Principal Space and Elasticity

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Outline

- Stress space (응력 공간)를 이해한다.
- Principal space of stress space를 이해한다.
- Principal values를 구하는 법을 익힌다.
- Invariants를 이해한다.

Recap

- 일축인장으로 힘과, displacement 구하는 법
- 힘과 displacement를 각각 응력 변형률로 변환
- Two types of stress (strain):
  - Normal
  - Shear
- Cauchy: 공간의 각 면에 하나의 normal 둘의 shear term, 그리고 총 세 독립적인 면에서의 응력 값으로 응력 상태를 대표할 수 있다.
- 따라서 총 9개의 응력 구성값이 있으나, 힘평형 상태에서는 6개의 독립적인 값만 존재한다.
- 텐서의 좌표 변환법
  - 매트리스 형태에서 나타나는 텐서의 구성값들은 좌표에 따라 바뀐다.
  - 텐서의 rank에 따라 구분되는 좌표 변환법이 있으며, 표기를 간략하게 하기 위해 Einstein summation convention이 널리 쓰인다.

Symmetries in stress/strain tensors

- 변형률 텐서의 경우 다음의 symmetry를 가진다.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{ij} + d_{ji}\right)$$

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(d_{ji} + d_{ij}\right)$$

- 응력 텐서의 경우 force equilibrium 조건에 의해 symmetry를 가진다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Linear operations (mapping)

- Stress tensor는 두 벡터 공간 사이의 선형 변환을 한다.
  - Stress tensor는 한 벡터량을 또 다른 벡터량으로 변환 (transform, mapping) 해준다.
  - 벡터량으로 나타낼 수 있는 것 중에 하나가 *plane 이다

- **한 물질점의 응력 상태를 알고 (즉 stress tensor), 그 물질점의 특정 면에 작용하는 힘(vector)을 알고 싶다면, 해당 특정면의 방향을 나타내는 벡터($\boldsymbol{n}$)와의 inner dot product를 얻으면 된다.**
  - 2차 텐서와 1차 텐서간의 inner dot product는 다음과 같이 정의 된다:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ij} n_j$$

- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ 는 $\boldsymbol{n}$ 이 법선인 면에 작용하는 '힘' (force)가 된다.

- 또 다른예: 한 결정립이 열처리후 잔류응력 $\boldsymbol{\sigma}$가 존재한다. 이때 특정 slip system에 작용하는 응력을 알고 싶다면?
  - 1. 특정 slip system의 slip plane을 나타내는 단위 벡터를 찾는다. (111) plane → $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$
  - 2. 해당 벡터와 inner dot product를 실시하면 해당 면에 작용하는 force를 구할 수 있다.
  - 3. 다음으로 얻어진 force와 slip direction을 inner dot product하면, 해당면에서 해당 방향으로 작용하는 응력값(scalar value)을 구할 수 있다.

예제

- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다. 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자. **단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 동일하다.**

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Slip system #1: $(111)[1\bar{1}0]$
  - Slip system #2: $(11\bar{1})[011]$

- 풀이:

예제

- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다. 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자. **단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 동일하다.**

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

  - Slip system #1: $(1\bar{1}1)[10\bar{1}]$
  - Slip system #2: $(1\bar{1}1)[011]$

- 풀이:

- Hydrostatic pressure와 소성 변형에 대한 설명.

예제

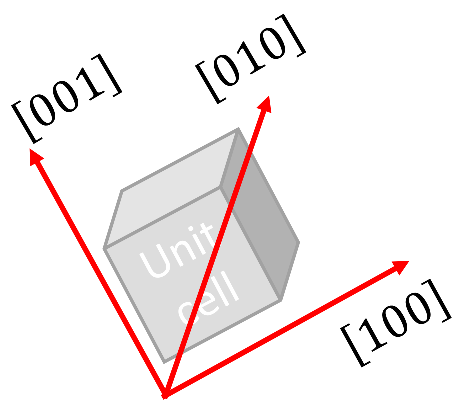
- 단결정 알루미늄 재료에 다음의 응력이 작용하고 있다. $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 30 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$

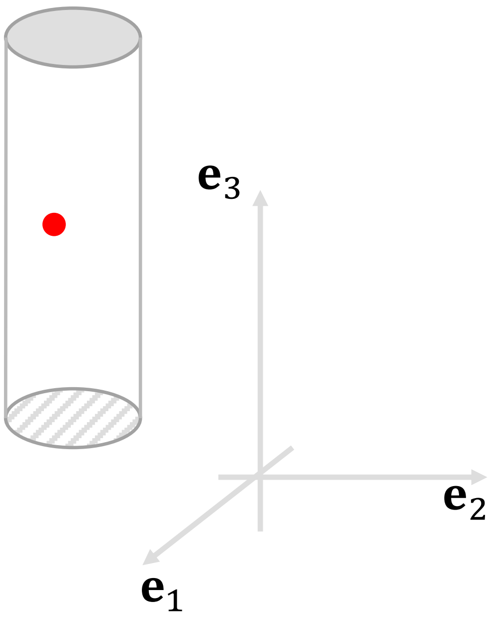
- 이때, 아래와 같은 조건이 주어진 결정면에서 작용하는 resolved shear stress 를 찾아보자.
  - Slip system #1: $(111)[1\bar{1}0]$
  - Slip system #2: $(11\bar{1})[011]$

- **단, 응력이 참조된 좌표축은 결정의 결정좌표계와 다르며,**

다음의 좌표변환 매트릭스를 가진다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.848 & -0.528 & 0.044 \\ 0.530 & 0.845 & -0.075 \\ 0.003 & 0.087 & 0.996 \end{bmatrix}$$





Stress tensor represented in other forms

- 앞서 응력 텐서가 matrix의 형태로 표현되는 것을 보았다. 하지만 이는 온전히 ‘편리’를 위해서이다 –물론 많은 이점이 생긴다.
- 하지만 때에 따라 응력 텐서를 다른 형태로 표기하기도 한다.
- 예를 들어 Voigt notation은 매우 흔히 찾을 수 있는 응력텐서 표기 방법이다 – 3x3 matrix 대신 1x9 형태로 표현

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 위의 symmetric tensor를 9개 component중 3개를 줄여 order를 낮출 수 있다.

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$ 의 1x6 array로 표현; 6차원 공간상의 vector 형태가 된다: $\begin{bmatrix} \sigma_{1} \\ \sigma_{2} \\ \sigma_{3} \\ \sigma_{4} \\ \sigma_{5} \\ \sigma_{6} \end{bmatrix}$

Stress Space

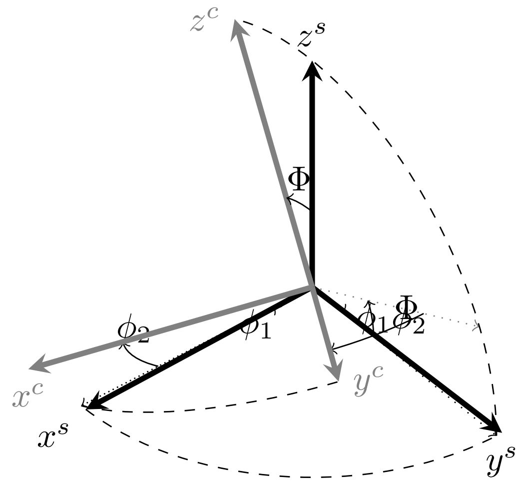
- Stress tensor consists of 6 components: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$
- 한 응력상태는 위의 여섯 component가 특정값을 가진다. 따라서, 여섯 component 값들을 각각 축으로 하는 6차원 공간을 만든다면, 한 응력상태는 그러한 공간에서 한 좌표(coordinate; 좌표점)로 표현이 가능.
- 만약 응력이 세 principal values로 표현이 가능하다면 세 component 값들이 $\sigma_{I}, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ($\sigma_{I} \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) 를 나타내는 축으로 구성된 3차원 공간안의 한 좌표 (coordinate; 좌표점).
- 이렇듯, 응력 상태를 표현하는 공간은 응력 텐서의 component를 나타내는 축으로 구성할 수 있고, 그러한 축으로 이루어진 공간을 stress space라고 한다.
- 응력 공간에서의 한 좌표는, 특정한 응력 텐서, 즉 특정한 응력 상태를 나타낸다.

Stress Space

- Stress tensor의 구성성분중 shear component가 모두 0이 되는 Cartesian coordinate로 표현되는 공간이 있을 수 있다. 그렇게 표현되는 stress state는 유의미한 value가 3개이므로 해당 stress space를 3차원으로 표현할 수 있다. 이때의 3 값을 principal value (주 값) 이라고 하며, 한 응력 상태에 해당하는 principal value들를 구하는 방법에 대해 간략하게 알아보도록 하겠다.
- 예1) 알루미늄을 일축 인장 시편을 위해 가공한후, 해당 시편의 길이/폭/두께 방향이 주어진 coordinate system의 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ basis vector방향과 평행할때, 응력 상태를 측정하여 다음과 같이 나타낼 수 있었다.
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -30 & 25 & 11 \\ 25 & 1 & -9 \\ 11 & -9 & 17 \end{bmatrix}$
- 해당 응력 텐서의 principal space는? 또 principal values는?
- A) 주어진 coordinate system을 $\phi_1 = -1.4°, \Phi = 24.86°, \phi_2 = -30.59°$ 을 통해 변환시켜 얻은 coordinate system이 해당 응력의 principal space 이다.

Stress Space (확인)

$$\phi_1 = -1.4°, \Phi = 24.86°, \phi_2 = -30.59°$$



input	output

This excell sheet proves a means of coordinate system transformation

		angle	radian
	phi1	-1.4	-0.024
Three Euler angles	Phi	24.86	0.434
	phi2	-30.59	-0.534

삼각 함수 값들

cos(phi1)	1.000	sin(phi1)	-0.024
cos(Phi)	0.907	sin(Phi)	0.420
cos(phi2)	0.861	sin(phi2)	-0.509

transformation matrix R

0.849	-0.483	-0.214
0.528	0.768	0.362
-0.010	-0.420	0.907

(transformation matrix)^t= R^t=R^-1

0.849	0.528	-0.010
-0.483	0.768	-0.420
-0.214	0.362	0.907

2nd rank tensor in matrix form

-30	25	11
25	1	-9
11	-9	17

R.T

-39.898	22.675	10.049
7.356	10.707	5.043
-0.218	-8.843	19.094

R^t.R.T **2nd rank tensor after coordinate transformation**

-46.979	0.001	-0.002
0.001	13.935	0.000
-0.002	0.000	21.044

1st rank tensor (i.e., vector) in array form

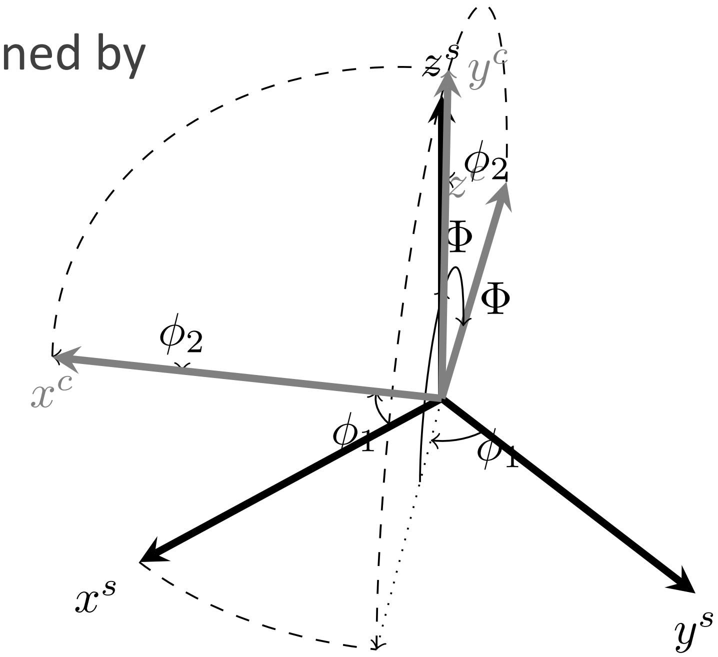
1
0
0

R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation

0.849	0.528	-0.010

More examples

- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 300 & 30 \\ 300 & 5 & 25 \\ 30 & 25 & 3 \end{bmatrix}$
- The principal space of the above tensor can be obtained by
  - $\phi_1 = -49.5°, \Phi = 96.23°, \phi_2 = -0.11°$



- And the principal values?
  - -251.2, -1.2, 360.5

How did I obtain this?

- An analytical method to obtain 'principal' values:
  - Find the eigenvalues and eigenvectors of 3x3 matrix form of the stress tensor
  - That can be done by following
    - 1. Define a new 3x3 matrix

$$A_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = 1 \;(\quad \text{if } i = j) \\ = 0 \;(\text{or if } i \neq j)$$

    - 2. Solve the case of λ when det(**A**)=0.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

    - 3. That's actually solving

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0$$

Where

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$I_2 = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

How did I obtain this?

- Okay, we learned how to get eigenvalues. Next question is how we can obtain eigenvectors.

- Once you found the eigenvalues, you solve the equations given by

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = A_{ij} v_j = 0$$

- Example:

$$\text{For a 2nd rank tensor B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

$\det\left(B_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0$: The solution of these equations is $\lambda = 4, \lambda = -2$ and $\lambda = -2$ (repeated).

Eigen vectors can be found from

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

How did I obtain this? (continued)

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

Put the each of the three eigenvalues you obtained in the above to obtain three eigenvectors ($\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}$). You'll get

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}^{(1)} = 0 \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}^{(2)} = 0 \qquad (2)$$

$$(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x}^{(3)} = 0 \qquad (3)$$

For instance, solution of (1) gives

$$x_1^{(1)} - \frac{1}{2} x_3^{(1)} = 0 \rightarrow \quad x_1^{(1)} = \frac{1}{2} x_3^{(1)}$$

$$x_2^{(1)} - \frac{1}{2} x_3^{(1)} = 0 \rightarrow \quad x_2^{(1)} = \frac{1}{2} x_3^{(1)}$$

Therefore, eigenvector associated with eigenvalue 4 is: $x_3^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (with any arbitrary $x_3^{(1)}$ value). You could do the same for (2) condition, which results in

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = x_3^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2^{(2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

How did I obtain this? (continued)

- 일단 eigenvector들이 구성된다면 이를 토대로 transformation matrix를 얻을 수 있다.
- 다음으로 transformation matrix를 Euler angles로 변환가능

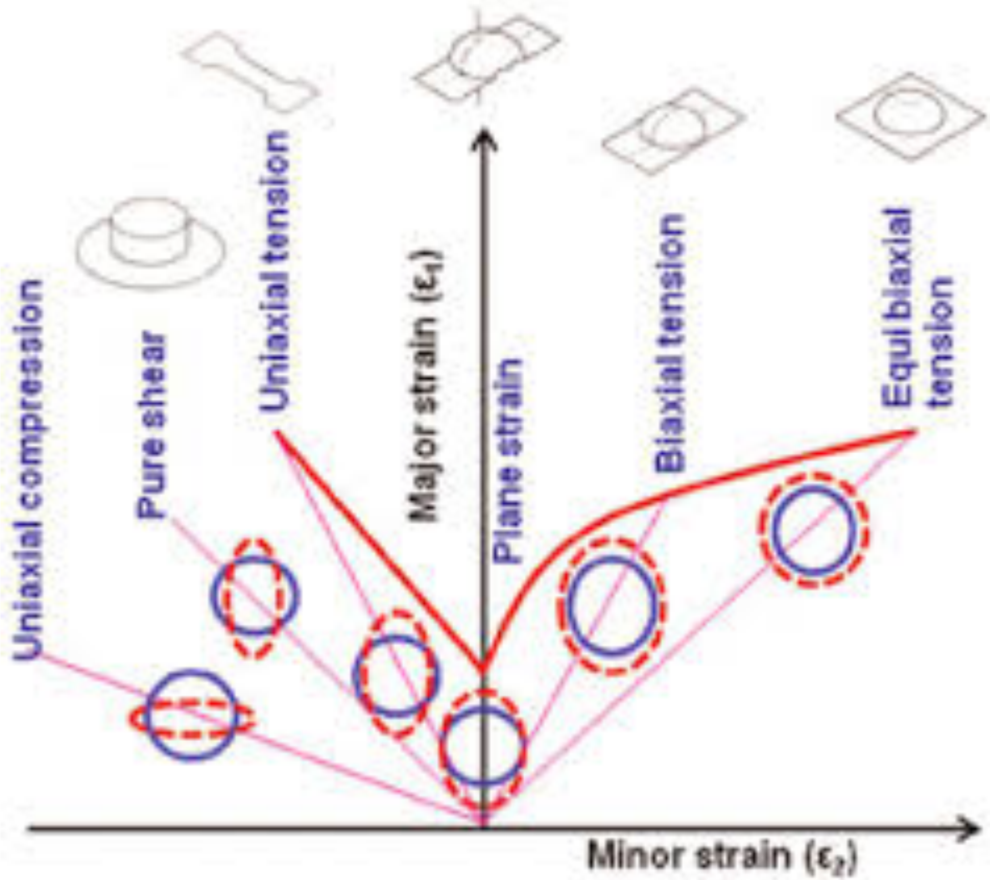
- 물론 저도 이 모든 과정을 연필과 종이로 풀지 않는다.
- 저의 경우 LAPACK으로 eigenvalue와 eigenvector를 수치적으로 얻고, 이를 바탕으로 transformation matrix를 구해서, 다시 Euler angle로 변환하였다.

- 참고: https://youngung.github.io/principal/

Principal values / principal space

- 어디에 쓰이나? 왜 배우나? 어디에 유익할까?
- Principal space에 주어진 응력을 표현하면 문제가 매우 간단해 진다!
- 왜? 일단 생각해야할 component의 수가 줄어든다 - 6D stress space가 3D stress space로 줄어든다.
  - 3D space는 간단히 Cartesian coordinate로 표현할 수 있다. (시각적으로, 그리고 수치해석적으로도) 6차원 보다는 매우 편리하다.
- 다른 예?

Application: Forming limit diagram



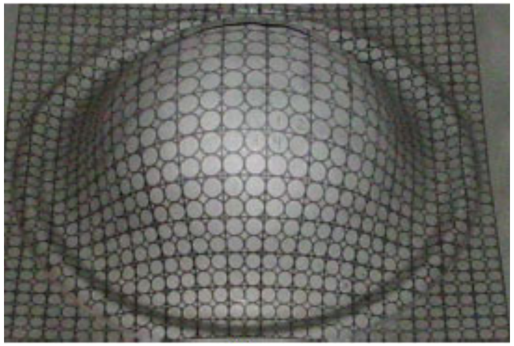
성형 한계 다이아그램은 금속 판재의 성형성을 간단히 나타낼 수 있다.

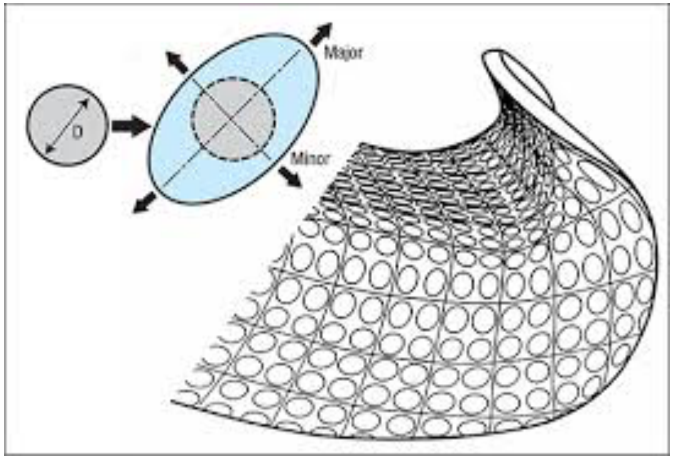
전통적으로 fracture가 일어난 판재의 minor/major strain을 측정하여 모아 곡선으로 표현한다. 여기서 minor/major strain들은 principal space의 strain component를 의미한다.

어쩌다가 principal space로 표현하게 되었을까?
- FLD 측정 방식에서 유래 (다음장)

SK Paul et al. JSAE 48(6) p386-394, 2013

Application: Forming limit diagram





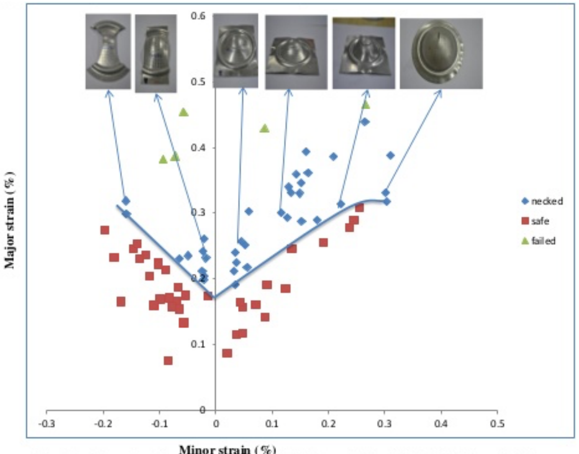


Fig 33: Forming limit diagram of ***(a)*** *IF steel (b) AA5754-H22 and* ***(c)*** *AA5182-O sheet of thickness 1mm.*

SK Paul et al. JSAE 48(6) p386-394, 2013

Principal space를 사용한다면?

- 응력과 변형률 텐서가 모두 같은 principal space에 표현이 되는 상태라면,
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$
- 이를 간단히 Voigt notation을 차용한다면 3차원 문제가 된다. 따라서
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$ 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ 로 표현 가능하다. (각 성분의 첨자가 하나로 줄었다)
- 때로는 principal space에 표현된 응력의 성분임을 좀 더 명확히 하기 위해 로마자 첨자를 사용한다. Ex. $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$

Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- Principal space의 $\mathbf{e}_1$ 방향으로의 가상 '일축 인장' 실험을 생각해보자. 해당 방향에서의 stress component와 해당 방향에서의 strain component 간에는 '선형' 관계가 지켜진다. 이는
- $\sigma_1 = \mathbb{E}\varepsilon_1$ 로 표현가능 – 여기서 $\mathbb{E}$ 는?
- 나머지 principal space의 $\mathbf{e}_2$ 축과 $\mathbf{e}_3$ 축에서는 '수축' 변형이 발생한다. 만약 시편이 'isotropic' 하다면, 그 수축 변형량은 동일하다. 이는
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$ 으로 표현가능 – 여기서 ν는?

Principal space and Hooke’s law (2)

- 앞서 ‘일축’ 인장에 적용된 예들을 좀 더 확장 시켜 ‘삼축’ 모두에 arbitrary한 응력이 걸렸을 경우를 표현할 수 있는 방법이 있다. 이는
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$
- 앞서 우리는 principal space에서 ‘축약’된 Hooke’s law를 살펴보았다. 사실 Full tensor를 사용하면 Hooke’s law는 ...
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 혹은 $\varepsilon_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\sigma_{kl}$ (여기서 $\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$)
- 위를 이용하여
- $\varepsilon_{11} = \mathbb{C}_{11kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{22} = \mathbb{C}_{22kl}\sigma_{kl}$
- $\varepsilon_{12} = \mathbb{C}_{12kl}\sigma_{kl}$

Boundary condition

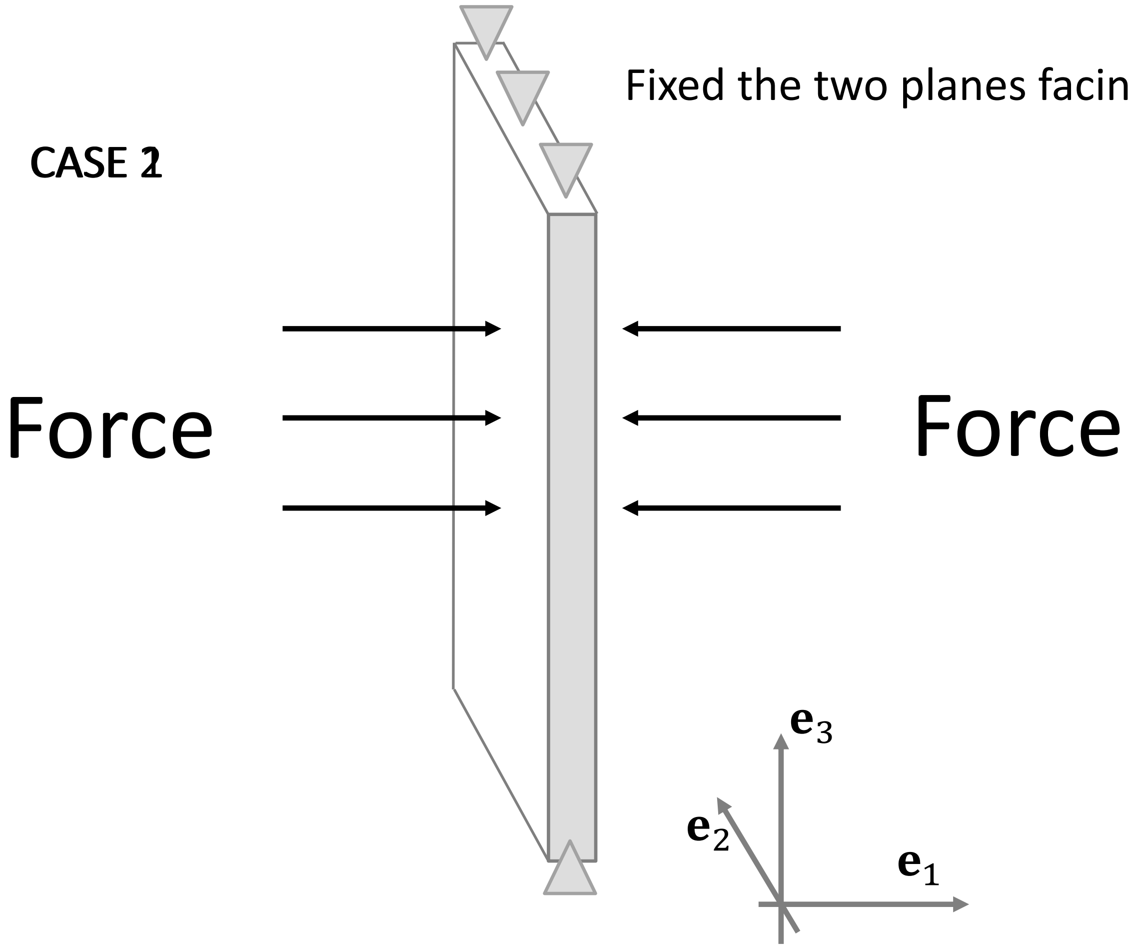
- 재료 역학 문제를 효율적으로 해결하기 위해서는 적절한 boundary condition (경계조건)을 찾아내고 올바르게 설정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위해 몇몇 유익한 hints를 꼽자면
  - 자유 표면에 수직한 응력은 0 이다. 재료의 가장 바깥 표면에 응력을 전달하는 다른 물질이 없이 대기중에 노출되어 있으면, 해당 표면의 방향과 관계된 응력 성분들은 0 이다. 예를 들어, 한 물질점이 free surface에 해당하고 z축방향으로 그 법선이 향한다면, $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ 모두 0이다.
  - 마찰이 없는 면에서 전단응력들은 0이다. 해당면이 (위의 예와 유사하게) z축방향으로 그 법선이 향한다면, σ_{yz}, σ_{xz} 모두 0이다.
  - 힘평형 상태에서는 물체의 모든 면에서 힘의 균형이 존재한다.
  - St. Venant 원리 (교제에서 한번 읽어보세요...)

Plane stress condition and free surface

- Plane stress condition을 더 자세히 설명하기에 앞서 free surface를 이해해보자.

Fixed the two planes facing top and bottom

CASE 2



$$\sigma^{case1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{case2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} > 0 \end{bmatrix}$$

Plane theory (2D approximation)

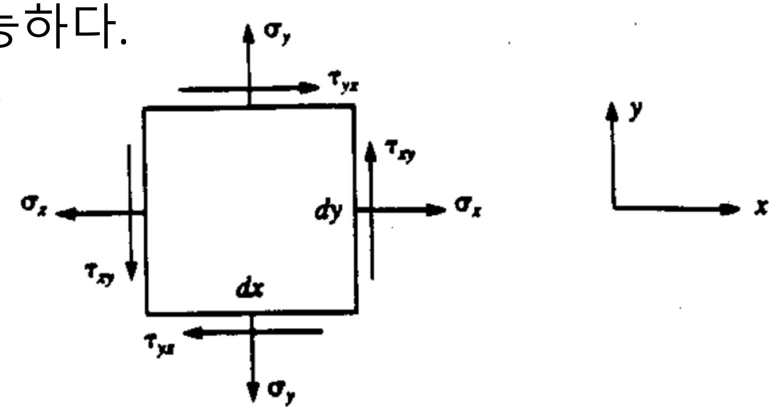
- 재료의 기계적 거동을 설명할때, 구조물의 모습과 기대되는 응력/변형률에 의해 한 방향으로의 구성성분들이 다른 성분들과 비교해 '매우매우매우' 작을 때가 있다.
- 그럴때는 full tensor component를 모두 고려하기 보다는 매우 작은 성분들을 'zero'로 가정하여 문제를 간단화 시키기도 한다.
- 이를 통해, 문제의 복잡성을 줄이고, 수치해석시간(컴퓨터 계산 시간)도 줄어들 수 있다. 그 뿐만 아니라, 수식도 매우 간편해진다!
- 응력을 예로 들자면, 서로 수직하는 세면중 한면과 관련된 응력 성분들이 모두 zero인 상태 (혹은 그렇게 모사된 상태) 를 일컬어 plane stress condition (평면 응력상태)라고 한다.
- 변형률 텐서를 예로 들자면 세 기본 길이 방향중, 한방향과 관련한 normal/shear components가 모두 zero인 상태… plane strain condition (평면 변형률 상태)라고 한다.

Plane stress condition

Plane stress where the components associated with $\mathbf{e}_3$ basis vector are zero: $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

따라서, 이를 2x2 matrix로 표현 가능하다: $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ 단지 세개의 component만 meaningful. 더욱 축약하여 $\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$의 형태로 표현 가능하다.

이경우 principal stress와 principal space도 매우 간단히 구해진다.

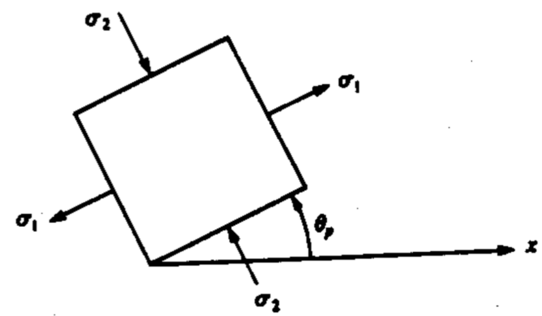


$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Principal space를 구하기 위해서는…

$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)$ 로 얻어진 값으로 회전…



https://engineering.ucsb.edu/~hpscicom/projects/stress/introge.pdf

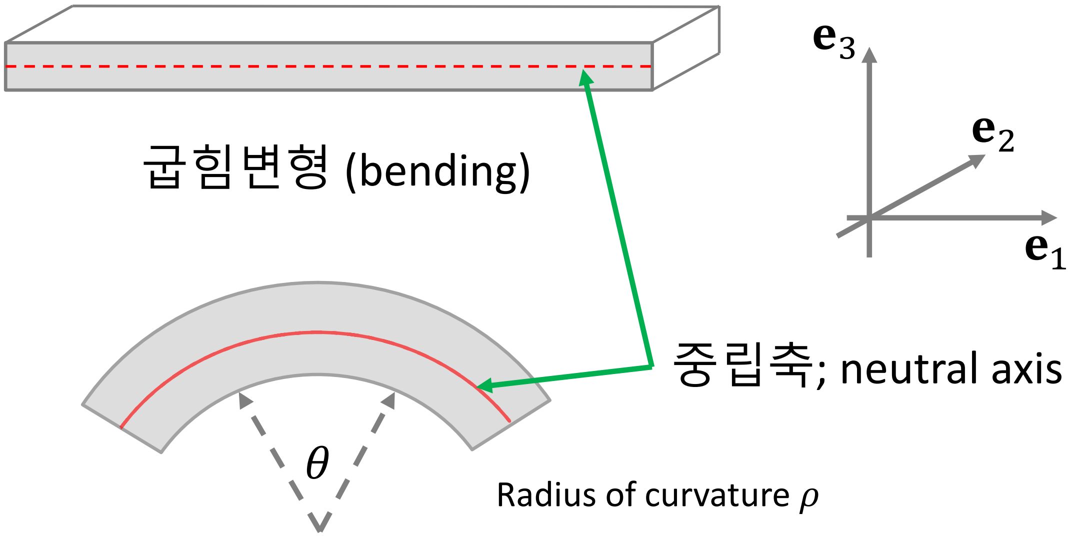
Plane strain condition

평면 응력상태와 유사한듯 다르게

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Some times, even under plane strain condition, ε_{33} is not zero. 하지만 이럴 경우에도 응력해석에서는 non-zero ε_{33}를 무시하여도 무방한 경우가 있다.

예제 1-11



$\mathbf{e}_2$ 축으로 strain이 없는 plane-strain condition

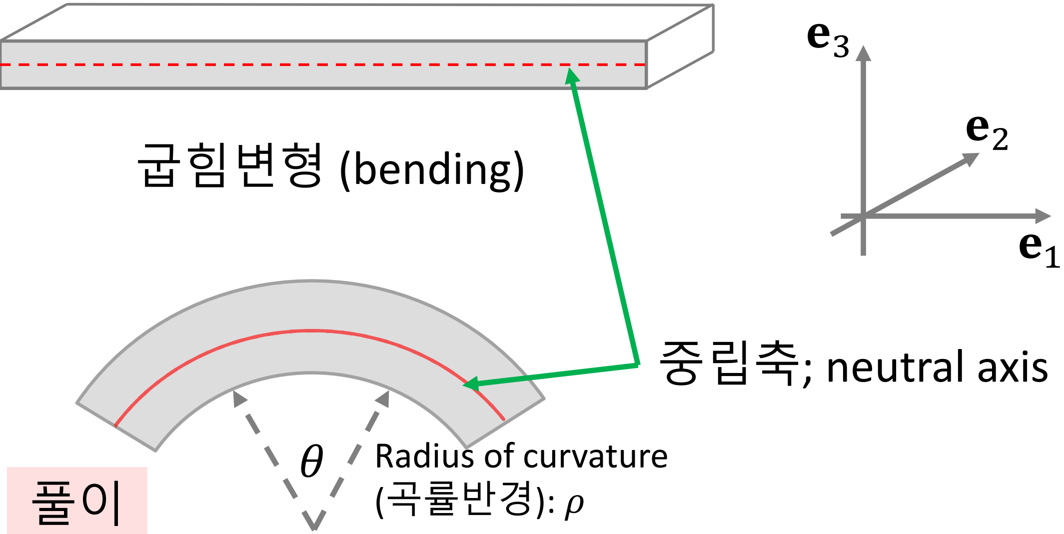
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

위의 변형률 텐서를 살피면, 해당 좌표계가 principal space를 나타냄을 알 수 있다.

조건

1. 시편 전체에 '균일한' 변형이 작용하였다고 가정했다.
2. 변형전 시편의 가운데 면이 변형후에도 '총' 길이 변화가 없다 (중립축; neutral axis). 그리고 중립축이 시편의 두께 방향 중간에 위치한다. 시편의 두께 변화가 없다. 굽힘 후의 곡률반경 ρ는 시편의 두께에 비해 매우 크다 ($\rho \gg t$)
3. 굽힘의 양이 적어, engineering strain을 변형률로 사용한다.

공칭 변형률의 정의 $\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$ 을 통해 시편 바깥쪽 면의 변형률을 구하고, Hooke's law를 사용하여 해당면의 응력상태를 곡률과 두께 그리고 modulus, strain 및 Poisson ratio로 표현해보자.



왼쪽의 좌표계 공간이 단순 굽힘 환경에서의 응력을 표현하는 principal space와 일치한다.

풀이

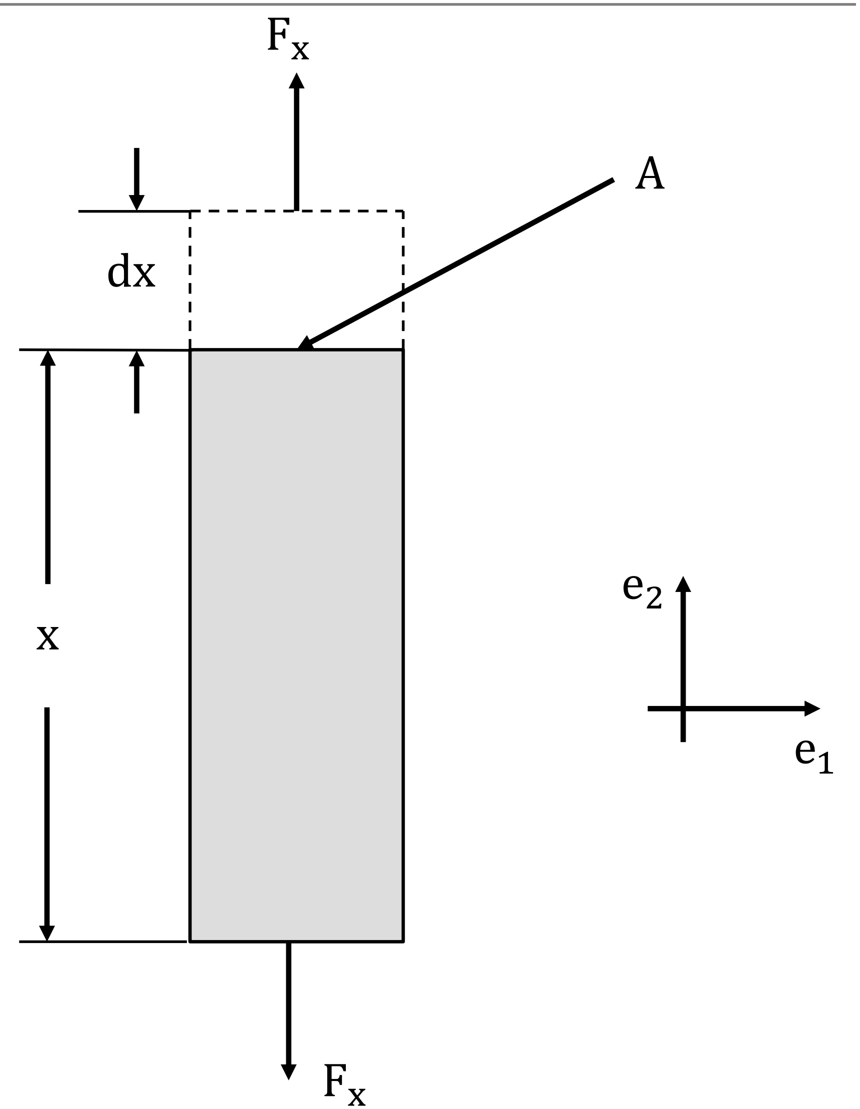
- 시편 바깥쪽의 최종 길이를 θ와 ρ, 그리고 두께 t 에 대한 함수로 표현할 수 있다.
- $\mathbf{e}_1$ 방향으로의 본래 길이는 중립축 선상의 길이로 볼 수 있다. 따라서 변형전 길이는 $\theta\left(\rho + \frac{t}{2}\right)$
- 비슷한 방법으로 바깥표면의 굽힘 후 길이는 $\theta(\rho + t)$
- 따라서 $\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\theta(\rho+t) - \theta\left(\rho+\frac{t}{2}\right)}{\theta\left(\rho+\frac{t}{2}\right)} = \frac{t/2}{\rho+t/2}$
- 여기서, 앞서 주어진 조건 $\rho \gg t$ 를 사용하면 $\varepsilon_1 \approx \frac{t/2}{\rho}$. 앞서 우리는 다음과 같은 관계식을 배웠다.
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$ 그리고 plane-strain condition에 의해 $\mathbb{E}\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0$
- 그런데 제일 바깥쪽 면은 free surface; 즉 $\sigma_3 = 0$. 따라서
- $\mathbb{E}\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu\sigma_2]$ 그리고$[\sigma_2 - \nu\sigma_1] = 0 \therefore \sigma_2 = \nu\sigma_1$
- 따라서 $\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathbb{E}}[\sigma_1 - \nu^2\sigma_1] = \frac{\sigma_1}{\mathbb{E}}(1 - \nu^2)$. 재배치를 하면 $\sigma_1 = \frac{\mathbb{E}\varepsilon_1}{(1-\nu^2)}$. $\varepsilon_1 = \frac{t/2}{\rho}$대입하면
- $\sigma_1 = \frac{t}{2\rho}\frac{\mathbb{E}\varepsilon_1}{(1-\nu^2)}$ 그리고 $\sigma_2 = \nu\sigma_1$ 를 사용하여 $\sigma_2 = \frac{t}{2\rho}\frac{\nu\mathbb{E}\varepsilon_1}{(1-\nu^2)}$

탄성과 탄성일(탄성변형 에너지)

- 길이 x 단면적 A인 봉이 일축인장력 F_x
- 로 인해, dx 만큼 변화되었다. 이에 따른 미소(infinitesimal) 일(work) dW은?
- $dW = F_x dx$
- 단위 부피당 미소 일은?
- $dw = \frac{dW}{\text{Volume}} = \frac{dW}{xA} = \frac{F_x}{A}\left(\frac{dx}{x}\right) = \sigma_x d\varepsilon_x$
- 앞서 다루었던 Hooke's law에 의해 $\sigma_x = \mathbb{E}\varepsilon_x$
- $W = \int dw = \int \sigma_x d\varepsilon_x = \int \mathbb{E}\varepsilon_x d\varepsilon_x$

$$= \mathbb{E}\int_0^{\varepsilon_x} x\, dx = \frac{\mathbb{E}\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}$$

- 같은 아이디어를 general한 텐서에 적용하면…
- $W = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)$



References and acknowledgements

- References
  - An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
  - Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
  - Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
  - http://www.continuummechanics.org (very good on-line reference)

- Acknowledgements
  - Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.