비정상 냉각
Non-Steady State Cooling

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부
정영웅

yjeong@changwon.ac.kr
https://youngung.github.io
https://github.com/youngung

일반적 열전도 방정식

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\dot{q}=\rho C_{p(m)}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Steady-state

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\dot{q}=0$$

One dimensional (x) non Steady-state without internal heat generation

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)=\rho C_{p(m)}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

T는 공간 (x) 와 시간 (t)의 함수. ODE?

Solution of Heat equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

T는 공간 (x) 와 시간 (t)의 함수. ODE? (변수가 하나인 미분 방정식)

주로, Fundamental solution을 얻는다. 주어진 경계 조건에 적절한 Green function을 찾는다.

$$T(x,t) = \int \Phi(x-y,t)g(y)dy$$

우리가 사용하는 해결 방식은 무차원 (dimensionless) 단일 변수를 찾는 것에서부터.

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{a t^3}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{a t^3}}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial\left[\frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\right]}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\frac{\partial\left[\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\frac{\partial\left[\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4\alpha t}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{x}{4\sqrt{a t^3}}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = \frac{\alpha}{4\alpha t}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{a t}}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$-2\eta\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$\left(\frac{dT}{d\eta}\right) = -\frac{1}{2\eta}\frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

Put $y = \frac{dT}{d\eta}$ gives

$$y = -\frac{1}{2\eta}\frac{dy}{d\eta}$$

Solution of Heat equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

Put $y = \frac{dT}{d\eta}$ gives

$$y = -\frac{1}{2\eta}\frac{dy}{d\eta}$$

$$-2\eta d\eta = \frac{1}{y}dy$$

$$-\eta^2 = \ln y + C$$

Put C as $\ln A$ gives

$$-\eta^2 = \ln y + \ln A$$

$$-\eta^2 = \ln\left(\frac{y}{A}\right)$$

$$\frac{y}{A} = \exp(-\eta^2)$$

$$y = A \cdot \exp(-\eta^2)$$

Remember $y = \frac{dT}{d\eta}$

$$\frac{dT}{d\eta} = A \cdot \exp(-\eta^2)$$

$$dT = A \cdot \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

적분하면?

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = A\int_{\eta_0}^{\eta_1} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$\eta = \infty$ (즉, $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \infty$) 인 조건은 모든 x에서 (즉 어느 공간점에서) $t = 0$인 조건과 동일하다.

$\eta = \infty$ 조건 → $t = 0$ 이며 모든 공간에서 동일한 온도

$$\int_{T_0}^{T_i} dT = A\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$\eta = 0$ (즉, $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0$) 인 조건은 모든 t에서 (즉 어느 시점이든) $x = 0$인 조건과 동일하다.

$\eta = 0$ 조건 → $x = 0$ 이며 어느 시점에서든 동일한 온도

$$T_i - T_0 = A\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_i - T_0) = A$$

$$\int_T^{T_i} dT = A\int_\eta^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$$T_i - T = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_i - T_0)\int_\eta^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$$\frac{T_i - T}{(T_i - T_0)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} \exp(-\eta^2)\ d\eta$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^{\infty} \exp(-\eta^2)\ d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$$

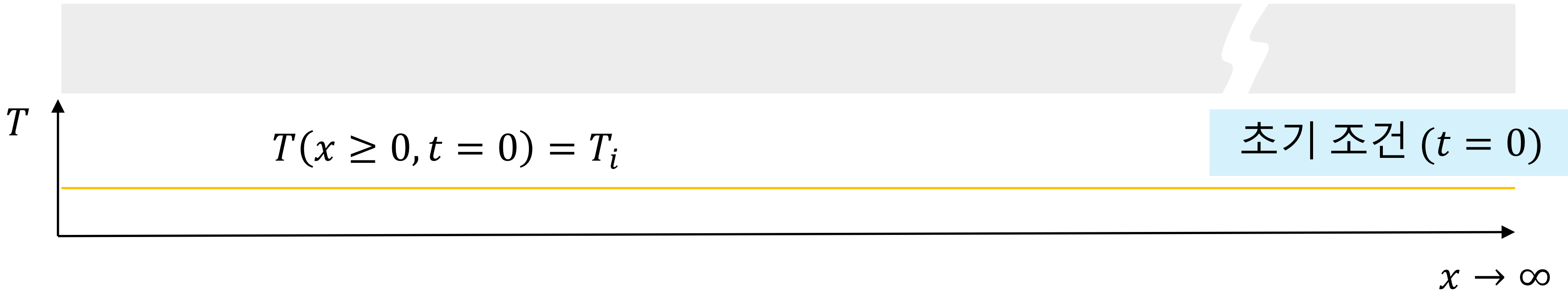
$$\frac{T_i - T}{(T_i - T_0)} = 1 - \text{erf}(\eta)$$

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \text{erf}(\eta)$$

반무한 고체의 전도

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

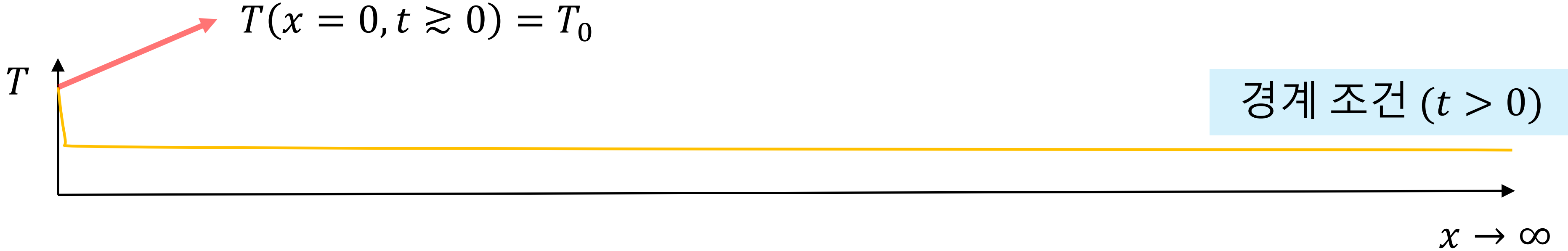
$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$



$$T(x \geq 0, t = 0) = T_i$$

초기 조건 $(t = 0)$

$$T(x = 0, t \gtrsim 0) = T_0$$



경계 조건 $(t > 0)$

T(x,t) in general?

$$\frac{T - T_i}{(T_0 - T_i)} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

반무한 고체의 전도 예제 8.4

$$T_i = 25°C,$$
$$T_0 = 100°C$$
$$\alpha = 1.2\times10^{-5} m^2/s$$

반무한 steel rod에서
1차원 열전도식 응용.

Q_1 5분후 봉의 한쪽면에서부터 0.1m 떨어진 지점의 온도는 얼마인가?

Q_2 0.01m 떨어진 지점의 온도가 $75°C$ 로 상승하는데 걸리는 시간은 얼마인가?