

# Stress and strain: Basic concepts

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212   전화: 055-213-3694

Homepage: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Outline

---

- 본 강의에서는 금속의 기계적 성질을 표현하는데 가장 중요한 요소인 응력과 변형률에 대해서 살펴본다.
- 응력과 변형률이 텐서(tensor)로 표현 되는 방법에 대해 알아보고 텐서의 기본적인 성질에 대해 알아보자.

# 들어가기에 앞서

---

- 본 강의에서는 여러분들이 낯설게 느낄 많은 ‘수학적 표현법’이 존재한다. **매우 어렵게 (혹은 낯설게) 느껴질 수 있으나**, 포기 하지말고 의문이 있으면 언제든지 질문 하기 바랍니다.
- 낯선 영어 단어가 많이 나올 수도 있습니다. 그때마다 질문하시면 됩니다.
- 강의 중간중간 여러분들의 이해 정도를 파악하기 위해서 질문을 할 수도 있습니다.

# 오늘의 강의 목표

---

- 기계적 물성과 그와 관련된 물리량
  - 응력 (stress)
  - 변형률 (strain)
  - 수직/전단 응력요소와 수직/전단 변형률 요소 (normal and shear components)
- 추후에... 후속 강의에서는?
  - 텐서 (tensor) 이해
    - Coordinate transformation rules
    - Coordinate transformation matrix
    - Understand Einstein (summation) convention
  - Euler angles
    - Practice coordinate transformation to vector, 2<sup>nd</sup> rank tensor using Excel, Fortran, Python...

# Mechanical stimulus/response

Force  
Deformation

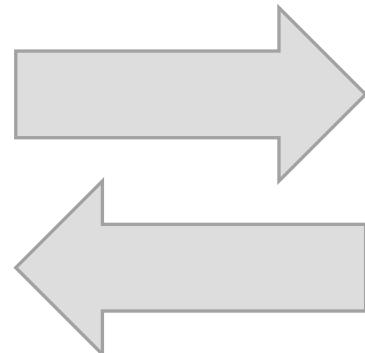
Size-dependent

Stress  
Strain

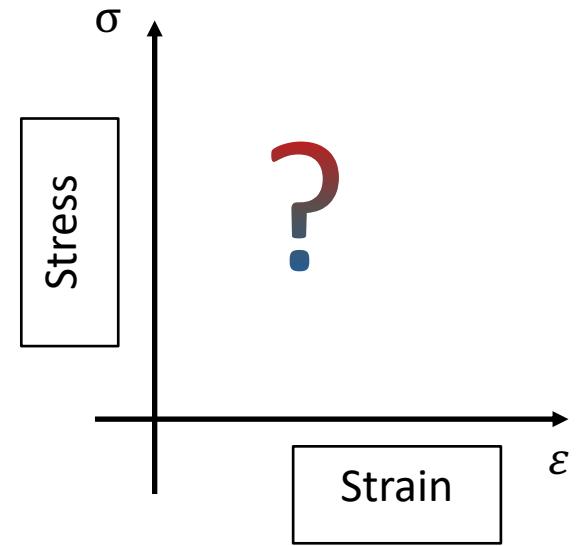
Size-independent

Stress

Strain



관계: material property



Constitutive model;  
Constitutive equation  
구성방정식

# Mechanical stimulus/response + property

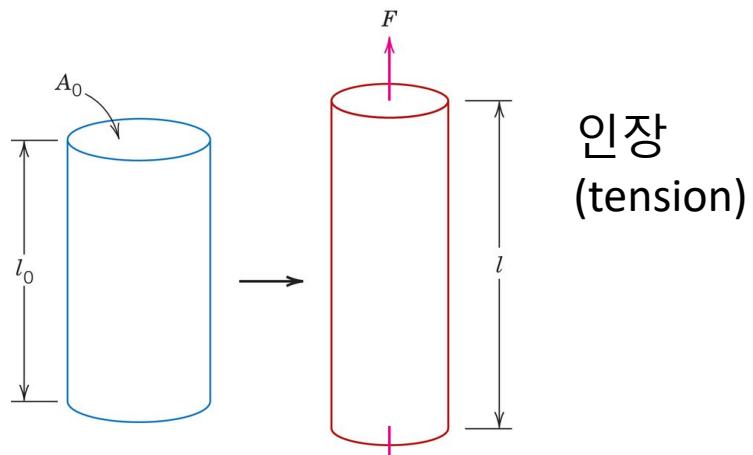
- 기계적 성능은, 기계적 자극과 그 자극으로 기인한 기계적 반응사이의 관계를 연결해주는 **연결고리**다.
  - 그러한 연결고리는 여러 형태의 '**수학적 모형**'으로 나타날 수 있다.
  - 여러분들이 다룰 수학적 모형은 주로 '선형'적이다 (일차 함수의 형태)
- 만약 기계적 자극과 반응이 선형적이라면??
  - **반응** = **성질1** × **자극** + **성질2**
  - **y** = **a**x + **b** 의 형태 (**x**와 **y**는 각각 **자극**과 **반응**, **a**와 **b**는 물질의 성질)
  - **자극** = **반응** / **성질1** - **성질2**
- 기계적 자극과 기계적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (간단한 예: 금속의 탄성)
  - $\sigma = E\varepsilon$  ( $\sigma$ : 응력  $E$ : elastic constants (modulus),  $\varepsilon$ : 변형률)
- 기계적 자극과 기계적 반응이 매우 비선형적인 관계를 가진 경우
  - 예: 금속의 소성 – 기계적 자극이 충분히 클 때 나타남
    - $\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\gamma}_0 \sum_s \left( \frac{m:\sigma}{\tau_s} \right)^{2.0}$  : 응력  $\sigma$ 와 소성변형률 속도  $\dot{\epsilon}^{pl}$  는 매우 비선형적 관계를 보인다.
- 기계적 자극과 전기적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (piezo electricity)
  - $\varepsilon = dE$  ( $\varepsilon$ : strain,  $d$ : piezoelectricity constants;  $E$ : electric field)

# notations

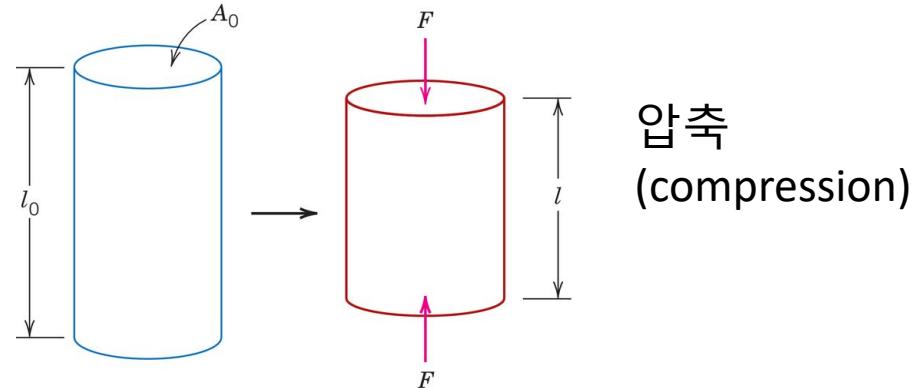
---

- 변형률은 주로 Greek letter  $\varepsilon$ , 혹은  $\epsilon$  (엡실론)으로 나타낸다.
  - $\varepsilon$ 을 진변형률,  $\epsilon$ 을 공칭변형률로 구분하는 경우도 있으나, 우리 강의에서는 따로 설명되지 않은한  $\varepsilon$ 을 구분하지 않고 변형률로 간주하겠다. \*간혹  $e$  기호를 사용하기도..
- 응력의 경우  $\sigma$  (sigma, 시그마)로 표현하겠다.
  - 마찬가지로 공칭과 진응력이 존재한다. 때에 따라  $\sigma^{engi}$  와  $\sigma^{true}$  등의 윗첨자 (superscript)를 사용하여 구분하겠다.
- 탄성 계수들
  - $E$ 와  $G$ 를 각각 (압축/인장) 탄성 계수와 전단 탄성 계수로 구분하여 사용하겠다
  - $\nu$  를 푸아송 비 (Poisson ratio)
- $\sigma^Y$  : yield stress (strength)는  $Y$  윗첨자를 사용하여 나타내겠다.
- $\epsilon^Y$  (혹은  $\varepsilon^Y$ ): yield point 에 해당하는 변형률
- $\sigma, \tau$  : 압축/인장 응력 성분 (normal stress component) 그리고 전단 응력 성분 (shear stress component)을 구분할 때 사용
- $\epsilon(\varepsilon), \gamma$ : 압축 인장 변형률 성분 (normal strain component) 그리고 전단 변형률 성분 (shear strain component)을 구분할 때 사용하겠다.

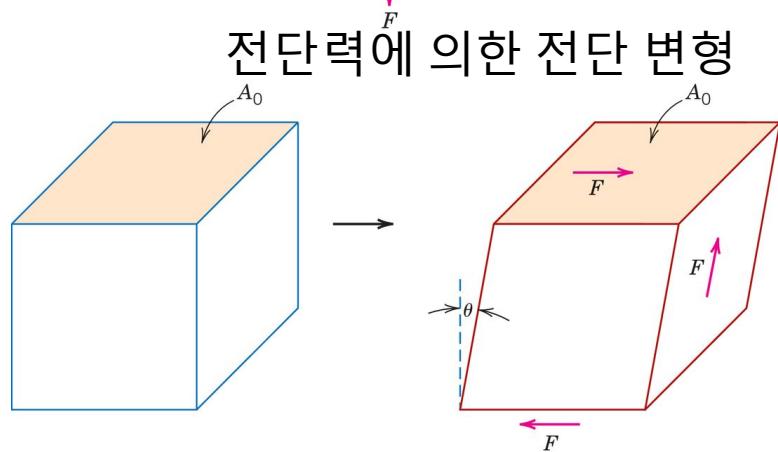
# 구조물에 작용하는 하중의 종류 (from Callister textbook)



인장  
(tension)

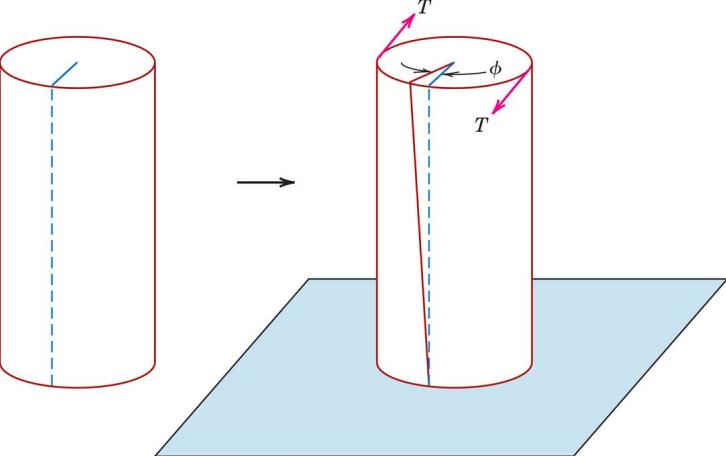


압축  
(compression)



전단력에 의한 전단 변형

토크에 의한 비틀림 변형



Images from Callister, Int. MSE

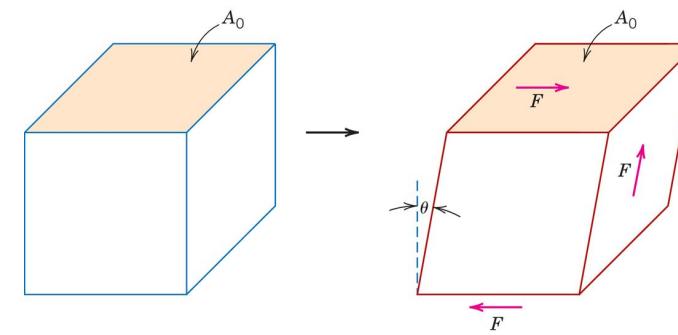
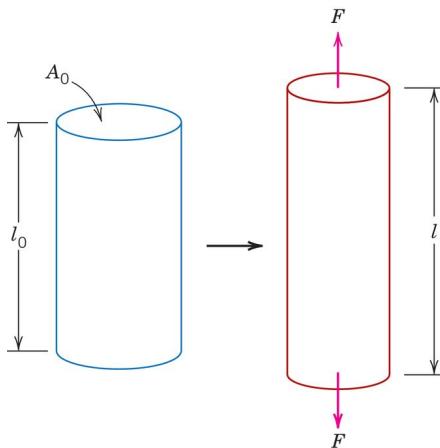
# 수직 응력과 전단 응력

## ■ 응력 구성 성분 (stress component)

- **수직 응력 성분**(normal stress component)은 관심 있는 물질 면의 ‘법선’ 방향으로 작용하는 인장(혹은 압축) 응력 구성요소.
- **전단 응력 성분**(shear stress component)은 관심 있는 물질 면과 평행한 방향으로 작용하는 응력 구성 요소

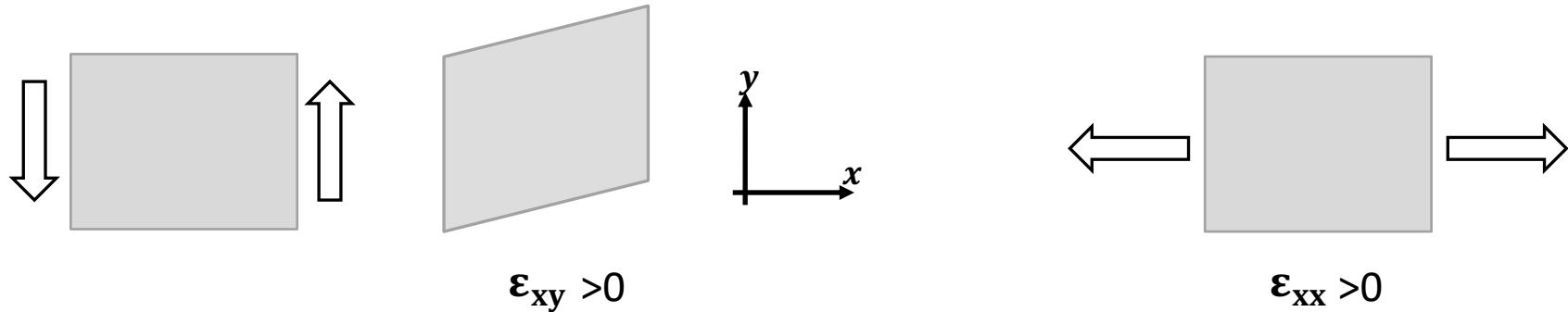
## ■ 변형률 구성 성분 (strain component)

- **수직 변형률 성분**(normal strain component)은 관심 있는 물질 ‘길이’가 본래의 그 길이 방향으로 얼마나 인장되거나, 압축되는 변형의 종류(요소)를 알려준다.
- **전단 변형률 성분**(shear strain component)은 관심 있는 물질 ‘길이’가 본래의 그 길이 방향과 ‘수직’ 방향으로 얼마나 변화하였는지 알려준다.



# 수직, 전단 성분과 sign

- 수직(normal)과 전단(shear)성분은 그 작용 방향에 따라 + 혹은 - 값을 가질 수 있다.



위에 쓰인  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xx}$  등의 notation은 텐서 표기법과 관련되어있다. 차후에 더욱 자세히 다를 예정이다.

# 응력과 변형률의 실험 측정법

---

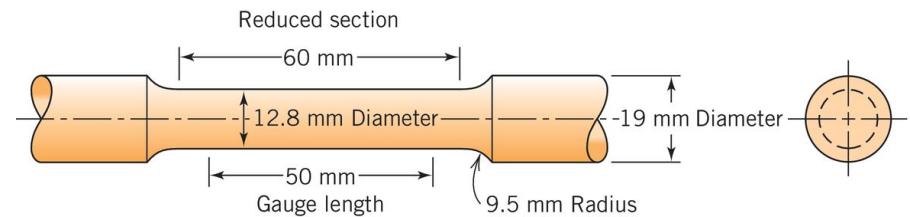
- 응력과 변형률을 측정하는 방법에 대해 간단히 의논해보자.
- Q. 일축 인장(uniaxial tension test; uniaxial tensile test)법에 대해 배웠는가?
- Q. 일축 인장에서는 어떤 기계적 성질들을 취득할 수 있는가?

# Tension tests

- (Uniaxial) tension test: the most common mechanical stress-strain test performed in **tension** (인장)
- 시편(specimen)은 주로 파괴(fracture)가 발생할 때까지 당겨진다.
- Dogbone 모양의 시편
- Load-cell: 시편에 가해진 force를 측정
- Extensometer: 시편의 길이 (elongation) 변화를 측정



Tensile tester



Load-cell



Images from Callister, Int. MSE

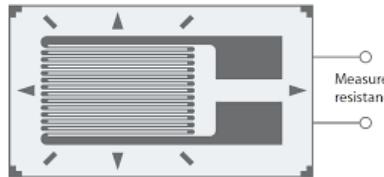
<http://www.epsilontech.com/products/axial-extensometer-model-3542/>

# Measuring strains

Measuring Relative motion of two points



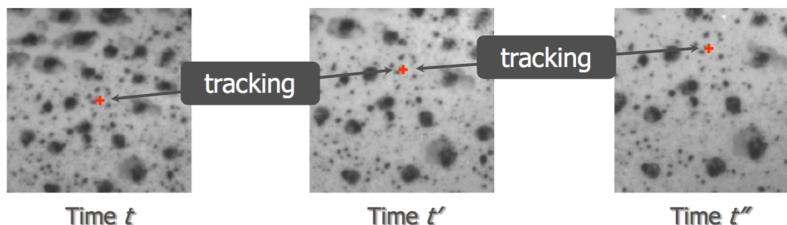
Strain pertaining to a smaller area (point)



Strain gauge

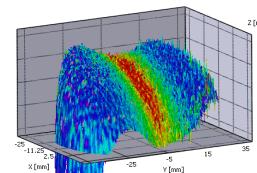


Strain field measurement (2D area)

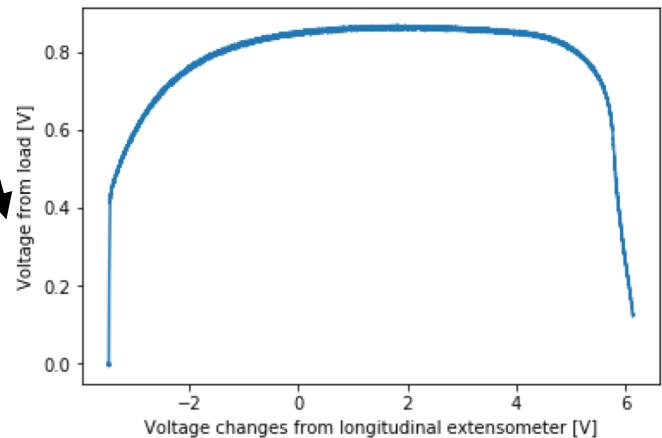


Digital image correlation

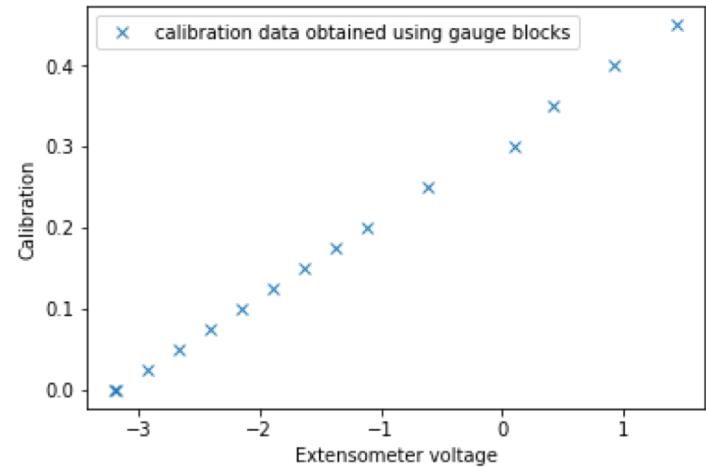
Mechanical extensometer and gauge blocks



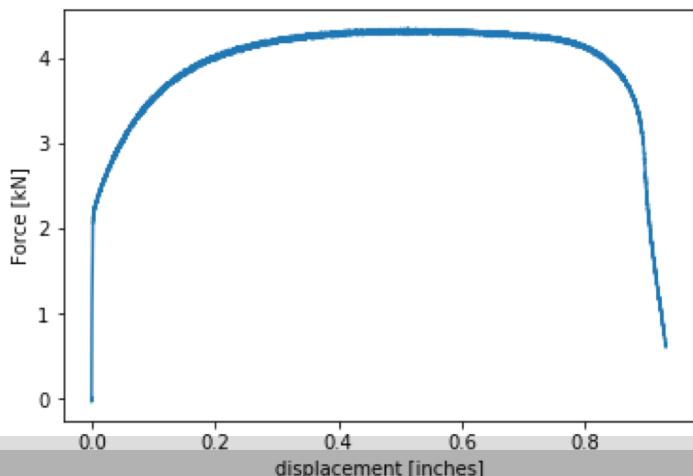
# Tension tests



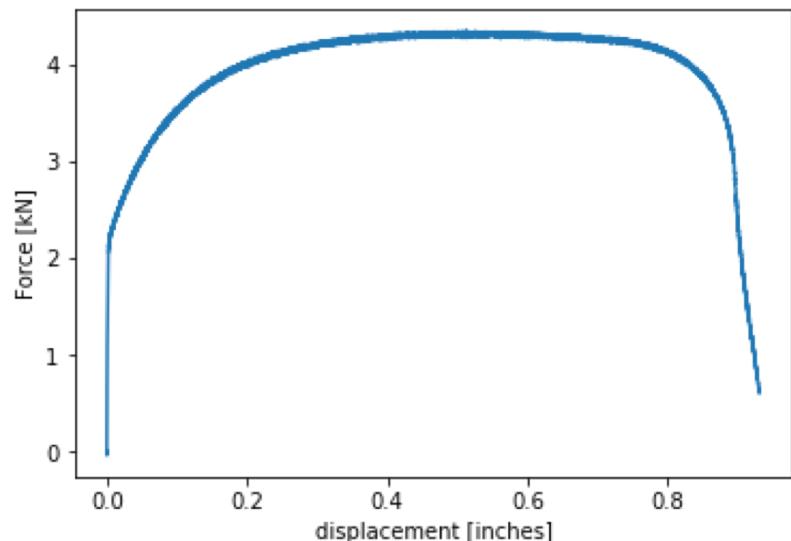
## Calibration



Load cell과 extensometer는 전기적 신호를 준다. 전기적 신호와 실제 physical quantity (Force 혹은 길이 변화)는 calibration을 통해 변환 시킨다.



# Tension tests



- **Summary:**
  - Load-cell과 extensometer로 전기적 신호를 받아왔다.
  - Load-cell과 extensometer의 calibration 데이터를 통해 Force와 displacement로 변환하였다.
- Force and displacement는 시편의 크기에 따라 변한다. 따라서, 기계적 특성을 설명하는데 적절치 않다.
- 시편의 크기에 무관한 물리량으로 바꾸는 것이 필요

- 이렇게 시편의 크기(기하학적 요소)를 **최소화** (가능하다면 완전히 제거) 하기 위해서 응력과 변형률을 사용하여야 한다.
- Force와 displacement를 각각 응력과 변형률로 전환하여야 한다.

# 기하학적 요소 감소 (공칭 응력/변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 \*줄이는\* 가장 간편한 방법으로 engineering stress (공칭 응력)을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 \*줄이는\* 가장 간편한 방법은 engineering strain (공칭 변형률)을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{\text{engi}} = F/A_0$$

F: 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N 혹은 kN 단위)

$A_0$ : 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로  $m^2$  단위)

$$\epsilon = \frac{l_i - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$l_0$ : 시편에 하중이 가해지기 전의 길이

$l_i$ : 순간순간 변한 길이

변형률은 단위가 없다. (길이 단위가 상쇄되어 없어진다)  
다만 공칭 변형률에 100을 곱해 %로 나타내기도 한다.

- 힘과 시편의 길이 변화 대신, 공칭 응력과 공칭 변형률을 사용함으로써 시편의 기하학적 요소를 어느정도 줄이는 효과를 얻을 수 있다.

# 기하학적 요소 제거 (진응력/진변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 \*제거\*하는 방법으로 **true stress (진응력)**을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 \*제거\*하는 방법으로 **true strain (진변형률)**을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{\text{true}} = F/A$$

F: 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N 혹은 kN)

A: 하중이 가해지는 시점에서의 시편 단면적 (주로 m<sup>2</sup> 단위)

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

l: 시편에 하중가해지는 시점에서의 길이

dl: 하중이 가해지고 나서 매우 짧은 순간에 발생한 길이 변화 (infinitesimal)

dε: 하중이 가해지고 나서 매우 짧은 순간에 발생한 변형률 (infinitesimal)

- 위 진변형률은 순간순간 발생하는 변형률의 '변화량'을 사용하여 정의된다. 모양(길이) 변화가 발생하는 동안 나타난 진변형률 값을 더하면(적분) 모양 변화가 끝난 후(혹은 하중이 걸린 후)의 진정한 변화량을 얻을 수 있다. 여기서 진정한 변화량이란, 시편의 길이 형태 등 기하학적 요소가 완전히 제거된다는 의미.

$$\varepsilon^{\text{true}} = \int_{l_0}^{l_1} d\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{l} dl = \int_{l_0}^{l_1} d \ln(l) = \ln(l_1) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + \epsilon^{\text{engi}})$$

# 진변형률과 공칭 변형률 비교 (인장)

- 앞서, 공칭 변형률은 기하학적 요소를 '감소' 시키는데 그치는 반면, 진변형률은 기하학적 요소를 '제거'할 수 있다고 하였다. 다음의 예제로 그 둘을 비교하여 보자.

공칭 변형률:  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

진변형률:  $\varepsilon = \ln(1 + \epsilon)$

초기 시편  
길이가 10 mm

봉상의 길이가  
12 mm 가 되었다.

봉상의 길이가  
15 mm 가 되었다.

Step 0

Step 1

Step 2

$$\epsilon = \frac{12mm - 10mm}{10mm} = 0.2$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = 0.1823 \dots$$

$$\epsilon = \frac{15mm - 12mm}{12mm} = 0.25$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = 0.2231 \dots$$

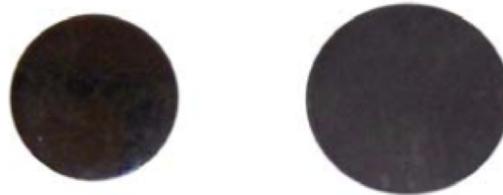
$$\epsilon = \frac{15mm - 10mm}{10mm} = 0.5$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = 0.4054 \dots$$

고찰

1. 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 그 값이 작다 (?).
2. 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다

# 압축과 인장 (tension and compression)

- 압축과 인장 모두 작용면에 수직방향으로 힘이 작용; 그 둘의 구분은 sign으로:
  - 인장은 힘과 변형률 positive value
  - 압축은 힘과 변형률이 negative value
- 대개 인장 실험이 압축 실험에 비해 용이하다.



Disk compression test is a popular method used to measure anisotropy of sheet metals

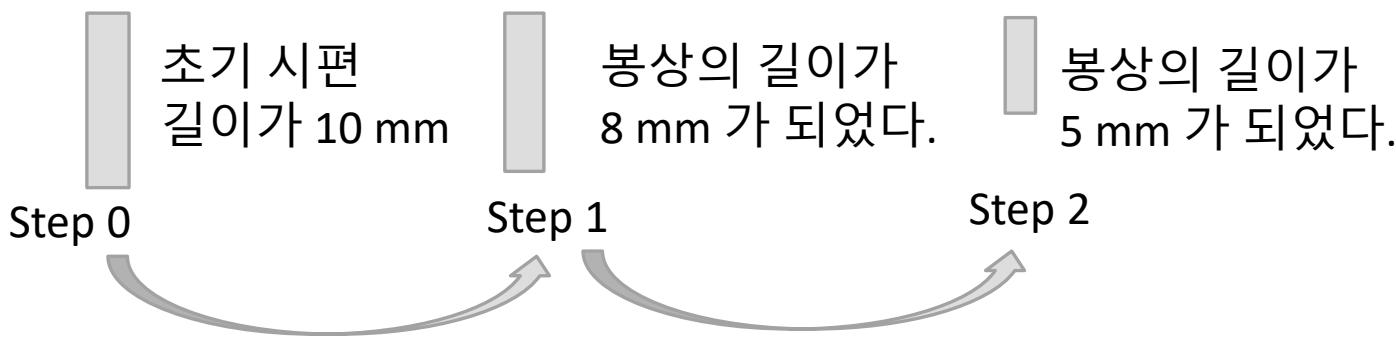
Fig. 4.4 Disk compression specimens for TWIP940 before (left) and after (right)

deformation. The left one is original, the right one is deformed.

# 진변형률과 공칭 변형률 비교 (압축)

공칭 변형률:  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

진변형률:  $\varepsilon = \ln(1 + \epsilon)$



$$\epsilon = \frac{8\text{mm} - 10\text{mm}}{10\text{ mm}} = -0.2$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.2231 \dots$$

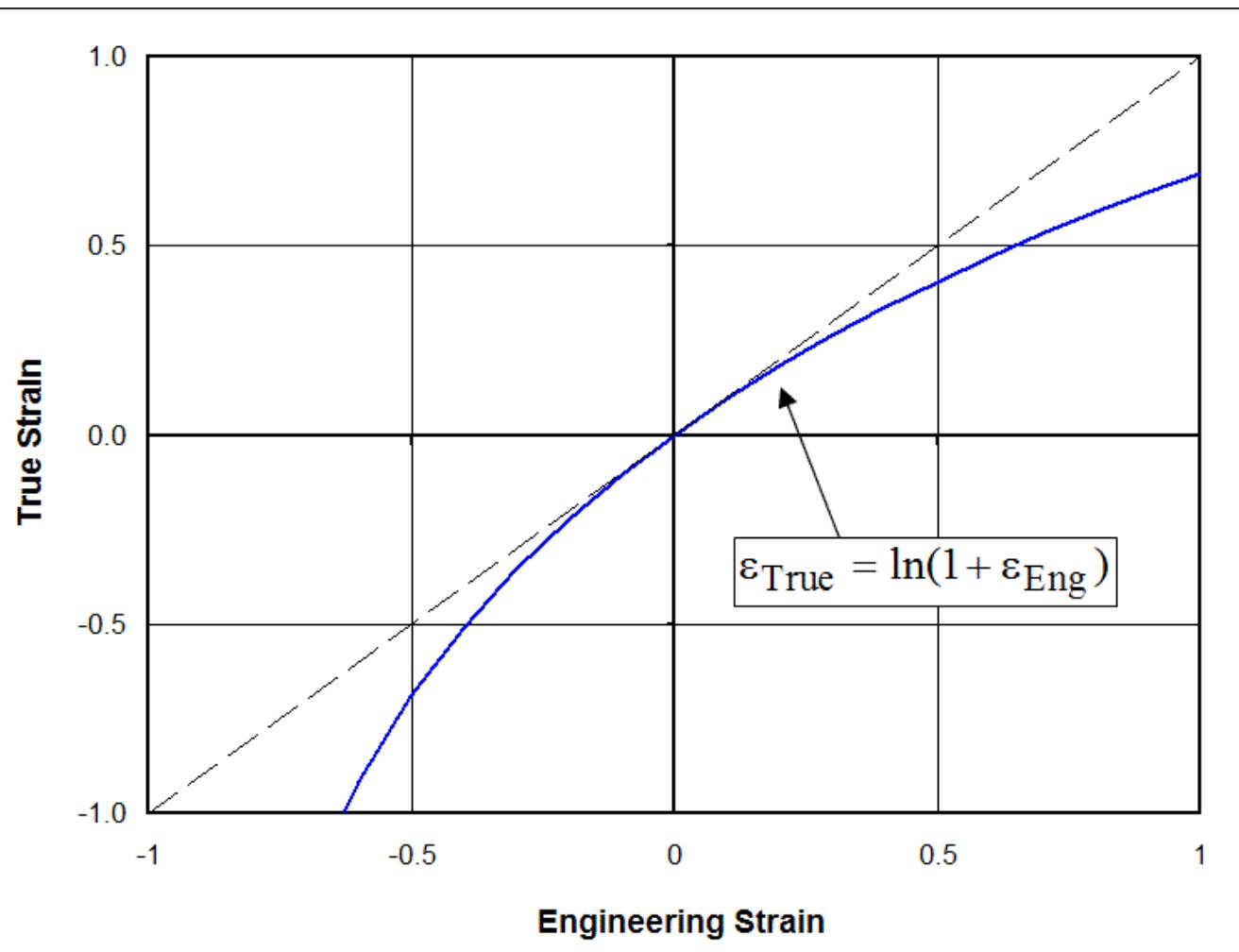
$$\epsilon = \frac{5\text{mm} - 8\text{mm}}{8\text{ mm}} = -0.375$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.4700 \dots$$

$$\epsilon = \frac{5\text{mm} - 10\text{mm}}{10\text{ mm}} = -0.5$$
$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.6931 \dots$$

고찰

1. 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 작다 (?).
2. 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다.

# Compare engineering strain/true strain



# Example

---



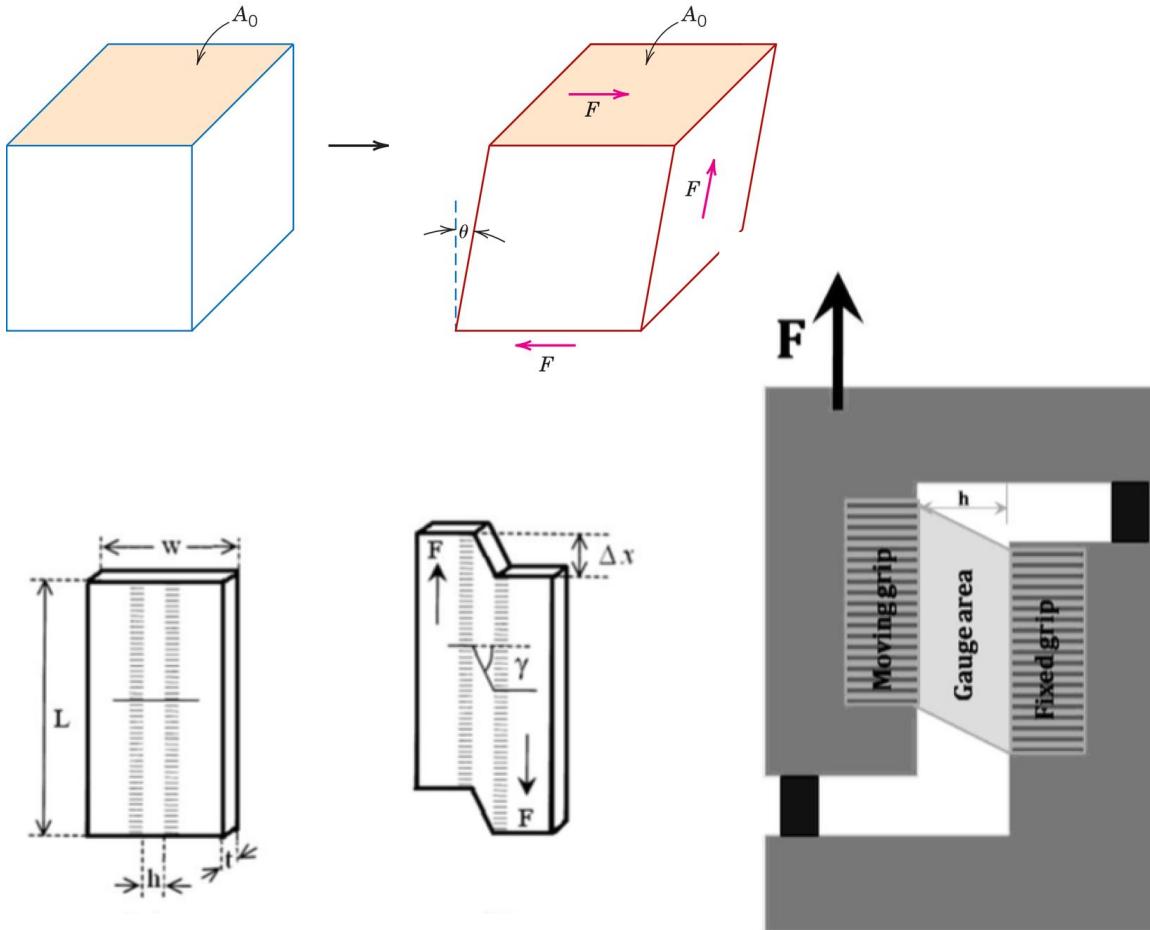
초기 시편  
길이가 10 mm

Step 0

Q1. 공칭 변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

Q2. 진변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

# 전단 (剪斷) 시험



김효정, 포항공대 석사 학위 논문 (2010)

# 전단 시험 (shear test)

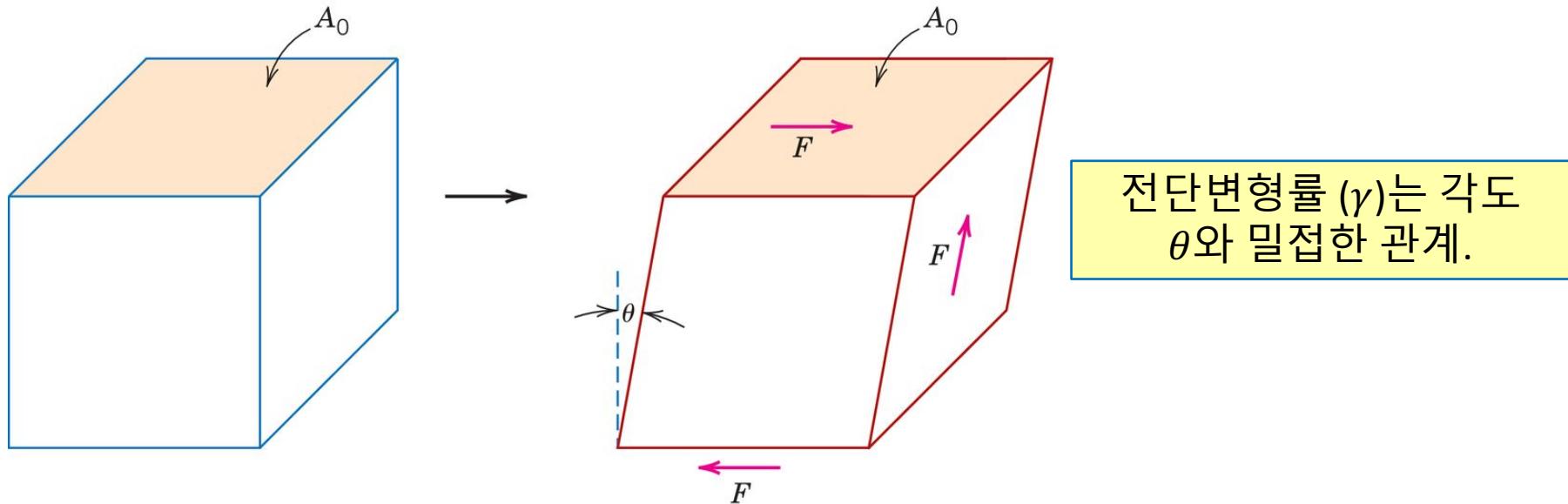
$$\tau = \frac{F}{A_0}$$

$F$ : 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N, kN 단위 사용)

$A_0$ : 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로  $m^2$  단위)

\*전단력의 방향이 작용하는 면에 '누워' 있다.

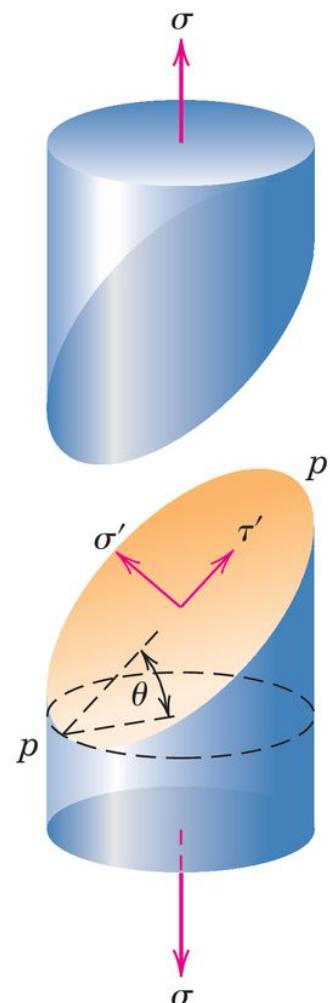
- 인장이나 압축력(tensile or compressive force)의 방향은 작용하는 면과 '수직' 방향



전단 변형으로 물체는 회전(spin)을 일으킬 수도 있다. 하지만 이러한 회전은 순수한 '변형'이 아니다. 따라서, 정확한 변형률을 구하기 위해서는 이러한 회전을 제외시킨다.

# 응력 상태의 기하학적 고려

- 이때까지 작용한 응력들은 특별한 케이스들로 국한되어 있다
  - 응력이 작용한 면과 수직 (수직)
  - 응력이 작용한 면과 평행 (전단)
- 사실 일반적인 응력 상태는 위의 압축, 인장, 전단이 혼재한 상태이다. 따라서 응력 상태는 수직과 전단 성분들로 나누어 분석할 수 있다. 수직, 전단 성분들은 응력 상태를 나타낼 수 있는 구성 요소(component)라 할 수 있다.



응력은 항상 특정 '면'에 작용한다는 점을 주지할 것.

연속된 봉상내의 주황색의 가상 단면에 작용하는 응력의 상태를 살펴보자.

해당 면은 실제로 외부의 응력  $\sigma$ 가 작용하고 있다.  
하지만 해당 응력은 관심면과 '수직' 이거나 '평행'하지 않다.

해당 면에 '수직'하고 '평행'한 성분을 찾아야 응력 상태를 명확히 정의할 수 있다.