

# Stress and strain: Basic concepts

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208   전화: 055-213-3694

Homepage: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Outline

---

- 본 강의에서는 금속의 기계적 성질을 표현하는데 가장 중요한 요소인 응력과 변형률에 대해서 살펴본다.
- 응력과 변형률이 텐서(tensor)로 표현 되는 방법에 대해 알아보고 텐서의 기본적인 성질에 대해 알아보자.

# 들어가기에 앞서

---

- 본 강의에서는 여러분들이 낯설게 느낄 많은 ‘수학적 표현법’이 존재한다. **매우 어렵게 (혹은 낯설게) 느껴질 수 있으나**, 포기 하지말고 의문이 있으면 언제든지 질문 하기 바랍니다.
- 낯선 영어 단어가 많이 나올 수도 있습니다. 그때마다 질문하시면 됩니다.
- 강의 중간중간 여러분들의 이해 정도를 파악하기 위해서 질문을 할 수도 있습니다.

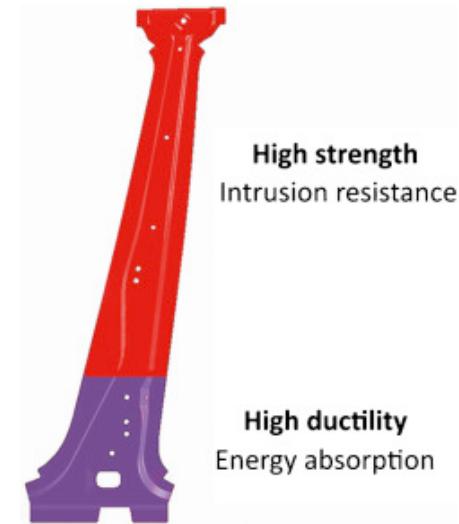
# 오늘의 강의 목표

---

- 기계적 물성과 그와 관련된 물리량
  - 응력
  - 변형률
  - Shear, normal components of stress (strain) state. (수직/전단 응력요소와 수직/전단 변형률 요소)
- Tensor 이해
  - Coordinate transformation rules
  - Coordinate transformation matrix
- Understand Einstein (summation) convention
- Euler angles
- Practice coordinate transformation to vector, 2<sup>nd</sup> rank tensor using Excel, Fortran, Python...

# Recap: mechanical property

- Q) What is material property?
- Q) What principle is applied when obtaining a mechanical property? – stimulus and response.
- When load is applied, the shape of metal will change. (힘이 가해지면 모양이 변화)



# Mechanical stimulus/response

Force  
Deformation

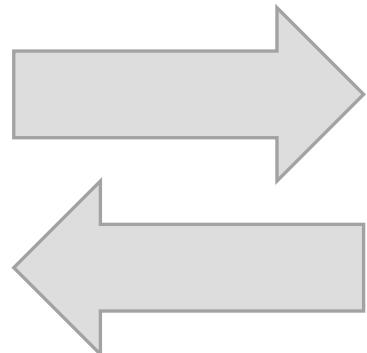
Size-dependent

Stress  
Strain

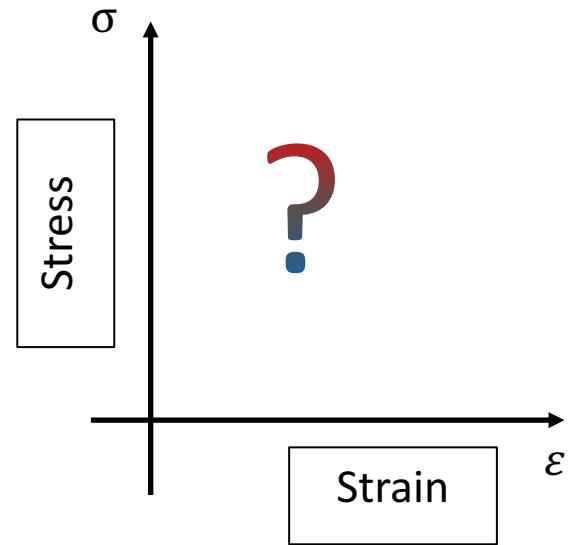
Size-independent

Stress

Strain



관계: material property



Constitutive model;  
Constitutive equation  
구성방정식

# Mechanical stimulus/response + property

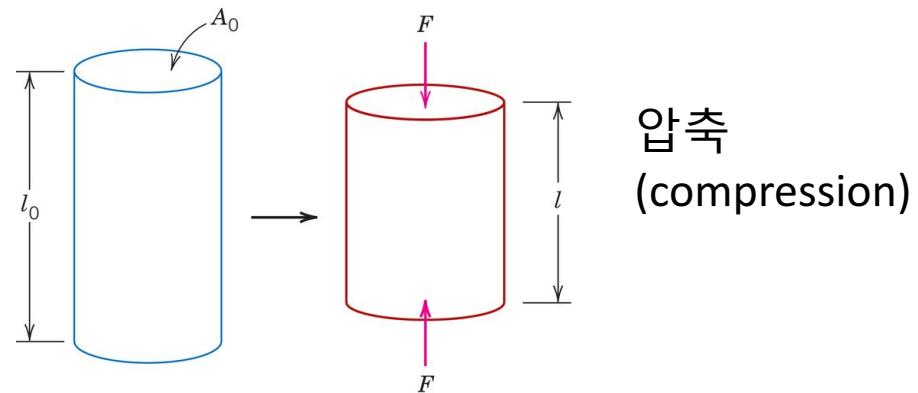
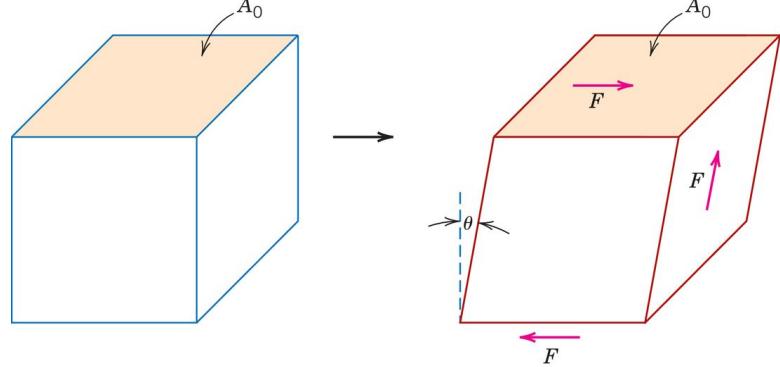
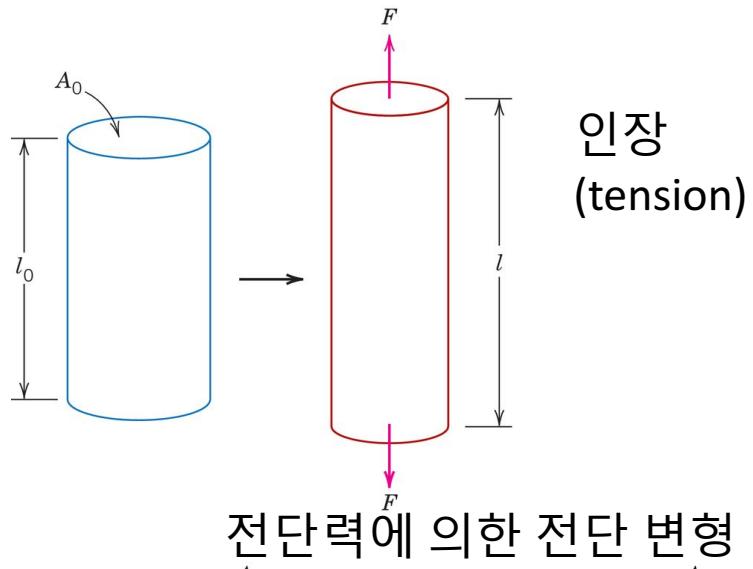
---

- Stimulus = property x response (선형적인 거동을 보일 경우)
- 기계적 자극과 기계적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (간단한 예: 금속의 탄성)
  - $\sigma = E\varepsilon$  ( $\sigma$ : 응력  $E$ : elastic constants (modulus),  $\varepsilon$ : 변형률)
- 기계적 자극과 전기적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (piezo electricity)
  - $\varepsilon = dE$  ( $\varepsilon$ : strain,  $d$ : piezoelectricity constants;  $E$ : electric field)
- 자극과 반응이 선형으로 비례할 때, 그 사이의 비례상수는 물질의 고유한 특성에 기인한다. 즉, 해당 비례상수는 물성이다.
- 비선형 관계도 존재하나, 다루지 않겠다.

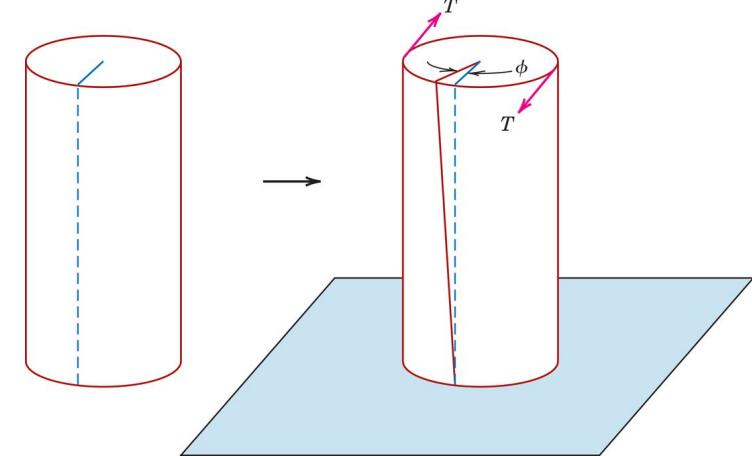
# notations

- 변형률은 주로 Greek letter  $\varepsilon$ , 혹은  $\epsilon$  (epsilon 엡실론)으로 나타낸다.
  - $\varepsilon$ 을 진변형률,  $\epsilon$ 을 공칭변형률로 구분하는 경우도 있다.
  - 본강의에서 따로 설명되지 않은 한  $\varepsilon$ 을 구분하지 않고 변형률로 간주하겠다. \*간혹  $e$  기호를 사용하기도
- 응력의 경우  $\sigma$  (sigma, 시그마)로 표현하겠다.
  - 마찬가지로 공칭과 진응력이 존재한다. 때에 따라 필요하다면  $\sigma^{engi}$  와  $\sigma^{true}$  등의 첨자 (superscript)를 사용하여 구분하겠다.
- 탄성 계수들
  - $E$ 와  $G$ 를 각각 (압축/인장시의) 탄성 계수와 전단 탄성 계수로 구분하여 사용하겠다
  - $\nu$  를 푸아송 비 (Poisson ratio)
- $\sigma^Y$  : yield stress (strength)는 Y 첨자를 사용하여 나타내겠다.
- $\epsilon^Y$  (혹은  $\varepsilon^Y$ ): yield point 에 해당하는 변형률
- $\sigma, \tau$  : 수직(압축,인장) 응력 성분 (normal stress component) 그리고 전단 응력 성분 (shear stress component)를 구분할 때 사용
- $\epsilon(\varepsilon), \gamma$ : 수직(압축,인장) 변형률 성분 (normal strain component) 그리고 전단 변형률 성분 (shear strain component)를 구분할 때 사용

# 구조물에 작용하는 하중의 종류 (from Callister textbook)



토크에 의한 비틀림 변형



Images from Callister, Int. MSE

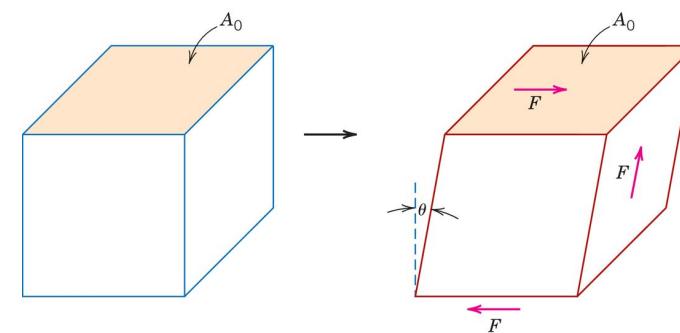
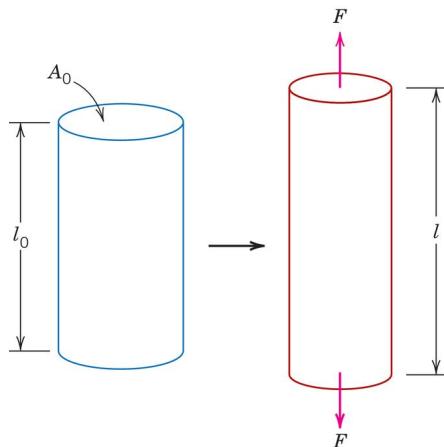
# 수직 응력과 전단 응력

## 응력 구성 성분 (stress component)

- 수직 응력 성분(normal stress component)은 관심 있는 물질 면의 '법선' 방향으로 작용하는 인장(혹은 압축) 응력 구성요소.
- 전단 응력 성분(shear stress component)은 관심 있는 물질 면과 평행한 방향으로 작용하는 응력 구성 요소

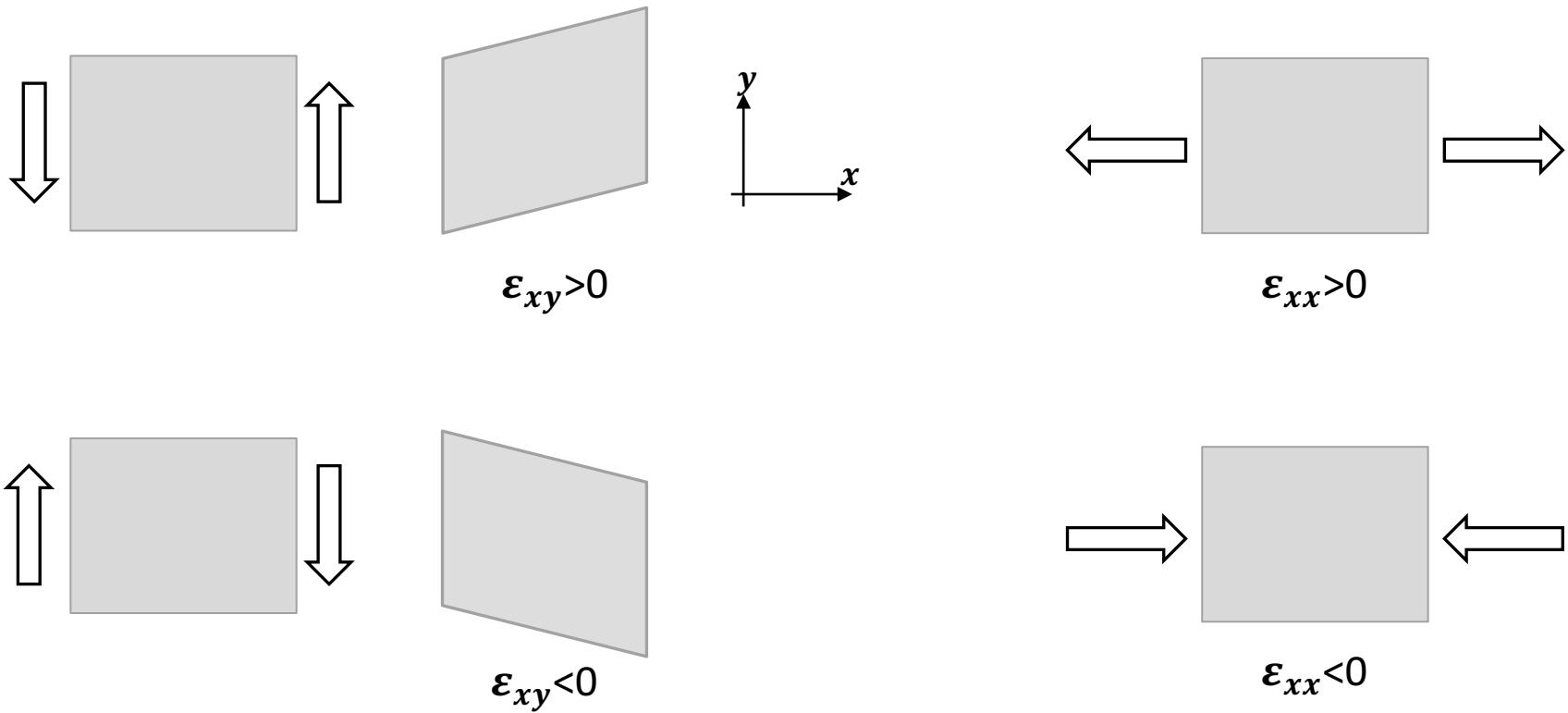
## 변형률 구성 성분 (strain component)

- 수직 변형 성분(normal strain component)은 관심 있는 물질 '길이'가 본래의 그 길이 방향으로 얼마나 인장 되거나, 수축되는 변형의 종류(요소)를 알려준다.
- 전단 변형 성분(shear strain component)은 관심 있는 물질 '길이'가 본래의 그 길이 방향과 '수직' 방향으로 얼마나 변화하였는지 알려준다.



# 수직, 전단 성분과 sign

- 수직과 전단 성분은 그 작용 방향에 따라 + 혹은 - 값을 가질 수 있다.



위에 쓰인  $\epsilon_{xy}$  notation들은 텐서와 관련되어있다. 차후에 더욱 자세히 다룰 예정이다.

# 응력과 변형률의 실험 측정법

---

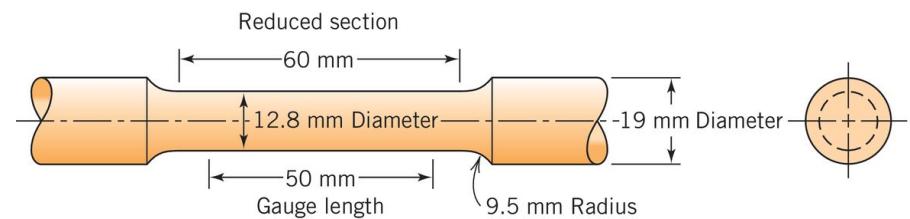
- 응력과 변형률을 측정하는 방법에 대해 간단히 얘기해보자.
- Q. 일축 인장법에 대해 배웠는가?
- Q. 일축 인장에서는 어떤 기계적 성질들을 취득할 수 있는가?

# Tension tests

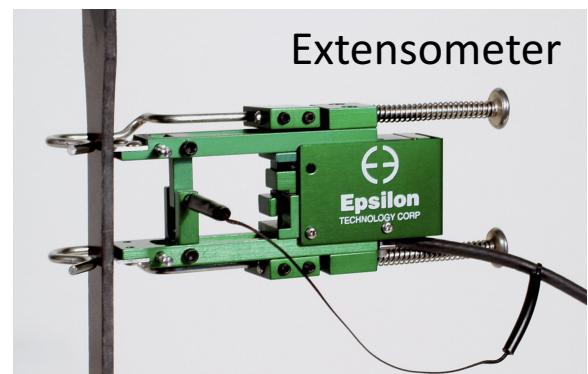
- (Uniaxial) tension test: the most common mechanical stress-strain test performed in **tension** (인장)
- 시편(specimen)은 주로 파괴(fracture)가 발생할 때까지 당겨진다.
- Dogbone 모양의 시편
- Load-cell: 시편에 가해진 force를 측정
- Extensometer: 시편의 길이 (elongation) 변화를 측정



Tensile tester



Load-cell



Extensometer

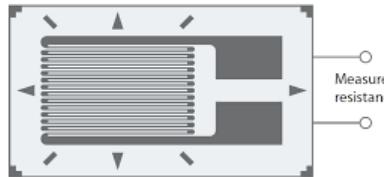
Images from Callister, Int. MSE  
<http://www.epsilontech.com/products/axial-extensometer-model-3542/>

# Measuring strains

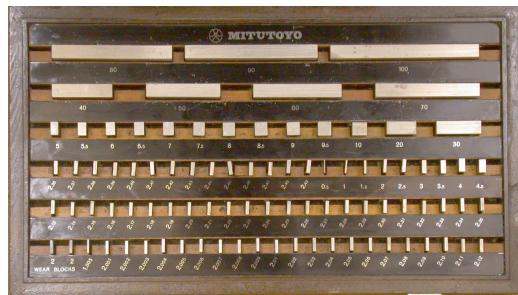
Measuring Relative motion of two points



Strain pertaining to a smaller area (point)

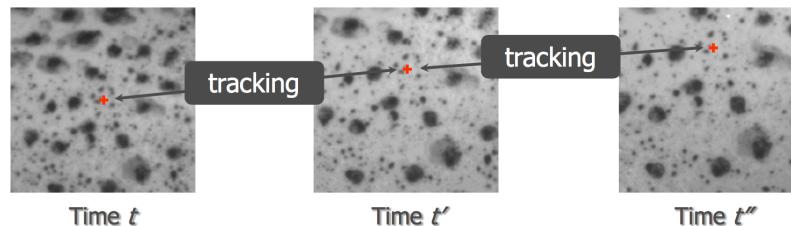


Strain gauge

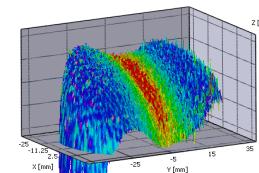


Mechanical extensometer and gauge blocks

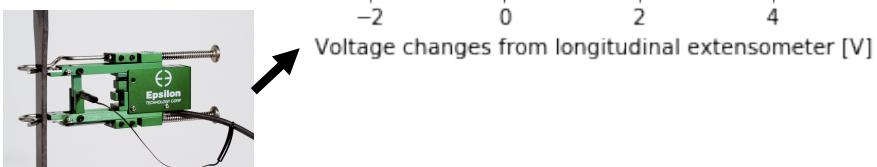
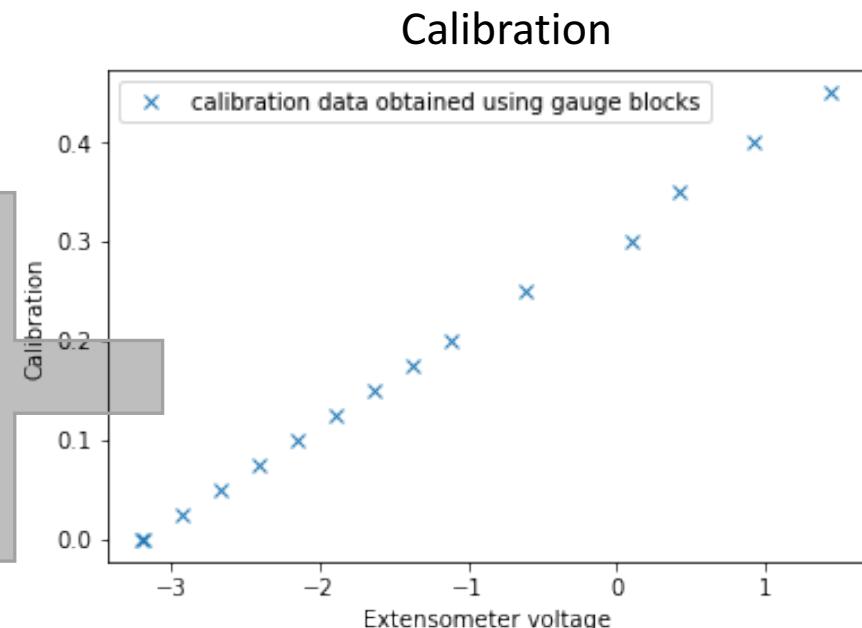
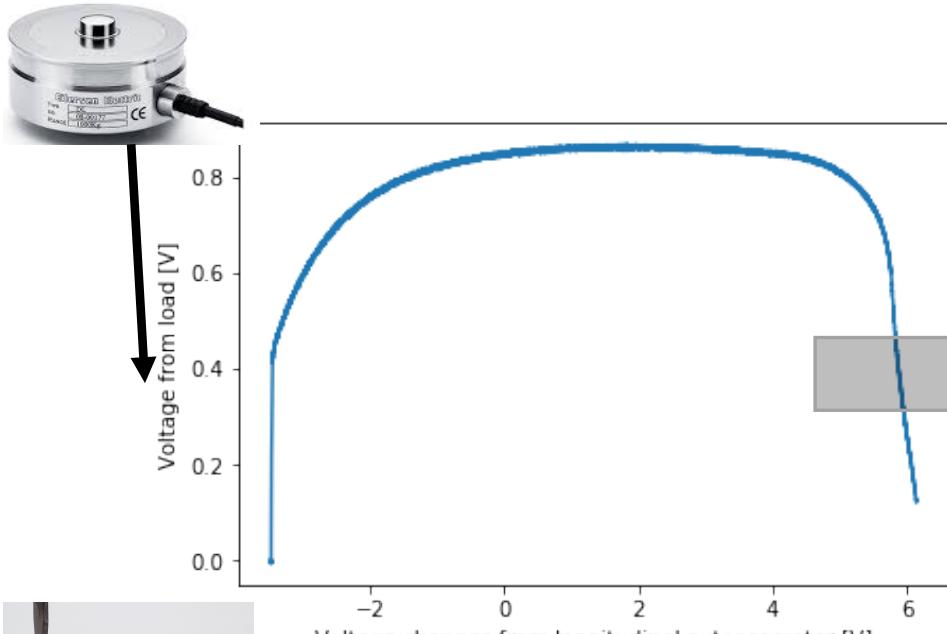
Strain field measurement (2D area)



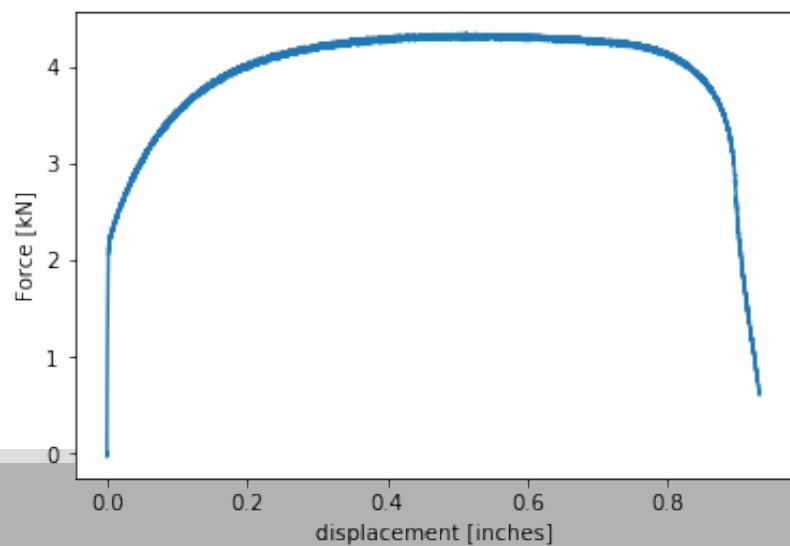
Digital image correlation



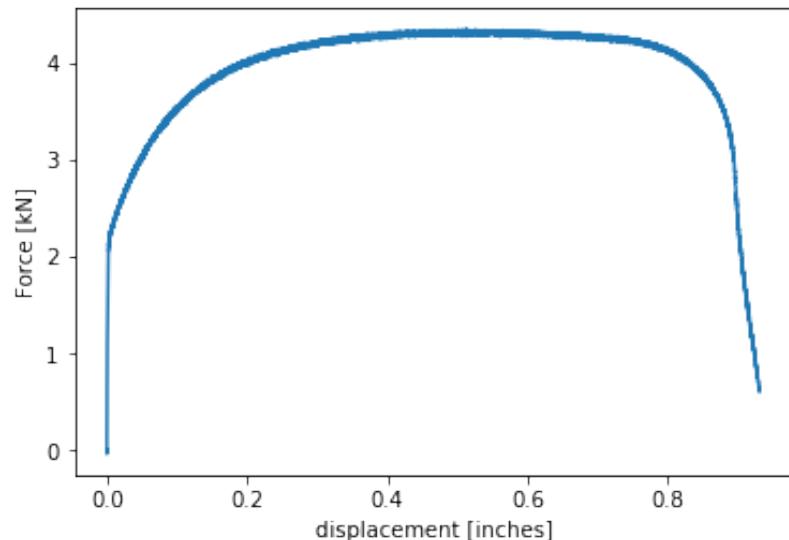
# Tension tests



Load cell과 extensometer는 전기적 신호를 준다. 전기적 신호와 실제 physical quantity (Force 혹은 길이 변화)는 calibration을 통해 변환 시킨다.



# Tension tests



- **Summary:**
  - Load-cell과 extensometer로 전기적 신호를 받아왔다.
  - Load-cell과 extensometer의 calibration 데이터를 통해 Force와 displacement로 변환하였다.
- Force and displacement는 시편의 크기에 따라 변한다. 따라서, 기계적 특성을 설명하는데 적절치 않다.
- 시편의 크기에 무관한 물리량으로 바꾸는 것이 필요

- 이렇게 시편의 크기(기하학적 요소)를 **최소화** (가능하다면 완전히 제거) 하기 위해서 응력과 변형률을 사용하여야 한다.
- Force와 displacement를 각각 응력과 변형률로 전환하여야 한다.

# 기하학적 요소 감소 (공칭 응력/변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 \*줄이는\* 가장 간편한 방법으로 engineering stress (공칭 응력)을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 \*줄이는\* 가장 간편한 방법은 engineering strain (공칭 변형률)을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{engi} = F/A_0$$

$F$ : 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N)

$A_0$ : 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로  $m^2$  단위)

$$\epsilon = \frac{l_i - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$l_0$ : 시편에 하중이 가해지기 전의 길이

$l_i$ : 순간순간 변한 길이

변형률은 단위가 없다. (길이 단위가 상쇄되어 없어진다)  
다만 공칭 변형률에 100을 곱해 %로 나타내기도 한다.

- \* 공칭 응력과 공칭 변형률은 시편의 기하학적 요소를 완벽히 '제거'하지 못하고, 일정부분 줄이는 효과가 있다.

# 기하학적 요소 제거 (진응력/진변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 \*제거\*하는 방법으로 true stress (진응력)을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 \*제거\*하는 방법으로 true strain (진변형률)을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{true} = F/A$$

$F$ : 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N)

$A$ : 하중이 가해지는 시점에서의 시편 단면적 (주로  $m^2$  단위)

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

$l$ : 시편에 하중가해지는 시점에서의 길이

$dl$ : 순간순간 변한 길이 변화량 (infinitesimal)

$d\varepsilon$ : 순간순간 변한 변형률량 (infinitesimal)

- 위 진변형률은 순간순간 변형률의 ‘변화량’. 모양(길이) 변화동안 모두 더하면(적분) 모양변화 후 (혹은 하중이 걸린 후)의 변화량을 얻을 수 있다.

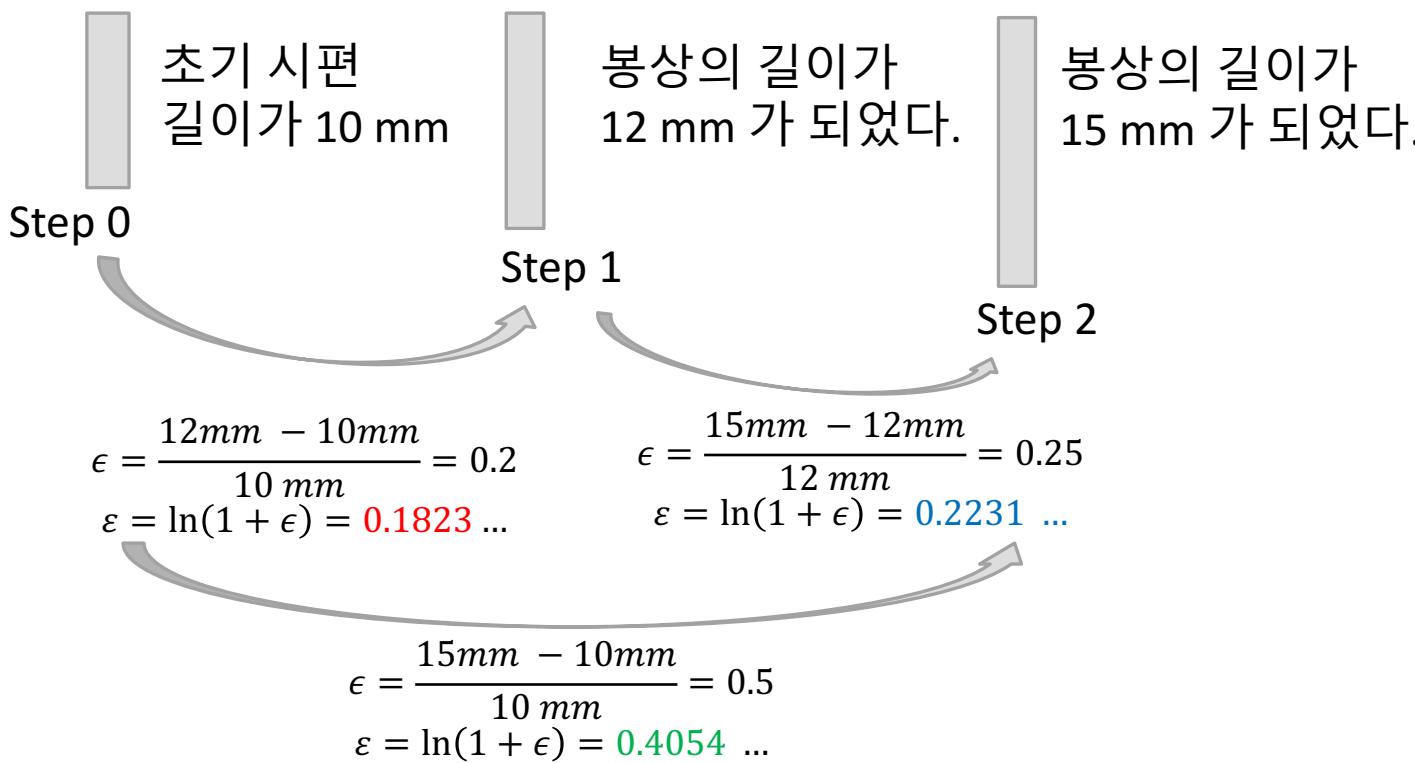
$$\varepsilon^{true} = \int_{l_0}^{l_1} d\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{l} dl = \int_{l_0}^{l_1} d \ln(l) = \ln(l_1) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + \epsilon^{\text{engi}})$$

# 진변형률과 공칭 변형률 비교 (인장)

- 앞서, 공칭 변형률은 기하학적 요소를 '감소' 시키는데 그치는 반면, 진변형률은 기하학적 요소를 '제거'할 수 있다고 하였다. 다음의 예제로 그 둘을 비교하여 보자.

$$\text{공칭 변형률: } \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\text{진변형률: } \varepsilon = \ln(1 + \epsilon)$$



## 고찰

- 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 작다 (?).
- 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다

# 압축과 인장 (tension and compression)

- 압축과 인장 모두 작용면에 수직방향으로 힘이 작용; 그 둘의 구분은 sign으로:
  - 인장은 힘과 변형률 positive value
  - 압축은 힘과 변형률이 negative value
- 대개 인장 실험이 압축 실험에 비해 용이하다.



Disk compression test is a popular method used to measure anisotropy of sheet metals

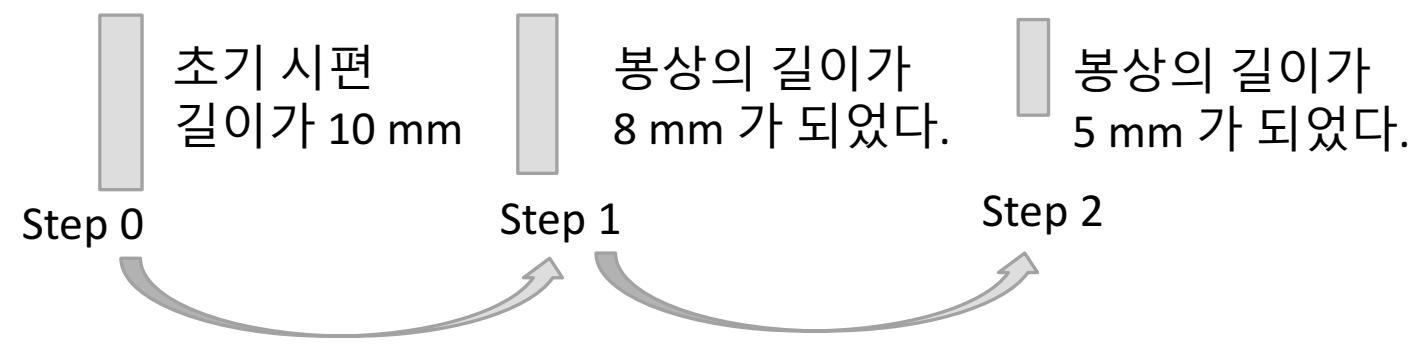
Fig. 4.4 Disk compression specimens for TWIP940 before (left) and after (right)

deformation. The left one is original, the right one is deformed.

# 진변형률과 공칭 변형률 비교 (압축)

공칭 변형률:  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

진변형률:  $\varepsilon = \ln(1 + \epsilon)$



$$\epsilon = \frac{8\text{mm} - 10\text{mm}}{10\text{ mm}} = -0.2$$

$$\epsilon = \frac{5\text{mm} - 8\text{mm}}{8\text{ mm}} = -0.375$$

$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.2231 \dots$$

$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.4700 \dots$$

Try this at  
Google

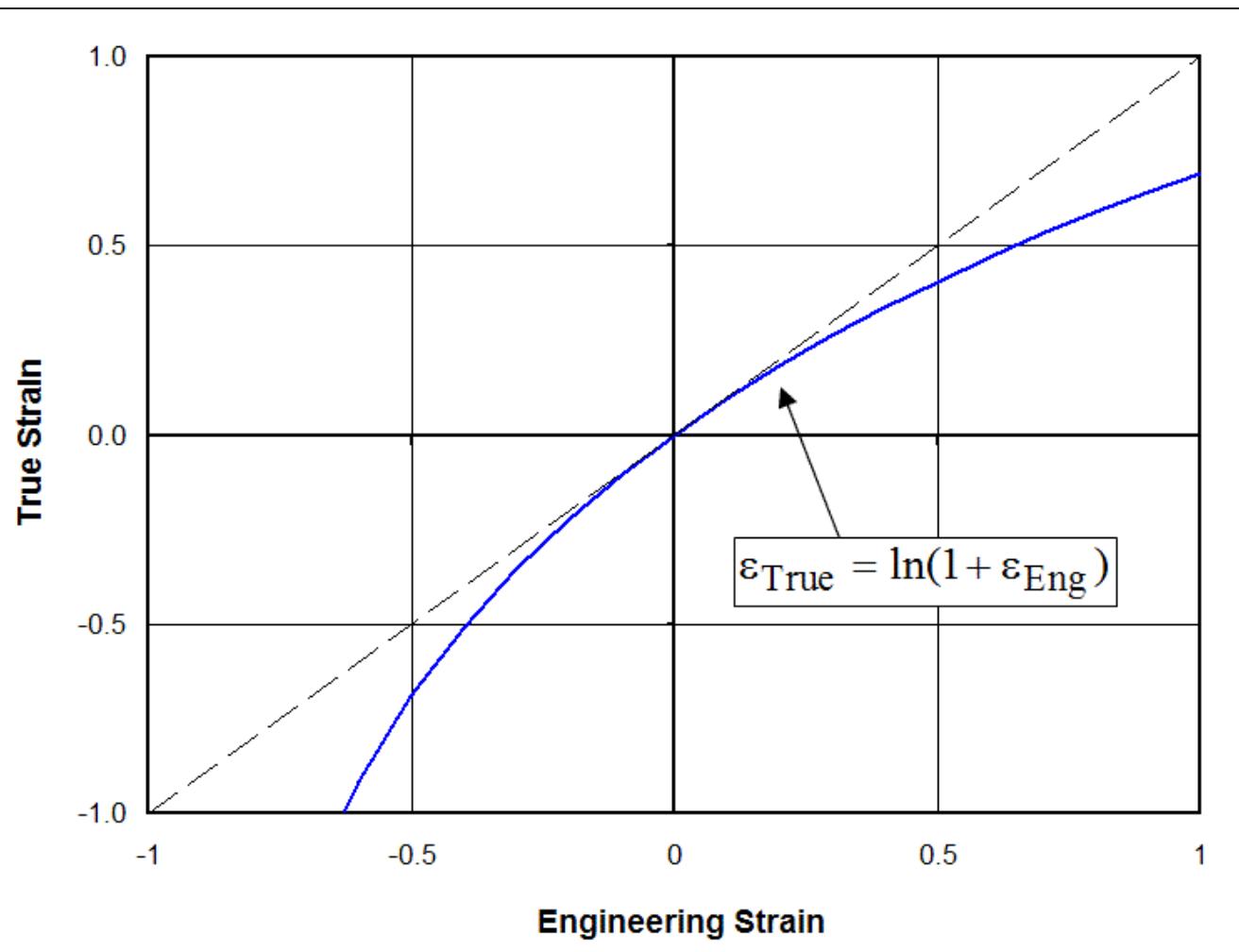
$$\epsilon = \frac{5\text{mm} - 10\text{mm}}{10\text{ mm}} = -0.5$$

$$\varepsilon = \ln(1 + \epsilon) = -0.6931 \dots$$

## 고찰

1. 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 작다 (?).
2. 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다.

# Compare engineering strain/true strain



# Example

---



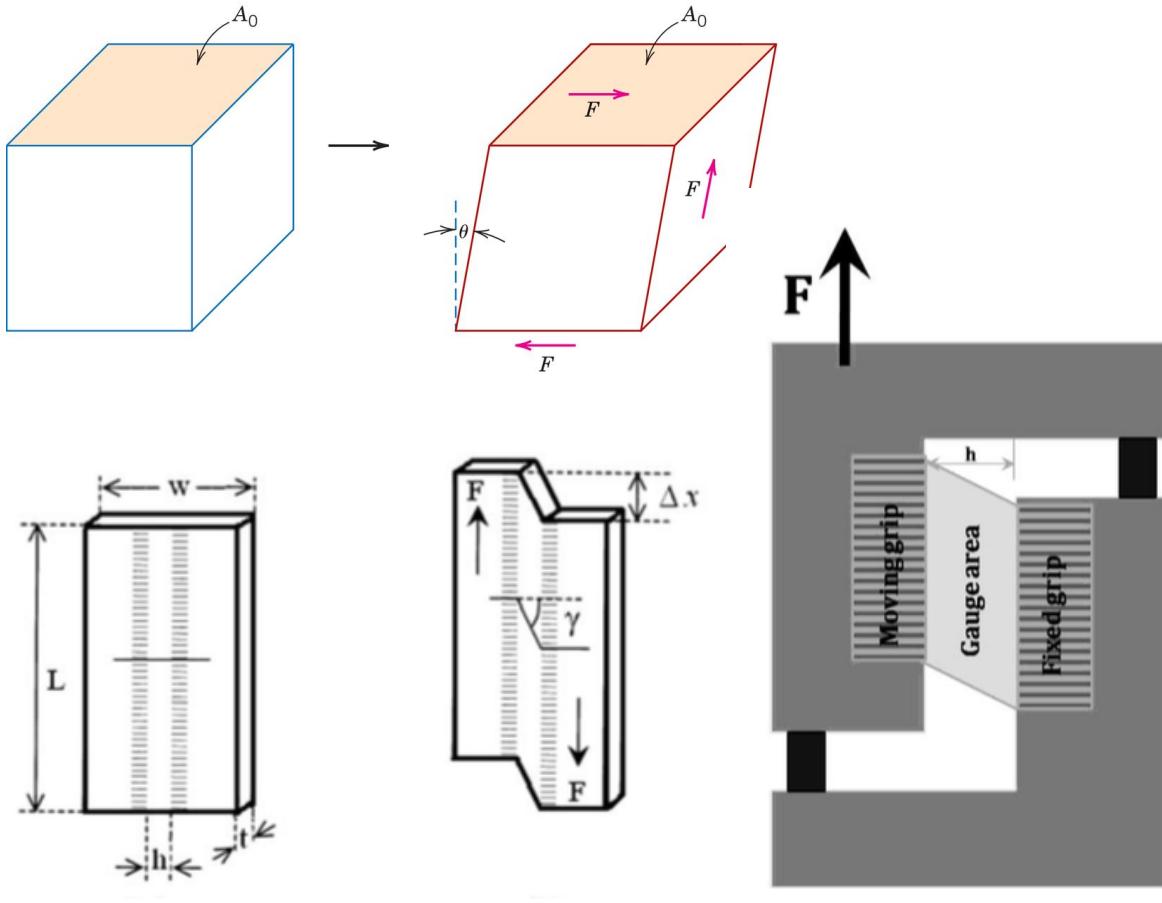
초기 시편  
길이가 10 mm

Step 0

Q1. 공칭 변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

Q2. 진변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

# 전단 (비틀림) 시험



김효정, 포항공대 석사 학위 논문 (2010)

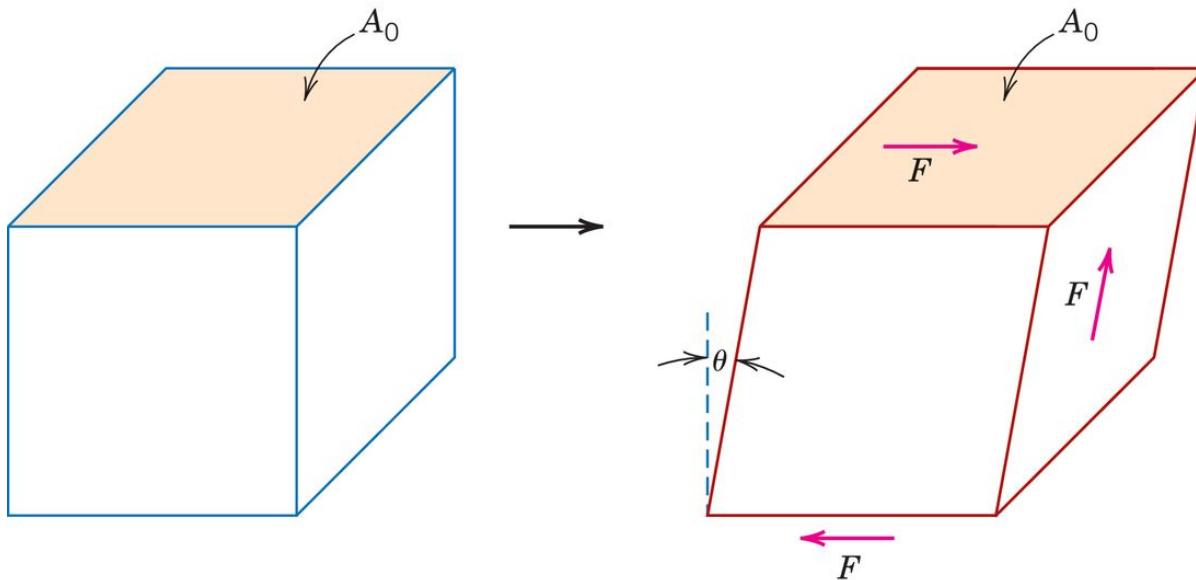
# 전단 (비틀림) 시험

$$\tau = \frac{F}{A_0}$$

$F$ : 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N)

$A_0$ : 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로  $m^2$  단위)

- \*전단력의 경우 가해지는 하중의 방향이 작용하는 면에 '누워' 있다.
  - 인장이나 압축력의 경우 작용하는 면과 '수직' 방향으로 작용



(전단 변형률이 작을 때)  
전단변형률 ( $\gamma$ )는  
전단변형에 의해 기울어진  
각도  $\theta$ 로 정의된다

전단 변형률은 '회전' 성분을 가지기 쉽다. 회전 성분이 제외된 순수한 전단 변형은 '비틀림' 변형으로 얻어질 수 있다. 이때 작용 전단응력은 작용 토크(torque)의 함수이다.

# Stress and strain: Stress tensor

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

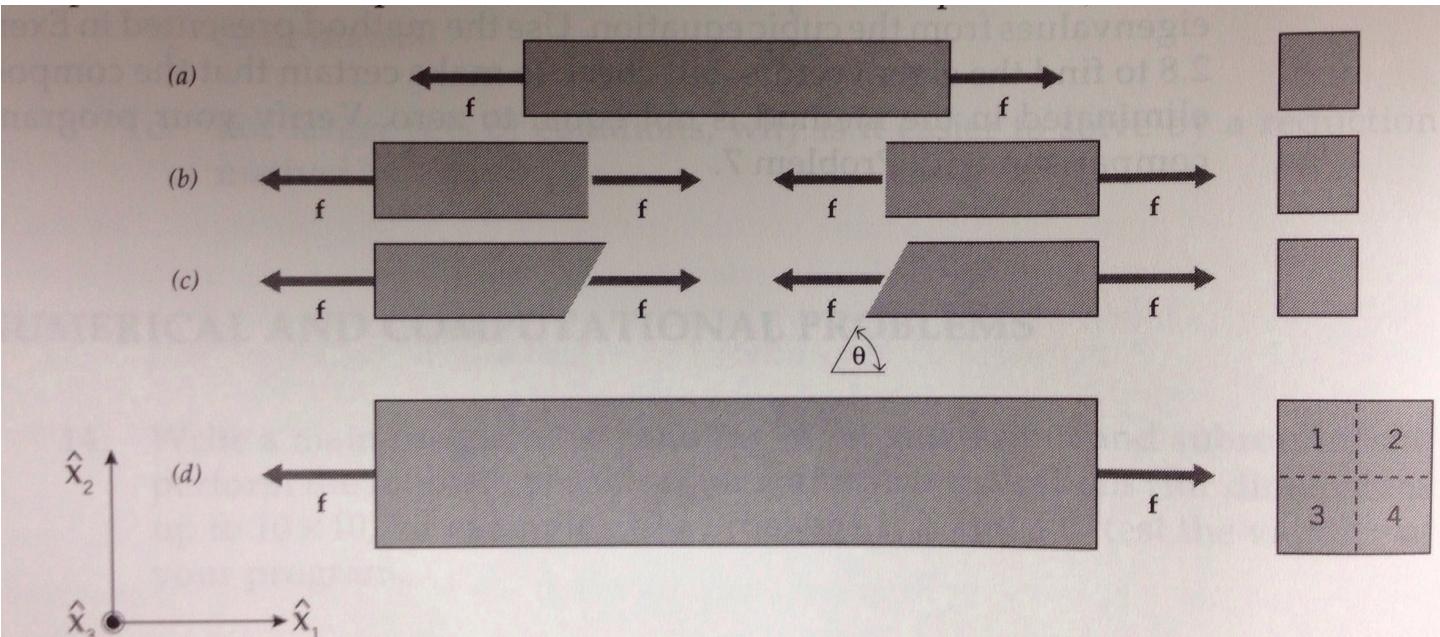
창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208   전화: 055-213-3694

Homepage: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Internal stress of materials in force equilibrium

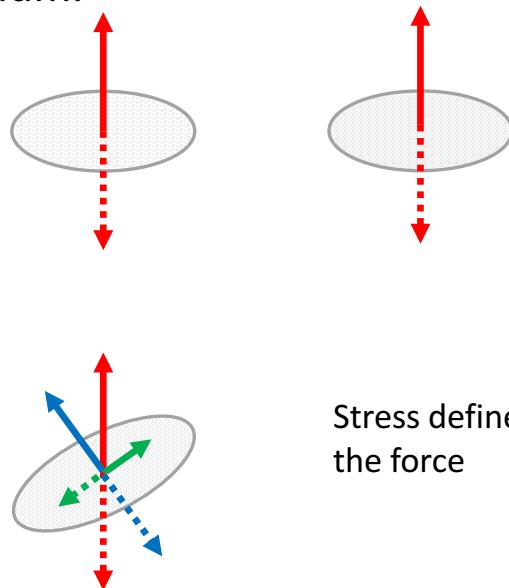
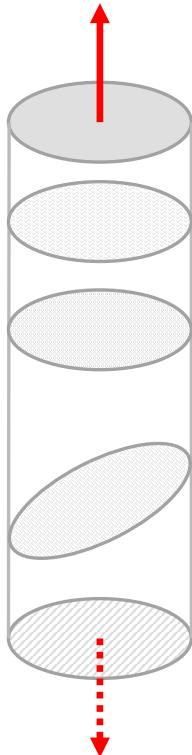


- (a) 양 끝에  $F$ 라는 힘이 작용하는 막대기가 힘의 평형 상태에 놓여 있다 (force equilibrium)
- (b) 막대 내부에 작용하는 힘 (internal forces)을 살펴보기 위해 '가상으로 자른' 면 (힘의 방향과 수직 방향)에도 힘이 작용할까?
- (c) (b)와 마찬가지, 하지만 비스듬하게 자른 '가상'의 면에는?
- (d) 힘과 같은 방향으로 자를 경우?

\* 가상의 면에서의 힘이 이해가 어려울 경우, 해당 면에 놓은 원자를 생각해보자. 양 끝을 당겼을 때 당긴 면과 떨어진 곳의 격자간의 거리가 어떻게 될까?

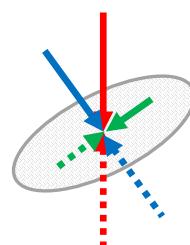
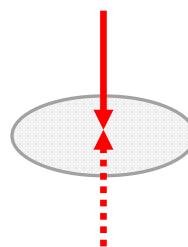
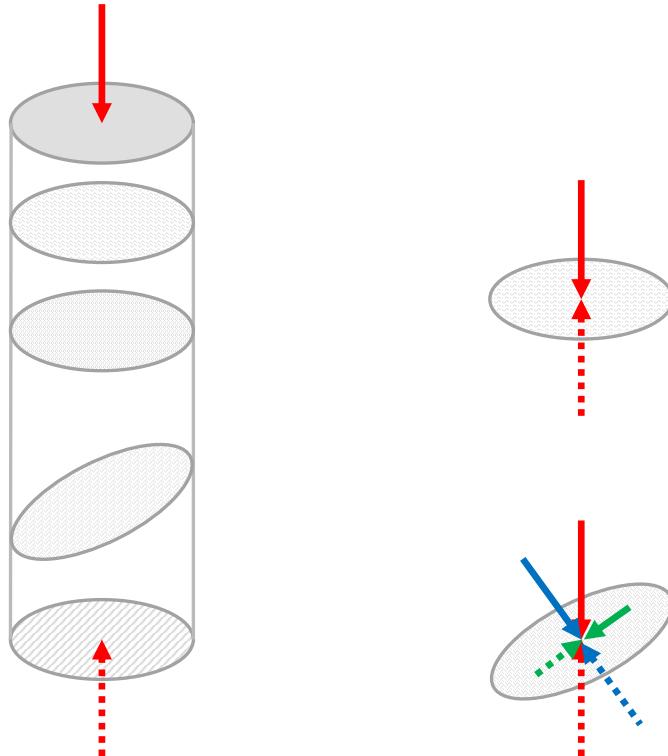
# Recap: Tensile stress acting on a plane

Remember that we deal with materials in force equilibrium; meaning that internal force in any arbitrary internal plane should be in 'force equilibrium' condition – notice the pair of bold-line arrows and broken line-arrows in below to maintain the force equilibrium.

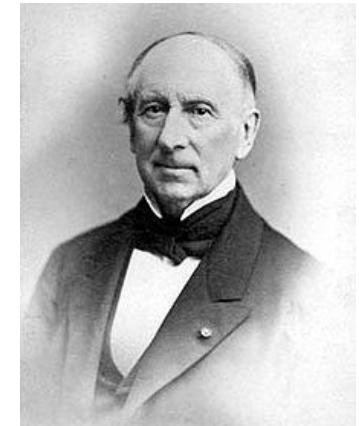


Stress defined by the plane and the force

# Recap: Compressive stress acting on a plane



Stress defined by the plane and the force



Louis Cauchy

Only two types of stress:

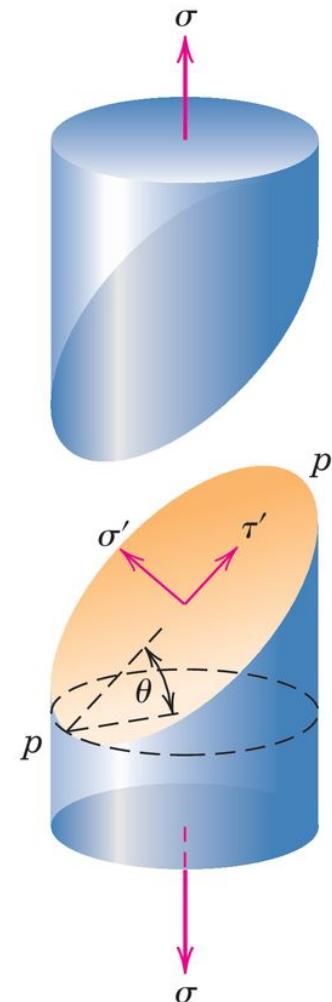
- 1) Normal (인장+혹은 압축-)
- 2) Shear



Sufficient to define any stress state

# 응력 상태의 기하학적 고려

- 이때까지 작용한 응력들은 특별한 케이스들로 국한되어 있다
  - 응력이 작용한 면과 수직 (압축, 인장)
  - 응력이 작용한 면과 평행 (전단)
- 사실 일반적인 응력 상태는 위의 압축, 인장, 전단이 혼재한 상태이다. 이러한 혼재한 상태는 사실 압축, 인장, 전단의 성분들로 '분류'하여 나타낼 수 있다. **따라서 인장(압축=-인장), 전단 성분들은 응력 상태를 나타낼 수 있는 구성 요소(component)라 할 수 있다.**



응력은 항상 특정 '면'에 작용한다는 점을 주지하여, 연속된 봉상에서 주황색 가상의 단면에 작용하는 응력 상태를 살펴보자.

해당 면은 실제로 외부의 응력  $\sigma$ 가 작용하고 있다. 하지만 해당 응력은 관심면과 '수직'하거나 '평행'하지도 않다. **해당 면에 '수직'하거나 '평행'한 성분을 찾아야 응력 상태를 명확히 표현할 수 있다 (약속).**

$\sigma'$ ,  $\tau'$ : 해당 면에 대해 수직하고 평행한 성분

# stress state (응력상태)

---

- Stress state consisting of nine separate components
- Out of nine three are called normal components while the remaining six are shear components
- A vector consists of three components in the 3D space.
  - Example in 2D
    - 2차원 평면 동서남북 좌표계에서 영희가 동쪽으로 10m/s, 북쪽으로 5m/s로 이동중이라면?
  - Example in 3D
    - 우주에서 유영하고 있는 우주인의 속도는 어떻게 나타내나? (기준 좌표계가 필요) 해당 좌표계의 basis axes (basis vectors)들과 평행한 성분들로 '분해'하여 표현.
- The stress state is represented by nine components. The number of components is reduced to six under force equilibrium and under the cases we deal with materials are always in force equilibrium (quasi-static).

# 응력과 응력상태를 이루는 구성 요소

## Stress state and stress (tensor) components

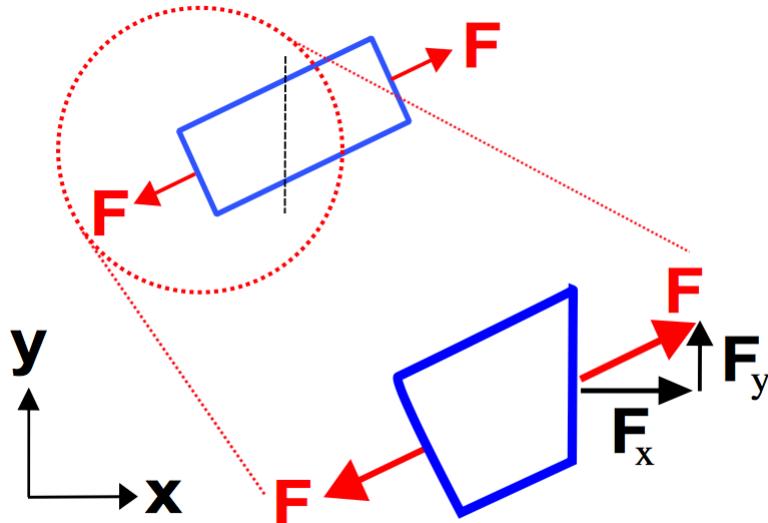
---

- Stress is defined as the **force** (load) applied to a certain **area**
- The most confusing part when you learn stress in mechanics is that the force does not necessarily lie normal to the plane.
- 앞서 살펴보았듯, 우리는 응력 상태를 표현할 때 두 가지 이상적인 조건에 만족하는 요소들로만 표현하기로 약속한다.
  - A. 힘이 작용한 면적과 평행한 경우 (전단)
  - B. 힘이 작용한 면적과 수직인 경우 (압축, 인장)
- 대부분의 경우, 응력 상태는 A.와 B.의 경우가 혼재해 있다. 이를 표현하기 위해서는 위의 '성분'들의 각 물리량을 값(숫자, value, quantity)으로 나타내면 되겠다.

# Directions in stress

Two types of directions are involved for stress state:

1. The direction of force
  2. The direction of the area (plane); which is usually represented by the normal of the plane
- These directions can be also represented by ‘values’ if you refer to them in a certain coordinate system;
  - The magnitude of ‘force’ can be also ‘quantified’ – that means it can be represented by ‘values’)



2차원 좌표계(x-y coordinates),  
관심면(plane of interest),  
그리고 힘 (Force)

# Recap.

---

- 본 강의는 힘평형(force equilibrium) 조건에 해당하는 문제들로 국한하여 다룬다.
- 응력상태를 구성하는 성분 두 가지는:
  - Normal: tensile(+) or compression(-)
  - Shear: forward shear (+) and backward shear (-) (전단의 방향은 'sense'라고도 한다)
- 응력상태를 표현하기 위해서는 두 가지 방향이 필요하다. 그리고 각 방향은 벡터의 성분처럼 projection을 통해 '값(value)'으로 표현이 가능하다. 2<sup>nd</sup> rank 텐서의 경우, 이 값들은 '두' 방향이 좌표계에 projection되어 얻어진 '세기'.
- Like three different components are the least number of independent components for a vector, there should be the least possible number of components to fully represent any stress state:
  - But, unlike vectors, we have two separate types of stresses (normal, shear) and also the directions for an independent component are 'two' (i.e., the direction of force and the associated plane).
  - How many, at least, different types of 'components' are required to fully describe the stress state then? We'll learn in over the next slides.

# Invention of Cauchy stress tensor 코시응력텐서

---

- Cauchy found that only nine different types of stress components are required to fully describe the stress state; The stress state is represented by Cauchy stress **tensor**.
- Before learning more about stress tensor, let's review the stress; What is stress?
- You might have some fundamental concept about stress: force/area



# Stress at a material point

---

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

특정한 크기를 가진 면에 작용하는 힘을 이용하여 적당한 크기를 가진 면에 ‘균일’하게 작용하는 응력을 표현; Within the area (denoted as A), the force is **homogeneous**.

비균질한 재료의 경우, 응력이 재료의 각 점마다 다른 값을 가지며 ‘분포’ 되어 있다. 이를 표현하기 위해서, 각 ‘점’마다의 응력 상태를 표현할 수 있어야 한다. 따라서 매우 작은 점의 응력은 ‘균일’하다 할 수 있다. 이를 수학적으로 표현하자면

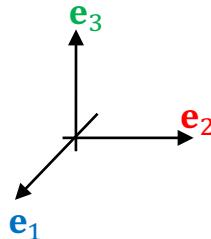
$$\sigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

앞으로는 가상의 ‘면’이 한 물질점(material point)에 귀속되어 있다고 가정한다. 그리고 무한소 큐브를 이용한 응력 상태를 표현하는 방법 (응력 텐서)를 알아보자.

# Coordinate system and basis vectors

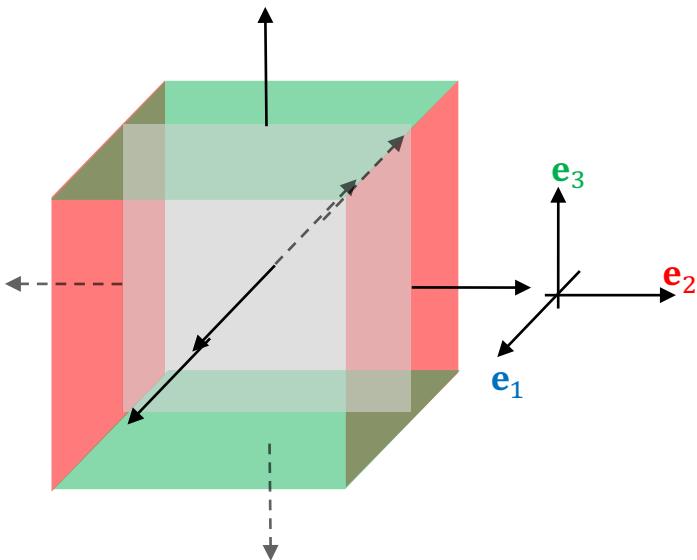
- 앞으로 좌표계를 설명할 때 좌표계의 근간이 되는 방향들을 normal vector (즉 크기가 1인 벡터)로 표현.
- Cartesian coordinate system은 orthonormal coordinate system
- 서로 수직한 세 normal vector로 표현이 가능하다.

그 세 normal vector들을 basis vector로 칭하겠다. 그리고 각각  $e_1, e_2, e_3$ 로 나타내겠다.



앞으로 다루게 될 응력과 변형률 텐서의 성분(component)을 표현할 때 쓰이는 subscript들의 인덱스 (1,2,3)는 각각  $e_1, e_2, e_3$  벡터들을 뜻한다.

# Cauchy stress tensor



The infinitesimal cube represents the smallest possible material point.

응력 텐서는 무한소 큐브의 3면에 작용하는 성분들은 총 ‘두’ 가지 방향에 의존한다:

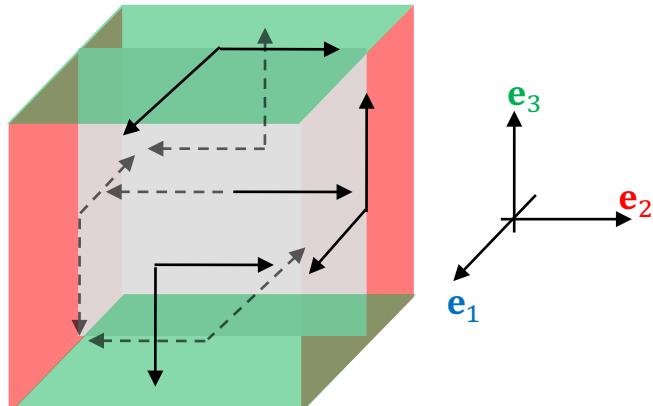
- 1) 작용하는 면의 수직방향 (normal)
- 2) 작용하는 힘의 방향 (normal or shear)

3차원 직교좌표계 (Cartesian coordinate)에서 총 9개의 조합이 가능하다. 즉 9개의 성분으로 표현 가능. 하지만 힘의 평형 상태에서는 몇몇의 shear 성분들이 서로 같은 값을 가져야 한다(추후에 다루자). 그에 따라 총 6개의 ‘독립’적인 성분(component)들만 남게 된다.

즉 주어진 좌표계에서 6개의 독립적인 성분(component)들만 안다면 해당 물질 무한소(material infinitesimal point)의 응력 상태(stress state)를 완벽히 나타낼 수 있다.

왜 6면중 3면만으로?? centro-symmetry

# Cauchy stress tensor



응력 텐서는 무한소 큐브의 3면에 작용하는 성분들은 총 ‘두’ 가지 방향에 의존한다:

- 1) 작용하는 면의 수직방향 (normal)
- 2) 작용하는 힘의 방향 (normal or shear)

3차원 직교좌표계 (Cartesian coordinate)에서 총 9개의 조합이 가능하다. 즉 9개의 성분으로 표현 가능. 하지만 힘의 평형 상태에서는 몇몇의 shear 성분들이 서로 같은 값을 가져야 한다(추후에 다루자). 그에 따라 총 6개의 ‘독립’적인 성분(component)들만 남게 된다.

The infinitesimal cube represents the smallest possible material point.

즉 주어진 좌표계에서 6개의 독립적인 성분(component)들만 있다면 해당 물질 무한소(material infinitesimal point)의 응력 상태(stress state)를 완벽히 나타낼 수 있다.

왜 6면중 3면만으로?? centro-symmetry

# 2D stress tensor representation using matrix

- 주어진 (x-y) 좌표계가, 혹은 ( $e_1 - e_2$ ) 좌표계가 명확히 주어졌다면 ‘행렬’의 방식을 빌려 표현할 수 있다.

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



이 표기법을  
앞으로 사용하자

각 응력 성분에 붙인 첨자 형태의  
수(1,2,3)은 해당 성분과 관련있는 basis  
vector( $e_1$ ,  $e_2$ , 혹은  $e_3$ )를 의미한다.

$\tau$  (tau) 기호가 전단력을 normal  
stress component 와 구분하기  
위해 종종 사용된다.

Warning: tensor is not matrix. We just borrow the form  
of matrix to write down the tensor components.

There are cases where you cannot write down the  
tensor components to matrix; Tensors can be in  
multidimension – like 6, or 9.

# 3D stress tensor represented by matrix

- 2D 응력 텐서의 확장

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

파란색: normal of the plane

빨간색: direction of the force

The subscript number refers to the basis axis, with which the associated direction is parallel.

같은 가로줄에 놓인 성분들(열, 수평축)은 같은 면에 작용한다.

같은 세로축(기둥)에 놓인 성분들은, 관계있는 힘이 같은 방향(+/-)에 작용한다.

# Coordinate transformation: vector in 2D space

Coordinate transformation is also referred to as ‘axes transformation’



Force vector,  $\mathbf{F}$  또한 주어진 좌표계(coordinate system)이 있다면 행렬의 형태로 표현 가능

$$\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2]$$

혹은 주어진 좌표계의 ‘basis vector’를 사용하여서 표현 가능

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2$$

$F_1, F_2$  는 주어진 좌표계 ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  basis vector로 이루어진)에서 표현된 Force vector  $\mathbf{F}$ 의 성분 (component)



# Coordinate transformation: vector in 2D space

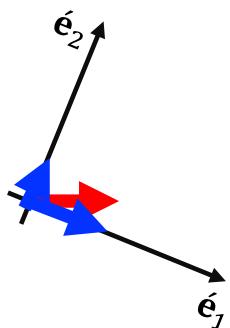
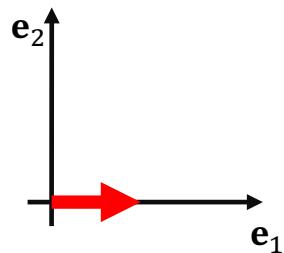


$$\mathbf{F} = [\acute{F}_1 \quad \acute{F}_2]$$

$$\mathbf{F} = \acute{F}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \acute{F}_2 \hat{\mathbf{e}}_2$$

혹은 주어진 좌표계의  
'basis vector'를  
사용하여서 표현 가능

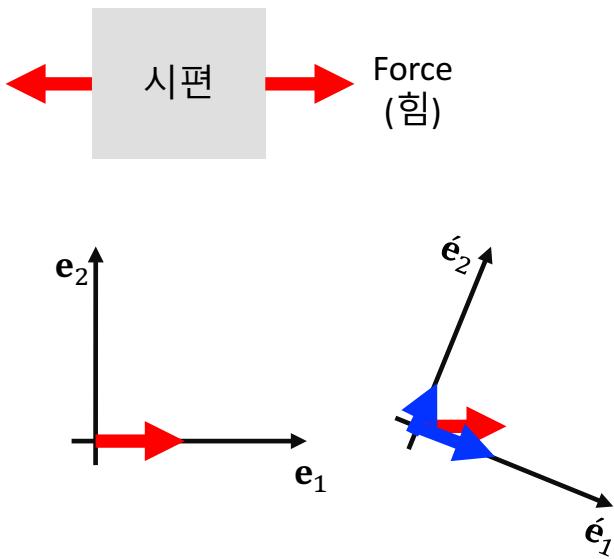
# Coordinate transformation: vector in 2D space



Vector를 나타내는 좌표계의 변환일 뿐,  
Force vector 자체의 물리량은 변환없다.  
즉 시편에 작용하는 힘은 변화 없다.

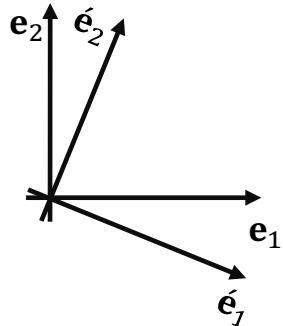
$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{F} = \acute{F}_1 \acute{\mathbf{e}}_1 + \acute{F}_2 \acute{\mathbf{e}}_2$$

# 좌표계에 변환: vector in 2D space



$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 = F'_1 \mathbf{e}'_1 + F'_2 \mathbf{e}'_2$$

Vector를 나타내는 좌표계의 변환일 뿐,  
Force vector 자체의 물리량은 변환없다.  
즉 시편에 작용하는 힘은 변화 없다.



두 좌표계간의 '관계'를 안다면  $F_1$ ,  $F_2$  를  $F'_1$ ,  $F'_2$ 로 '변환' 할 수 있다.

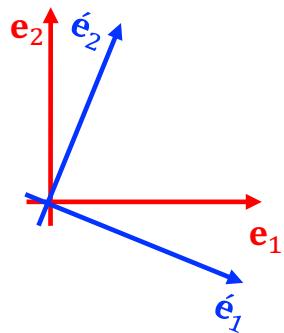
이때의 '변환'을  
transformation, 즉 'form'  
(형태) 의 trans (바뀜)

Transformation은 각  
basis vector 간의  
관계로 설명이 가능

$\mathbf{e}_1$ 과  $\mathbf{e}'_1$  그리고  $\mathbf{e}_1$ 과  $\mathbf{e}'_2$   
 $\mathbf{e}_2$ 과  $\mathbf{e}'_1$  그리고  $\mathbf{e}_2$ 과  $\mathbf{e}'_2$

관계를 각 basis vector  
(좌표계의 축) 간  
angle로 표현한다면?

# 2차원 좌표계 간의 관계



2차원 좌표계의 각 축간의  
각도를 표현하려면?

New co. sys.

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

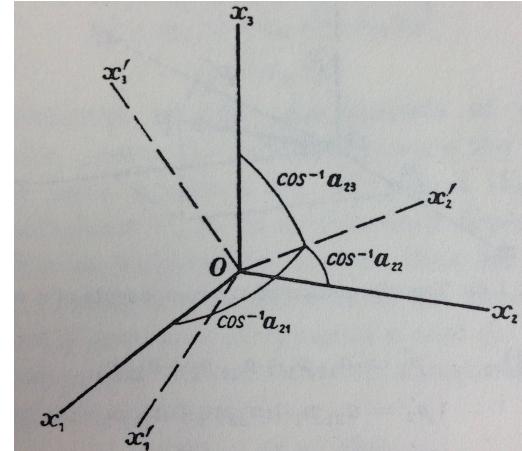
Old co. sys.

한 좌표계에서 다른 좌표계로  
'변환'을 시켜주는 direction  
cosine들의 모임을 '행렬'로 표현

$a_{ij}$

Old Co. Sys 의  $j$  번째 basis  
vector와 new Co. Sys의  $i$   
번재 basis vector 사이의  
direction cosine

# 3차원 좌표계 간의 관계



위 그림에서는  $x_1, x_2, x_3$ 로 이루어진 좌표계 1과  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 로 이루어진 또 다른 좌표계 2가 나타나 있다. 좌표계 2의  $\hat{x}_2$  basis vector와 좌표계 1의 각 basis vector들과의 관계를  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 의 direction cosine으로 표현했다.

3차원 좌표계의 각 축간의 각도를 표현하려면?

한 좌표계에서 다른 좌표계로  
'변환'을 시켜주는 direction  
cosine들의 모임을 '행렬'로 표현

New co. sys.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Old co. sys.

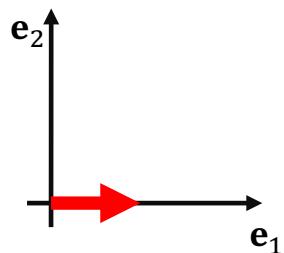
$a_{ij}$

Old Co. Sys 의  $j$  번째 basis  
vector와 new Co. Sys의  $i$   
번재 basis vector 사이의  
direction cosine

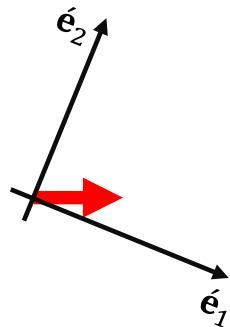
Direction cosine: 주어진 방향 벡터  $a$ 와 방향  
벡터  $b$  사이의 각이  $\theta$ 라면,  $\cos(\theta)$ 로 정의 된다.

# 2차원 벡터의 좌표 변환 표기 #1

Old coordinate system



New coordinate system

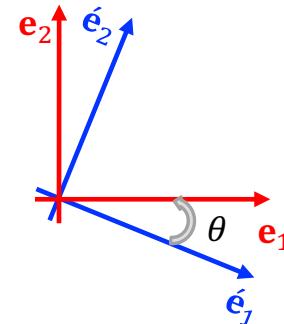


$$\mathbf{F} = [10\text{N} \quad 0\text{N}]$$

10N의 힘이 작용

$$\mathbf{F} = [\ ?\text{N} \quad ?\text{N}]$$

2차원 coordinate system 간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향 ccw 기준)의 '각' 회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서  $-\theta$ 로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

New co. sys.

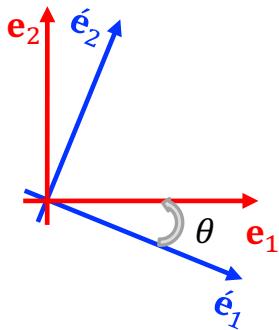
$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Old co. sys.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(-\theta) = \cos \theta \\ a_{21} &= \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ a_{12} &= \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \\ a_{22} &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

# 2차원 벡터의 좌표 변환 표기 #2

2차원 coordinate system 간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향 ccw 기준)의 '각' 회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서  $-\theta$  로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

Old co. sys.

$$[e_1 \quad e_2]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

New co. sys.

$$a_{11} = \cos \theta$$

$$a_{21} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$a_{12} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$a_{22} = \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= \cos \theta_{11} F_1 + \cos \theta_{12} F_2 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 \\ \hat{F}_2 &= \cos \theta_{21} F_1 + \cos \theta_{22} F_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2\end{aligned}$$

$$\hat{F}_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 = \sum_j^{j=1,2} a_{1j} F_j$$

$$\hat{F}_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 = \sum_j^{j=1,2} a_{2j} F_j$$

# 2차원 벡터의 좌표 변환 표기 #3

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= \cos \theta_{11} F_1 + \cos \theta_{12} F_2 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 \\ \hat{F}_2 &= \cos \theta_{21} F_1 + \cos \theta_{22} F_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2\end{aligned}$$

$$\hat{F}_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 = \sum_{j=1,2}^j a_{1j} F_j$$

$$\hat{F}_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 = \sum_{j=1,2}^j a_{2j} F_j$$



$$\hat{F}_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + a_{13} F_3 = \sum_{j=1,3}^j a_{1j} F_j$$

$$\hat{F}_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + a_{23} F_3 = \sum_{j=1,3}^j a_{2j} F_j$$

$$\hat{F}_3 = a_{31} F_1 + a_{32} F_2 + a_{33} F_3 = \sum_{j=1,3}^j a_{3j} F_j$$

쉬워보이지만, 직접 연습해보면 생각보다 어려울 수 있습니다.  
따라서, 혼자서 연습해보는 게 필요해요.

# 2차원 벡터의 좌표 변환 표기 #4

$$\hat{F}_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + a_{13}F_3 = \sum_j^3 a_{1j}F_j$$

$$\hat{F}_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + a_{23}F_3 = \sum_j^3 a_{2j}F_j$$

$$\hat{F}_3 = a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + a_{33}F_3 = \sum_j^3 a_{3j}F_j$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Transformation ‘matrix’.  
엄밀하게 얘기하면  
tensor가 아니지만,  
transformation  
tensor라고도 자주 불림

앞을 더욱 축약하자면... 한 coordinate system ( $e_i$ ,  $i=1,2,3$ )에서 표기된 벡터 vector  $F$ 를 또 다른 coordinate system ( $\hat{e}_i$ ,  $i=1,2,3$ )으로 변환 (transformation) 하는 작업을 두 coordinate system을 ‘이어’주는 transformation matrix [ $a_{ij}$ ]를 사용하여 다음과 같이 축약하여 이용할 수 있다.

$$\hat{F}_i = \sum_j^3 a_{ij}F_j \quad (i = 1,2,3)$$

위를 더욱 더 축약하자면 ...

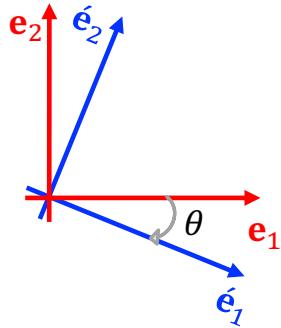
$$\hat{F}_i = a_{ij}F_j \quad (i, j = 1,2,3)$$

각 좌우변에서 **반복되는** index에 대한  
'summation'이 생략되었다.

반대로, 축약된 방식으로 표현된 tensor  
'operation'을 보고 생략된 summation  
기호를 파악해내어야 한다.

# 2차원 벡터의 좌표 변환 표기 #5

2차원 coordinate system 간에 관계는 한 방향으로(시계반대반향 ccw 기준)의 '각' 회전 angular rotation으로 나타낼 수 있다.



따라서  $-\theta$  로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

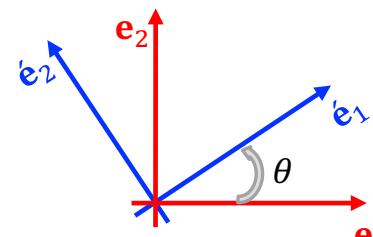
New co. sys.

Old co. sys.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{\acute{e}}_1 \\ \mathbf{\acute{e}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \cos \theta$$
$$a_{21} = \cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$$
$$a_{12} = \cos(90^\circ + \theta) = \sin \theta$$
$$a_{22} = \cos \theta$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



따라서  $\theta$  로 Old Coordinate 를 CCW 회전하면 New Coordinate가 된다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

# 좌표전환: 2nd order 텐서

Vector의 경우 각 component가 basis vector가 '하나'씩 관련됨

2nd Order tensor의 경우 2개의 basis vector가 관련됨 (힘의 방향과 면의 방향)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

좌표전환 matrix의 transpose?

행렬의  $\mathbf{R}$ 의 transpose operation은 ...

Einstein summation convention  
아인슈타인  
축약 표기법

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sum_k^3 \left\{ \sum_l^3 a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl} \right\} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

$\mathbf{R}^T$ : transformation 행렬  $\mathbf{R}$ 의 transpose;  $(R_{ij})^T = R_{ji}$

$\mathbf{R}^T$ : transformation 행렬  $\mathbf{R}$ 의 transpose;  $(R_{ij})^T = R^{-1}$

# 좌표계 변환의 의미

- 물리학에서 좌표계는 단순히 관찰자의 편의에 의해 설정 된다. 하지만 어떠한 관찰자가 보더라도 물리적 의미와 법칙은 영향을 받지 않는다. 즉 물리량은 임의로 설정된 좌표계와 상관없이 일정하고, 물리 법칙은 관찰자의 좌표계에 무관하다.
- 텐서의 형태로 표현되는 물리량 (혹은 물성)들도 좌표계 전환에 의해서 바뀌는 것은 아니다.
- 다만, 물리량을 표현하는 텐서의 표기법(약속)에 의해 텐서의 성분값들이 바뀌는 것일 뿐이다. 앞서 우리는 텐서라는 표기법(약속)에 따라 주어진 좌표계에서 또 다른 좌표계로 바뀌어 참조될때 텐서의 성분값들이 어떻게 변하는지 살펴보았다.
- 텐서의 ‘rank’에 따라서 좌표계 전환법이 어떻게 바뀌는지 알아보았다.

# Inner dot product

- Tensor 표기를 index에 함께 표기하지 않고 bold-face symbol로 표기하기도 함
  - 예)  $\sigma_{ij}$  대신  $\boldsymbol{\sigma}$ 로,  $F_i$  대신  $\mathbf{F}$ 로 표기.
- Inner dot product는 텐서와 텐서간의 여러 operation 중에 하나로, 참여하는 텐서간의 '안쪽' index가 되풀이되어 더해지는(summed) 작업.
- 앞서 보았던 벡터의 좌표변환 (coordinate transformation)을 bold-face로 바꿔 center dot을 사용하여 표기
  - $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}$ 로 표기
  - $\tilde{F}_i = R_{ij}F_j$  (index 표기법)
- 2nd order tensor의 좌표변환은...
  - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$
  - $\tilde{\sigma}_{ij} = R_{ik}\sigma_{kl}(R^T)_{lj} = R_{ik}\sigma_{kl}R_{jl} = R_{ik}R_{jl}\sigma_{kl} = R_{jl}R_{ik}\sigma_{kl}$

# Double Inner dot product

---

- Work done to an infinitesimal material point:

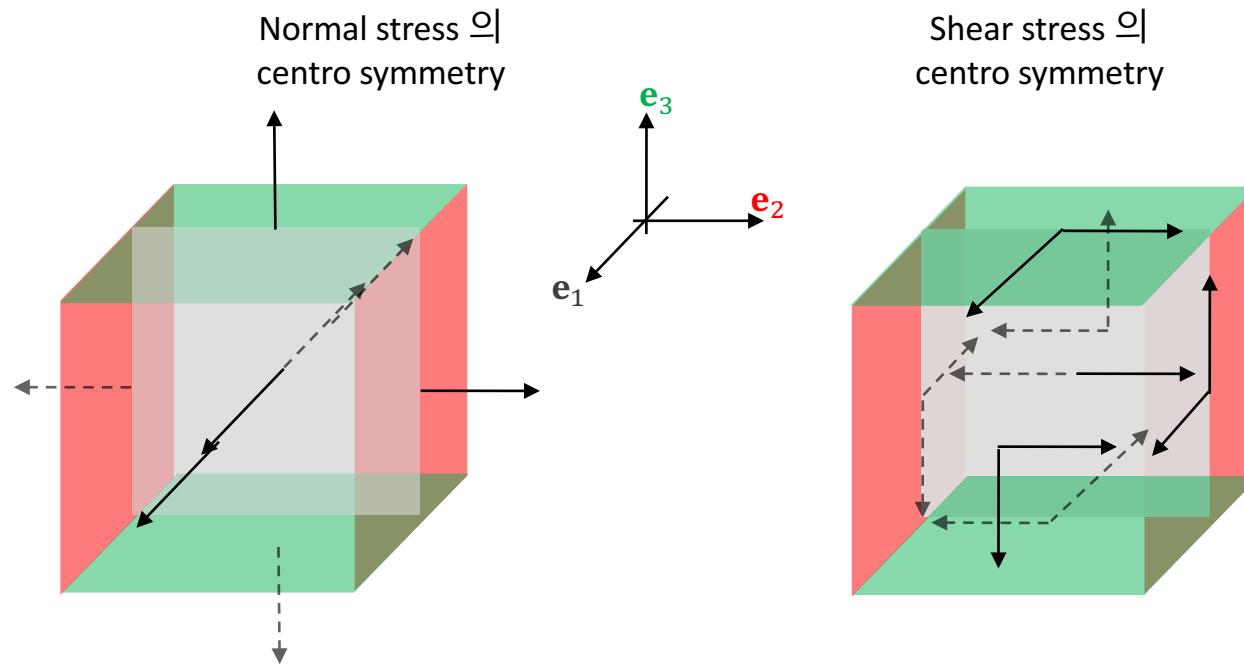
$$W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sum_i^3 \sum_j^3 \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{32}\varepsilon_{32} + \sigma_{33}\varepsilon_{33}$$
$$W = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Colon 기호로 double inner dot operation 을 표기

# 2<sup>nd</sup> order tensor의 symmetry

## Centro symmetry

- 원점에 대한 대칭



## Force (혹은 momentum) equilibrium $\rightarrow$ Diagonal symmetry

- $\sigma = \sigma^T$  즉  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

따라서, 총 6개의 독립적인 component가 존재...

# 물리량 표기법

물리량은 대개 ‘Greek’ alphabet을 기호로 사용하여, 기준이 되는 좌표계에의 성분(component) 값을 표현하는 index를 대개 subscript(간혹 superscript)로 덧붙여 나타낸다.

Scalar를 표현하는 기호에는 인덱스가 **없다** – 좌표계에 무관  
▪ 예: 질량 ( $m$ ) 밀도 ( $\rho$ ), 온도( $T$ )

vector에는 인덱스를 **하나** 붙인다  
▪ 예: 속도 ( $v_i$ ), 힘 ( $f_i$ ). 이때 각 index는 1,2,3 즉 세개의 구성성분 (component)가 존재.

2<sup>nd</sup> rank tensor에는 **두개**의 인덱스를 붙인다  
▪ 예: 응력 ( $\sigma_{ij}$ ) 각각의 index i와 j는 1,2,3 세개의 구성성분을 가진다. 따라서 총 9개의 구성성분 ( $3 \times 3$ )이 존재한다.

3<sup>rd</sup> rank tensor는 **세개**의 인덱스 총  $3 \times 3 \times 3$  27개의 구성성분 필요

4<sup>th</sup> rank tensor는 **네개**의 인덱스, 총  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , 81개의 구성성분 필요:  
▪ 응력 탄성계수 (elastic modulus) 텐서

벡터는 주로 [1x3] 혹은 [3x1]의 행렬 형태를 빌려 쓴다

Scalar는 0<sup>th</sup> rank tensor, vector는 1<sup>st</sup> rank tensor

| type                        | No. of Indices (=No. of transformation needed) | 예시                   |
|-----------------------------|--|----------------------|
| Scalar                      | 0  | mass, density        |
| Vector                      | 1  | velocity, force      |
| 2 <sup>nd</sup> rank tensor | 2  | stress, strain       |
| 3 <sup>rd</sup> rank tensor | 3  | Piezoelectric moduli |
| 4 <sup>th</sup> rank tensor | 4  | Elastic moduli       |

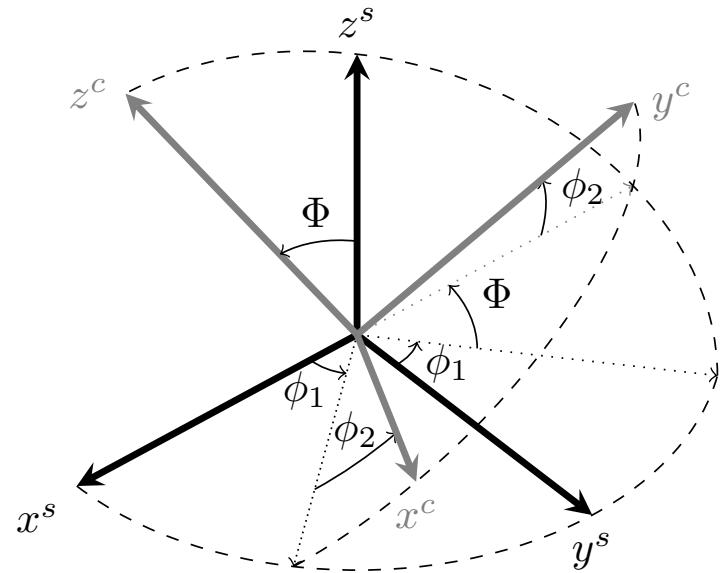
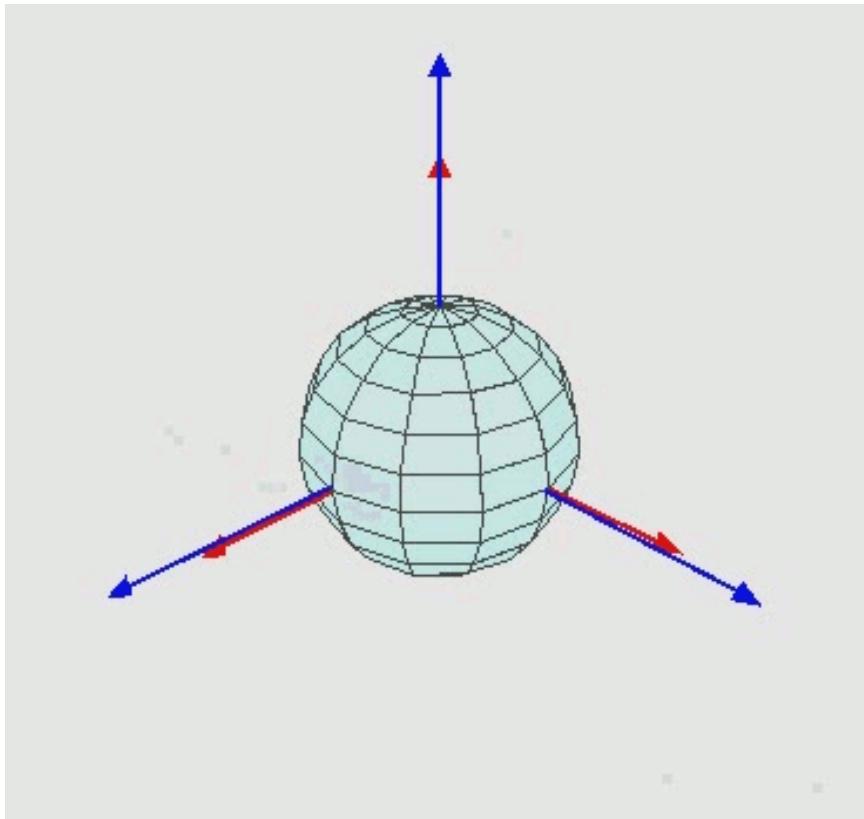
참고: Moduli는 modulus의 복수형

# Transformation rule for tensor

---

- Follow this link:
- <https://youngung.github.io/tensors/>

# Euler angles



References:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_angles](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles)

<https://youngung.github.io/euler/>

# Euler angle을 이용한 3차원 좌표 변환

- 두 삼차원 좌표계간의 관계를 표현하는 방법
- 여러 방법 중 Euler angle를 사용하는 방법이 MSE에서 자주 쓰인다.

1. 한 3차원 좌표에  $e_3$  축 (z-axis)을 바라보며 시계 반대방향으로  $\phi_1$  만큼 회전
2. 다음으로 1.로 인해 회전된 좌표계의  $e_1$  축을 바라보며 시계 반대방향으로  $\Phi$  만큼 회전
3. 다음으로 1-2.로 인해 회전된 좌표계를 다시  $e_3$  축을 바라보며 시계 반대방향으로  $\phi_2$  만큼 회전

$$\mathbf{R}^a = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

위의 일련의 세 회전을 설명하는 '하나의' 좌표 변환 matrix를 다음을 통해 만들 수 있다.

$$R_{ij} = R_{ik}^c R_{kl}^b R_{lj}^a$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^c \cdot \mathbf{R}^b \cdot \mathbf{R}^a$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{R}^c \cdot \{\mathbf{R}^b \cdot (\mathbf{R}^a \cdot \mathbf{v})\}]$$

Recap: Einstein  
summation convention

# Let's practice #1

- Follow this link
  - <http://youngung.github.io/euler2ndtensor/>
  - You'll find two links – one to open Google sheet another to download the sheet.

| input   | output |           |  |  |       |
|---|--------|-----------|--|--|-------|
| <b>This excell sheet proves a means of coordinate system transformation</b> |        |           |  |  |       |
|   | angle  | radian    |  |  |       |
| Three Euler angles  | phi1   | 45        | 0.785  |  |       |
|   | Phi    | 0         | 0.000  |  |       |
|   | phi2   | 0         | 0.000  |  |       |
| 삼각 함수 값들  |        |           | transformation matrix R                                      | (transformation matrix) <sup>t</sup> = R <sup>t</sup> =R <sup>-1</sup>   |       |
| cos(phi1)   | 0.707  | sin(phi1) | 0.707  | 0.707  | 0.707 |
| cos(Phi)  | 1.000  | sin(Phi)  | 0.000  | -0.707   | 0.707 |
| cos(phi2)   | 1.000  | sin(phi2) | 0.000  | 0.000  | 1.000 |
| 2nd rank tensor in matrix form  |        |           | R.T  | R <sup>t</sup> .R.T      2nd rank tensor after coordinate transformation |       |
| 1   | 0      | 0         | 0.707  | 0.000  | 0.000 |
| 0   | 0      | 0         | -0.707   | 0.000  | 0.000 |
| 0   | 0      | 0         | 0.000  | 0.000  | 0.000 |
| 1st rank tensor (i.e., vector) in array form                                |        |           | R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation |  |       |
| 1   | 0      | 0         | 0.70710678   | -0.7071068   | 0     |

# Let's practice #2

- At the bottom of the spread sheet you'll find three separate matrices, which denote the three sequential rotation matrices.

$$\mathbf{R}^a = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^c = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Below is to obtain the transformation matrix by multiplying the three sequential simpler rotation matrices.**

| g1     | g2    |       |        | g3     |       |       |
|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|
| 0.707  | 0.707 | 0.000 |        | 1.000  | 0.000 | 0.000 |
| -0.707 | 0.707 | 0.000 |        | 0.000  | 1.000 | 0.000 |
| 0.000  | 0.000 | 1.000 |        | 0.000  | 0.000 | 1.000 |
| g3 g2  |       |       | g3g2g1 |        |       |       |
| 1.000  | 0.000 | 0.000 |        | 0.707  | 0.707 | 0.000 |
| 0.000  | 1.000 | 0.000 |        | -0.707 | 0.707 | 0.000 |
| 0.000  | 0.000 | 1.000 |        | 0.000  | 0.000 | 1.000 |

- Of course, these are functions of phi1, Phi, phi2 values available at the top.

| input   | output |                     |
|---|--------|---------------------|
| <b>This excell sheet proves a means of coordinate system transformation</b> |        |                     |
|   | angle  | radian              |
| Three Euler angles  | phi1   | 45                  |
|   | Phi    | 0                   |
|   | phi2   | 0                   |
|   |        | transformation mati |

# Let's practice #3

---

- Follow this link:
- <http://youngung.github.io/tensors/>

$$\begin{aligned} a'_i &= R_{ij}a_j \\ \sigma'_{ij} &= R_{ik}\sigma_{kl}R_{jl} \end{aligned}$$

$$\mathbb{M}'_{ijkl} = R_{im}R_{jn}\mathbb{M}_{mnop}R_{ko}R_{lp}$$

- Tensor transformation rule is implemented into a Fortran code

# Let's practice #3 (Fortran)

```
program transform_vector
implicit none

dimension r(3,3), velocity_old(3), stress(3,3), velocity_new(3)
real*8 r, velocity_old, stress, th, velocity_new
integer i,j,k

!! the transformation matrix:
write(*,*) 'Type: Rotation angle [in degree]:'
read(*,*) th
th = th * 3.141592 / 180. !! convert the degree to radian

r(:,:)=0.
r(1,1)=cos(th)
r(1,2)=sin(th)
r(2,1)=-sin(th)
r(2,2)=cos(th)
r(3,3)=1.

!! velocity
velocity_old(1)=30.
velocity_old(2)=0.
velocity_old(3)=0.

!! let's transform the velocity v`_i = r_ij v_j
do i=1,3
    velocity_new(i)=0.
do j=1,3
    velocity_new(i)=velocity_new(i)+r(i,j)*velocity_old(j)
enddo
enddo

!! print out the new velocity
write(*,*) 'old velocity'
write(*,'(3f5.1)') (velocity_old(i),i=1,3)
write(*,*) 'new velocity'
write(*,'(3f5.1)') (velocity_new(i),i=1,3)

end program transform_vector
```

## 변수 선언.

- E.g., R(3,3) is 'real' 실수, 그리고 (3,3) shape – 3x3 array

## 입력

- 'th'라는 변수에 user가 각도를 입력하면 radian 값으로 변환한다.

## Transformation matrix

- 'th'라는 변수를 사용하여 3축을 잡고 ccw 회전시키는 transformation matrix를 만들어 변수 r에 저장

## Velocity\_old 변수 설정

- Old coordinate system에 참조된 알고 있는 1차 텐서 velocity\_old 변수를 설정 [30,0,0] array로 저장; **\*1차 텐서는 벡터다.**

## 위 tensor를 변환하여 새로운 array에 저장

- 아래의 formula를 실행하여 1차 랭크 텐서 변환

$$v'_i = R_{ij} v_j$$

## v 와 v`을 화면에 출력

# Let's take a close look at the loop

```
do i=1,3
    velocity_new(i)=0.
do j=1,3
    velocity_new(i)=velocity_new(i)+r(i,j)*velocity_old(j)
enddo
enddo
```

1. In the above, each do-enddo pair

```
DO  
ENDDO
```

allows you to form a loop:  
where integer i increases  
from 1 to 3, for each of  
which j increases from 1 to 3.

2. For instance, while i=1,  
you repeat

```
DO j=1,3
ENDDO
```

That means you perform

$$v_1^{new} = \sum_j^3 R_{1j} v_j^{old}$$

3. If you repeat Step 2 for i=2  
and i=3 as well, you actually  
perform:

$$v_i^{new} = \sum_i^3 \sum_j^3 R_{ij} v_j^{old}$$

Remember that the above  
summation can be written  
short:

$$v_i^{new} = R_{ij} v_j^{old}$$

# If you extend that idea for 2<sup>nd</sup> order tensor?

- Let's take an inverse approach for the 2<sup>nd</sup> order tensor transformation.
- We learned that the 2<sup>nd</sup> rank tensor transformation is done following the below rule:

$$\sigma'_{ij} = R_{ik}\sigma_{kl}R_{jl}$$

- The above can be implemented to a FORTRAN code such that

```
do i=1,3
do j=1,3
    s_new(i,j)=0.
do k=1,3
do l=1,3
    s_new(i,j)=s_new(i,j) + r(i,k)*s_old(k,l)*r(j,l)
enddo
enddo
enddo
enddo
```

- You might have been able to find certain rules that is applicable when you implement the tensor transformation. Also, you might have found the Einstein convention is very useful particularly when the formula is translated into FORTRAN code (how intuitive!).
- FORTRAN** actually means '**FORMULA TRANSLATION**'

# Q. Extend that idea for 4th order tensor

---

- *Within elastic region, metal follows Hooke's law which writes as below:*
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- (For advanced students) Can you write a short FORTRAN DO-ENDDO loop for the above operations?
- (For very advanced students; 신소재실험 학생들 필히 수행하세요...) If possible, modify the source code available in the website and compile the code and run the code. You'll be able to find about the elastic modulus in other textbooks. Hint: you can reduce the above equation following Voigt's notation.

# Let's practice #3 (Python)

```
import numpy as np
velocity_old=np.zeros(3)
velocity_new=np.zeros(3)
r=np.zeros((3,3))
velocity_old[0]=30.

th=raw_input('Type angle [in degree]: ')
th=np.pi*float(th)/180.

r[0,0]=np.cos(th)
r[0,1]=np.sin(th)
r[1,0]=-np.sin(th)
r[1,1]=np.cos(th)
r[2,2]=1.

## Apply v`_i = r_ij v_j
for i in xrange(3):
    for j in xrange(3):
        velocity_new[i]=velocity_new[i]+ \
            r[i,j]*velocity_old[j]

print 'old velocity'
print velocity_old
print 'new velocity'
print velocity_new
```

## 변수 선언.

- E.g., velocity\_old와 velocity\_new는 사이즈 3x1의 array
- R: 3x3 array;
- velocity\_old 변수의 첫번째(0) element에 30 입력

## 입력

- 'th' 각도 입력한후 Radian값으로 변환

## Transformation matrix

- 'th'라는 변수를 사용하여 3축을 잡고 ccw 회전시키는 transformation matrix를 만들어 변수 r에 저장

## 위 tensor를 변환하여 새로운 array에 저장

- 아래의 formula를 실행하여 1차 랭크 텐서 변환
- $v'_i = R_{ij}v_j$

## v 와 v'을 화면에 출력

# Tensor and coordinate transformation

---

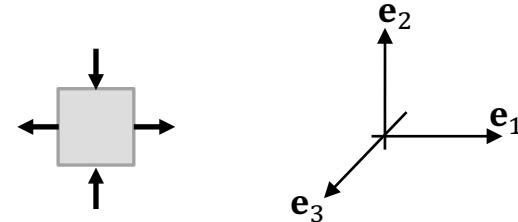
- Tensor is a method to represent physical quantities (and also some material properties).
- The physical quantity should **remain the same** even if you apply different coordinate system; The physical quantity should not be affected by the coordinate system of your own choice.
- But when you change the coordinate system, the values pertaining to individual components of the tensor change; That does not mean the associated property changes.
- The values of components that are changing w.r.t. coordinate system are used when you need quantification of associated physical quantity (or material property). That's one of the reasons you should learn how to apply the coordinate transformation to tensors.

# Example: pure shear

- Pure shear is a term referring to a stress (or strain) state where only shear components are non-zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I found the left is simple shear.  
Anything wrong with me?

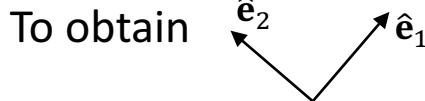


Let's check by using  
the spread sheet.

1. Put this value

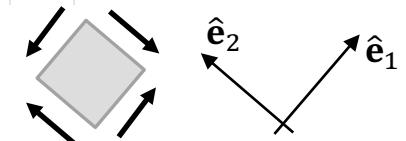
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Put  $\phi_1=45$



| input   | output  |
|---|---|
| This excell sheet proves a means of coordinate system transformation      |   |
| Three Euler angles  | angle radian  |
| $\phi_1$  | 45 0.785  |
| $\Phi$  | 0 0.000   |
| $\phi_2$  | 0 0.000   |
| 삼각 함수 값들  |   |
| $\cos(\phi_1)$  | 0.707   |
| $\cos(\Phi)$  | 0.000   |
| $\cos(\phi_2)$  | 1.000   |
| $\sin(\phi_1)$  | 0.707   |
| $\sin(\Phi)$  | 0.000   |
| $\sin(\phi_2)$  | 0.000   |
| 2nd rank tensor in matrix form  |   |
|   | 1 0 0<br>0 0 0<br>0 0 0                                       |
| 1st rank tensor (i.e., vector) in array form                              |   |
|   | 1<br>0<br>0   |
| transformation matrix R   |   |
|   | 0.707 0.707 0.000<br>-0.707 0.707 0.000<br>0.000 0.000 1.000  |
| (transformation matrix) $t=R^t=t=R^{-1}$                                  |   |
|   | 0.707 -0.707 0.000<br>0.707 0.707 0.000<br>0.000 0.000 1.000  |
| R.T   |   |
|   | 0.707 0.000 0.000<br>-0.707 0.000 0.000<br>0.000 0.000 0.000  |
| R $\cdot$ R.T   |   |
|   | 0.500 -0.500 0.000<br>-0.500 0.500 0.000<br>0.000 0.000 0.000 |
| R $\cdot$ R.T $\cdot$ t = 2nd rank tensor after coordinate transformation |   |
|   | 0.500 -0.500 0.000<br>-0.500 0.500 0.000<br>0.000 0.000 0.000 |
| R $\cdot$ v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation      |   |
|   | 0.70710678 -0.7071068 0                                       |

3. Check the new tensor component values  
referred to the new coordinate system



4. I wasn't wrong. With the new coordinate, it is indeed pure shear!

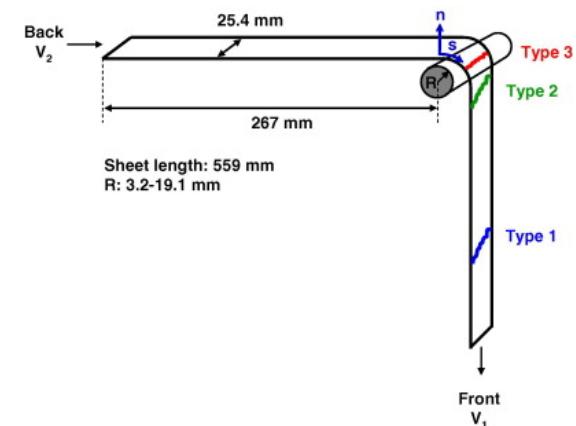
# Example

---

- Elastic modulus ( $\mathbb{E}$ ) is a 4<sup>th</sup> rank tensor and correlates the stress ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) and strain ( $\boldsymbol{\epsilon}$ ) in the elastic regime through
- $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}$
- Note that the colon symbol in the above denotes the **double inner dot operation** such that
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\epsilon_{kl}$
- Q1. Express  $\sigma_{23}$  in the function of  $\mathbb{E}$  and  $\boldsymbol{\epsilon}$  by explicitly denoting the indices of the associated tensors; Do not contract the expression by using Einstein's summation convention; Do not use the summation symbol.
- Q2. How many separate equations are hidden?

# Where coordinate system transformation is required?

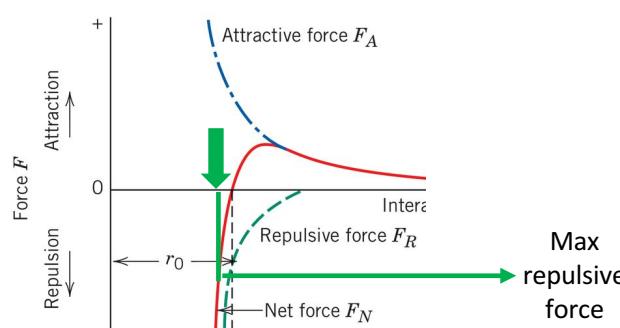
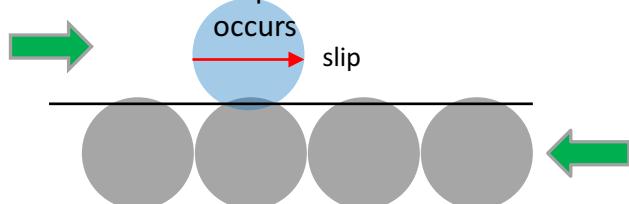
- Stretch bending test
- The failure criterion is usually written in terms of strain (or stress) state referred to the coordinate that is attached to the plane of the sheet metal.
- Here, as you can see, the region of specimen that eventually fractures, flows over the roller, during which it bends and 'rotates'.
- Therefore, you would want to 'transform' the stress state that was once referred to the global coordinate to the local coordinate system that 'rotates' together with the material.



# Where coordinate system transformation is required?

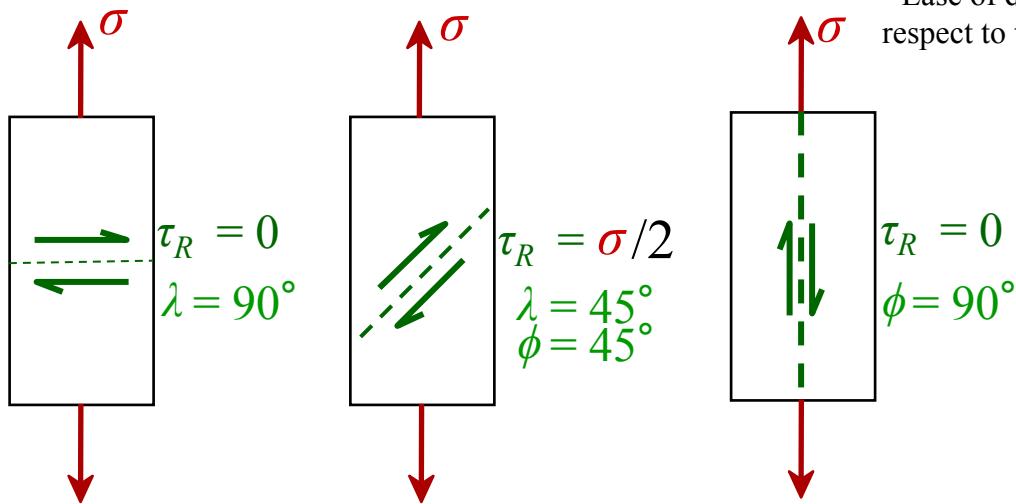
## Critical Resolved Shear Stress

Atom position when maximum repulsive force occurs



For dislocation to slip, this max. force should be overcome

Max repulsive force is closely related with the CRSS



- Condition for dislocation motion (= condition for plastic yielding): If RSS reaches a certain (critical) value, the dislocation will start moving
- Ease of dislocation motion depends on crystallographic orientation with respect to the external loading direction

$$\tau_{RSS} = \sigma \cos \lambda \cos \phi$$

$\cos \lambda \cos \phi$ : Schmid's (orientation) factor

Dislocation slip condition ( $\approx$  atomic yield condition)

$$\tau_{RSS} \geq \tau_{CRSS}$$

# Example: yield of single crystal

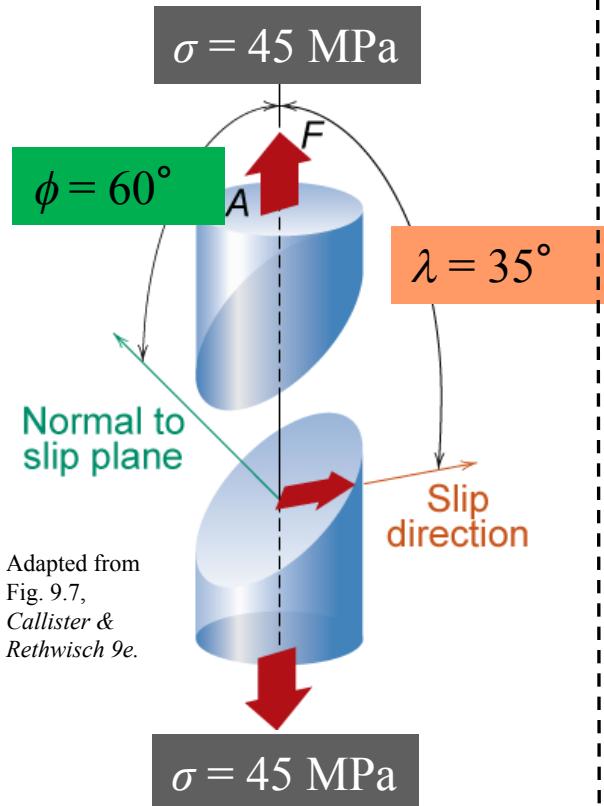
- a) Will the single crystal yield?
- b) If not, what stress is needed?

$$\tau_{RSS} = \sigma \cos \lambda \cos \phi$$

We learned this equation that correlates the external loading ( $\sigma$ ) and the orientation of slip system ( $\lambda, \phi$ ).

Condition 1. External load of 45 MPa

Condition 2. Slip system characterized by  $\lambda = 35^\circ, \phi = 60^\circ$



Condition for dislocation to slip?

$$\tau_{RSS} \geq \tau_{CRSS}$$

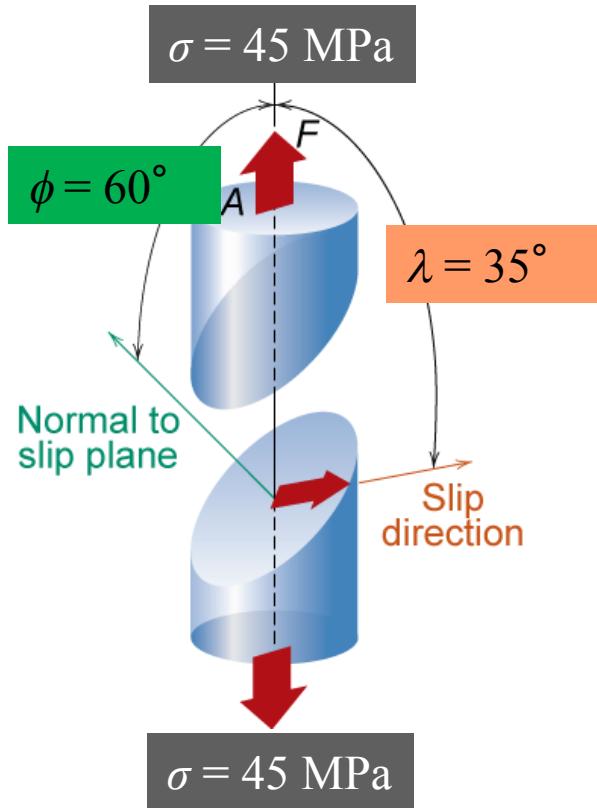
Condition 1.  $\tau_{CRSS} = 20.7 \text{ MPa}$

Condition 2.  $\tau_{RSS} = \sigma \cos \lambda \cos \phi$   
=  $45 \cos 35^\circ \cos 60^\circ \text{ [MPa]}$   
≈  $45 \times 0.819 \times 0.5 \approx 18.4 \text{ [MPa]}$

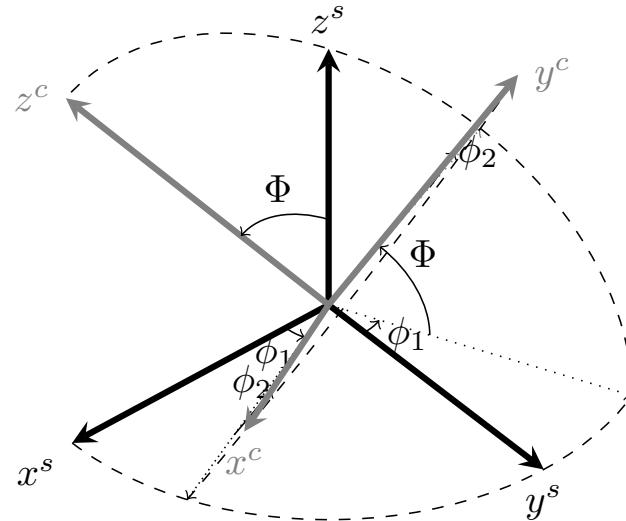
Check  $\tau_{RSS} \geq \tau_{CRSS}$

45 MPa is not sufficient enough to cause this slip system ( $\lambda = 35^\circ, \phi = 60^\circ$ ) to slip (yield)

# Transformation for CRSS



$$\phi_1 = 25^\circ, \Phi = 60^\circ, \phi_2 = 19^\circ$$



This gives the transformation matrix like:

$$\begin{matrix} 0.788 & 0.547 & 0.282 \\ -0.495 & 0.291 & 0.819 \\ 0.366 & -0.785 & 0.500 \end{matrix}$$

If you transform

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{matrix}$$

You'll get

$$\begin{matrix} 3.577 & 10.389 & 6.344 \\ 10.389 & 30.173 & 18.424 \\ 6.344 & 18.424 & 11.250 \end{matrix}$$

# Stress and strain: Strain tensor

강의명: 소성가공 (MSA0026)

---

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-208 전화: 055-213-3694

Homepage: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

# Strain tensor

---

- Strain 물리량은 shape change를 정량적으로 표현할때 geometrical effect를 \*줄여\* (혹은 제거하여) 나타낸다.
- Strain 물리량도 stress 와 마찬가지로 2nd order tensor로 나타낸다.
- 앞으로 1차원의 strain부터 3차원까지 점점 차원을 높이면서 이해하도록 하겠다.
  
- Cauchy stress가 역학에서 prevail. 하지만 strain의 경우 몇몇 구분되는 방법들이 존재한다.
- Strain theories are divided into two groups
  - Finite strain theory (not discussed in the current lecture)
  - Small strain theory (infinitesimal strain theory; small deformation theory; small displacement-gradient theory and so forth..)

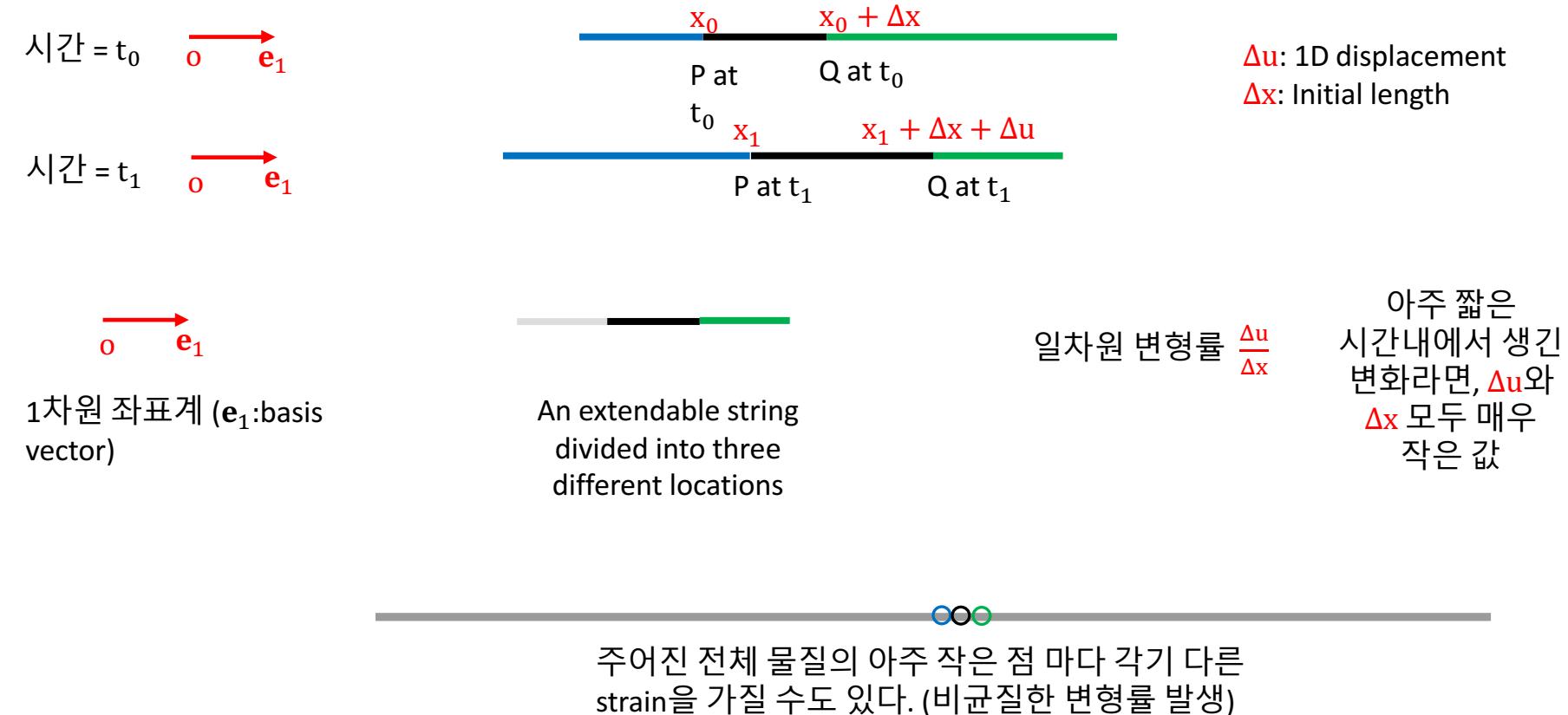
# Strain tensor

---

- 응력 텐서를 설명할 때, 3차원 공간상에 3개의 수직면에 작용할 수 있는 응력 성분을 제시하여 설명하였다.
- 변형률 텐서도 이와 유사하게, 3차원 공간상에 3개의 수직한 '선'을 가지고 설명할 수 있다.
- 변형률 텐서를 배우며 가장 주의해야 할 점은 전단 변형 성분이 '회전'으로 이어질 수 있으며, 이는 '변형률'에서 제외 되어야 한다는 점이다.

# 1차원 strain

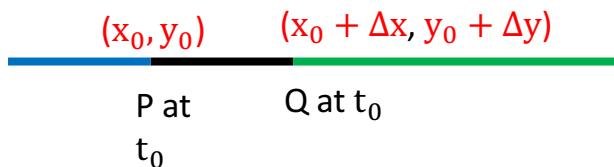
- 1차원의 좌표계로 설명이 가능한 '길이' 단위의 무한소로 설명하자.



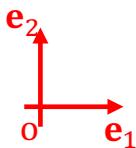
# 2차원 strain#2 (small strain)

- 2차원의 좌표계로 설명이 가능한 '길이' 단위의 무한소로 설명하자.

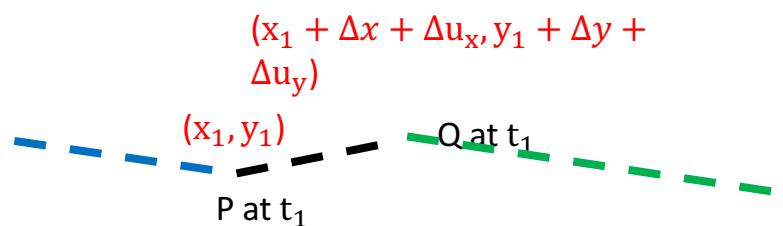
시간 =  $t_0$



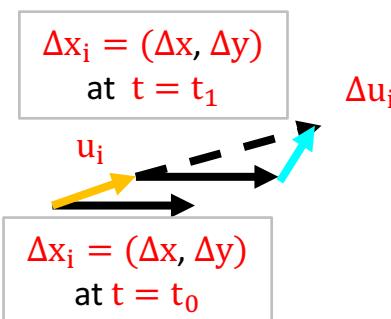
시간 =  $t_1$



2차원 좌표계 ( $e_1, e_2$  basis vectors)



시간  $\Delta t$  이 흐르는 동안 PQ 물질 무한소의 각 점에게는  $u_i$ 와  $\Delta u_i$  변위(displacement) vector가 생겨났다.



$\Delta u_i$ : infinitesimal displacement vector

2차원에서의 tensor  $d$  의 정의

$$d_{ij} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

tensor  $d$  는 '변형률'  
텐서가 아니다

# 2차원 strain#3 (small strain)

$$d_{ij} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

Small strain theory 에 따르면  
앞서 정의된  $d_{ij}$  텐서의  
각 성분값은 1보다 무척 작아야  
한다.

앞서 tensor  $d$  은 strain tensor가  
아니라고 하였다. 그렇다면 tensor  $d$  는  
strain과 관계가 없을까?

tensor  $d$ 의 물리적 의미?

한 무한소 물질점에서의 길이 벡터의  
변화를 설명해준다.

해당 무한소 물질점에서 어떤  
변위(displacement;  $\mathbf{u}$ )에 의해 길이 변화가  
발생했다면 그 변위 전과 후의 무한소 길이  
벡터의 성분을 다음과 같이 '이어' 준다.

여기서  $\Delta x_i$ 는 변위전 무한소  
물질점에 귀속한 길이  
 $\Delta \hat{x}_i$ 는 변위후 무한소  
물질점에 귀속한 길이

# 2차원 strain#4 (small strain)

앞서 tensor  $d$  가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor  $d$  는 strain을 나타낼 수 없는가?

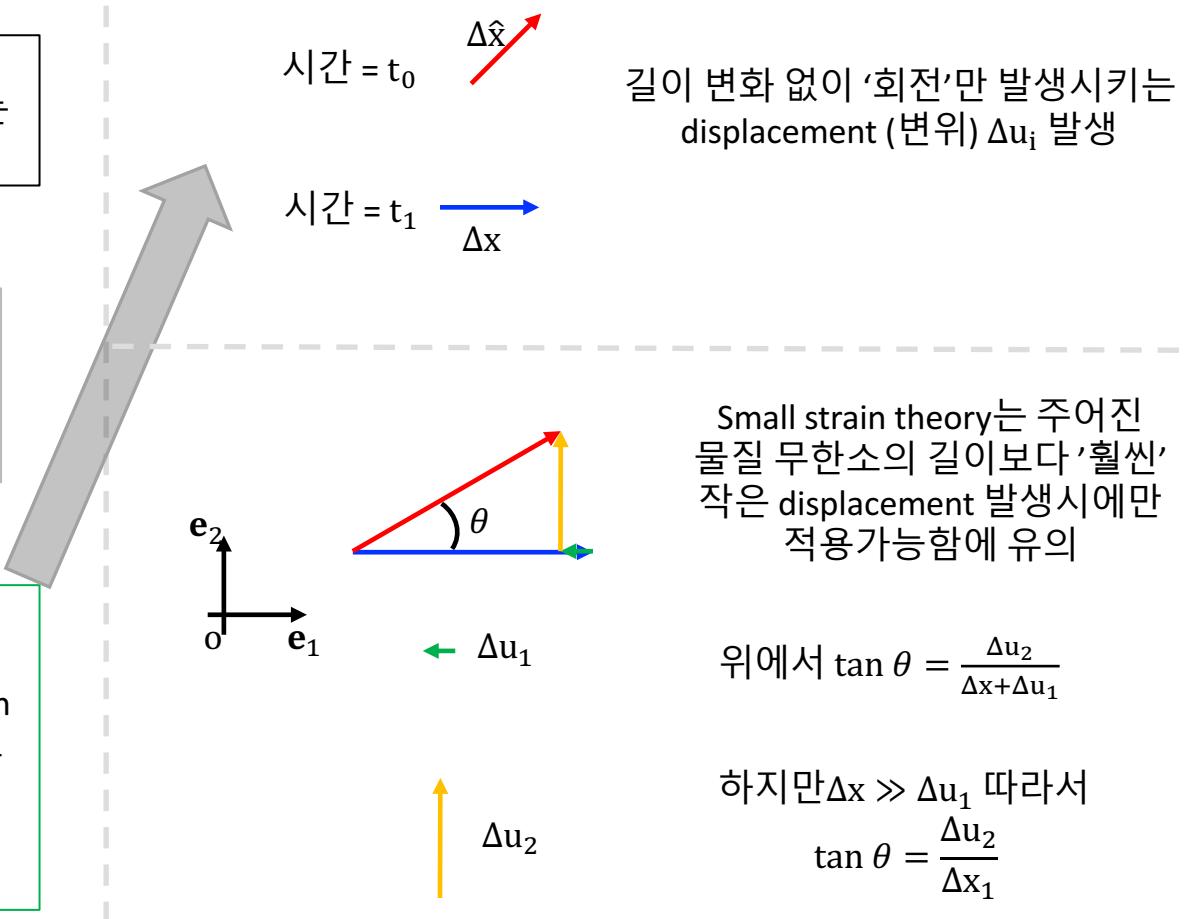


가정:

Tensor  $d$ 이 strain tensor라면, 변형이 발생하지 않았을 때 모든 component가 0이어야 마땅하다.



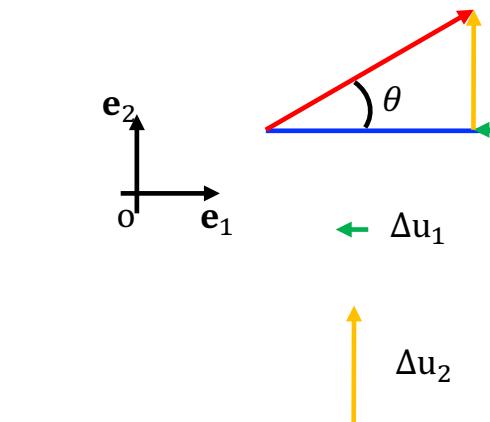
Tensor  $d$  성분이 0이 아님에도 불구하고 변형률이 0인 경우가 있다. 그런 경우는 바로 ... Rigid Body Rotation (RBR) 즉 물질 전체가 한축을 기준으로 회전하는 경우 Tensor  $d$  성분중에 일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인 경우가 있다.



# 2차원 strain#5 (small strain)

앞서 tensor  $d$  가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor  $d$  는 strain을 나타낼 수 없는가?

Tensor  $d$  성분이 0이 아님에도 불구하고 변형률이 0인 경우가 있다. 그런 경우는 바로 ... rigid body rotation 즉 물질 전체가 한축을 기준으로 회전하는 경우 Tensor  $d$  성분중에 일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인 경우가 있다.



그런데 small strain theory에서는  $\theta$  값이 아주 작다. 그럴때는  $\tan \theta \approx \theta$  (선형)

따라서 해당 변위 (RBR)에서  $d_{21}$  값  $\theta$  로 근사될 수 있으며, 이 값은 작지만 0은 아니므로... 길이 변화가 없는 변위에서도  $d$ 의 성분이 0이 아님을 보인다.

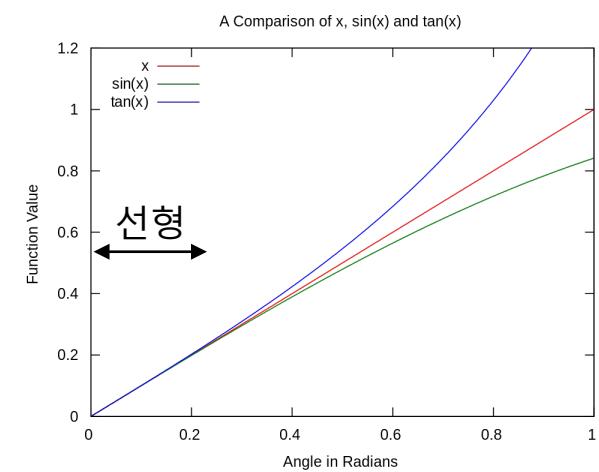
따라서 텐서  $d$ 는 변형률을 설명하기에 적절하지 않다.

Small strain theory는 주어진 물질 무한소의 길이보다 '훨씬' 작은 displacement 발생시에만 적용가능함에 유의

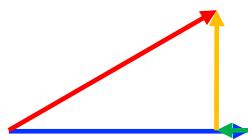
$$\text{위에서 } \tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x + \Delta u_1}$$

하지만  $\Delta x \gg \Delta u_1$  따라서

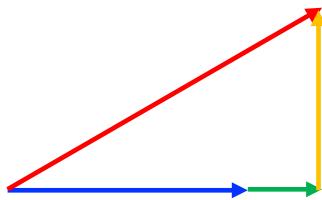
$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x}$$



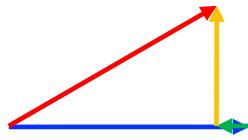
# 2차원 strain#6 (small strain)



Rigid body rotation

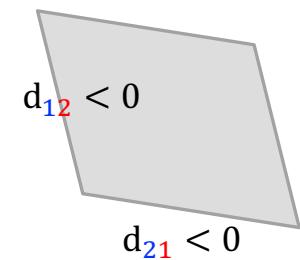
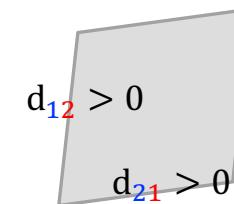
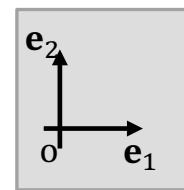


Rigid body rotation+stretching

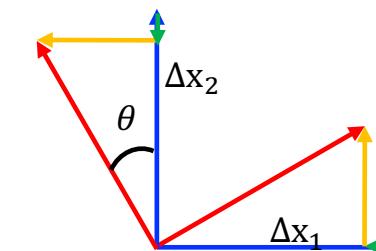


Rigid body rotation

$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \approx \theta$$
$$\epsilon_{21} \approx \theta$$



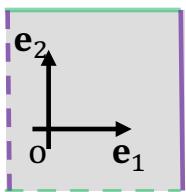
적절한 변형률 텐서는 RBR을 제외한 정도를 얻어야 한다.



$$\tan \theta = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2 + \Delta u_2} \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} \approx \theta$$
$$\epsilon_{12} \approx -\theta \text{ (음수)}$$

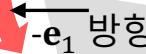
# 2차원 strain#7 (small strain)

적절한 변형률 텐서를 구하기 위해서는 RBR을 제외하여야 한다.



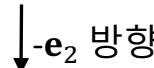
$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} > 0$$

$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$$



$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} < 0$$

$$\epsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} < 0$$



$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$d_{12} < 0$$

$$\theta_{12} < 0$$

$$d_{21} > 0$$

$$\theta_{21} > 0$$

CCW: counter-clock-wise

CW: clock-wise

$\theta_{12} < 0$  일 때 CCW

$\theta_{21} > 0$  일 때 CCW

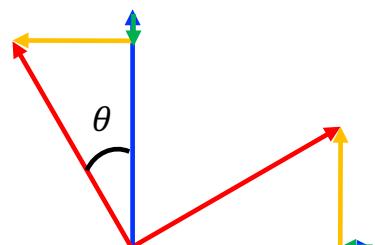
$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2}$$

전체 CCW  
회전 평균

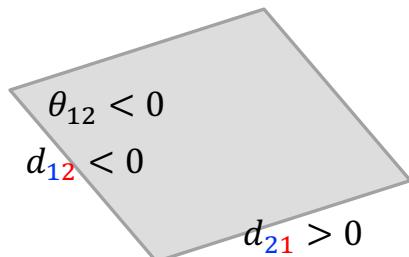
$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \approx \frac{d_{21} - d_{12}}{2}$$

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}^T}{2}$$

2면  
1면



# 2차원 strain#8 (small strain)



$\theta_{12} > 0$  일 때 cw임을 확인

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2}$$

전체 CCW  
회전 평균

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \approx \frac{d_{21} - d_{12}}{2} \quad \text{Small strain theory}$$

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}^T}{2}$$

따라서  $\mathbf{d}$  tensor에서 ccw 회전을 제외 한다면, 즉

$\mathbf{d} - \mathbf{w}$  을 한다면 ccw의 RBR을 제외한 순수 변형률을 나타낼 수 있다.

따라서 strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{w}$$

$$\varepsilon_{ij} = d_{ij} - \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} = \frac{d_{ij}}{2} + \frac{d_{ji}}{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{d}^T}{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\mathbf{u}} = \text{velocity}$$

비슷하게 strain rate tensor는

# 3차원 strain#9 (small strain)

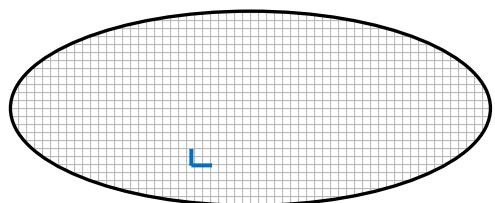
---

- 2차원 변형률의 정의의 3차원으로의 확장
- 앞서 다루었던  $\epsilon$  tensor는 deformation tensor (small strain theory) 라고도 불림
- $w$  tensor는 spin tensor
- $\varepsilon$  tensor는 small strain theory에서의 strain tensor.

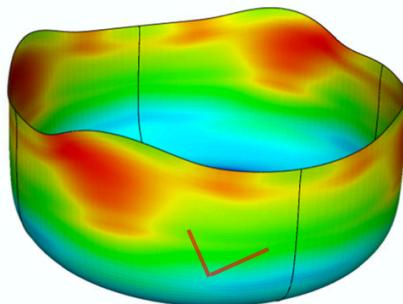
# Displacement and strain

- Goal: Displacement와 strain의 관계를 이해하고 더 나아가 displacement에서 strain을 '추출' 해낼 수 있는 방법을 이해한다.

Blank sheet

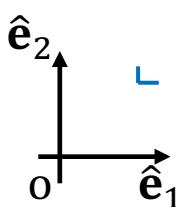


Cup

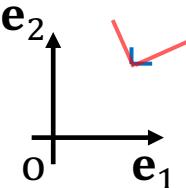


- Translation
- Rotation
- Extension (Contraction) and shear

1. 공통 좌표계에서 표기



2. Translation 제거



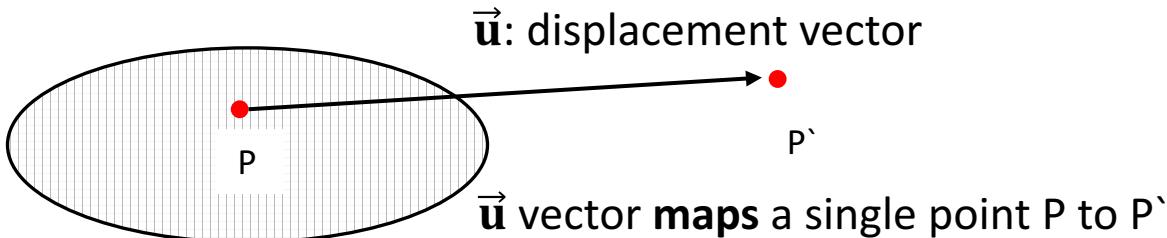
3. Rotation 제거

Displacement  
gradient tensor

Strain = The 'symmetric'  
part of displacement  
gradient tensor

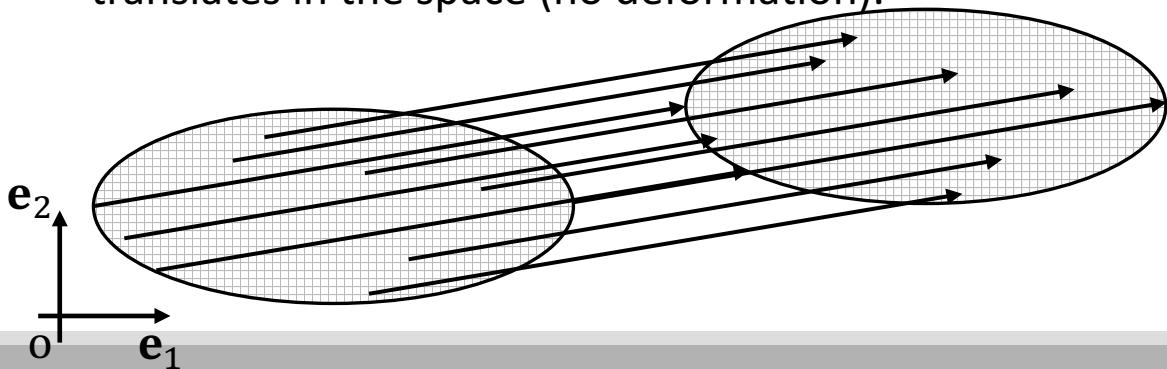
# Displacement and strain

Displacement: 특정 한 점이 차지하던 position을 또 다른 position으로 옮겨준다.

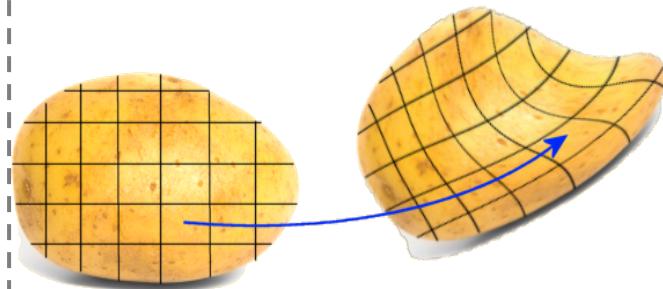


$\vec{u}(x_1, x_2)$ : displacement vector **field** maps various points to various points.

In case  $\vec{u}$  field is uniform, which means that  $\vec{u}$  is the same for all points, the material only translates in the space (no deformation).



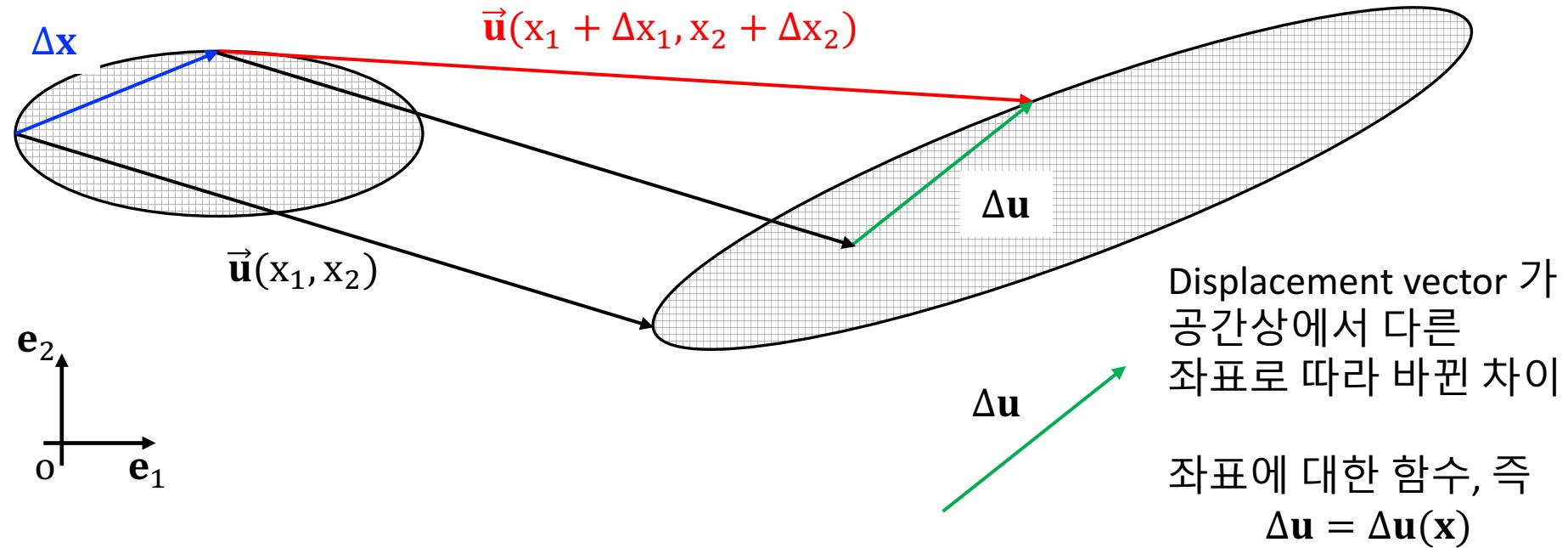
Deformation occurs only when  $\vec{u}$  field is not uniform, which means that  $\vec{u}$  varies when changing the locations.



Warning: there are cases that  $\vec{u}$  field is not uniform, but no deformation occurs (We'll get back to this later).

# Displacement and strain

In case  $\vec{u}(x_1, x_2)$  is not uniform (case 1)



파란 화살표로 옮겨진 점의 물질은 기준이 되는 점에 비해 파란색으로 표현된 만큼 차이나는 displacement를 가진다.

$$\Delta u = \Delta u_1 e_1 + \Delta u_2 e_2$$
$$\Delta x = \Delta x_1 e_1 + \Delta x_2 e_2$$

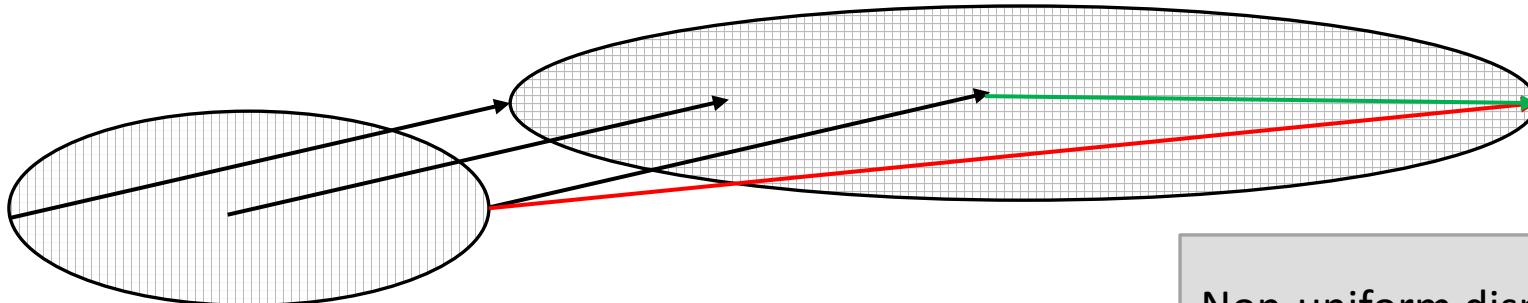
주어진 좌표계의 성분들로 decompose

$\vec{u}$ 가 공간에 따라 어떻게 얼마나 달라지는지 나타내는 수학적 방법 (gradient)

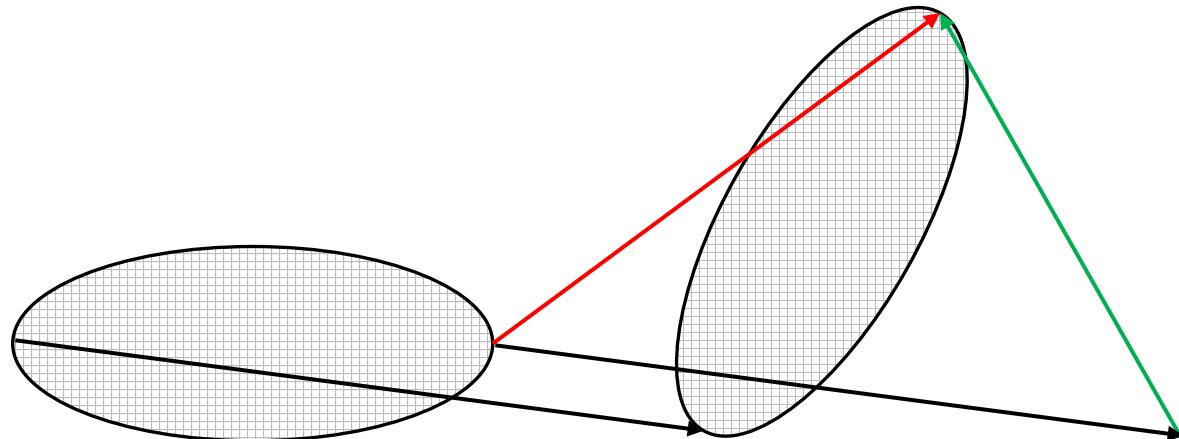
$\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = \epsilon(x)$ 로 표기 하자.

# Displacement and strain

In case  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$  is not uniform (case 1; pure stretching)



In case  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$  is not uniform (case 2; pure rotation)

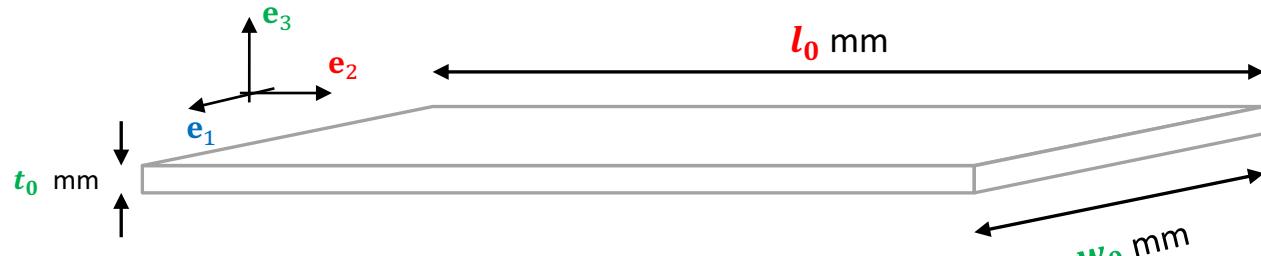


Non-uniform displacement field does not always mean that the material is 'deformed'.

Non-uniform displacement field may contain a contribution from 'rotation'.

Therefore, if you want to 'extract' only the 'deformation', you have to exclude 'rotational' contribution from the displacement field.

# Example



위의 금속 판재에 냉간 압연을 하여 두께, 너비, 길이가 각각  $t_1, w_1, l_1$  으로 바뀌었다.

- 부피 변형률  $\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$  값을  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  요소로 표현하여라.

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{l_1 w_1 t_1}{l_0 w_0 t_0} \quad (1)$$

(1) 의 양변에 자연 로그를 사용하면

$$\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{w_1}{w_0}\right) + \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right) = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$$

따라서 부피변화가 없다면, 즉  $\ln(1) = 0$ , 따라서  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$

# Example

- 전단 변형률은 부피 변화와 무관하다.
- Let's check

| This excell sheet proves a means of coordinate system transformation |                         |  |   |        |        |        |       |       |        |        |
|--|-------------------------|--|---|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|
| Three Euler angles   | angle                   | radian   |   |        |        |        |       |       |        |        |
|  | phi1                    | 45   | 0.785   |        |        |        |       |       |        |        |
|  | Phi                     | 30   | 0.524   |        |        |        |       |       |        |        |
| 삼각 함수 값들   | phi2                    | 20   | 0.349   |        |        |        |       |       |        |        |
|  | transformation matrix R |  | (transformation matrix) <sup>t</sup> = R <sup>t</sup> = R <sup>-1</sup> |        |        |        |       |       |        |        |
|  | cos(phi1)               | 0.707  | sin(phi1)   | 0.707  | 0.455  | 0.874  | 0.171 | 0.455 | -0.817 | 0.354  |
| cos(Phi)   |                         | 0.866  | sin(Phi)  | 0.500  | -0.817 | 0.334  | 0.470 | 0.874 | 0.334  | -0.354 |
| cos(phi2)  |                         | 0.940  | sin(phi2)   | 0.342  | 0.354  | -0.354 | 0.866 | 0.171 | 0.470  | 0.866  |
| 2nd rank tensor in matrix form                                       |                         |  |   |        |        |        |       |       |        |        |
| 1 0 0<br>0 -1 0<br>0 0 2   |                         | R.T  | R <sup>t</sup> .R.T 2nd rank tensor after coordinate transformation     |        |        |        |       |       |        |        |
| 0.455  | -0.874                  | 0.342  | -0.498  | -0.503 | 0.766  |        |       |       |        |        |
| -0.817   | -0.334                  | 0.940  | -0.503  | 0.998  | 0.643  |        |       |       |        |        |
| 0.354  | 0.354                   | 1.732  | 0.766   | 0.643  | 1.500  |        |       |       |        |        |
| 1st rank tensor (i.e., vector) in array form                         |                         |  |   |        |        |        |       |       |        |        |
| 1<br>0<br>0  |                         | R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation | 0.4550193 -0.8172866 0.3535534  |        |        |        |       |       |        |        |

# Recap

---

- Measurement of force and displacement from tension tests
- Physical quantity to remove the effect of geometry: engineering stress/engineering strain
- Two types of stress (strain):
  - Normal (tension + , or compression -)
  - Shear (forward +, backward -)
- There are three independent planes in 3D; On each plane 1 normal + 2 shears.
- Thus nine independent components comprise the stress (strain) state.
- Coordinate transformation (axes transformation)
  - Coordinate transformation does not change the physical quantity (stress, strain)
  - Coordinate transformation changes the values of components and the directions of planes associated with the stress (or strain).
- Practice coordinate transformation using the Excel, Fortran code, Python code.

# References and acknowledgements

---

## ■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)
- <http://youngung.github.io/tensors>

## ■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.