

Macroscopic Plasticity and Yielding

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208 전화: 055-213-3694

Homepage: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

Recap

- Stress/strain
- Yield criterion (as a function of stress state) – yield functions
 - Tresca
 - von Mises
- Yield surface/ yield locus in various subsets of stress space (principal, pi-plane ...)
- Effective stress / effective strains
- Plasticity independent of hydrostatic pressure (means tress)
 - Deviatoric stress space

Outline

- Uniaxial tension test and work hardening
- A few mechanical properties
 - %EL
 - %RA
- Engineering stress vs. engineering strain curve / true stress vs. true strain curve
- Mathematical model for work-hardening (Hollomon equation)
- Necking
- Other mechanical tests to avoid necking
 - Compression
 - Bulge tests
 - Plane-strain compression (rolling)
 - Torsion

Intro

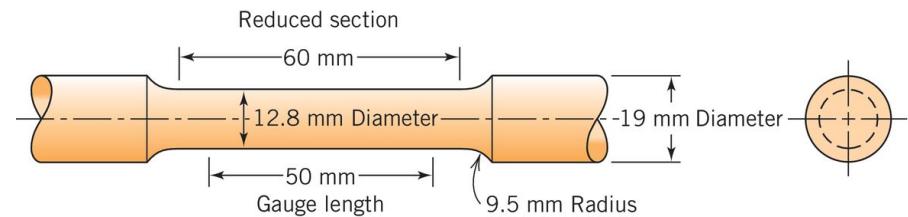
- 재결정(crystallization)이 발생하지 않을 정도로 낮은 온도에서 금속 소재에 소성변형을 가하는 가공을 할 때 우리는 해당 재료가 '냉간가공이 되었다'(being cold-worked)라고 표현한다.
- 즉 냉간가공(cold-work)이란, 재결정이 발생하지 않을 정도로 '낮은 온도'에서의 소성 변형을 일컫는다.
- 소성변형(plastic deformation)이 발생할 때, 재료는 소성 변화에 따른 shape change(모양 변화, 형태 변화 ...) 뿐만 아니라 ..
 - Hardness (증가)
 - Strength (증가)
 - Ductility (감소)
- 특히 소성 변화에 따른 strength의 증가를 일컬어, strain-hardening 혹은 work-hardening이라고 한다.
- 도 변한다.
- 이러한 strain-hardening의 거동(behavior)도 물질마다 다르다 (즉 물성). 이를 '정량적'으로 측정하는 가장 간단한 방법은 일축 인장 시험이다.

Tension tests

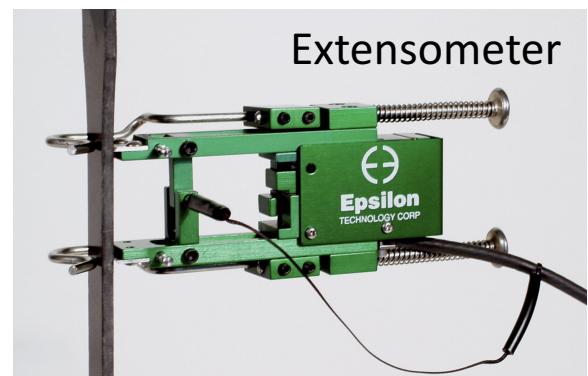
- (Uniaxial) tension test: the most common mechanical stress-strain test performed in **tension** (인장)
- 시편(specimen)은 주로 파괴(fracture)가 발생할 때까지 당겨진다.
- Dogbone 모양의 시편
- Load-cell: 시편에 가해진 force를 측정
- Extensometer: 시편의 길이 (elongation) 변화를 측정



Tensile tester



Load-cell



Extensometer

Images from Callister, Int. MSE
<http://www.epsilontech.com/products/axial-extensometer-model-3542/>

일축 인장 시험

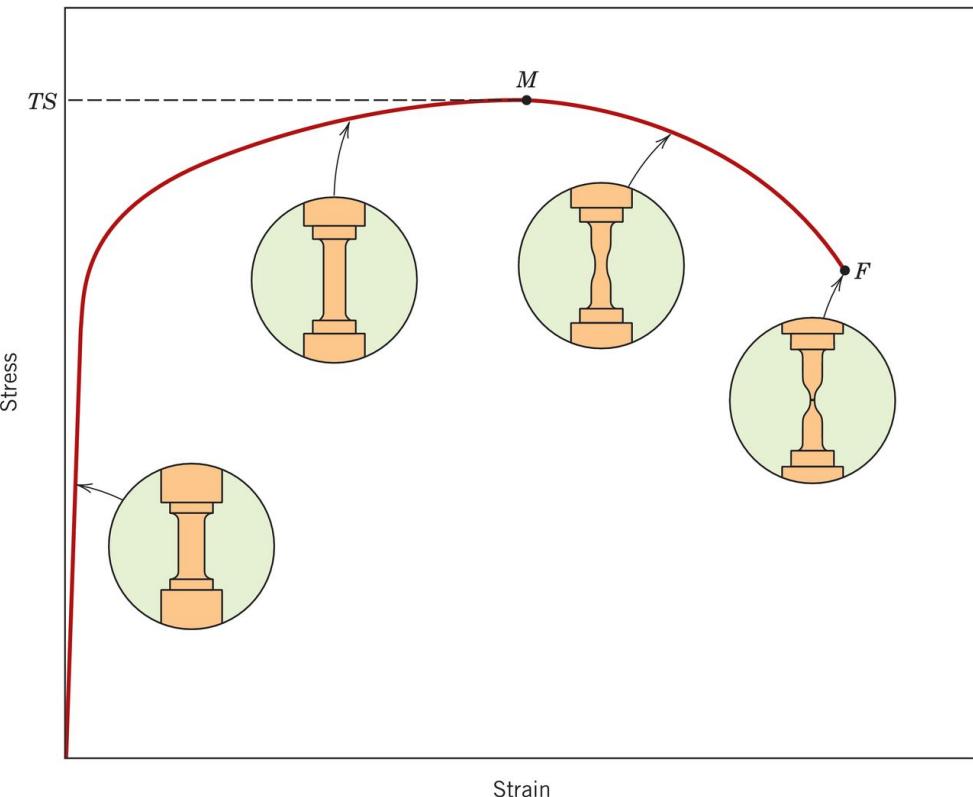


Typical conditions:

1. Strain rate: $(\frac{d\varepsilon}{dt} \text{ 혹은 } \dot{\varepsilon}) 10^{-3} [\text{sec}]^{-1} < \dot{\varepsilon} < 10^{-4} [\text{sec}]^{-1}$
2. 온도 (RT)
3. Uniformity in strain/stress has to be maintained in the gauged volume

Typical shape of stress-strain curve

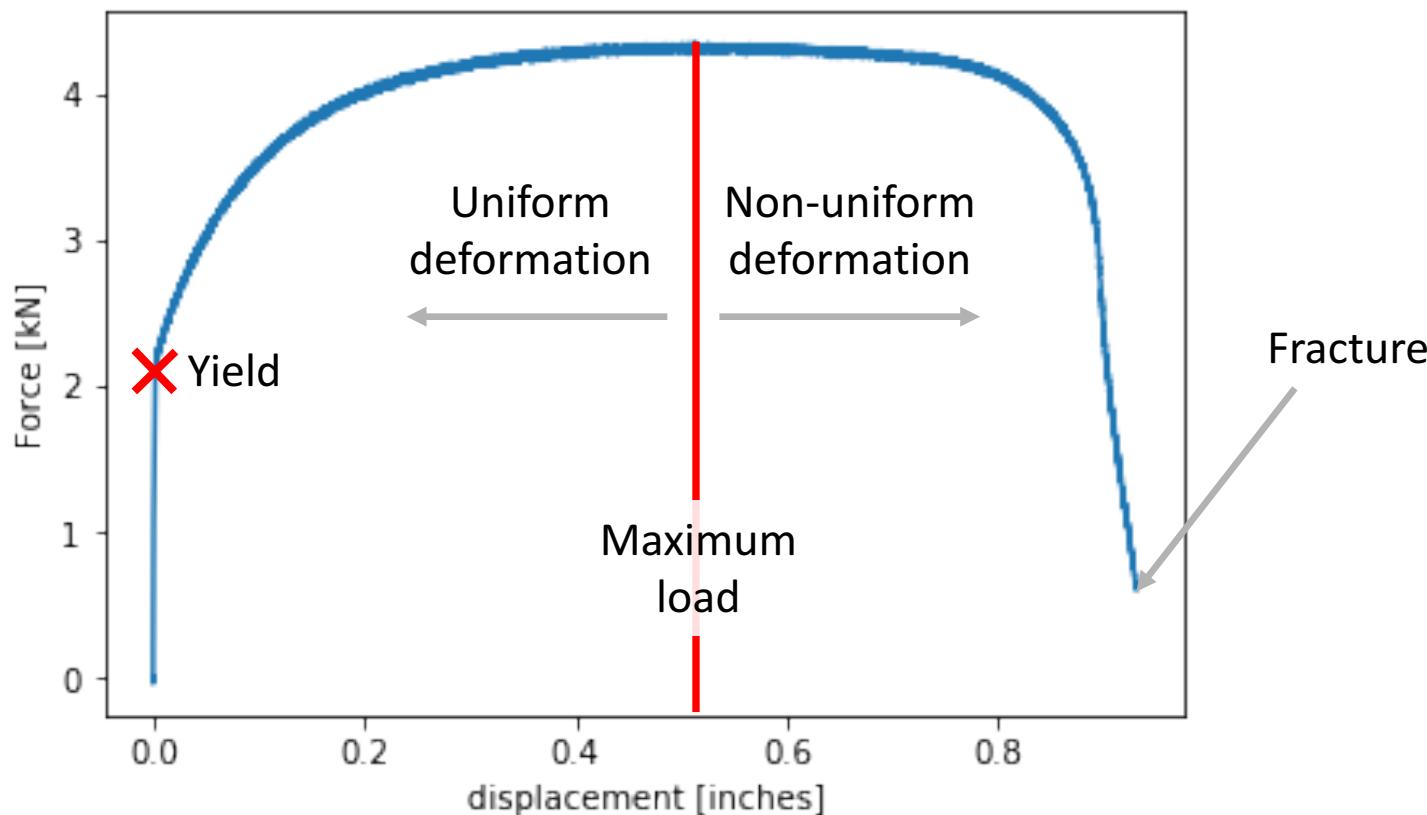
- 교재는 strength와 stress를 구분 – 물성의 경우 강도(strength)를 사용. 하지만 해당 과목에서는 뚜렷이 구분하지 않겠다 – since the term depends on whom you are talking to.



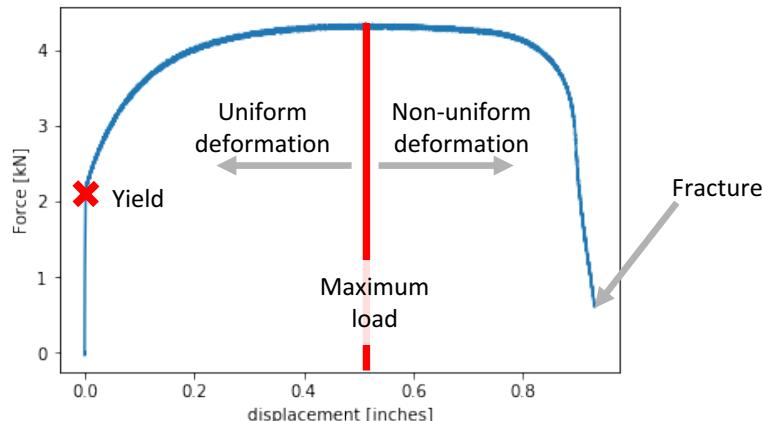
- 소성 변형후 계속적으로 소성 변형을 일으키기 위해서는 응력이 증가하여야 한다. 이렇게 계속적으로 소성 변형을 일으키는 응력을 유동응력(flow stress)이라 한다.
- 공칭 응력/공칭 변형률 커브에서 최대점의 공칭 응력을 TS라 한다. TS를 지나면 flow stress가 감소, 최종적으로 파괴에 이른다 (F).
- TS까지는 균일한(homogeneous) 변형. 그이후로는 한부분에 변형이 집중되고 이로 인해, 한 부분의 폭이 수축되는 현상(necking) 발생.
- 구조재는 탄성 변형 구간내에서 주어진 하중을 견뎌야 한다.

Tension tests

일축 인장을 통해 얻어진 IF-steel의 Force-displacement curve



일축 인장 시험을 통해 얻어지는 기계적 물성들



- 항복강도 (항복응력); yield strength, (yield stress)
- 인장 강도; Tensile strength; 혹은 최대인장강도 (ultimate tensile strength) – UTS
- Ductility (연성)
 - $\%EL$ (elongation) = $\frac{l_f - l_0}{l_0} \times 100\% \equiv El$
 - $\%RA$ (reduction of area) = $\frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100\% = A_r$ 일축인장에서 ($A_f < A_0$) 따라서 $\%RA > 0$
 - l, A 는 각각 gauge volume내의 축방향 길이, 그리고 축의 수직방향 단면적을 뜻함.
 - 첨자 $_0$ (naught) 그리고 f 는 각각 처음 상태, fracture 상태를 뜻한다.

These are engineering terms

단면 가공도 (Area reduction in processing)

- 가공중에 발생하는 단면의 감소량을 뜻한다.

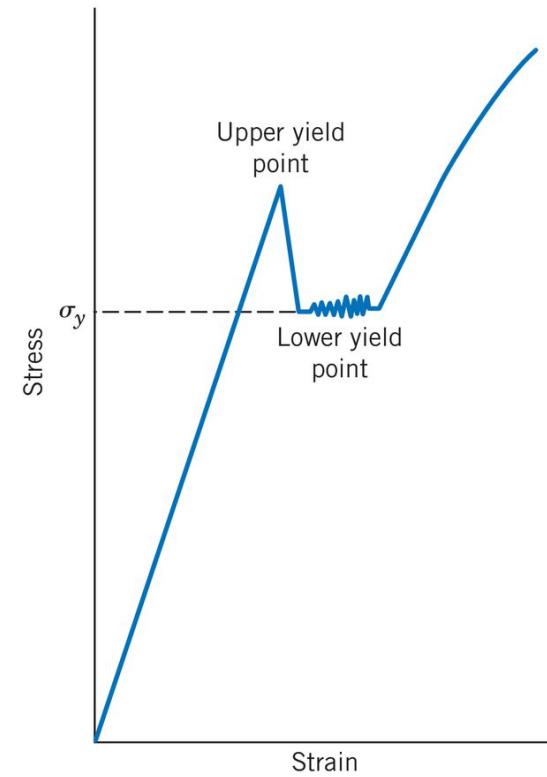
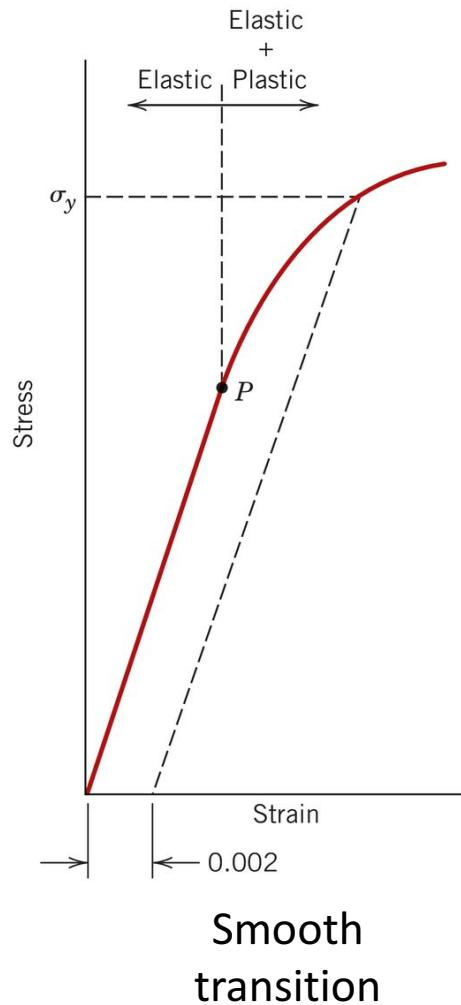
$$r = \frac{A_0 - A}{A_0}$$

- 앞서 설명한 단면감소율 A_r 은 시편의 파괴가 발생할때 까지의 단면적 변화를 측정하며 물질마다의 고유한 성질인 반면, 위의 단면의 감소량은 냉간가공도를 측정하는 방법이다 – 같은 물질이라도 냉간가공의 양을 다르게 줄 수 있다. 따라서 물성이 아니라, 물질에 부가된 ‘가공량’을 나타내는 지표이다.
- 단면 가공도는 얼마나 가공이 되었는지 알려줄 수 있다. 따라서 변형률, 그리고 냉간가공도 (the amount of cold-work, %CW)와 관련있다.
- $\%CW = r \times 100\%$

$$r = 1 - \frac{A}{A_0} = 1 - \frac{\frac{V}{l}}{\frac{V}{l_0}} = 1 - \frac{l_0}{l} \rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = 1 + \epsilon^{engi} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) = \varepsilon^{true}$$

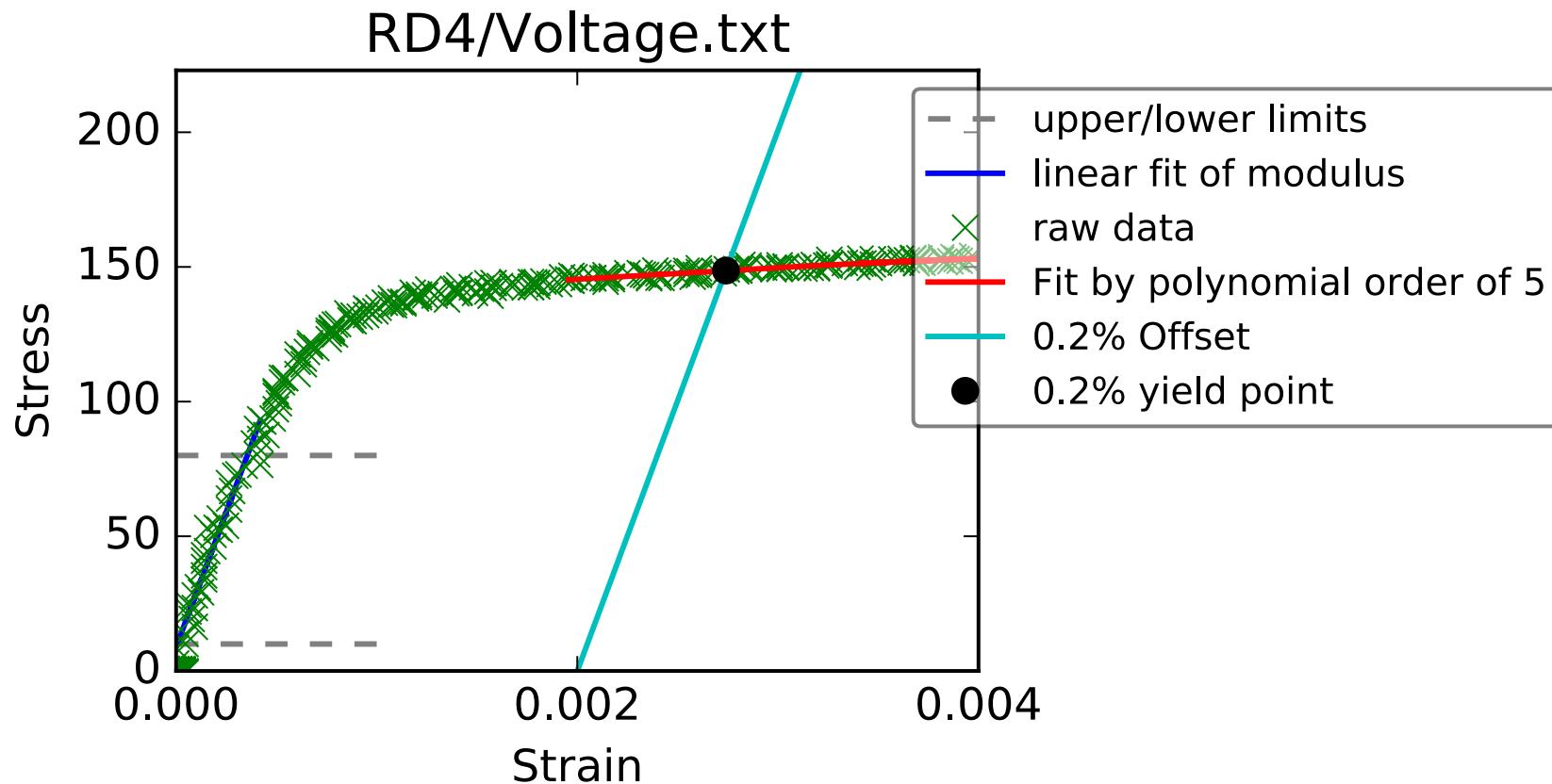
Yield (항복)

- 대부분의 금속 재료는 약 0.005 정도의 변형율까지만 탄성을 유지. 이후에는 작용 응력이 제거된 이후에도 완벽히 회복되지 않는다.
 - 탄성 구간에서 선형적인 관계를 보이던 응력과 변형률의 관계도 비선형이 된다.
 - 따라서 Hooke's is not valid any more.
 - 작용 응력이 제거된 이후에도 남아 있는 변형을 소성 변형이라 일컫는다.
-
- Proportional limits
 - 0.002 offset (수평이동법) – 항복 강도 정의



Yield point
phenomenon
Typically found in
low-carbon steel

Yield stress determination



What determines the shape of σ vs. ε curve?

- 초기 항복후 소성변형을 위해서는 하중의 증가가 요구된다. 하지만 하중 증가의 속도는 감소한다. 가공경화는 재료를 더 강하게 만들지만, 일축 인장 변형에 의해 하중이 작용하는 단면적이 줄어든다.
 - 1. 가공경화에 따른 재료의 강화
 - 2. 단면적 감소에 따른 단면적당 작용하는 하중의 증가.
 - 위의 step 1)에 의해 재료는 강해지지만, 점점 step 2)에 의한 인장불안정 조건이 발생.
 - 시편에 작용하는 최대 하중 조건은 인장불안정 조건에서 얻어진다. 인장 불안정 조건 이후에는 시편에 작용하는 하중이 감소...
 - 이렇게 인장 불안정 (instability) 조건은 재료마다 다르게 나타난다.
 - Instability는 교재 4장에서 중점적으로 다룬다. 이번 시간에는 간략하게만 다루고, 자세한 내용은 다음에 다루도록 한다.

Plastic Instability in uniaxial tension tests

- Plastic instability in uniaxial tension
- Competition between 1) increase in yield strength and 2) increase in imposed load (or stress) (caused by area reduction)
- $d\sigma_Y = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$ ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$: hardening rate; 혹은 발생한 변형률당 발생하는 강도 증가량)
- 인장 실험중에서 단면적 감소에 따른 응력 증가; 즉 해당 조건에서 외부의 하중에 변화는 고려하지 않는다. 따라서,
- $d\sigma = d\left(\frac{F}{A}\right) = Fd\left(\frac{1}{A}\right) = -FA^{-2}dA = -\frac{F}{A}\frac{dA}{A} = \sigma \frac{dl}{l} = \sigma d\varepsilon$
- $(\frac{dA}{A} = \frac{dl}{l})$ 는 소성 변형중의 ‘부피불변화’를 통해 증명한다.
 - $Volume = A \times l$ 양변을 미분하면
 - $dV = Adl + l dA = 0 \rightarrow \frac{dV}{Al} = \frac{dl}{l} + \frac{dA}{A} = 0$ 따라서 $\frac{dl}{l} = \frac{dA}{A} = d\varepsilon$

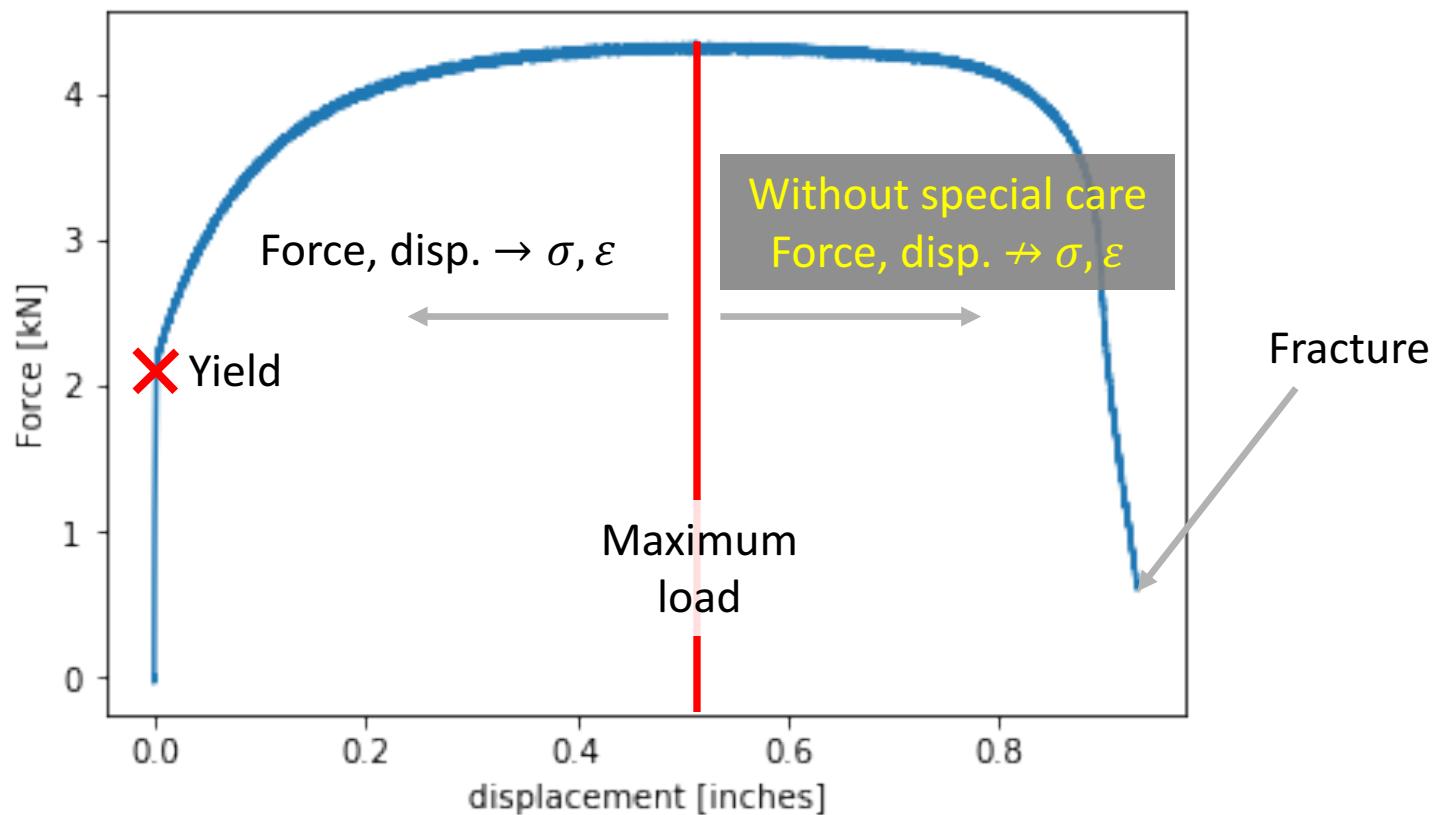
Plastic Instability in uniaxial tension tests

- $d\sigma_Y = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$ ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$: hardening rate; 혹은 발생한 변형률당 발생하는 강도 증가량)
- 인장 실험중에서 단면적 감소에 따른 응력 증가; 즉 해당 조건에서 외부의 하중에 변화는 고려하지 않는다. 따라서,
- $d\sigma = d\left(\frac{F}{A}\right) = Fd\left(\frac{1}{A}\right) = -FA^{-2}dA = -\frac{F}{A}\frac{dA}{A} = \sigma \frac{dl}{l} = \sigma d\varepsilon$
- 재료의 강도 증가가 단면적 감소에 따른 응력 증가보다 빠르다면 안정적으로 변형가능 $\sigma d\varepsilon < d\sigma_Y = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$
- 하지만 그 반대라면 불안정해진다. 따라서, 불안정해지는 조건은
- $\sigma d\varepsilon \geq d\sigma_Y = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon$
- 따라서 불안정의 시작점은
- $\sigma d\varepsilon = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon \rightarrow \sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)$ (Considere's criterion For plastic instability)

Necking

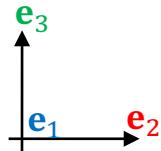
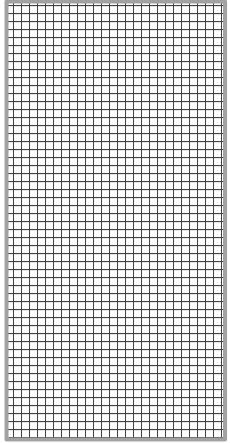
- 이렇게 불안정 조건에 의해 시편의 gauge 부분내에 국부적인 곳에서 다른곳 보다 더 많은 단면적 감소가 발생 가능...
- 급작스레 발생한 국부적인 단면적 감소가 일어난 곳에서 더 많은 응력이 집중되어 다른부분보다 더 빠르게 변형이 발생.
- 다시 응력 집중
- 다시 빠른 단면적 감소...
- Necking 발생
- 물성에 따라 Necking이 발생하지 않고 파괴되는 재료도 있다.
Necking 발생후의 post-uniform elongation 또한 재료 마다 다르다.

Post-necking and Bridgmann method

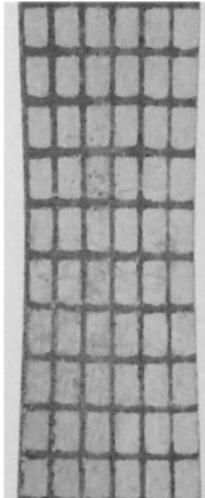


States near the neck

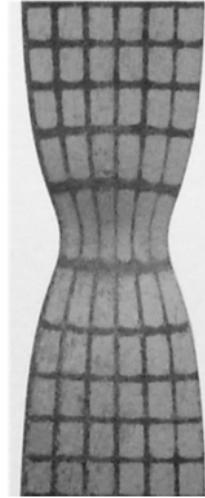
Uniform



Onset of
necking



Post-necking



$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \text{ everywhere}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \text{ everywhere}$$

$$\sigma^{neck} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

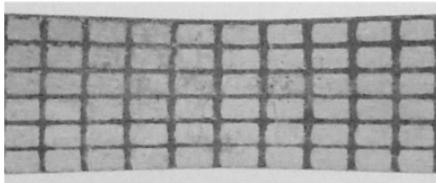
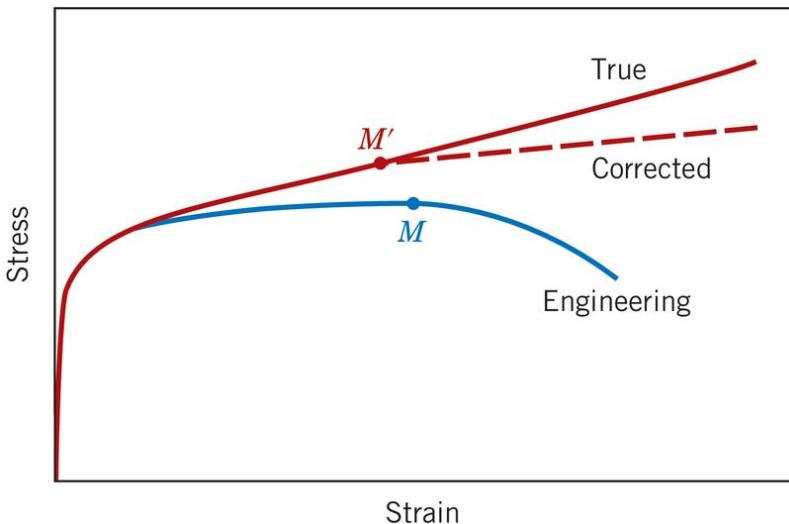
$$\sigma^{far\ away\ from\ neck} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Post-necking 구간에서 true stress-true strain 값을 얻기위해서는 위의 inhomogeneity를 보정(correct)해야한다.

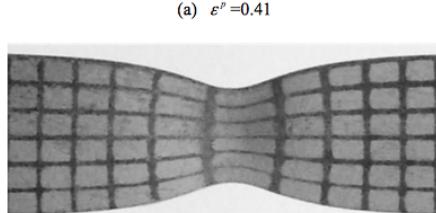
Necking과 변형강화 측정한계

- 일축 인장의 경우 Necking이 발생하면 변형 강화를 측정하기 어렵다. 하지만 변형강화 거동은 소성가공에 있어서 매우 중요한 물성이이며, 실제 소성 가공 예측 계산시에는 일축 인장의 측정 한계를 넘어선 데이터(해당 물질의 변형강화 성질)가 필요하다.
- 우리는 다음과 같은 세가지 방법에 대해 다룬다.
 - 기존의 일축 인장 실험과 데이터를 더욱 면밀히 분석하여 사용할 수 있는지
 - Necking이 발생하지 않는 실험방법을 통해 변형강화 거동을 측정할 수 있는지. 그렇다면 어떤 방법이 있는지.

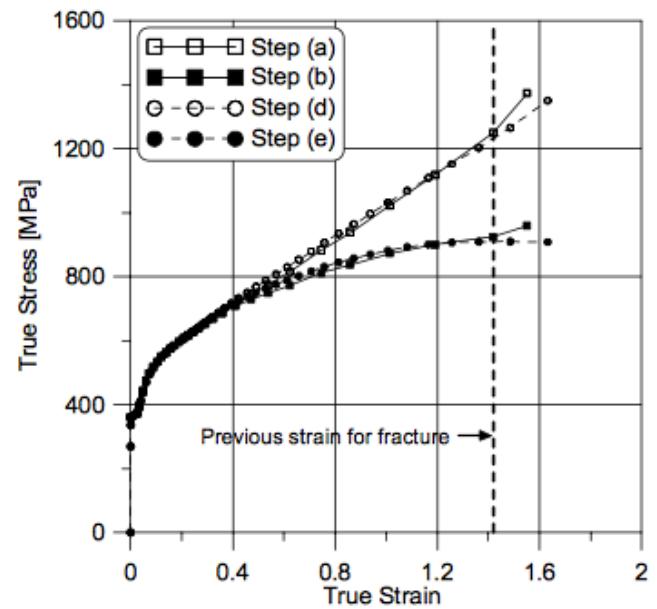
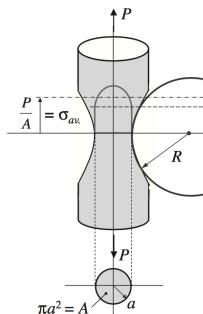
Bridgmann correction



Bridgmann method



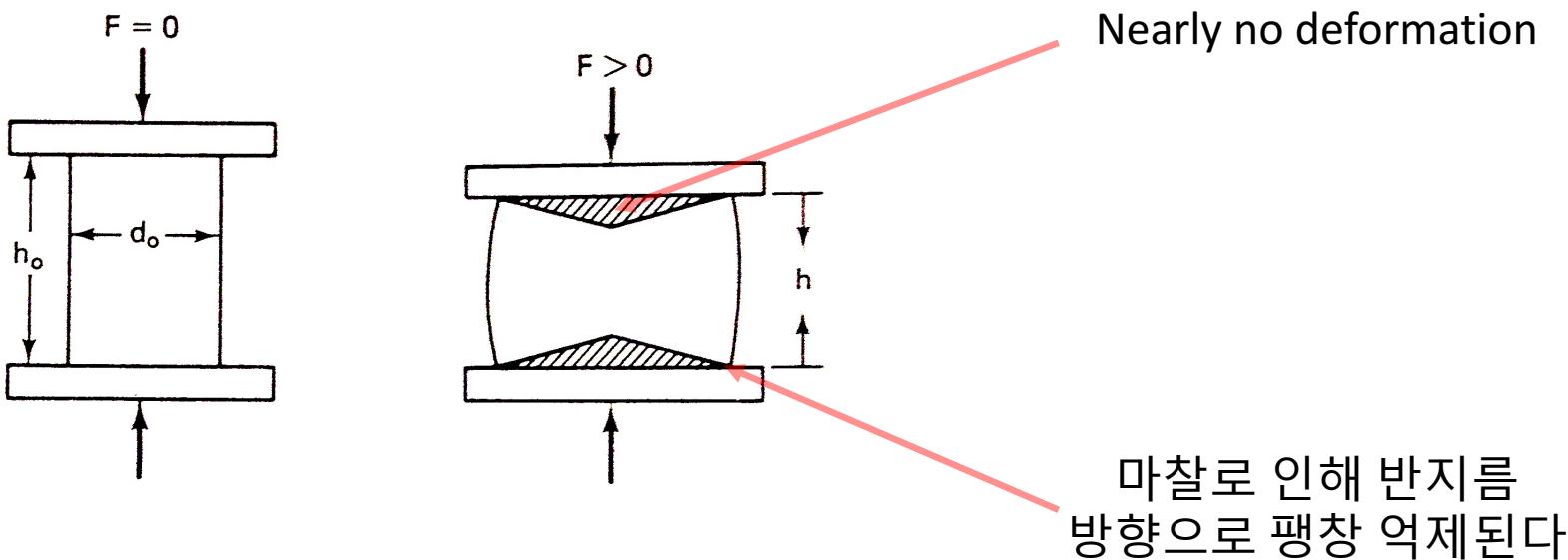
(b) $\varepsilon_p = 1.42$ (close to fracture)



Bridgmann method의 한계
- 이방성재료에 적용 어렵다.
- Void 발생으로 인한 실단면 감소를 고려하기 힘들다.

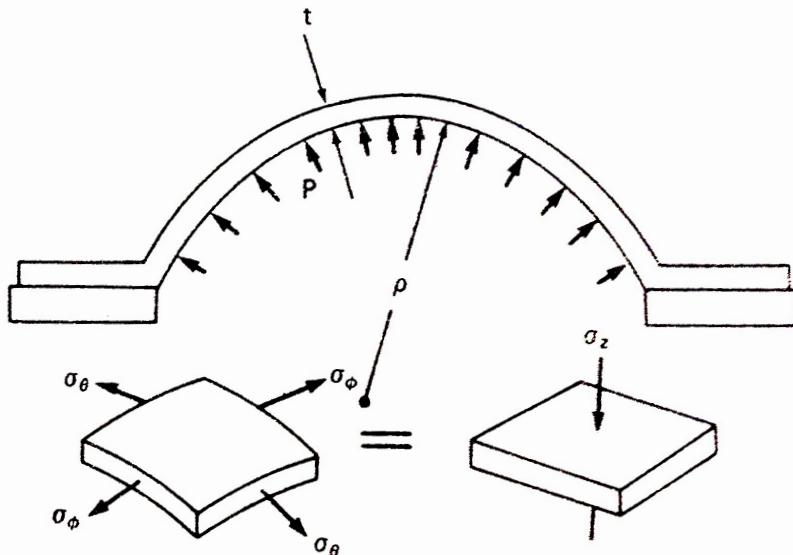
Direct compression (직접 압축)

- 압축의 경우, 하중의 방향과 동일한 법선(normal)을 가진 단면적이 증가한다. 따라서 일축 인장과 같은 necking은 발생할 수가 없다.
- 다만, 압축 변형의 경우 일축인장 만큼 균일한 변형을 얻기 힘들다. 그 이유는
 - 금형면과의 마찰로 인한 부동영역 발생
 - 그에 따라 전체적으로 barreling

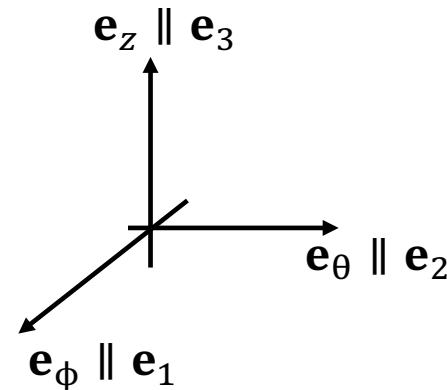


Bulge test

- Most popular experimental method to obtain stress-strain behavior for an extended amount of strain – a lot large deformation is realized in comparison with uniaxial tension test.



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_\phi & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$



For isotropic material

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = \frac{P\rho}{2t}$$

according to
membrane theory

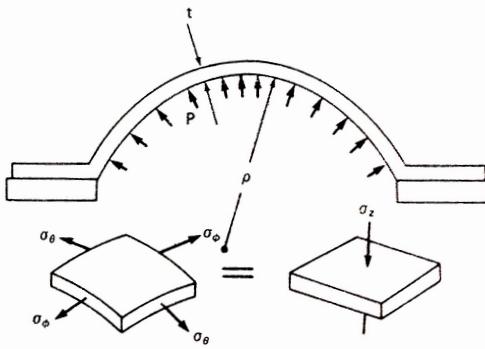
P: internal pressure

ρ : radius of curvature

t : specimen thickness

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{P\rho}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P\rho}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bulge test



Bulge test에서 시편의 Top region이 겪는 변형률

$$\text{텐서는: } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\phi & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

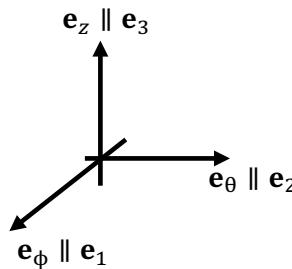
등방서 재료라면 $\varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta$ (1)

그리고 소성 변형률이 탄성 변형률보다 훨씬 크다면 $\boldsymbol{\varepsilon}^{total} \approx \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$.

따라서 $\varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$ (2)

(1) 조건에 의해 (2)는 다음으로 이어진다.

$$\varepsilon_z = -2\varepsilon_\theta$$



그런데, bulge test에 의해 시편의 두께 방향으로의 normal strain component (즉 ε_z)는 두께의 변화로 얻을 수 있다:

$$\varepsilon_z = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

금속의 경우 소성의 거동을 설명하는 응력상태는 mean stress와 deviatoric stress로 설명된다. 혹은 hydrostatic pressure와 무관하다.

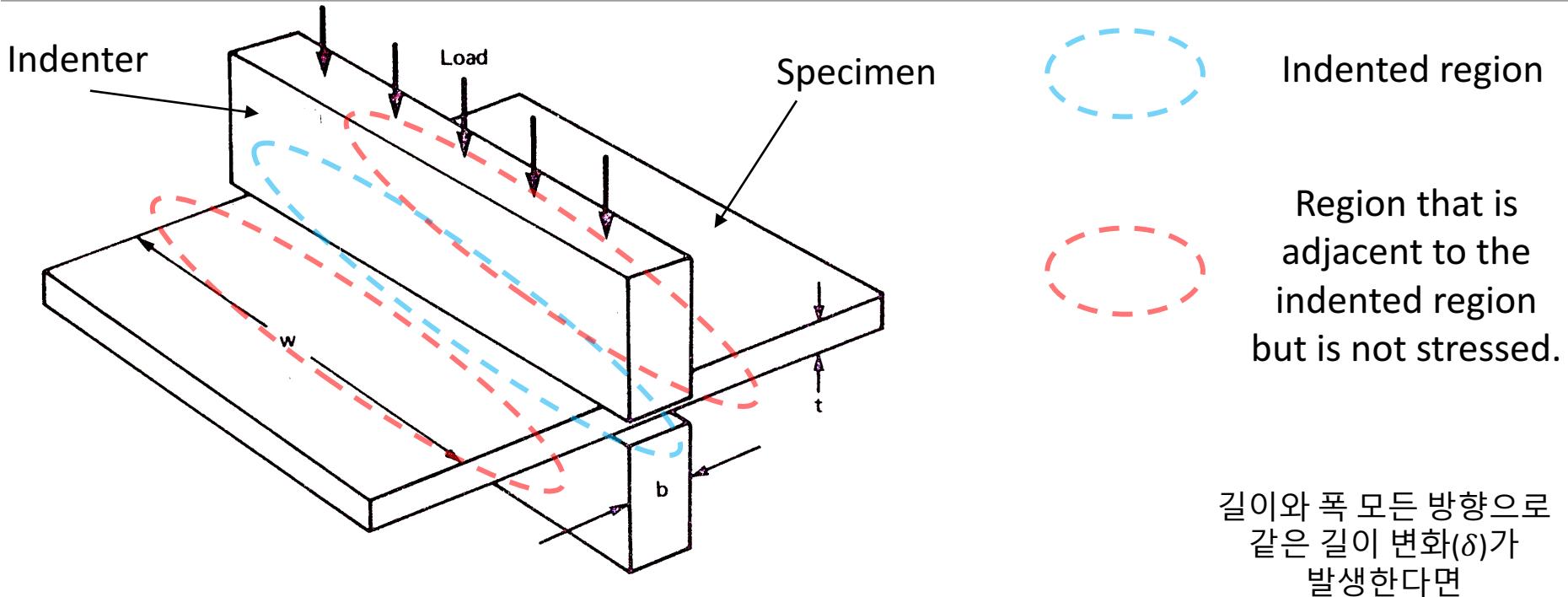
따라서 주어진 응력 텐서에 임의의 hydrostatic pressure를 빼더라도 소성 거동을 설명하는데 무리 없다. 따라서, 새로운 응력 텐서 $\boldsymbol{\sigma}'$ 를 다음과 같이 얻어보자

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \frac{P\rho}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P\rho}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{P\rho}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P\rho}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P\rho}{2t} \end{bmatrix}$$

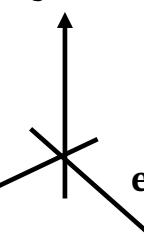
$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P\rho}{2t} \end{bmatrix}$$

위 응력 텐서는 z축 방향으로의 일축 압축 응력 (uniaxial compression stress) 상태를 보여준다. 따라서, bulge test의 결과로 얻는 stress-strain 관계 데이터는 '일축 압축 응력' 얻는 결과와 동일.

평면 압축 변형 시험 (plane-strain compression test)



e_3 두께 방향



e_2 폭방향

e_1 길이 방향

왜 plane-strain condition이 되나? 두 가지 영향으로 폭방향의 변형을 제한하는 효과를 얻는다:

- 길이 방향으로 상대적으로 짧고, 폭 방향으로 길다. Indenter에 의해 폭과 길이 방향으로 비슷하게 길이 변화가 발생하더라도 폭방향으로의 변형률이 상대적으로 적게 된다.
- Indenter에 의해 눌리는 부분의 앞뒤에 위치한 재료들은 stress가 없는 상황. 폭 방향으로의 변화를 방해하는 효과

$$\varepsilon_{11} = \frac{\delta}{b}$$

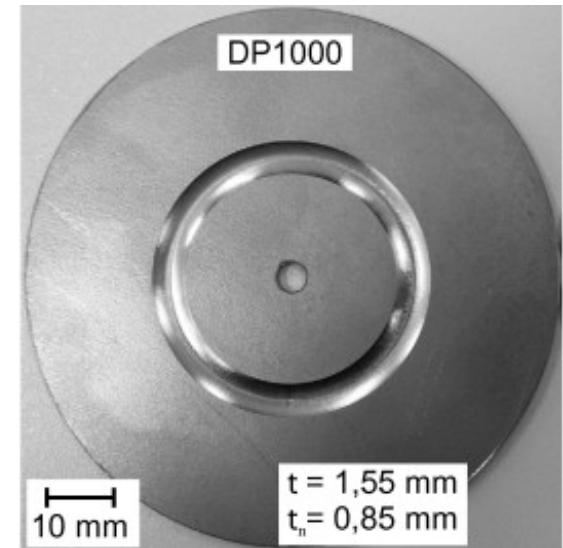
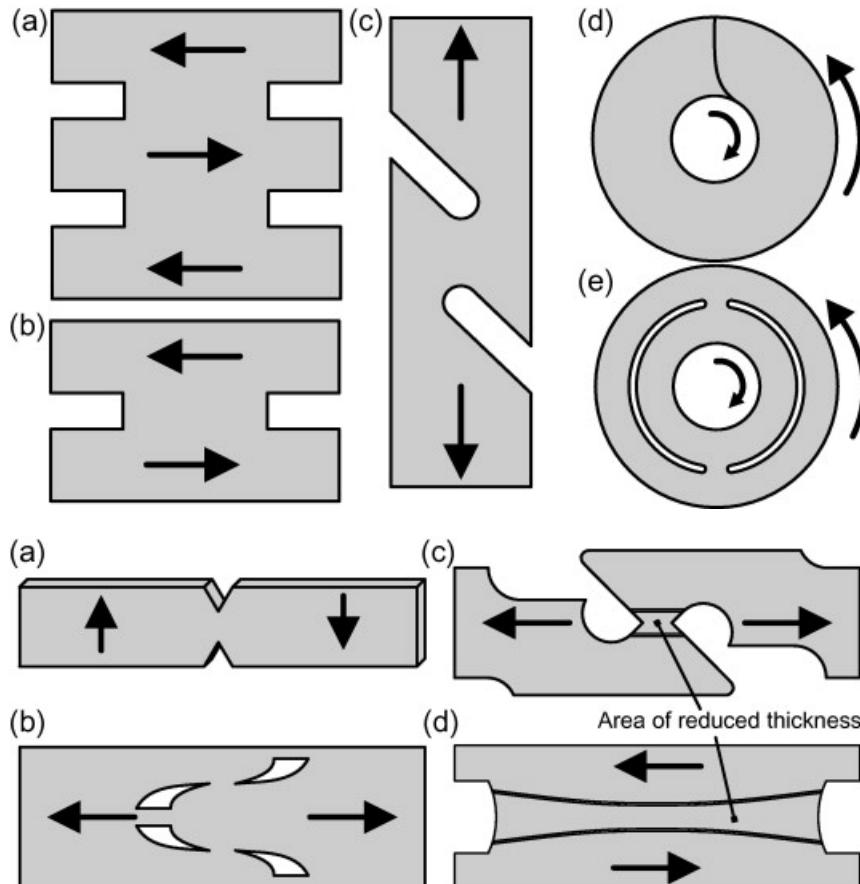
$$\varepsilon_{22} = \frac{\delta}{w}$$

if $w \gg b$

$$\varepsilon_{11} \gg \varepsilon_{22} \approx 0$$

Torsion tests

- Various shear testing geometries are discussed in the literature



가공경화식 (strain hardening models)

- 가공경화에 의해서 발생하는 강도 증가를 flow-stress vs. strain curve에서 얻을 수 있다. 금속 판재의 경우, 재결정(recrystallization) 후 얻어진 시편을 대상으로 일축 인장 시험을 진행하여 진응력-진변형률 곡선을 얻은후 이를 간단한 수학적 관계식을 이용하여 설명할 수 있다:

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n \quad (\text{P. Ludwick, Elemente der technologischen Mechanik (Berlin, 1909)})$$

$$\sigma = a + (b - a)\{1 - \exp(-c\varepsilon)\} \quad (\text{E. Voce, J. Inst. Metals 74, (1948) p537})$$

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (\text{J. H. Hollomon, Trans. AIME 162 (1945) p162})$$

가공경화식은 소성변형으로 인한 강도증가(가공경화)를 표현한다. 가공경화가 일차원적 응력 및 변형률 상태에 발생 할 때, 예를 들어 일축 인장 실험 이라면 위의 식들을 적용하는데 큰 무리가 없다. 응력과 변형률이 일축 인장이 아니라, 다축의 상태에서 복잡한 형태로 나타나더라도, 가공경화는 발생한다. 따라서, 위의 가공경화식을 일반적으로 적용하기 위해서는 앞서 언급한 ‘유효응력’과 ‘유효변형률’ (effective or equivalent stress and strains)을 사용한다.

예를 들어 Hollomon equation을 다음과 같이 사용할 수 있다.

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$$

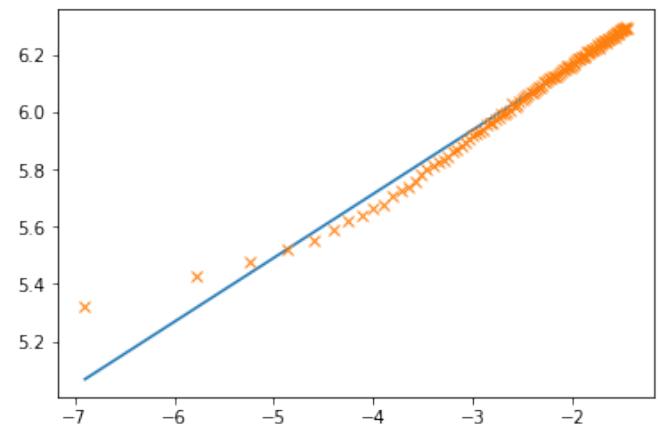
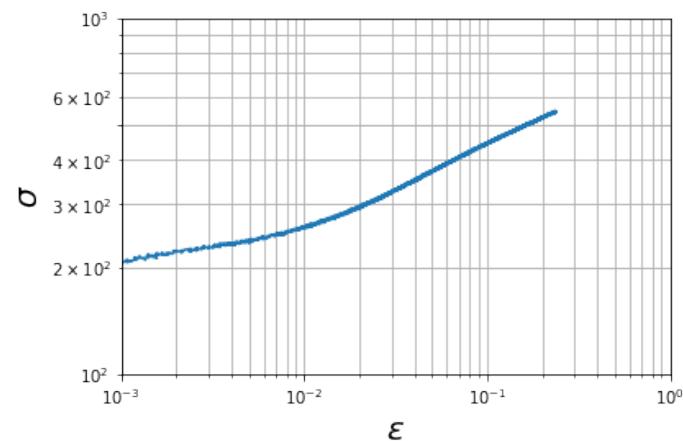
예제 3-2

- 한 금속의 소성거동이 $\bar{\sigma} = 1000 \bar{\varepsilon}^{0.5}$ [MPa]로 표현된다. 만약 이 금속으로 만든 봉이 균일하게 냉간가공되어 그 단면가공도가 $r=0.3$ 에 이르렀을 때, 해당 물체의 항복강도는 얼마인가?
- 1) 우선 단면가공도와 일축 인장시의 축방향 변형률과의 관계는 다음과 같이 표현된다.
 - $\ln\left(\frac{1}{1-r}\right) = \varepsilon^{true}$
- 2) 이를 통해 단면가공도 $r=0.3$ 에 해당하는 축방향 변형률을 구하면
 - $\ln\left(\frac{1}{1-0.3}\right) = 0.3567 \dots$
- 3) 따라서, 주어진 가공경화식을 일축인장시 얻어지는 항복강도(혹은 유동응력 flow stress) vs. strain로 적용시키면
 - $\sigma = 1000 (0.3567)^{0.5}$ [MPa] = 597 [MPa]

Determine parameters in Hollomon equation

- $\sigma = K\varepsilon^n$ 에서 K 와 n 값을 구하기. K 와 n 값은 재료에 따라 다른값을 가진다.
왜냐면 재료에따라서 다른 σ vs. ε curve를 가지기 때문에.
- 1). 위 식의 양변에 log를 적용한다.
- $\log(\sigma) = \log(K) + n \times \log(\varepsilon)$
- 위는 $y=ax+b$ 형태의 '선형' 방정식이다:
 $\log(\sigma) \rightarrow y, \log(\varepsilon) \rightarrow x$
- 따라서 실험을 통해서 얻어진 σ vs. ε 데이터에 위와 같이 log 함수를 사용하면 선형성(linearity)가 두드러진 형태로 나타난다.

IF steel에서 얻어진 σ, ε 데이터를 logarithmic scale에서 그린 그래프



Determine parameters in Hollomon equation

탄성영역 (typically $\epsilon \leq 0.0005$)에서는 Hollomon equation이 아니라 ... Hooke's law에 지배받는다.

$$\sigma = E\epsilon$$

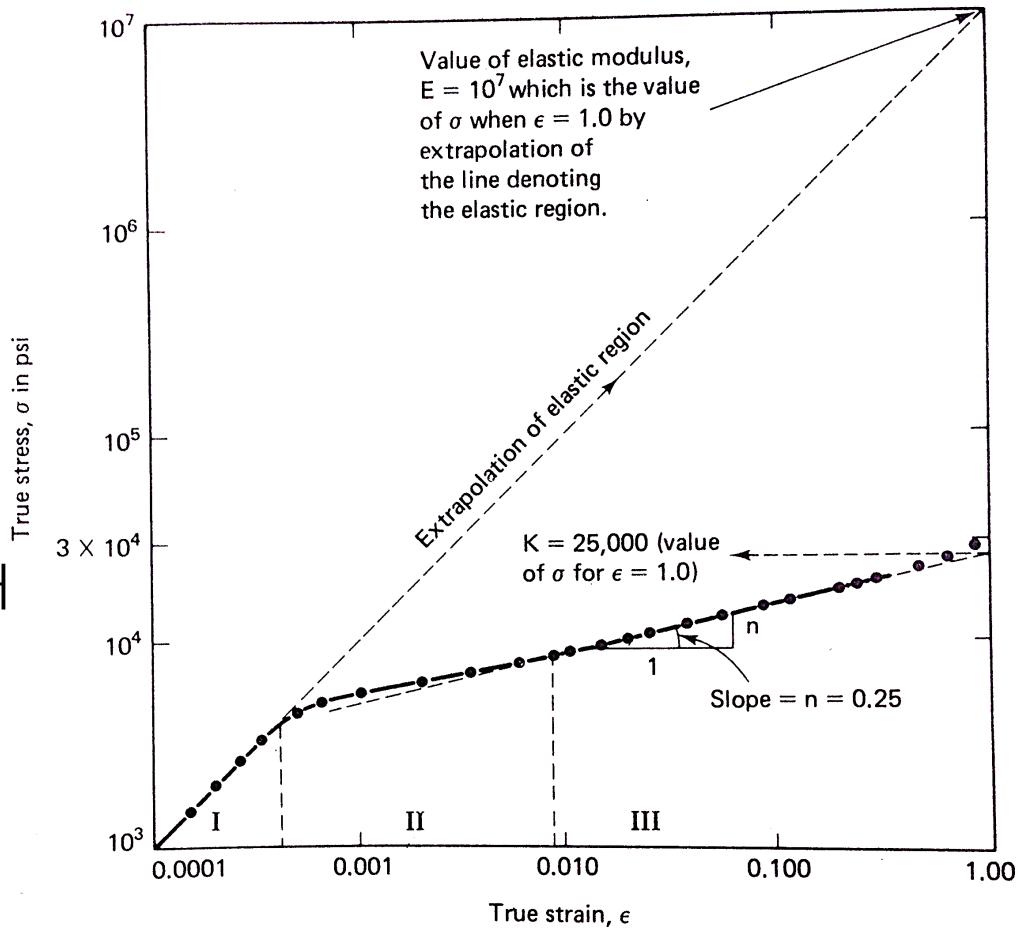
(1) $\log \sigma = \log \epsilon + \log E$ ($y = x + b$ 형태)

소성영역을 Hollomon equation에 대입하면...

(2) $\log \sigma = n \log \epsilon + \log K$ ($y = ax + c$ 형태)

위의 a,b,c 값은 모두 다르다.

b 값을 이용하여 E 값을 estimate? 식 (1)의 ϵ 에 1 대입하면, 해당 x 좌표에서의 y 값이 $\log E$ 값을 의미한다.



Strain-hardening curves

- Strain-hardening behavior of metals are represented by $\bar{\sigma}$ vs $\bar{\varepsilon}$ curve.

- Uniaxial tension

- $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ 따라서, $\bar{\sigma} = \sigma_{11} \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$

- Bulge test:

- $\sigma = \begin{bmatrix} \frac{P\rho}{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P\rho}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \approx -\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} < 0 \end{bmatrix}$ uniaxial compression 으로
간주하여
- $\bar{\sigma} = \frac{P\rho}{2t} \quad \bar{\varepsilon} = -\varepsilon_{33}$

- Plane-strain compression:

- $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \approx -\varepsilon_{11} \end{bmatrix}$

- Using VM, $\bar{\sigma}^{VM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{11}$, $\bar{\varepsilon}^{VM} = \frac{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}{\bar{\sigma}^{VM}} = \frac{\sigma_{11} \varepsilon_{11}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{11}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{11}$

References and acknowledgements

■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)

■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.