

# 비정상 냉각 Non-Steady State Cooling

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부

정영웅



[yjeong@changwon.ac.kr](mailto:yjeong@changwon.ac.kr)  
<https://youngung.github.io>  
<https://github.com/youngung>

# 일반적 열전도 방정식

$$-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Steady-state

$$-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = 0$$

One dimensional (x) non Steady-state  
without internal heat generation

$$-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

$T$ 는 공간 (x) 와 시간 (t)의 함수. ODE?



# Solution of Heat equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

$T$ 는 공간 ( $x$ ) 와 시간 ( $t$ )의 함수. ODE? (변수가 하나인 미분 방정식)

주로, Fundamental solution을 얻는다.  
주어진 경계 조건에 적절한 Green function을 찾는다.

$$T(x, t) = \int \Phi(x - y, t) g(y) dy$$

우리가 사용하는 해결 방식은 무차원 (dimensionless) 단일 변수를 찾는 것에서 부터.

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{\alpha t^3}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{\alpha t^3}} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial \left[ \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]}{\partial x} = \frac{\partial \left[ \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \right]}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{\partial \left[ \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{\partial \left[ \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{x}{4\sqrt{\alpha t^3}} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{\alpha}{4\alpha t} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-2\eta \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$\left( \frac{dT}{d\eta} \right) = -\frac{1}{2\eta} \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

Put  $y = \frac{dT}{d\eta}$  gives  
 $y = -\frac{1}{2\eta} \frac{dy}{d\eta}$



# Solution of Heat equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

Put  $y = \frac{dT}{d\eta}$  gives  
 $y = -\frac{1}{2\eta} \frac{dy}{d\eta}$

$$-2\eta d\eta = \frac{1}{y} dy$$

$$-\eta^2 = \ln y + C$$

$$-\eta^2 = \ln y + \ln A$$

$$-\eta^2 = \ln \left( \frac{y}{A} \right)$$

Put  $C$  as  $\ln A$  gives

Remember  $y = \frac{dT}{d\eta}$

$$\frac{y}{A} = \exp(-\eta^2)$$

$$y = A \cdot \exp(-\eta^2)$$

$$\frac{dT}{d\eta} = A \cdot \exp(-\eta^2)$$

$$dT = A \cdot \exp(-\eta^2) d\eta$$

적분하면?

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = A \int_{\eta_0}^{\eta_1} \exp(-\eta^2) d\eta$$

$\eta = \infty$  (즉,  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \infty$ ) 인 조건은  
 모든  $x$ 에서 (즉 어느 공간점에서)  
 $t = 0$ 인 조건과 동일하다.

$\eta = \infty$  조건  $\rightarrow t = 0$ 이며 모든  
 공간에서 동일한 온도

$$\int_{T_0}^{T_i} dT = A \int_0^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$T_i - T_0 = A \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\eta = 0$  (즉,  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0$ ) 인 조건은  
 모든  $t$ 에서 (즉 어느 시점에서든)  $x = 0$   
 인 조건과 동일하다.

$\eta = 0$  조건  $\rightarrow x = 0$ 이며 어느  
 시점에서든 동일한 온도

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_i - T_0) = A$$

$$\int_T^{T_i} dT = A \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$T_i - T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_i - T_0) \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$\frac{T_i - T}{(T_i - T_0)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\eta^2) d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$\frac{T_i - T}{(T_i - T_0)} = 1 - \text{erf}(\eta)$$

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \text{erf}(\eta)$$

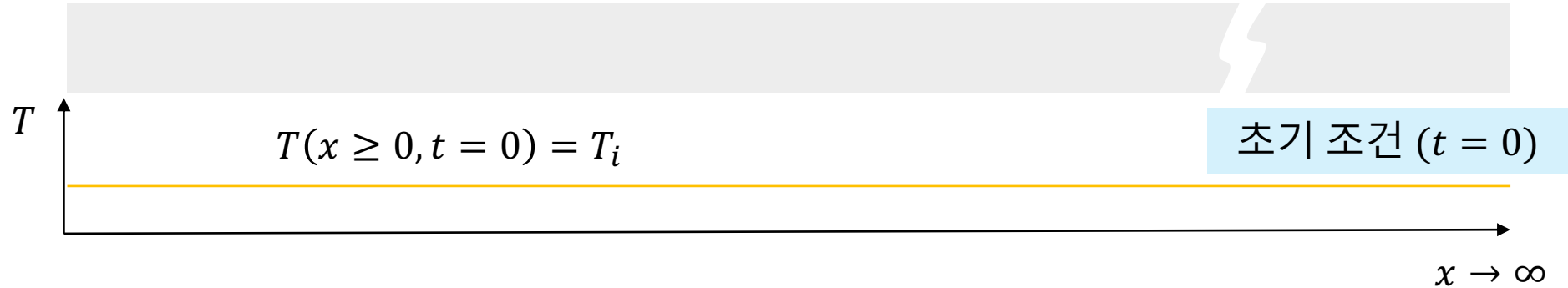
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$$



# 반무한 고체의 전도

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$



$T(x, t)$  in general?

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$



# 반무한 고체의 전도 예제 8.4

$T_i = 25^\circ\text{C}$ ,  
 $T_0 = 100^\circ\text{C}$   
 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$   
반무한 steel rod에서  
1차원 열전도식 응용.

$Q_1$  5분후 봉의 한쪽면에서부터 0.1m 떨어진 지점의 온도는 얼마인가?

$Q_2$  0.01m 떨어진 지점의 온도가  $75^\circ\text{C}$  로 상승하는데 걸리는 시간은 얼마인가?

