외하고 얘기한다면, a region의 변형률이 0.25가 될 때 b region의 변형률이 saturation되기 시작한다.

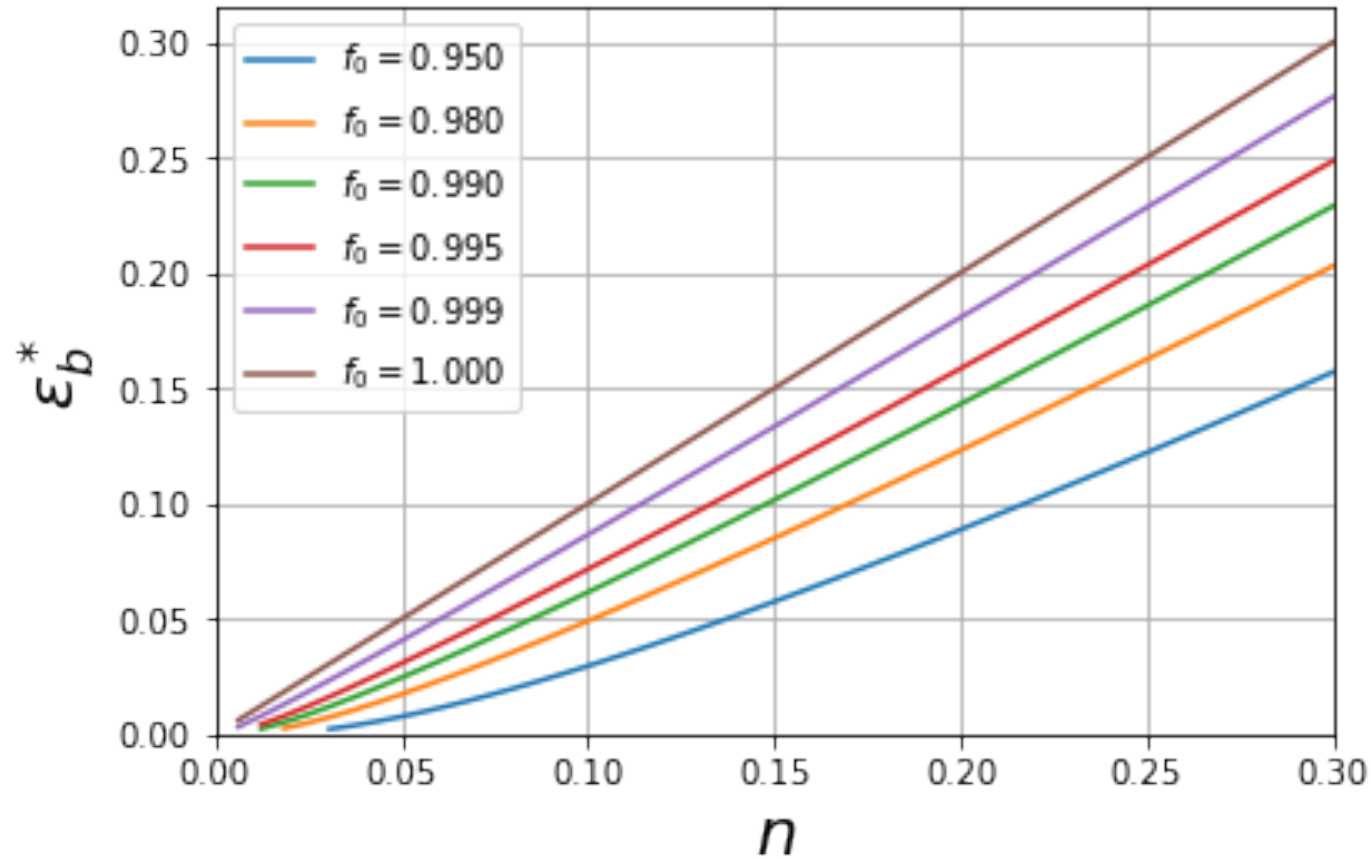


# Fig 4.7



다양한  $f_0$  값에서, 포화되기 시작하는  $\epsilon_b^*$ 의 값; 초기 변형률이 높을 수록  $\epsilon_b^*$  값이 낮아지는 것을 알 수 있다 – necking이 발생하는 지점은 초기 inhomogeneity 값에 대해 바뀐다.

# Fig 4-8



다양한  $f_0$  값과 또 한  $n$  값에 영향을 받는  $\varepsilon_b^*$  값

# 다축인장에서의 비균질성에 의한 necking

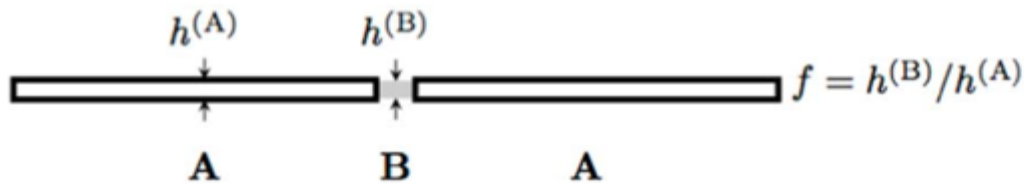
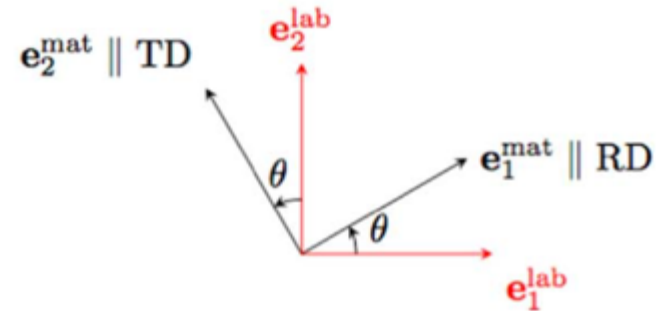
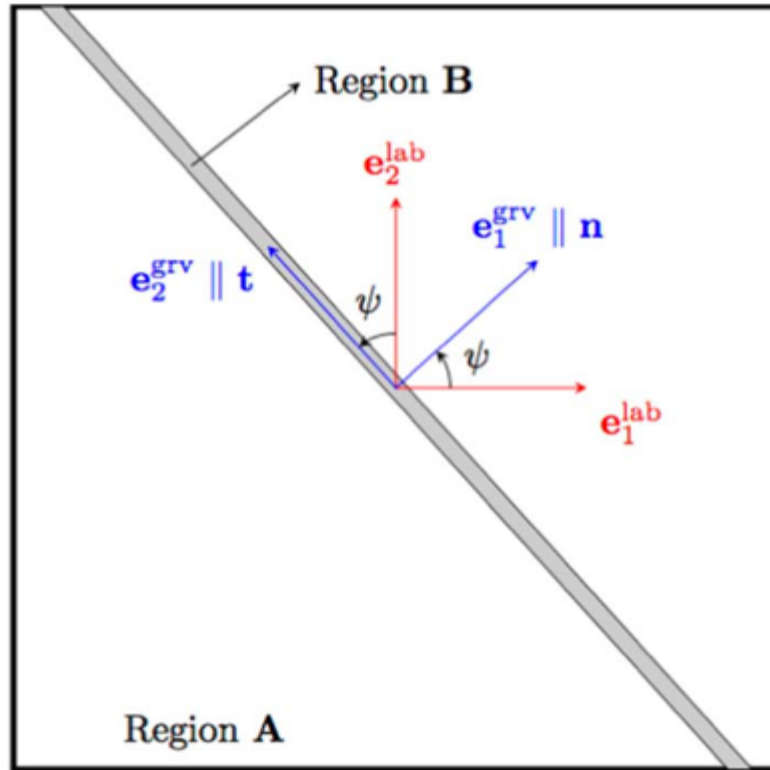
---

- Previously, we studied the necking condition of sheet metals under ‘uniaxial loading’ condition.
- Polish scientists Marciniak and Kuczyński have pioneered a simple theoretical framework to describe the necking phenomena of sheet metals under biaxial stretching conditions.
- This method is often called the MK approach, MK model, MK solution and the likes.
- I also have done some works following the MK approach:

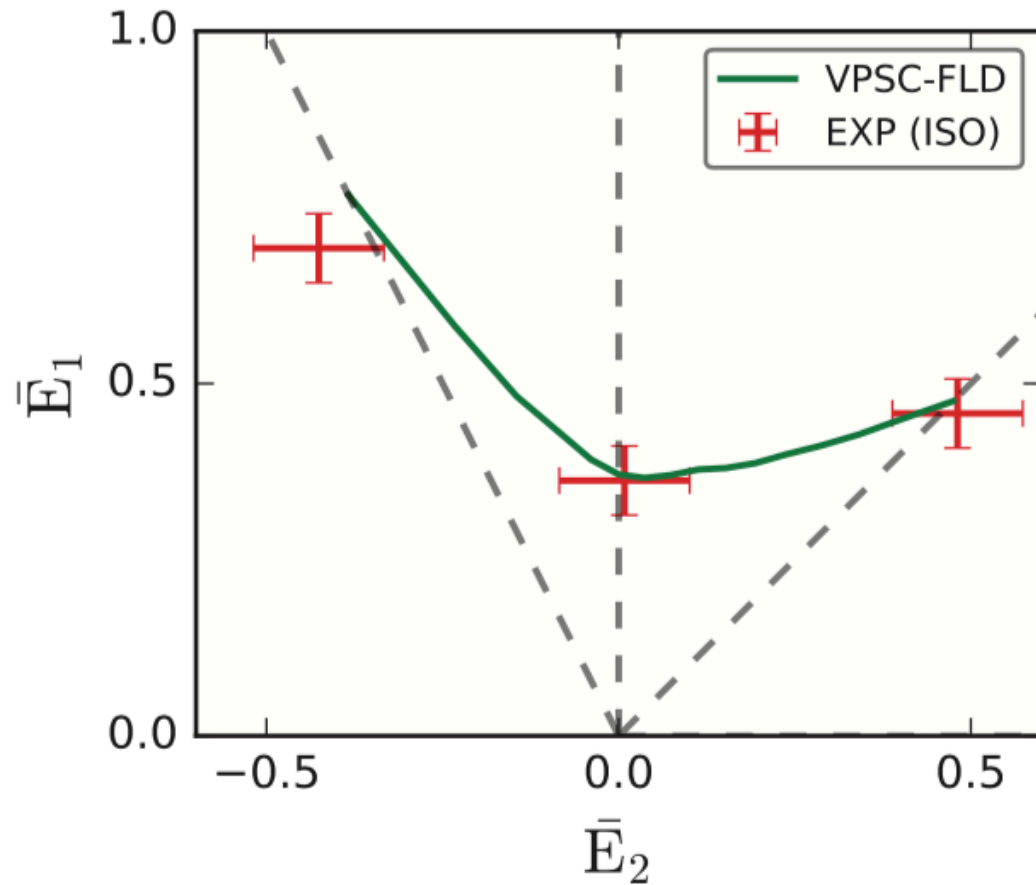
Y. Jeong, M. S. Pham, M. Iadicola, A. Creuziger, T Foecke, MSMSE 24, 2016

D. Steglich, Y. Jeong, IJMS 117 p102-114, 2016

# MK method (Graphical Illustration)



# FLD – forming limit diagram



# Recap

---

- Instability
  - BB
  - Thin-walled sphere
- Inhomogeneity
  - 물성 불균질
  - 기하학적 불균질 (유효 기하학적 불균질성)
- NR method
  - Algorithm  $\left(x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n)}\right)$
  - And its applications
- Secant method
- Marciniak-Kuczyński

# References and acknowledgements

---

## ■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)

## ■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.