

Stress and strain

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208 전화: 055-213-3694

HOME PAGE: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

Outline

- Stress space를 이해한다.
- Principal space of stress space를 이해한다.
- Principal values를 구하는 법을 익힌다.
- Invariants를 이해한다.

Recap

- Measurement of force and displacement from tension tests
- Physical quantity to remove the effect of geometry: engineering stress/engineering strain
- Two types of stress (strain):
 - Normal (tension + , or compression -)
 - Shear (forward +, backward -)
- There are three independent planes in 3D; On each plane 1 normal + 2 shears.
- Thus nine independent components comprise the stress (strain) state.
- Coordinate transformation (axes transformation)
 - Coordinate transformation does not change the physical quantity (stress, strain)
 - Coordinate transformation changes the values of components and the directions of planes associated with the stress (or strain).
- Practice coordinate transformation using the Excel, Fortran code, Python code.

Symmetries in stress/strain tensors

- 변형률 텐서의 경우 본래 그 정의에 의해 symmetry를 가진다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji}) \\ \varepsilon_{ji} &= \frac{1}{2}(d_{ji} + d_{ij})\end{aligned}$$

- 응력 텐서의 경우 force equilibrium 조건에 의해 symmetry를 가진다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Linear operations (mapping)

- Stress tensor는 두 벡터 공간 사이의 선형 변환을 한다.
- stress tensor는 한 벡터량을 또 다른 벡터량으로 변환 (transform, mapping) 해준다.
- 벡터량으로 나타낼 수 있는 것 중에 하나가 *plane 이다
- 한 물질점의 응력 상태를 알고 (즉 stress tensor), 그 물질점의 특정 면에 작용하는 힘을 알고 싶다면, 해당 특정면을 나타내는 벡터와 dot product를 얻으면 된다.
 - 2차 텐서와 1차 텐서간의 dot product는 다음과 같이 정의 된다:
- $\sigma \cdot v$ 의 결과는 해당 면에 작용하는 '힘' (force)가 된다.
$$\sigma \cdot v = \sigma_{ij} v_j$$
- 또 다른예: 한 결정립이 열처리후 잔류응력 σ 가 존재한다. 이때 특정 slip system에 작용하는 응력을 알고 싶다면?
 - 1. 특정 slip system의 slip plane을 나타내는 단위 벡터를 찾는다. (111) plane $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$
 - 2. 해당 벡터와 dot product를 실시하면 해당 면에 작용하는 force를 구할 수 있다.
 - 3. 다음으로 얻어진 force와 slip direction을 dot product하면, 해당면에서 해당 방향으로 작용하는 응력값(scalar value)을 구할 수 있다.
- * 예를 들어, 너비 1의 한 plane은 해당 plane의 수직 방향으로 크기가 1인 벡터로 나타낼 수 있다.

Stress tensor represented in other forms

- 앞서 응력 텐서가 matrix의 형태로 표현되는 것을 보았다. 하지만 이는 온전히 '편리'를 위해서이다 – 물론 많은 이점이 생긴다.
- 하지만 때에 따라 응력 텐서를 다른 형태로 표기하기도 한다.
- 예를 들어 Voigt notation은 매우 흔히 찾을 수 있는 응력텐서 표기 방법이다 – 3x3 matrix 대신 1x9 형태의 array로 표현 – 사실 matrix와 array는 누구에게 어떤 주제로 얘기하느냐에 따라서 무척 다른 의미가 될 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 위의 symmetric tensor를 9개 component중 3개를 줄여 order를 낮출 수 있다.

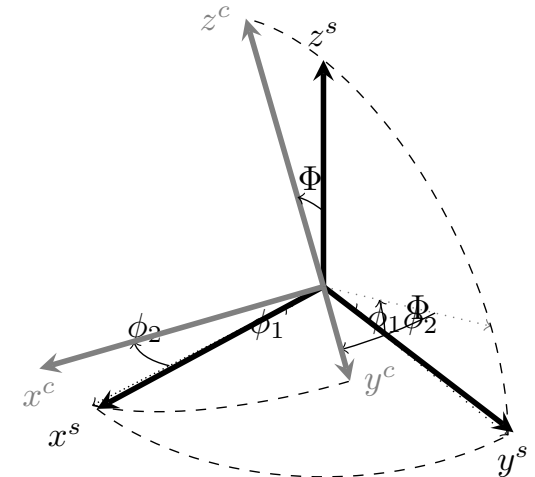
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{의 1x6 array로 표현; 6차원 공간상의 vector 형태가 된다: } \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Stress Space

- Stress tensor의 각 인디펜던트한 값들이 하나의 '공간' 축을 형성하는 공간.
- 가령 stress tensor의 symmetry 덕분에 stress state는 일반적으로 각 성분이 축이 되는 6차원 공간에 표현이 가능하다.
- 하지만 stress tensor의 구성성분중 shear component가 모두 0이 되는 Cartesian coordinate로 표현되는 공간을 얻을 수도 있는데, 이 방법에 대해 간략하게 알아보도록 하겠다.
- 예1) 알루미늄을 일축 인장 시편을 위해 가공한후, 해당 시편의 길이/폭/두께 방향을 각각 e_1, e_2, e_3 basis vector로 하는 coordinate system을 기준으로 응력을 측정하였더니 다음과 같은 값을 얻을 수 있었다.
$$\sigma = \begin{bmatrix} -30 & 25 & 11 \\ 25 & 1 & -9 \\ 11 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$
- 해당 응력 텐서의 principal space는?
- A) 주어진 coordinate system을 $\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$ 을 통해 변환시켜 얻은 coordinate system이 해당 응력의 principal space 이다.

Stress space (확인)

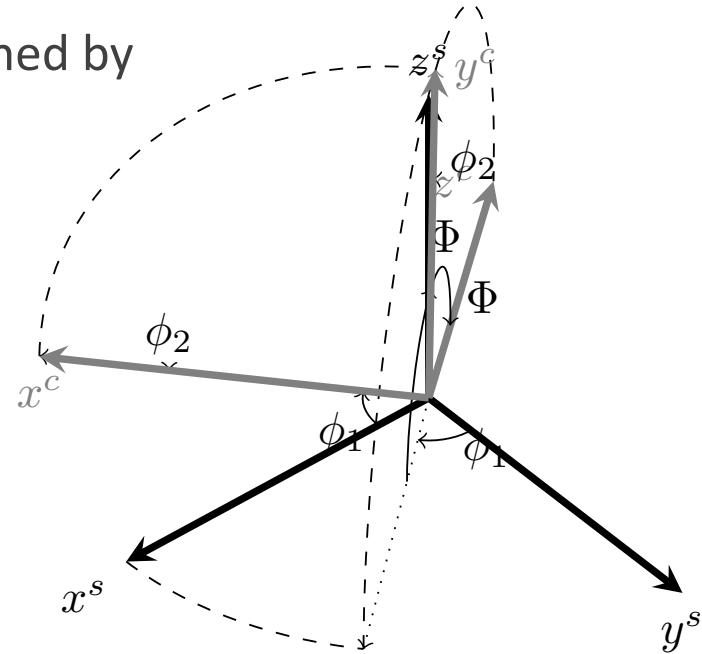
$$\phi_1 = -1.4^\circ, \Phi = 24.86^\circ, \phi_2 = -30.59^\circ$$



input	output					
This excell sheet proves a means of coordinate system transformation						
		angle	radian			
Three Euler angles	phi1	-1.4	-0.024			
	Phi	24.86	0.434			
	phi2	-30.59	-0.534			
삼각 함수 값들				transformation matrix R		
cos(phi1)	1.000	sin(phi1)	-0.024	0.849	-0.483	-0.214
cos(Phi)	0.907	sin(Phi)	0.420	0.528	0.768	0.362
cos(phi2)	0.861	sin(phi2)	-0.509	-0.010	-0.420	0.907
2nd rank tensor in matrix form				(transformation matrix) ^t = R ^t =R ⁻¹		
	-30	25	11	0.849	0.528	-0.010
	25	1	-9	-0.483	0.768	-0.420
	11	-9	17	-0.214	0.362	0.907
1st rank tensor (i.e., vector) in array form				R ^t .R.T		
	1				2nd rank tensor after coordinate transformation	
	0				-46.979	0.001
	0				0.001	13.935
					-0.002	0.000
					R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation	
					0.849	0.528
					-0.010	

More examples

- $\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 300 & 30 \\ 300 & 5 & 25 \\ 30 & 25 & 3 \end{bmatrix}$
- The principal space of the above tensor can be obtained by
- $\phi_1 = -49.5^\circ, \Phi = 96.23^\circ, \phi_2 = -0.11^\circ$
- And the principal values?
 - -251.2, -1.2, 360.5



How did I obtain this?

- An analytical method to obtain 'principal' values:
 - Find the eigenvalue and eigenvector of 2x2 matrix form of the stress tensor
 - That can be done by following
 - 1. Define a new 3x3 matrix

$$A_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = 1 \text{ (if } i = j \text{)}$$
$$\qquad \qquad \qquad = 0 \text{ (or if } i \neq j \text{)}$$

- 2. Solve the case of λ when $\det(A)=0$.

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

- 3. That's actually solving

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Where

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$I_2 = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

How did I obtain this?

- Eigen values are okay. How did I obtain eigenvectors?
- Once you found the eigenvalues, you solve the equations given by

■ Example: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_{ij}v_j = 0$

For a 2nd rank tensor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$

$$\det(\mathbf{B}_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

$\det(\mathbf{B}_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$: The solution of these equations is $\lambda = 4, \lambda = -2$ and $\lambda = -2$ (repeated).

Eigen vectors can be find from

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

How did I obtain this? (continued)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Put the each of the three eigenvalues you obtained in the above to obtain three eigenvectors $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)})$. You'll get

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 0 \quad (1)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0 \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(3)} = 0 \quad (3)$$

For instance, solution of (1) gives

$$x_1^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

$$x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 0 \rightarrow x_2^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)}$$

Therefore, eigenvector associated with eigenvalue 4 is: $x_3^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (with any arbitrary $x_3^{(1)}$ value). You could do the same for (2) condition, which results in

$$\mathbf{x}^{(2)} = x_3^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2^{(2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

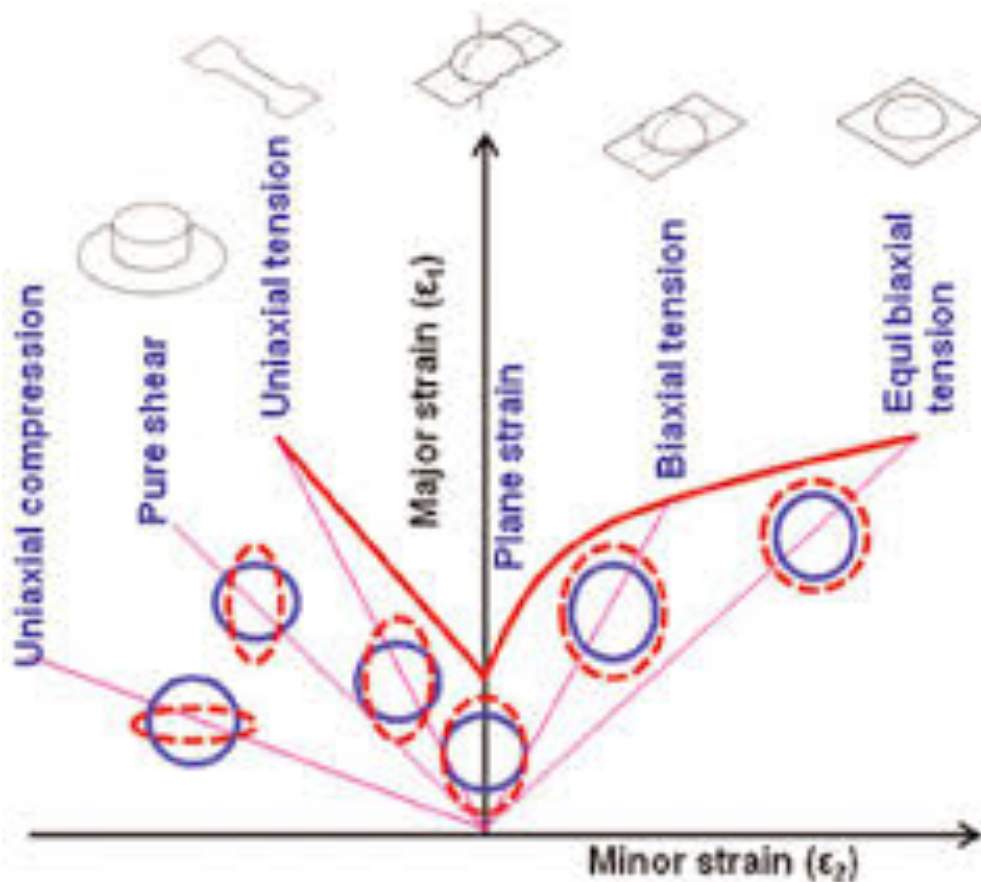
How did I obtain this? (continued)

- 일단 eigenvector들이 구성된다면 이를 토대로 transformation matrix를 얻을 수 있다.
- 다음으로 transformation matrix를 Euler angles로 변환가능
- 물론 저도 이 모든 과정을 연필과 종이로 풀지 않는다.
- 저의 경우 LAPACK으로 eigenvalue와 eigenvector를 수치적으로 얻고, 이를 바탕으로 transformation matrix를 구해서, 다시 Euler angle로 변환하였다.
- <https://youngung.github.io/principal/> 참조

Principal values / principal space

- 어디에 쓰이나?
- Principal space에 응력을 표현하면 문제가 매우 간단해 진다!
- 왜? 일단 생각해야 할 component의 수가 줄어든다. 따라서 6D stress space가 3D stress space로 줄어든다 – 3D space는 간단히 Cartesian coordinate로 표현할 수 있다. (시각적으로, 그리고 수치해석적으로도) 6차원 보다는 매우 편리하다.
- 다른 예?

Application: Forming limit diagram



성형 한계 다이어그램은 금속 판재의 성형성을 간단히 나타낼 수 있다.

전통적으로 fracture가 일어난 판재의 minor/major strain을 측정하여 모아 곡선으로 표현한다. 여기서 minor/major strain들은 principal space의 strain component를 의미한다.

어쩌다가 principal space로 표현하게 되었을까?
- FLD 측정 방식에서 유래 (다음장)

Application: Forming limit diagram

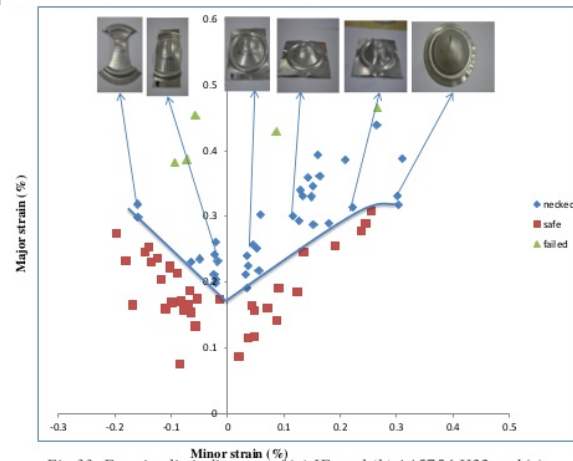
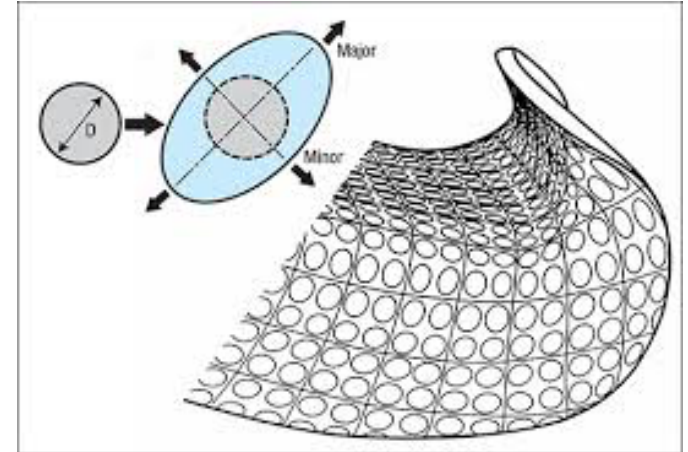
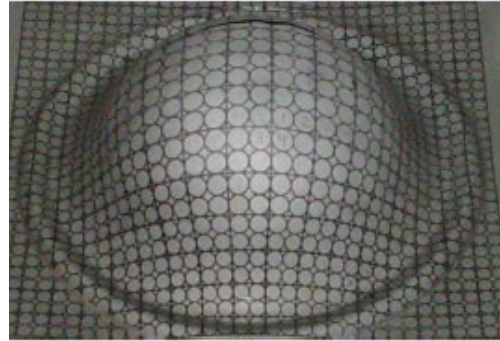


Fig 33: Forming limit diagram of (a) IF steel (b) AA5754-H22 and (c) AA5182-O sheet of thickness 1mm.

Principal space를 사용한다면?

- 응력과 변형률 텐서가 모두 같은 principal space에 표현이 되는 상태라면,
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$
- 이를 간단히 Voigt notation을 차용한다면 3차원 문제가 된다. 따라서
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ 로 표현 가능하다. (각 성분의 첨자가 하나로 줄었다)
- 때로는 principal space에 표현된 응력의 성분임을 좀 더 명확히 하기 위해 로마자 첨자를 사용한다. Ex. $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$

Principal space and Hooke's law (1)

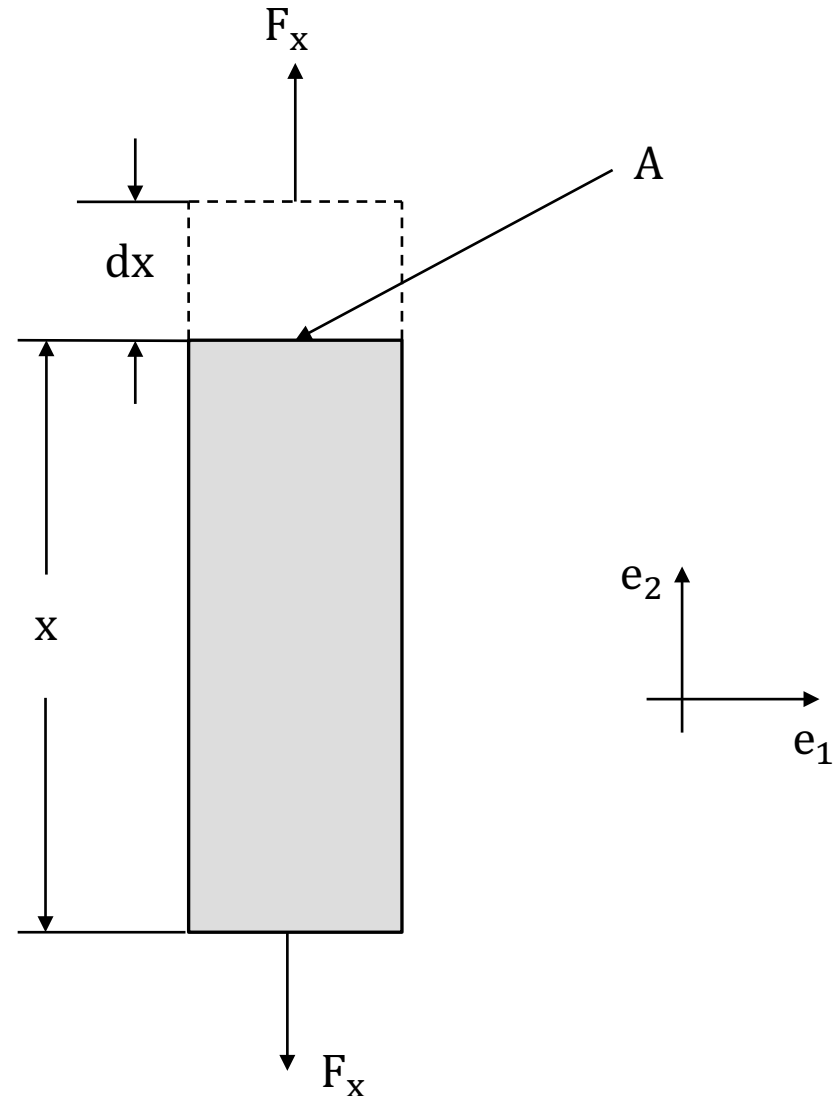
- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- Principal space의 \mathbf{e}_1 방향으로의 가상 '일축 인장' 실험을 생각해보자. 해당 방향에서의 stress component와 해당 방향에서의 strain component 간에는 '선형' 관계가 지켜진다. 이는
- $\sigma_1 = \mathbb{E}\varepsilon_1$ 로 표현가능 - 여기서 \mathbb{E} 는?
- 나머지 principal space의 \mathbf{e}_2 축과 \mathbf{e}_3 축에서는 '수축' 변형이 발생한다. 만약 시편이 'isotropic' 하다면, 그 수축 변형량은 동일하다. 이는
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$ 으로 표현가능 - 여기서 ν 는?

Principal space and Hooke's law (2)

- 앞서 '일축' 인장에 적용된 예들을 좀 더 확장 시켜 '삼축' 모두에 arbitrary한 응력이 걸렸을 경우를 표현할 수 있는 방법이 있다. 이는
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$
- 앞서 우리는 principal space에서 '축약'된 Hooke's law를 살펴보았다. 사실 Full tensor를 사용하면 Hooke's law는 ...
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 혹은 $\varepsilon_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\sigma_{kl}$ (여기서 $\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$)
- 위를 이용하여
- $\varepsilon_{11} = \mathbb{C}_{11kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{22} = \mathbb{C}_{22kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{12} = \mathbb{C}_{22kl}\sigma_{kl}$
- ...

탄성과 탄성일(탄성변형 에너지)

- 길이 x 단면적 A 인 봉이 일축인장력 F_x 로 인해, dx 만큼 변화되었다. 이에 따른 미소(infinitesimal) 일(work) dW 은?
- $dW = F_x dx$
- 단위 부피당 미소 일은?
- $dw = \frac{dW}{\text{Volume}} = \frac{dW}{xA} = \frac{F_x}{A} \left(\frac{dx}{x} \right) = \sigma_x d\varepsilon_x$
- 앞서 다루었던 Hooke's law에 의해 $\sigma_x = E\varepsilon_x$
- $w = \int dw = \int \sigma_x d\varepsilon_x = \int E\varepsilon_x d\varepsilon_x = E \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}$
- 같은 아이디어를 general한 텐서에 적용하면...
- $w = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij})$



References and acknowledgements

■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)

■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.