

# Principal Space and Elasticity

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

창원대학교 신소재공학부

[YJEONG@CHANGWON.AC.KR](mailto:YJEONG@CHANGWON.AC.KR)

연구실: #52-212    전화: 055-213-3694

HOME PAGE: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Outline

---

- Stress space (응력 공간)를 이해한다.
- Principal space of stress space를 이해한다.
- Principal values를 구하는 법을 익힌다.
- Invariants를 이해한다.

# Recap

---

- 일축인장으로 힘과, displacement 구하는 법
- 힘과 displacement를 각각 응력 변형률로 변환
- Two types of stress (strain):
  - Normal
  - Shear
- Cauchy: 공간의 각 면에 하나의 normal 둘의 shear term, 그리고 총 세 독립적인 면에서의 응력 값으로 응력 상태를 대표할 수 있다.
- 따라서 총 9개의 응력 구성값이 있으나, 힘평형 상태에서는 6개의 독립적인 값만 존재한다.
- 텐서의 좌표 변환법
  - 매트릭스 형태에서 나타나는 텐서의 구성값들은 좌표에 따라 바뀐다.
  - 텐서의 rank에 따라 구분되는 좌표 변환법이 있으며, 표기를 간략하게 하기 위해 Einstein summation convention이 널리 쓰인다.

# Symmetries in stress/strain tensors

- 변형률 텐서의 경우 다음의 symmetry를 가진다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji}) \\ \varepsilon_{ji} &= \frac{1}{2}(d_{ji} + d_{ij})\end{aligned}$$

- 응력 텐서의 경우 force equilibrium 조건에 의해 symmetry를 가진다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

# Linear operations (mapping)

- Stress tensor는 두 벡터 공간 사이의 선형 변환을 한다.
  - Stress tensor는 한 벡터량을 또 다른 벡터량으로 변환 (transform, mapping) 해준다.
  - 벡터량으로 나타낼 수 있는 것 중에 하나가 \*plane 이다
- 한 물질점의 응력 상태를 알고 (즉 stress tensor), 그 물질점의 특정 면에 작용하는 힘(vector)을 알고 싶다면, 해당 특정면의 방향을 나타내는 벡터( $\mathbf{n}$ )와의 inner dot product를 얻으면 된다.
  - 2차 텐서와 1차 텐서간의 inner dot product는 다음과 같이 정의 된다:
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_j$$
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  는  $\mathbf{n}$  이 법선인 면에 작용하는 '힘' (force)가 된다. 즉  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,  $f_i = \sigma_{ij} n_j$
- 또 다른예: 한 결정립이 열처리후 잔류응력  $\boldsymbol{\sigma}$ 가 존재한다. 이때 특정 slip system에 작용하는 응력을 알고 싶다면?
  1. 특정 slip system의 slip plane을 나타내는 단위 벡터를 찾는다. (111) plane  $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [1,1,1]$
  2. 해당 벡터와 inner dot product를 실시하면 해당 면에 작용하는 force를 구할 수 있다.
  3. 다음으로 얻어진 force와 slip direction을 inner dot product하면, 해당면에서 해당 방향으로 작용하는 응력값(scalar value)을 구할 수 있다.

# 예제

- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다. 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자. 단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 동일하다.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Slip system #1:  $(111)[1\bar{1}0]$
- Slip system #2:  $(11\bar{1})[011]$

- 풀이:

# 예제

- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다. 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자. 단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 동일하다.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

- Slip system #1:  $(1\bar{1}1)[10\bar{1}]$
- Slip system #2:  $(1\bar{1}1)[011]$

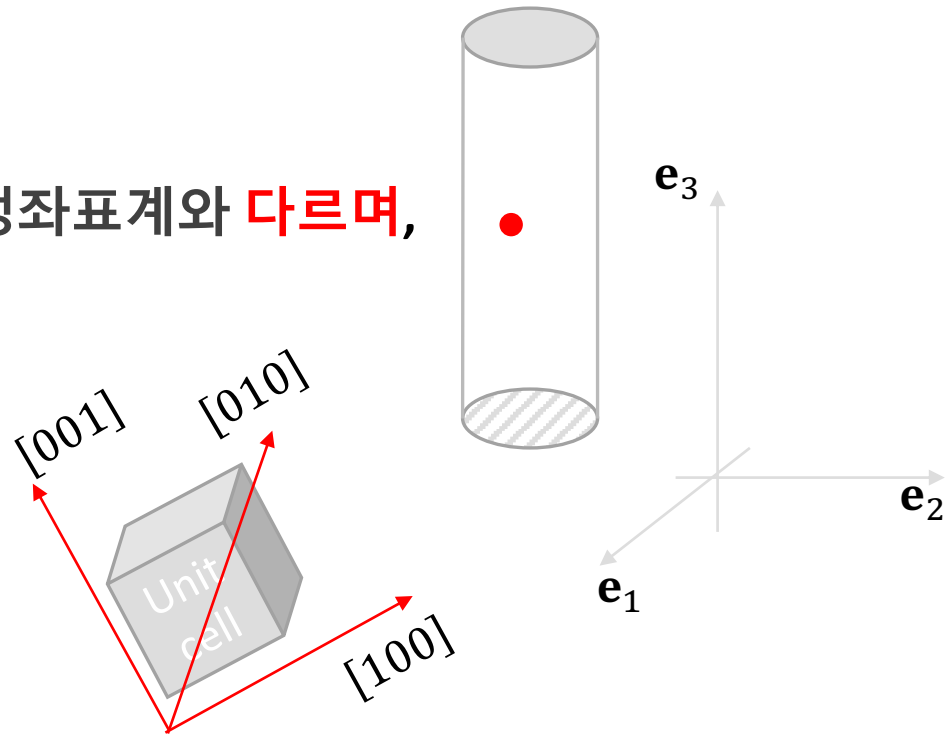
■ 풀이:

- Hydrostatic pressure와 소성 변형에 대한 설명.

# 예제

- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다.  $\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 30 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$
- 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자.
  - Slip system #1:  $(111)[\bar{1}\bar{1}0]$
  - Slip system #2:  $(11\bar{1})[011]$
- 단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 **다르며**, 다음의 좌표변환 매트릭스를 가진다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.848 & -0.528 & 0.044 \\ 0.530 & 0.845 & -0.075 \\ 0.003 & 0.087 & 0.996 \end{bmatrix}$$





# Stress tensor represented in other forms

- 앞서 응력 텐서가 matrix의 형태로 표현되는 것을 보았다. 하지만 이는 온전히 '편리'를 위해서이다 - 물론 많은 이점이 생긴다.
- 하지만 때에 따라 응력 텐서를 다른 형태로 표기하기도 한다.
- 예를 들어 Voigt notation은 매우 흔히 찾을 수 있는 응력텐서 표기 방법이다 - 3x3 matrix 대신 1x9 형태로 표현

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 위의 symmetric tensor를 9개 component중 3개를 줄여 order를 낮출 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{의 1x6 array로 표현; 6차원 공간상의 vector 형태가 된다: } \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

# Stress Space

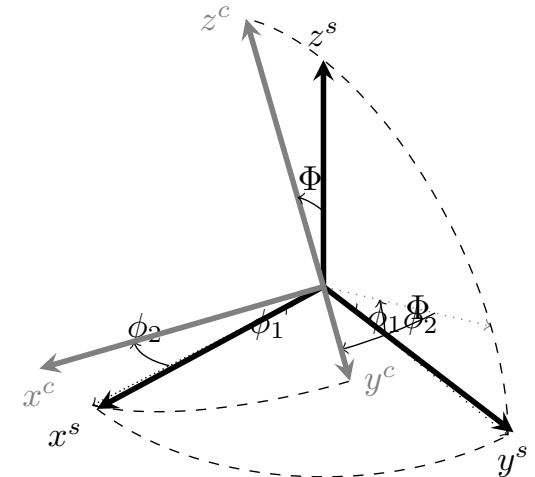
- Stress tensor consists of 6 components:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$
- 한 응력상태는 위의 여섯 component가 특정값을 가진다. 따라서, 여섯 component 값들을 각각 축으로 하는 6차원 공간을 만든다면, 한 응력상태는 그러한 공간에서 한 좌표(coordinate; 좌표점)로 표현이 가능.
- 만약 응력이 세 principal values로 표현이 가능하다면 세 component 값들이  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  ( $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ ) 를 나타내는 축으로 구성된 3차원 공간안의 한 좌표 (coordinate; 좌표점).
- 이렇듯, 응력 상태를 표현하는 공간은 응력 텐서의 component를 나타내는 축으로 구성할 수 있고, 그러한 축으로 이루어진 공간을 stress space라고 한다.
- 응력 공간에서의 한 좌표는, 특정한 응력 텐서, 즉 특정한 응력 상태를 나타낸다.

# Stress Space

- Stress tensor의 구성성분중 shear component가 모두 0이 되는 Cartesian coordinate로 표현되는 공간이 있을 수 있다. 그렇게 표현되는 stress state는 유의미한 value가 3개 이므로 해당 stress space를 3차원으로 표현할 수 있다.
  - 이때 얻어진 세 값을 각각 principal value (주 값) 이라고 하며, 한 응력 상태에 해당하는 principal value들을 구하는 방법에 대해 간략하게 알아보도록 하겠다.
  - 예1) 알루미늄을 일축 인장 시편을 위해 가공한후, 해당 시편의 길이/폭/두께 방향이 주어진 coordinate system의  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  basis vector방향과 평행할때, 응력 상태를 측정하여 다음과 같이 나타낼 수 있었다.
- $$\sigma = \begin{bmatrix} -30 & 25 & 11 \\ 25 & 1 & -9 \\ 11 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$
- 해당 응력 텐서의 principal space는? 또 principal values는?
  - A) 주어진 coordinate system을  $\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$  을 통해 변환시켜 얻은 coordinate system이 해당 응력의 principal space 이다.

# Stress Space (확인)

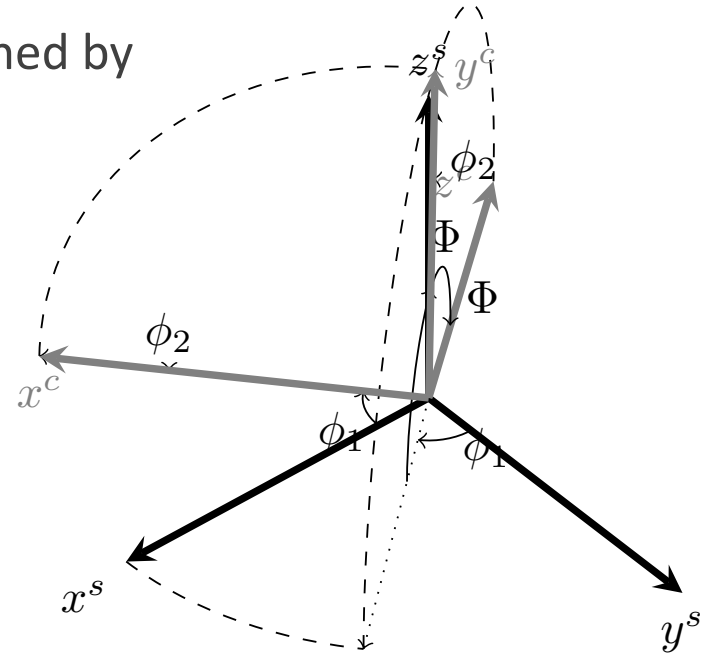
$$\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$$



input	output															
This excell sheet proves a means of coordinate system transformation																
			angle	radian												
Three Euler angles	phi1		-1.4	-0.024												
	Phi		24.86	0.434												
	phi2		-30.59	-0.534												
삼각 함수 값들																
cos(phi1)	1.000	sin(phi1)	-0.024			transformation matrix R			(transformation matrix) <sup>t</sup> = R <sup>t</sup> = R <sup>-1</sup>							
cos(Phi)	0.907	sin(Phi)	0.420			0.849	-0.483	-0.214	0.849	0.528	-0.010					
cos(phi2)	0.861	sin(phi2)	-0.509			0.528	0.768	0.362	-0.483	0.768	-0.420					
						-0.010	-0.420	0.907	-0.214	0.362	0.907					
2nd rank tensor in matrix form																
		-30	25	11	R.T							R <sup>t</sup> .R.T	2nd rank tensor after coordinate transformation			
		25	1	-9	-39.898							22.675	10.049	-46.979	0.001	-0.002
		11	-9	17	7.356							10.707	5.043	0.001	13.935	0.000
									-0.218	-8.843	19.094	-0.002	0.000	21.044		
1st rank tensor (i.e., vector) in array form																
		1	R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation													
		0	0.849									0.528	-0.010			
		0														

# More examples

- $\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 300 & 30 \\ 300 & 5 & 25 \\ 30 & 25 & 3 \end{bmatrix}$
- The principal space of the above tensor can be obtained by
  - $\phi_1 = -49.5^\circ, \Phi = 96.23^\circ, \phi_2 = -0.11^\circ$
- And the principal values?
  - -251.2, -1.2, 360.5



# How did I obtain this?

- An analytical method to obtain 'principal' values:
  - Find the eigenvalues and eigenvectors of 3x3 matrix form of the stress tensor
  - That can be done by following
    - 1. Define a new 3x3 matrix

$$A_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = 1 \text{ ( if } i = j \text{ )}$$
$$\qquad \qquad \qquad = 0 \text{ (or if } i \neq j \text{ )}$$

- 2. Solve the case of  $\lambda$  when  $\det(\mathbf{A})=0$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

- 3. That's actually solving

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Where

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$I_2 = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

# How did I obtain this?

- Okay, we learned how to get eigenvalues. Next question is how we can obtain eigenvectors.
- Once you found the eigenvalues, you solve the equations given by

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_{ij}v_j = 0$$

- Example:

For a 2nd rank tensor  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ ,

$$\det(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

$\det(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$  : The solution of these equations is  $\lambda = 4, \lambda = -2$  and  $\lambda = -2$  (repeated).

Eigen vectors can be found from

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

# How did I obtain this? (continued)

---

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Put the each of the three eigenvalues you obtained in the above to obtain three eigenvectors  $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)})$ . You'll get

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 0 \quad (1)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0 \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(3)} = 0 \quad (3)$$

For instance, solution of (1) gives

$$x_1^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

$$x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_2^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

Therefore, eigenvector associated with eigenvalue 4 is:  $x_3^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$  (with any arbitrary  $x_3^{(1)}$  value). You could do the same for (2) condition, which results in

$$\mathbf{x}^{(2)} = x_3^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2^{(2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# How did I obtain this? (continued)

---

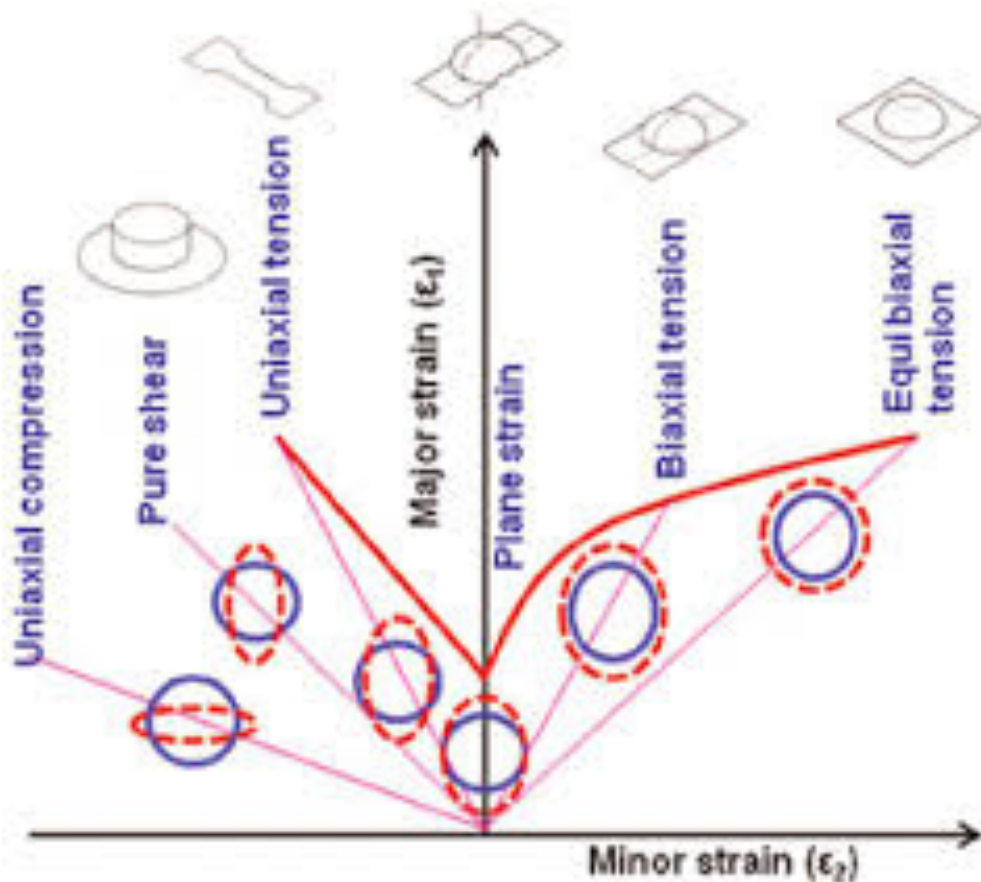
- 일단 eigenvector들이 구성된다면 이를 토대로 transformation matrix를 얻을 수 있다.
- 다음으로 transformation matrix를 Euler angles로 변환가능
- 물론 저도 이 모든 과정을 연필과 종이로 풀지 않는다.
- 저의 경우 LAPACK으로 eigenvalue와 eigenvector를 수치적으로 얻고, 이를 바탕으로 transformation matrix를 구해서, 다시 Euler angle로 변환하였다.
- 참고: <https://youngung.github.io/principal/>

# Principal values / principal space

---

- 어디에 쓰이나? 왜 배우나? 어디에 유익할까?
- Principal space에 주어진 응력을 표현하면 문제가 매우 간단해 진다!
- 왜? 일단 생각해야 할 component의 수가 줄어든다 - 6D stress space가 3D stress space로 줄어든다.
  - 3D space는 간단히 Cartesian coordinate로 표현할 수 있다.  
(시각적으로, 그리고 수치해석적으로도) 6차원 보다는 매우 편리하다.
- 다른 예?

# Application: Forming limit diagram



성형 한계 다이어그램은 금속 판재의 성형성을 간단히 나타낼 수 있다.

전통적으로 fracture가 일어난 판재의 minor/major strain을 측정하여 모아 곡선으로 표현한다. 여기서 minor/major strain들은 principal space의 strain component를 의미한다.

어쩌다가 principal space로 표현하게 되었을까?  
- FLD 측정 방식에서 유래 (다음장)

# Application: Forming limit diagram

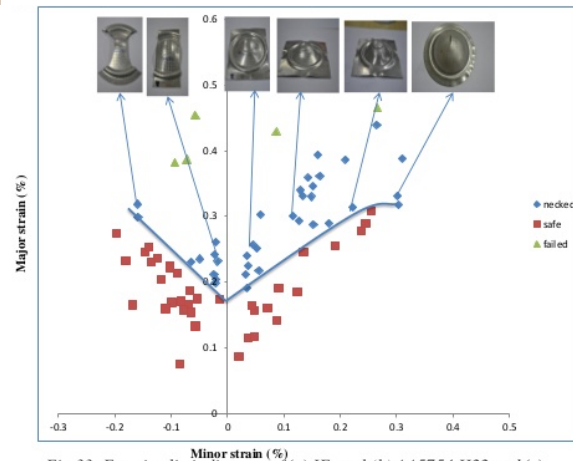
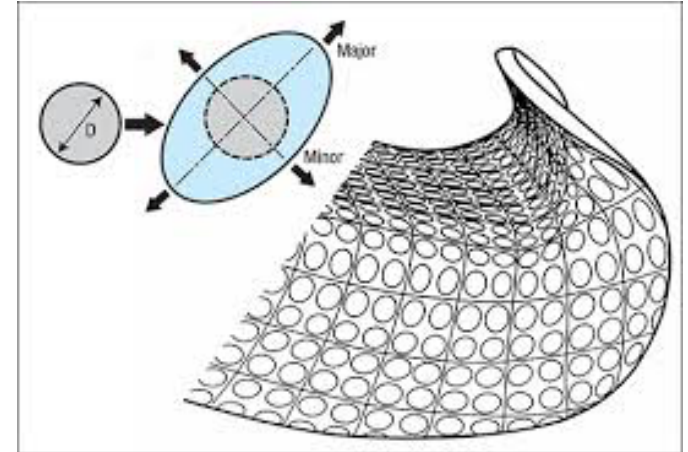
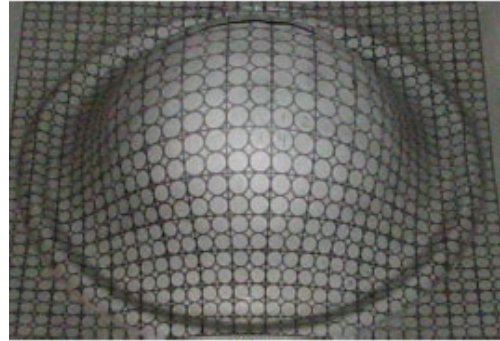


Fig 33: Forming limit diagram of (a) IF steel (b) AA5754-H22 and (c) AA5182-O sheet of thickness 1mm.

# Principal space를 사용한다면?

- 응력과 변형률 텐서가 모두 같은 principal space에 표현이 되는 상태라면,

- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  그리고  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

- 이를 간단히 Voigt notation을 차용한다면 3차원 문제가 된다. 따라서

- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$  그리고  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$  로 표현 가능하다. (각 성분의 첨자가 하나로 줄었다)

- 때로는 principal space에 표현된 응력의 성분임을 좀 더 명확히 하기 위해 로마자 첨자를 사용한다. Ex.  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$

# Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- Principal space의  $\mathbf{e}_1$  방향으로의 가상 '일축 인장' 실험을 생각해보자.  $\sigma_1 \neq 0$ 이며 다른 응력 구성성분은 모두 zero. 해당  $\mathbf{e}_1$  방향에서의 stress component와 해당 방향에서의 strain component 간에는 '선형' 관계가 지켜진다. 이는
- $\sigma_1 = \mathbb{E}\varepsilon_1$  로 표현가능 - 여기서  $\mathbb{E}$ 는 탄성계수.
- 나머지 principal space의  $\mathbf{e}_2$  축과  $\mathbf{e}_3$  축에서는 '수축' 변형이 발생한다. 만약 시편이 'isotropic' 하다면, 그 수축 변형량은 동일하다. 이는
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$  으로 표현가능 - 여기서  $\nu$ 는?

# Principal space and Hooke's law (2)

- 앞서 '일축' 인장(즉 only  $\sigma_1 \neq 0$ )에 적용된 예들을 좀 더 확장 시켜 '삼축' 모두에 arbitrary한 응력이 걸렸을 경우(즉 only  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ )를 표현할 수 있는 방법이 있다. 이는
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$
- 앞서 우리는 principal space에서 '축약'된 Hooke's law를 살펴보았다. 사실 Full tensor를 사용하면 Hooke's law는 ...
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  혹은  $\varepsilon_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\sigma_{kl}$  (여기서  $\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$ )
- 위를 이용하여
- $\varepsilon_{11} = \mathbb{C}_{11kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{22} = \mathbb{C}_{22kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{12} = \mathbb{C}_{12kl}\sigma_{kl}$

# Boundary condition

- 재료 역학 문제를 효율적으로 해결하기 위해서는 적절한 boundary condition (경계조건)을 찾아내고 올바르게 설정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위해 몇몇 유의한 hints를 꼽자면
  - 자유 표면에 수직한 응력은 0이다. 재료의 가장 바깥 표면에 응력을 전달하는 다른 물질이 없이 대기중에 노출되어 있으면, 해당 표면의 방향과 관계된 응력 성분들은 0이다. 예를 들어, 한 물질점이 free surface에 해당하고 z축방향으로 그 법선이 향한다면,  $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$  모두 0이다.
  - 마찰이 없는 면에서 전단응력들은 0이다. 해당면이 (위의 예와 유사하게) z축방향으로 그 법선이 향한다면,  $\sigma_{yz}, \sigma_{xz}$  모두 0이다.
  - 힘평형 상태에서는 물체의 모든 면에서 힘의 균형이 존재한다.
  - St. Venant 원리

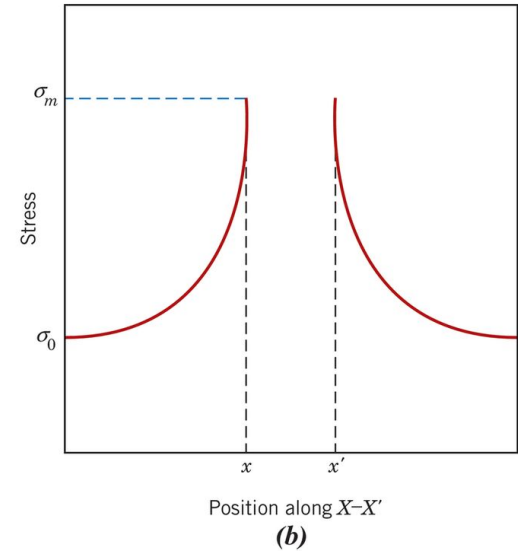
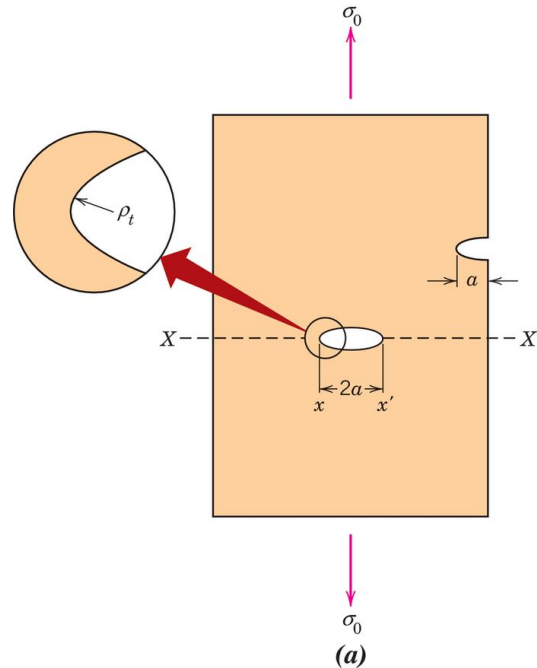


# St. Venant 효과와 응력집중자

재료가 겪는 응력은 (void 등의) defect 주위에서 '증폭' 된다. 이를 '응력집중'이라 하는데, 그 정량적 크기는 defect의 기하학적 특성 (ex. Void의 방위, 크기, 모양)에 크게 영향을 받는다.

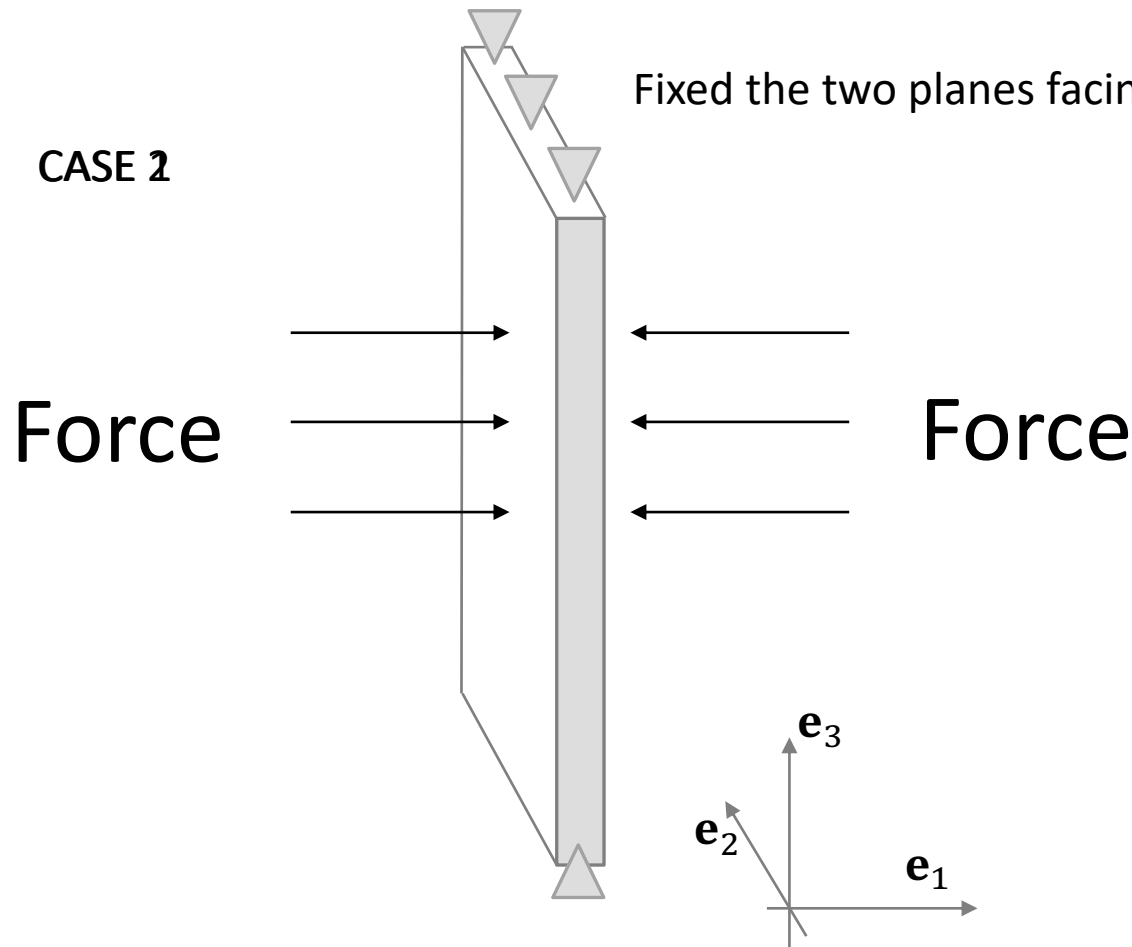
St. Venant principle (생 베낭 원리)

하지만 void에서 거리가 멀어짐에 따라 급격하게 void에 의한 응력집중효과가 감소하는 것을 알 수 있다.



# Plane stress condition and free surface

- Plane stress condition을 더 자세히 설명하기 위해 앞서 free surface를 이해해보자.



$$\sigma^{case1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{case2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} > 0 \end{bmatrix}$$

# Plane theory (2D approximation)

- 재료의 기계적 거동을 설명할때, 구조물의 모습과 기대되는 응력/변형률에 의한 방향으로의 구성성분들이 다른 성분들과 비교해 '매우매우매우' 작을 때가 있다.
- 그럴때는 full tensor component를 모두 고려하기 보다는 매우 작은 성분들을 'zero'로 가정하여 문제를 간단화 시키기도 한다.
- 이를 통해, 문제의 복잡성을 줄이고, 수치해석시간(컴퓨터 계산 시간)도 줄어 들 수 있다. 그 뿐만 아니라, 수식도 매우 간편해진다!
- 응력을 예로 들자면, 서로 수직하는 세면중 한면과 관련된 응력 성분들이 모두 zero인 상태 (혹은 그렇게 모사된 상태) 를 일컬어 plane stress condition (평면 응력상태)라고 한다.
- 변형률 텐서를 예로 들자면 세 기본 길이 방향중, 한방향과 관련한 normal/shear components가 모두 zero인 상태... plane strain condition (평면 변형률 상태)라고 한다.

# 예제 (과제)

---

- 구성성분  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ , 그리고  $\sigma_{12}$  가 유한한 값을 가지고 있고,  $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$  가 0인 응력 상태가 주어져 있다. 이때, 주응력값들이 다음과 같이 주어짐을 보여라.

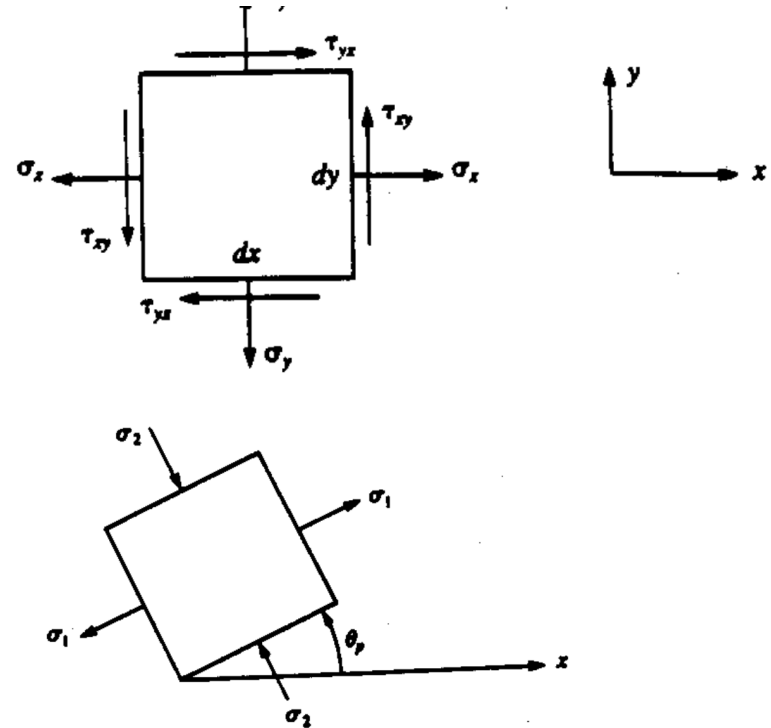
- $$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

- $$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

# Plane stress condition

Plane stress where the components associated with  $\mathbf{e}_3$  basis vector are zero: 
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e}_3$  basis vector becomes one of three principal axes.  
And  $\sigma_{33} = 0$  becomes one of the three principal values.



# Plane stress condition

Plane stress where the components associated with  $\mathbf{e}_3$  basis vector are zero: 
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서, 이를 2x2 matrix로 표현 가능하다:  $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$  단지 세개의 component만

meaningful. 더욱 축약하여  $\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$  의 형태로 표현 가능하다.

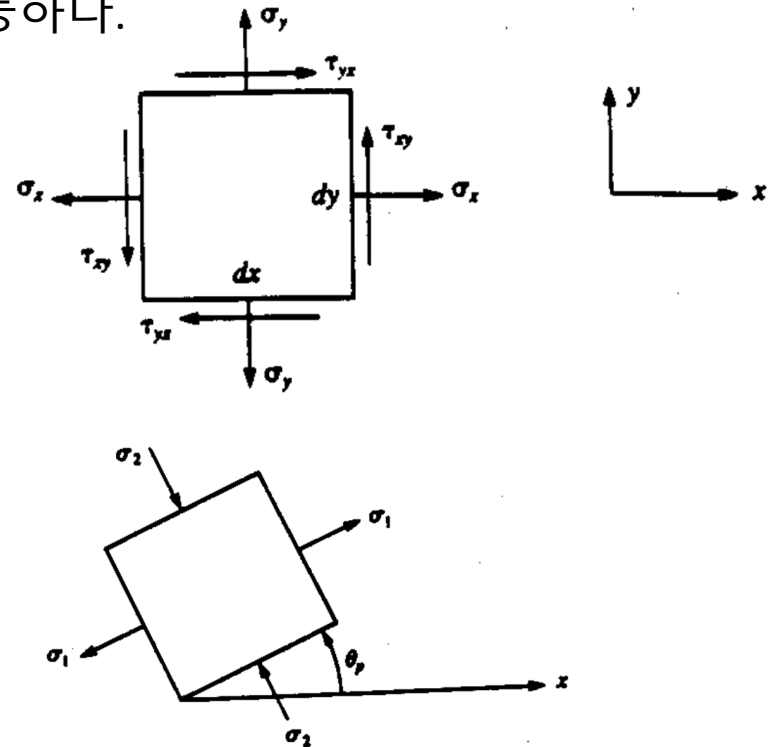
이경우 principal stress와 principal space도 매우 간단히 구해진다.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

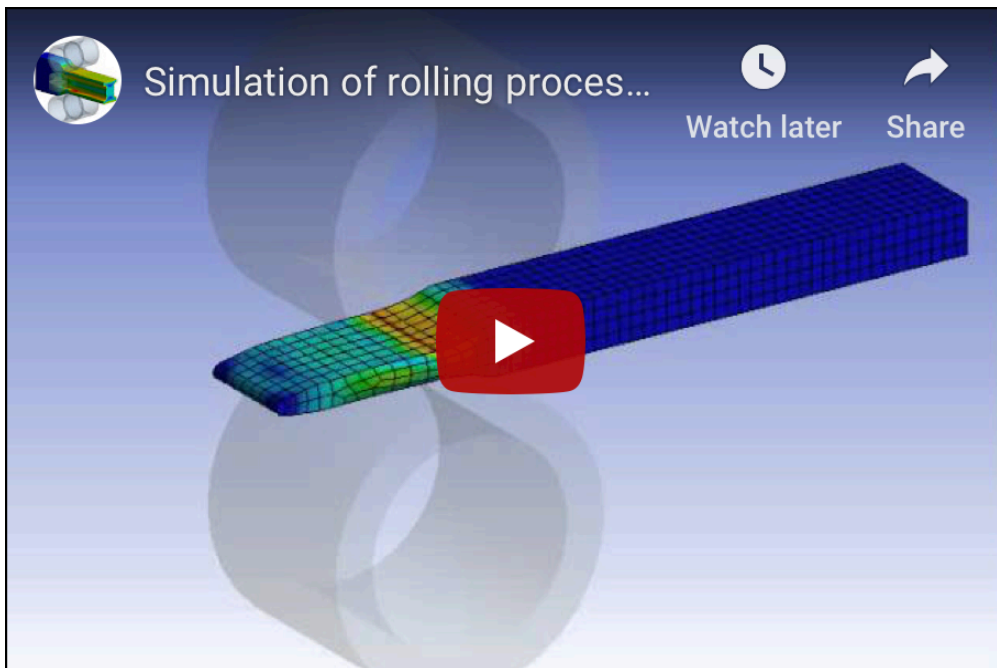
Principal space를 구하기 위해서는...

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \right) \text{로 얻어진 값으로 회전...}$$



# Plane strain condition

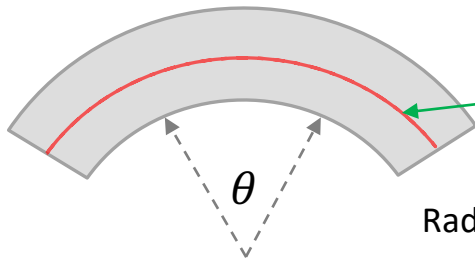
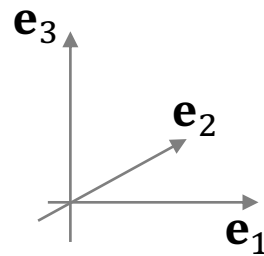
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# 예제 1-11



굽힘변형 (bending)



중립축; neutral axis

Radius of curvature  $\rho$

$e_2$  축으로 strain이 없는 plane-strain condition

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

위의 변형률 텐서를 살펴보면, 해당 좌표계가 principal space를 나타낼 수 있다.

## 조건

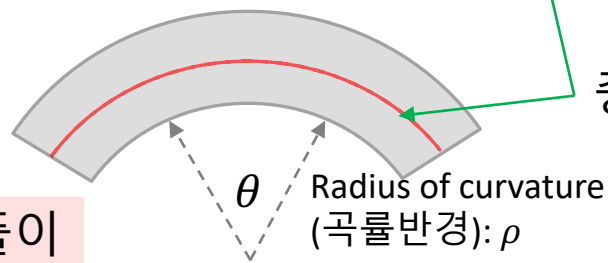
1. 시편 전체에 '균일한' 변형이 작용하였다고 가정했다.
2. 변형전 시편의 가운데 면이 변형후에도 '총' 길이 변화가 없다 (중립축; neutral axis). 그리고 중립축이 시편의 두께 방향 중간에 위치한다. 시편의 두께 변화가 없다. 굽힘 후의 곡률반경  $\rho$  는 시편의 두께에 비해 매우 크다 ( $\rho \gg t$ )
3. 굽힘의 양이 적어, engineering strain을 변형률로 사용한다.

공칭 변형률의 정의  $\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$  을 통해 시편 바깥쪽 넓은면의 변형률을 구하고, Hooke's law를 사용하여 해당면의 응력상태를 곡률과 두께 그리고 modulus, strain 및 Poisson ratio의 함수로 표현해보자.

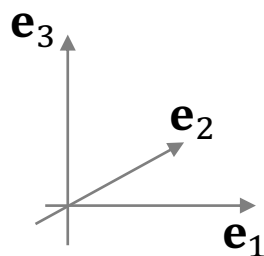




굽힘변형 (bending)



중립축; neutral axis



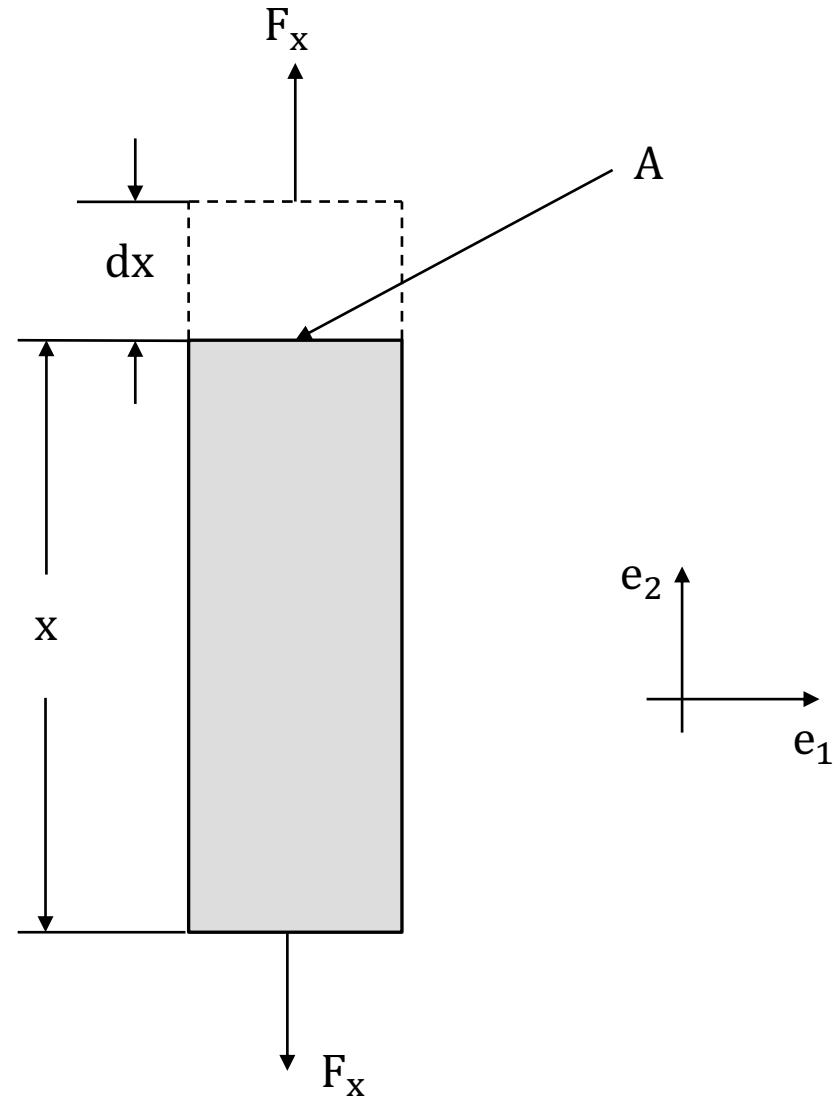
왼쪽의 좌표계 공간이 단순  
굽힘 환경에서의 응력을  
principal space에 표현하게  
해줌을 알 수 있다.

풀이

- 시편 바깥쪽의 최종 길이를  $\theta$ 와  $\rho$ , 그리고 두께  $t$ 에 대한 함수로 표현할 수 있다.
- $\mathbf{e}_1$  방향으로의 본래 길이는 중립축 선상의 길이로 볼 수 있다. 따라서 변형전 길이는  $\theta \left( \rho + \frac{t}{2} \right)$
- 비슷한 방법으로 바깥표면의 굽힘 후 길이는  $\theta(\rho + t)$
- 따라서  $\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\theta(\rho + t) - \theta \left( \rho + \frac{t}{2} \right)}{\theta \left( \rho + \frac{t}{2} \right)} = \frac{t/2}{\rho + t/2}$
- 여기서, 앞서 주어진 조건  $\rho \gg t$ 를 사용하면  $\varepsilon_1 \approx \frac{t/2}{\rho}$ . 앞서 우리는 다음과 같은 관계식을 배웠다.
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$  그리고 plane-strain condition에 의해  $\mathbb{E}\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0$
- 그런데 제일 바깥쪽 면은 free surface; 즉  $\sigma_3 = 0$ . 따라서
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu\sigma_2]$  그리고  $[\sigma_2 - \nu\sigma_1] = 0 \therefore \sigma_2 = \nu\sigma_1$
- 따라서  $\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathbb{E}}[\sigma_1 - \nu^2\sigma_1] = \frac{\sigma_1}{\mathbb{E}}(1 - \nu^2)$ . 재배치를 하면  $\sigma_1 = \frac{\mathbb{E}\varepsilon_1}{(1 - \nu^2)}$ .  $\varepsilon_1 = \frac{t/2}{\rho}$ 대입하면
- $\sigma_1 = \frac{t}{2\rho} \frac{\mathbb{E}}{(1 - \nu^2)}$  그리고  $\sigma_2 = \nu\sigma_1$ 를 사용하여  $\sigma_2 = \frac{t}{2\rho} \frac{\nu\mathbb{E}}{(1 - \nu^2)}$

# 탄성과 탄성일(탄성변형 에너지)

- 길이  $x$  단면적  $A$ 인 봉이 일축인장력  $F_x$ 로 인해,  $dx$  만큼 변화되었다. 이에 따른 미소(infinitesimal) 일(work)  $dW$ 은?
- $dW = F_x dx$
- 단위 부피당 미소 일은?
- $dw = \frac{dW}{\text{Volume}} = \frac{dW}{xA} = \frac{F_x}{A} \left( \frac{dx}{x} \right) = \sigma_x d\epsilon_x$
- 앞서 다루었던 Hooke's law에 의해  $\sigma_x = E\epsilon_x$
- $W = \int dw = \int \sigma_x d\epsilon_x = \int E\epsilon_x d\epsilon_x$   
$$= E \int_0^{\epsilon_x} \epsilon_x d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2}$$
- 같은 아이디어를 general한 텐서에 적용하면...
- $W = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij})$



# References and acknowledgements

---

## ■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)

## ■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.