

Stress and strain: Strain tensor

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOME PAGE: [HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO](http://YOUNGUNG.GITHUB.IO)

Strain tensor


- Strain 물리량은 shape change를 정량적으로 표현할때 geometrical effect를 *줄여* (혹은 제거하여) 나타낸다.
- Strain 물리량도 stress 와 마찬가지로 2nd order tensor로 나타낸다.
 - 앞으로 1차원의 strain부터 3차원까지 점점 차원을 높이면서 이해하도록 하겠다.
 - Cauchy stress가 역학에서 prevail. 하지만 strain의 경우 몇몇 구분되는 방법들이 존재한다.
 - Strain theories are divided into two groups
 - Finite strain theory (not discussed in the current lecture)
 - Small strain theory (infinitesimal strain theory; small deformation theory; small displacement-gradient theory and so forth..)

Strain tensor

- 응력 텐서를 설명할때, 3차원 공간상에 3개의 수직면에 작용할 수 있는 응력 성분을 제시하여 설명하였다.
- 변형률 텐서도 이와 유사하게, 3차원 공간상에 3개의 수직한 '선'을 가지고 설명할 수 있다.
- 변형률 텐서를 배우며 가장 주의해야할 점은 전단 변형 성분이 '회전'으로 이어질 수 있으며, 이는 '변형률'에서 제외 되어야 한다는 점이다.

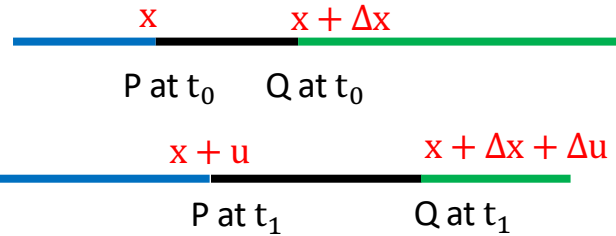
1차원 strain

1차원의 좌표계로 설명이 가능한 '길이' 단위의 무한소로 설명하자.


1차원 좌표계
(\mathbf{e}_1 : basis vector)

시간 = t_0

시간 = t_1



Δx : Initial length
 Δu : 1D displacement
 u : translation

일차원 변형률 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$

늘어날 수 있는
1차원적 구조물 (선)
에서 위의 해석을
생각해보면 ...

위치에 따라
다른 변형
가능!

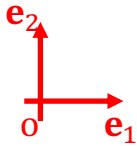
아주 짧은 시간내에서
생긴 변화라면, Δu 와 Δx
모두 매우 작은 값

주어진 전체 물질의 아주 작은 점마다 각기 다른
strain을 가질 수도 있다. (비균질한 변형률 발생)

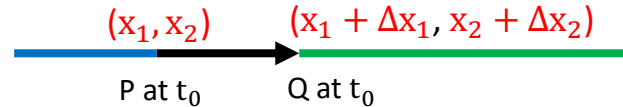
2차원 strain#2 (small strain)

2차원의 좌표계로 설명이 가능한 '길이' 단위의 무한소로 설명하자.

한 점의 좌표: (x_1, x_2)



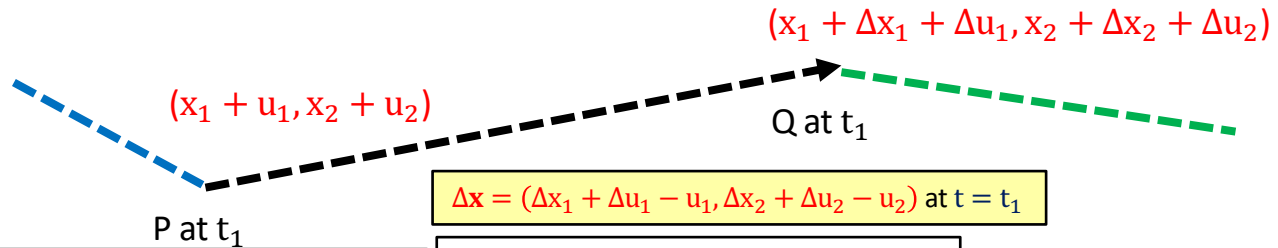
시간 = t_0



$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2) \text{ at } t = t_0$$

시간 $\Delta t (= t_1 - t_0)$ 이 지나며 물질 무한소의 각 점 P, Q에게는 각각 \mathbf{u}_i 의 이동과 $\Delta \mathbf{u}_i$ 의 변위(displacement) vector가 발생했다.

시간 = t_1



$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1 + \Delta u_1 - u_1, \Delta x_2 + \Delta u_2 - u_2) \text{ at } t = t_1$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$: translation vector

$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2)$: displacement vector

\mathbf{u}_i : translation (전체 이동)

$\Delta \mathbf{u}_i$: 변위

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2) \text{ at } t = t_0$$

2차원에서의 2nd order tensor \mathbf{d} 의 정의

tensor \mathbf{d} 는 '변형률' 텐서가 아니다

$$d_{ij} = \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

주어진 전체 물질의 아주 작은 점 마다 각기 다른 strain을 가질 수도 있다. (비균질한 변형률 발생)

2차원 strain#3 (small strain)

$$d_{ij} = \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

tensor \mathbf{d} 의 물리적 의미?

무한소 물질점에서 임의의 운동에 의해 발생하는 (무한히 작은)길이 벡터의 변화를 설명해준다.

물질에 어떠한 운동이 발생한다면, 특정 물질점의 길이 벡터($\Delta \mathbf{x}$)에 해당하는 변위 벡터($\Delta \mathbf{u}$)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta u_i = d_{ij} \Delta x_j$$

Small strain theory에 따르면 앞서 정의된 d_{ij} 텐서의 각 성분값은 1보다 무척 작아야 한다.

Kronecker delta and deformation gradient

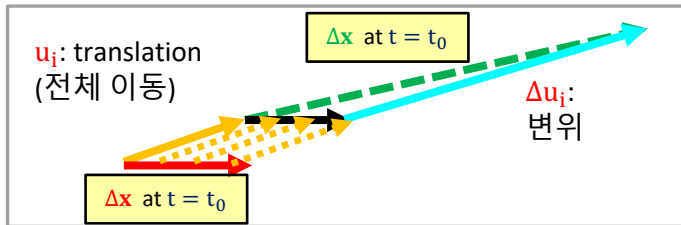
다른 하나 중요한 물리량 중 하나는
Deformation gradient tensor \mathbf{F} :

$$F_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}$$

δ_{ij} 는 Kronecker delta 라 불리며 다음의
성질을 따른다.

If $i = j$, $\delta_{ij} = 1$

If $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$

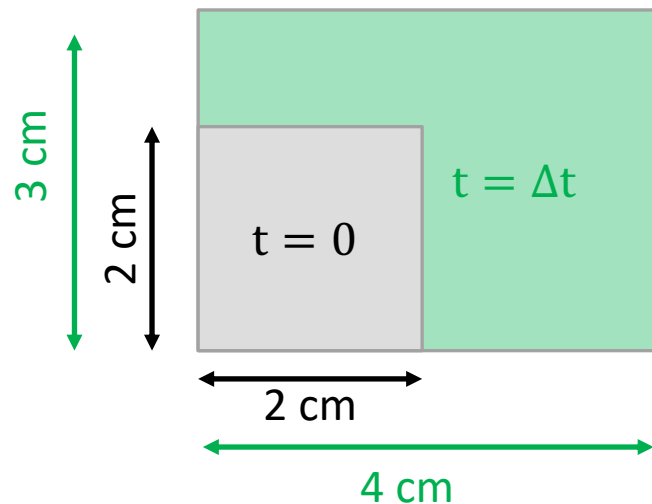


\mathbf{F} 의 중요 성질:

$$\Delta x_i^{t=t_1} = F_{ij} \Delta x_j^{t=t_0}$$

예제

한 물체가 다음과 같이 어떠한 운동에 의해 ‘균일하게’ 변형이 되었다.



Displacement gradient tensor

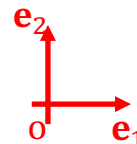
$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{4 - 2}{2}$$

$$d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{3 - 2}{2}$$

$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$$

$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$

한 점의 좌표: (x_1, x_2)



2차원 좌표계
(e_1, e_2 basis vectors)

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

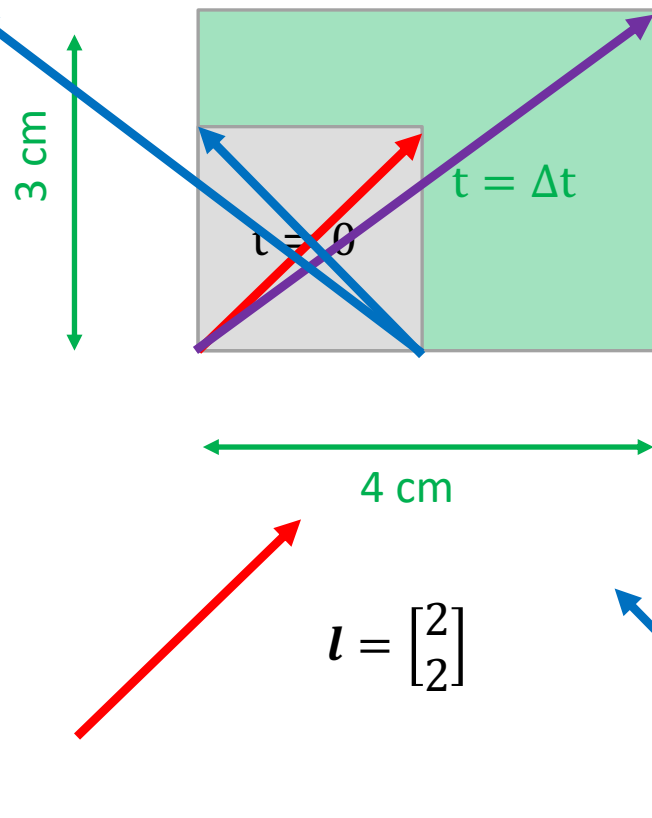
$$F_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

예제

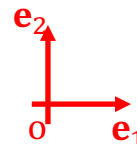
한 물체가 다음과 같이 어떠한 운동에 의해 ‘균일하게’ 변형이 되었다.



$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

한 점의 좌표: (x_1, x_2)



2차원 좌표계
(e_1, e_2 basis vectors)

$$F_{ij}l_j = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij}l_j = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}$$



F_{ij} does not account for ‘translation’

2차원 strain#4 (small strain)

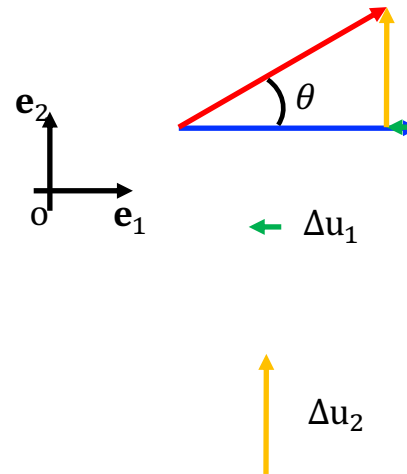
앞서 tensor **d** 가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor **d** 는 strain을 나타낼 수 없는가?

가정:
Tensor **d** 이 strain tensor 라면,
변형이 발생하지 않았을 때 모든
component가 0이어야 마땅하다.

Tensor **d** 성분이 0이 아님에도
불구하고 변형률이 0인 경우가 있다.
그런 경우는 바로 ... Rigid Body Rotation
(RBR) 즉 물질 전체가 한축을 기준으로
회전하는 경우 Tensor **d** 성분중에
일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인
경우가 있다.

시간 = t_0 
시간 = t_1 

길이 변화 없이 '회전'만 발생시키는
displacement (변위) Δu_i 발생



Small strain theory는 주어진
물질 무한소의 길이보다 '훨씬'
작은 displacement 발생시에만
적용가능함에 유의

$$\text{위에서 } \tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x + \Delta u_1}$$

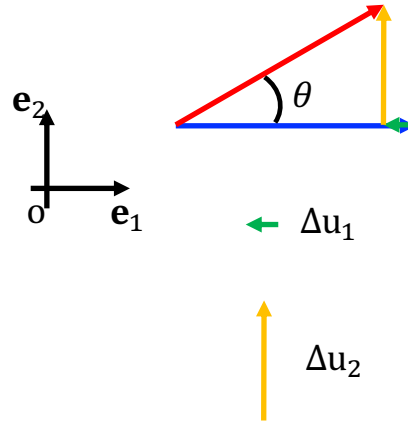
하지만 $\Delta x \gg \Delta u_1$ 따라서

$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}$$

2차원 strain#5 (small strain)

앞서 tensor **d** 가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor **d** 는 strain을 나타낼 수 없는가?

Tensor **d** 성분이 0이 아님에도 불구하고 변형률이 0인 경우가 있다. 그런 경우는 바로 ... rigid body rotation 즉 물질 전체가 한축을 기준으로 회전하는 경우 Tensor **d** 성분중에 일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인 경우가 있다.



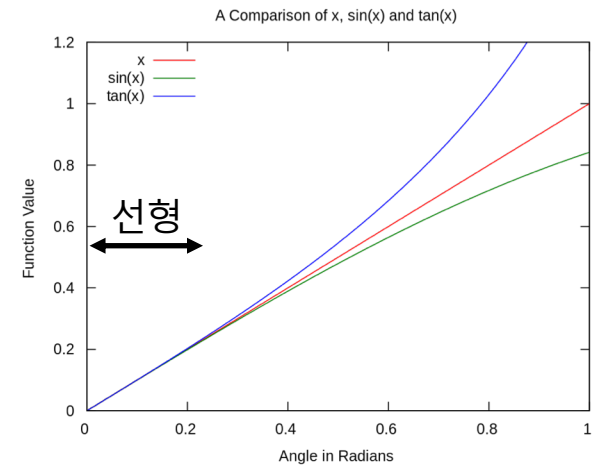
그런데 small strain theory에서는 θ 값이 아주 작다. 그럴때는 $\tan \theta \approx \theta$ (선형)

Small strain theory는 주어진 물질 무한소의 길이보다 '훨씬' 작은 displacement 발생시에만 적용가능함에 유의

$$\text{위에서 } \tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x + \Delta u_1}$$

하지만 $\Delta x \gg \Delta u_1$ 따라서

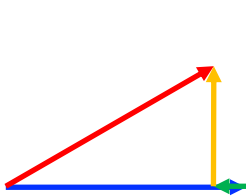
$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x}$$



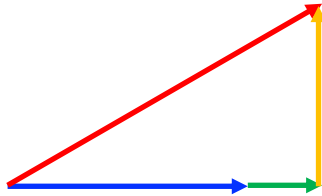
따라서 해당 변위 (RBR)에서 d_{21} 값 θ 로 근사될 수 있으며, 이 값은 작지만 0은 아니므로... 길이 변화가 없는 변위에서도 **d**의 성분이 0이 아님을 보인다.

따라서 텐서 **d**는 변형률을 설명하기에 적절하지 않다.

2차원 strain#6 (small strain)

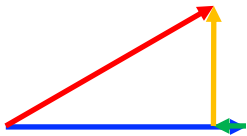
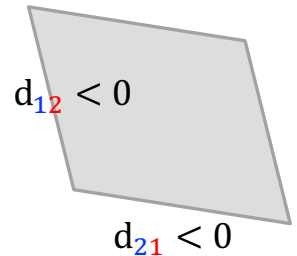
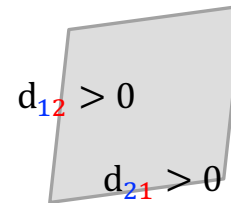
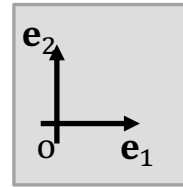


Rigid body rotation



Rigid body rotation+stretching

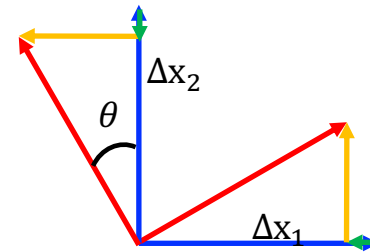
적절한 변형률 텐서는 RBR을 제외한 정도를 얻어야 한다.



Rigid body rotation

$$\tan \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \approx \theta$$

$$\epsilon_{21} \approx \theta$$



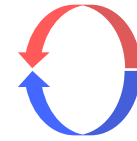
$$\tan \theta = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2 + \Delta u_2} \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} \approx \theta$$

$$\epsilon_{12} \approx -\theta \text{ (음수)}$$

2차원 strain#7 (small strain)

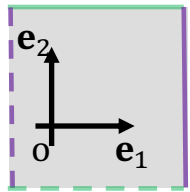
적절한 변형률 텐서를 구하기
위해서는 RBR을 제외하여야 한다.

$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$



CCW: counter-clock-wise

CW: clock-wise



$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} > 0$$

$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$$

$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} < 0$$

$$\epsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} < 0$$

$-\mathbf{e}_2$ 방향

$$d_{12} < 0$$

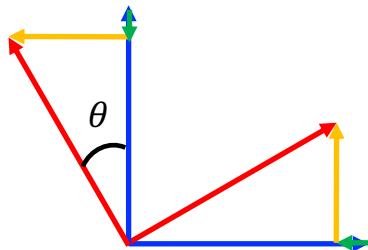
$$\theta_{12} < 0$$

$$d_{21} > 0$$

$$\theta_{21} > 0$$

$\theta_{12} < 0$ 일때 CCW

$\theta_{21} > 0$ 일때 CCW



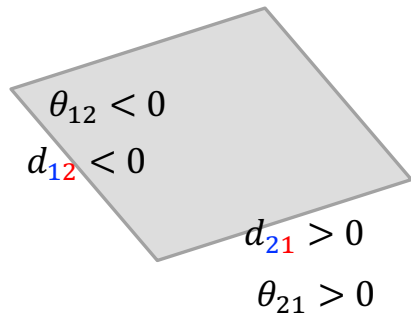
$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2}$$

전체 CCW
회전 평균

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \approx \frac{d_{21} - d_{12}}{2}$$

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}^T}{2}$$

2차원 strain#8 (small strain)



$\theta_{12} > 0$ 일때 CW임을 확인

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \longrightarrow \text{전체 CCW 회전 평균}$$

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \approx \frac{d_{21} - d_{12}}{2} \quad \text{Small strain theory}$$

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{d}^T}{2}$$

따라서 \mathbf{d} tensor에서 ccw 회전을 제외 한다면, 즉

$\mathbf{d} - \mathbf{w}$ 을 한다면 ccw의 RBR을 제외한 순수 변형률을 나타낼 수 있다.

따라서 strain tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{w}$$

$$\varepsilon_{ij} = d_{ij} - \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} = \frac{d_{ij} + d_{ji}}{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{d}^T}{2}$$

비슷하게 strain rate tensor는

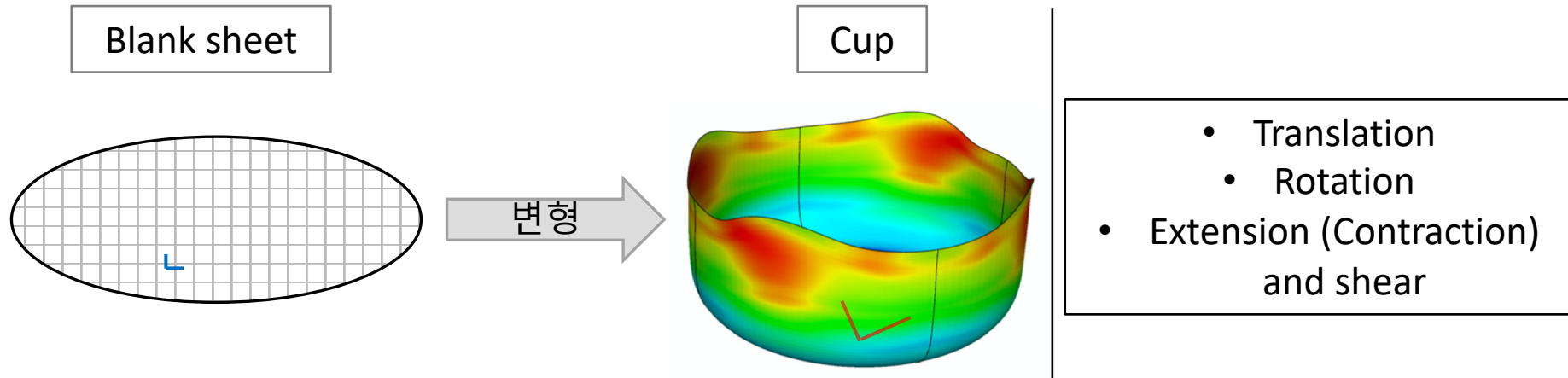
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\mathbf{u}} = \text{velocity}$$

3차원 strain#9 (small strain)

- 2차원 변형률의 정의의 3차원으로의 확장
- 앞서 다루었던 ϵ tensor는 deformation tensor (small strain theory) 라고도 불림
- w tensor는 spin tensor
- ϵ tensor는 small strain theory에서의 strain tensor.

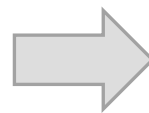
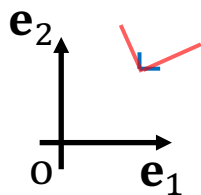
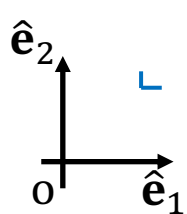
Displacement and strain

- Goal: Displacement와 strain의 관계를 이해하고 더 나아가 displacement에서 strain을 '추출' 해낼 수 있는 방법을 이해한다.

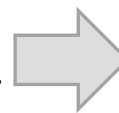


1. 공통 좌표계에서 표기 2. Translation 제거

3. Rotation 제거



Displacement
gradient tensor

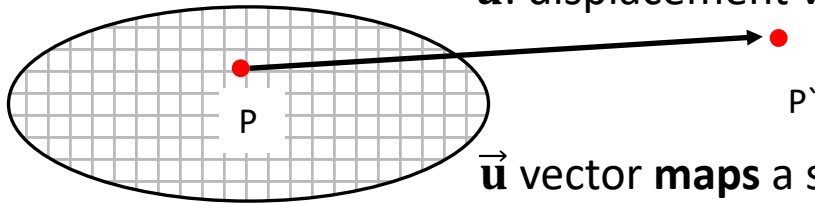


Strain = The 'symmetric'
part of displacement
gradient tensor

Displacement and strain

Displacement: 특정 한 점이 차지하던 position을 또 다른 position으로 옮겨준다.

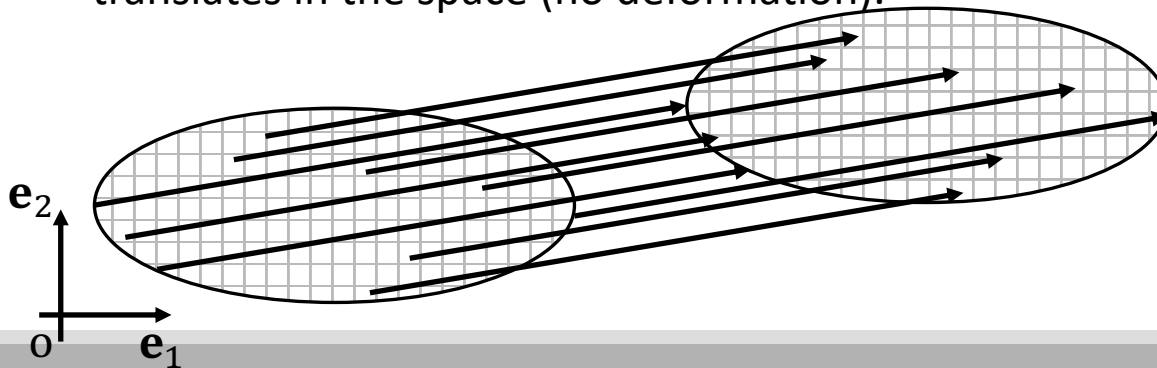
\vec{u} : displacement vector



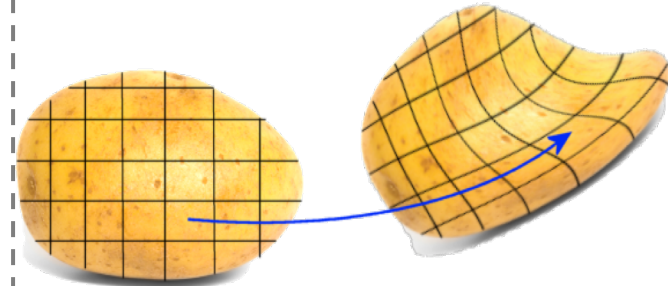
\vec{u} vector **maps** a single point P to P\`

$\vec{u}(x_1, x_2)$: displacement vector **field** maps various points to various points.

In case \vec{u} field is uniform, which means that \vec{u} is the same for all points, the material only translates in the space (no deformation).



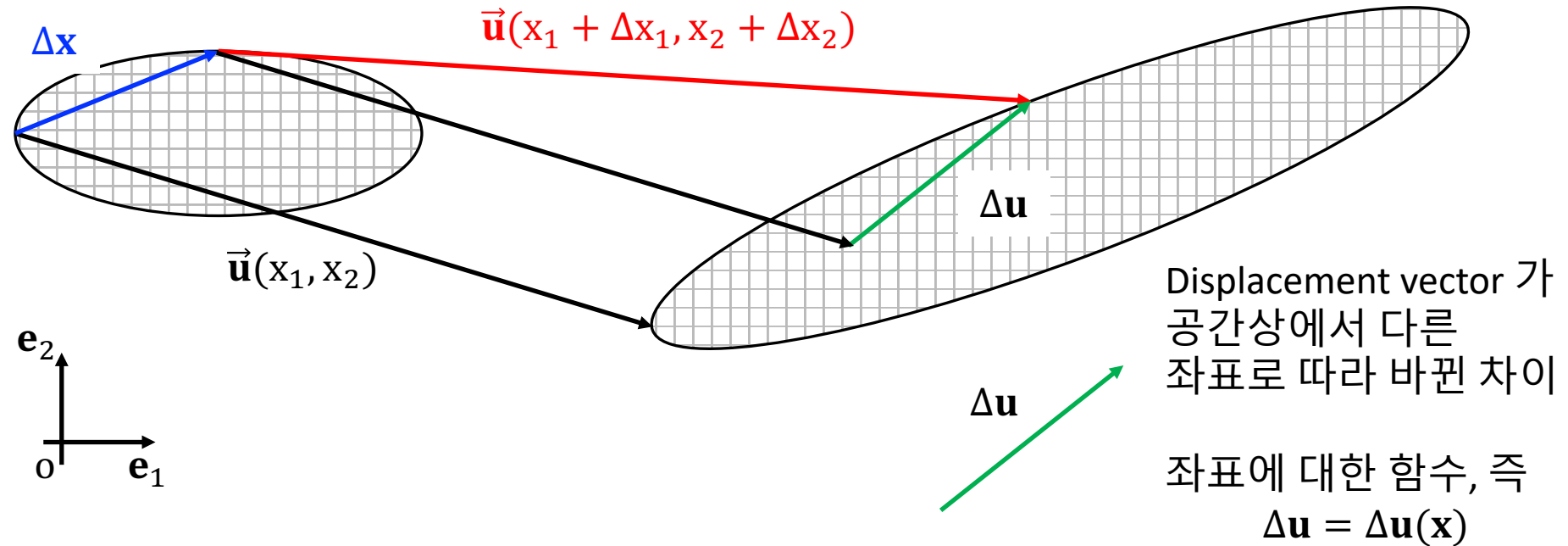
Deformation occurs only when \vec{u} field is not uniform, which means that \vec{u} varies when changing the locations.



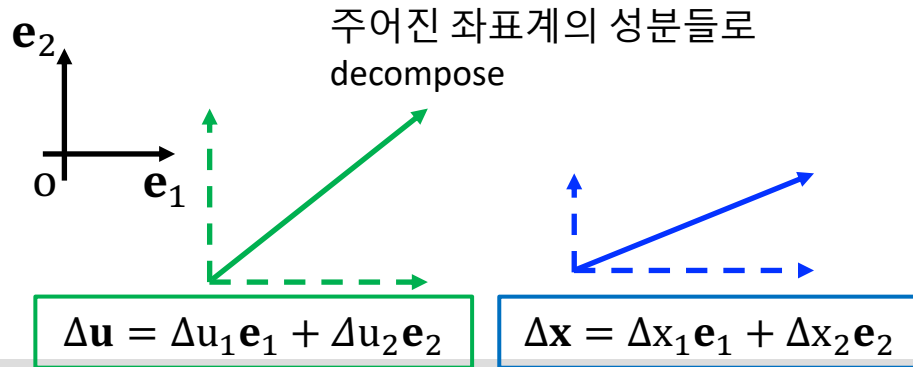
Warning: there are cases that \vec{u} field is not uniform, but no deformation occurs (We'll get back to this later).

Displacement and strain

In case $\vec{u}(x_1, x_2)$ is not uniform (case 1)



파란 화살표로 옮겨진 점의 물질은 기준이 되는 점에 비해 녹색으로 표현된 만큼 차이나는 점으로 옮겨졌다.

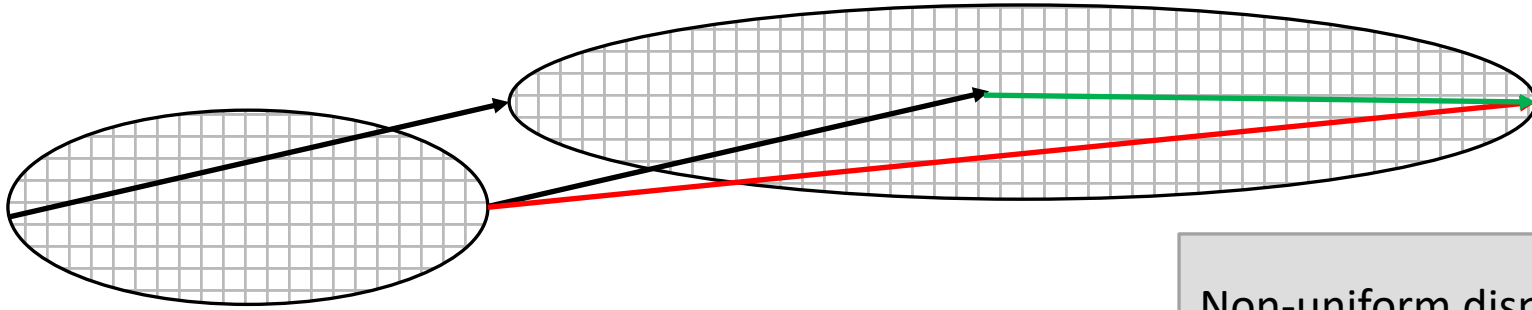


\vec{u} 가 공간에 따라 어떻게 얼마나 달라지는지 나타내는 수학적 방법 (gradient)

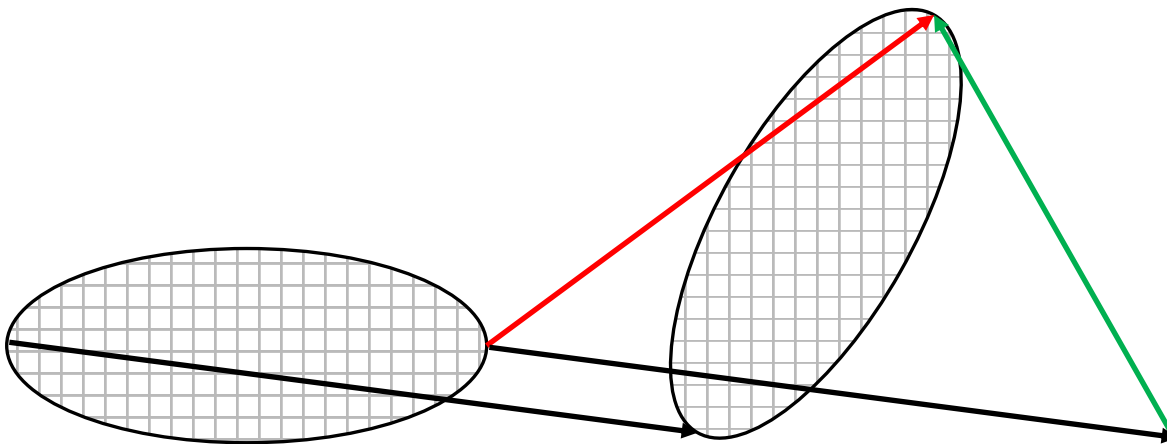
$\frac{\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{d}(\mathbf{x})$ 로 표기 하자.

Displacement and strain

In case $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ is not uniform (case 1; pure stretching)



In case $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ is not uniform (case 2; pure rotation)



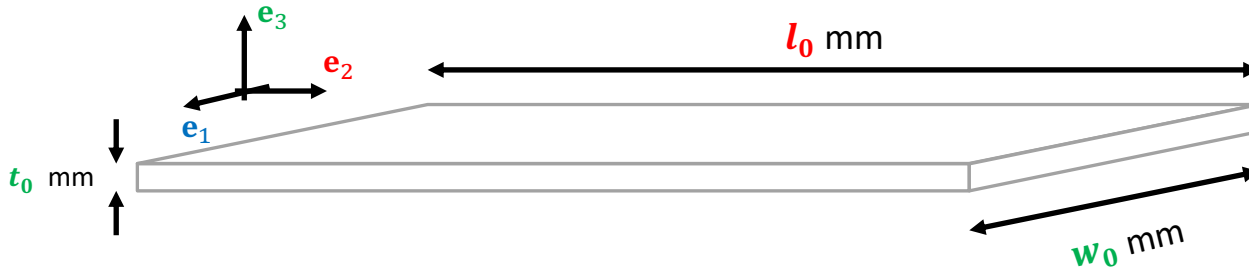
Non-uniform displacement field does not always mean that the material is 'deformed'.
Non-uniform displacement field may contain a contribution from 'rotation'.

Therefore, if you want to 'extract' only the 'deformation', you have to exclude 'rotational' contribution from the displacement field.

Displacement gradient to strain

- $d_{ij} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (d_{ij} + d_{ji})$
- 위 특성으로 인해
- $\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}$ (즉, symmetry 가진다)

Example



위의 금속 판재에 냉간 압연을 하여 두께,너비,길이가 각각 t_1, w_1, l_1 으로 바뀌었다.

- 부피 변형률 $\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ 값을 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ 요소로 표현하여라.

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{l_1 w_1 t_1}{l_0 w_0 t_0} \quad (1)$$

(1) 의 양변에 자연 로그를 사용하면

$$\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{w_1}{w_0}\right) + \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right) = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$$

따라서 부피변화가 없다면, 즉 $\ln(1) = 0$, 따라서 $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$

Example

■ 전단 변형률은 부피 변화와 무관하다.

■ Let's check

Output									
This excell sheet proves a means of coordinate system transformation									
		angle		radian					
Three Euler angles	phi1		45		0.785				
	Phi		30		0.524				
	phi2		20		0.349				
					transformation matrix R			(transformation matrix) ^t = R ^t =R ⁻¹	
삼각 함수 값들									
cos(phi1)	0.707	sin(phi1)	0.707	0.455 0.874 0.171			0.455 -0.817 0.354		
cos(Phi)	0.866	sin(Phi)	0.500	-0.817 0.334 0.470			0.874 0.334 -0.354		
cos(phi2)	0.940	sin(phi2)	0.342	0.354 -0.354 0.866			0.171 0.470 0.866		
2nd rank tensor in matrix form					R.T			R ^t .R.T 2nd rank tensor after coordinate transformation	
1 0 0					0.455 -0.874 0.342			-0.498 -0.503 0.766	
0 -1 0					-0.817 -0.334 0.940			-0.503 0.998 0.643	
0 0 2					0.354 0.354 1.732			0.766 0.643 1.500	
1st rank tensor (i.e., vector) in array form					R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation				
1					0.4550193 -0.8172866 0.3535534				
0									
0									

Recap

- Measurement of force and displacement from tension tests
- Physical quantity to remove the effect of geometry: engineering stress/engineering strain
- Two types of stress (strain):
 - Normal (tension + , or compression -)
 - Shear (forward +, backward -)
- There are three independent planes in 3D; On each plane 1 normal + 2 shears.
- Thus nine independent components comprise the stress (strain) state.
- Coordinate transformation (axes transformation)
 - Coordinate transformation does not change the physical quantity (stress, strain)
 - Coordinate transformation changes the values of components and the directions of planes associated with the stress (or strain).
- Practice coordinate transformation using the Excel, Fortran code, Python code.

References and acknowledgements

■ References

- An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
- Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
- Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
- <http://www.continuummechanics.org> (very good on-line reference)
- <http://youngung.github.io/tensors>

■ Acknowledgements

- Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.