

第一部分 极限与连续

1. 计算下列极限。

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x + 1})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^{10} (2x-5)^{20}}{(6x+1)^{30}}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2n^3 + n^2 + 1}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right]$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} (1-\sin 3x)^{\frac{2}{x}}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{x+1}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

2. 利用等价无穷小的性质，求下列极限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\arcsin 5x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos x)}{\sin x \ln(1 + x^2)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + \sin^2 x) - x}{\ln(e^{2x} + x^2) - 3x}$$

3. 求下列函数的间断点，并确定其类型，若是可去间断点，重新定义使其连续。

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(2) y = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 1}$$

自我测试题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$ 的定义域是 _____;
2. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] =$ _____;
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3x)} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$ _____;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x}{3+x} \right)^{\frac{2}{x}} =$ _____;
5. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$ 则 $f(\cos \frac{x}{2}) =$ _____。

二、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x) = 10^{-x} \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是 ()
A. 偶函数 B. 奇函数 C. 单调函数 D. 有界函数
2. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时 ()
A. f 与 g 为等价无穷小 B. f 较 g 为高阶无穷小
C. f 较 g 为低阶无穷小 D. f 与 g 为同阶无穷小, 但不等价
3. 下列等式不成立的是 ()
A. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\tan x)}{x} = 1$
4. 设 $a > 0, b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} =$ ()
A. $\max\{a, b\}$ B. $\min\{a, b\}$ C. $a+b$ D. 1
5. 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$, 则下列结论中错误的是 ()
A. $x = -1, x = 0, x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点 B. $x = -1$ 为无穷间断点
C. $x = 0$ 为可去间断点 D. $x = 1$ 为第一类间断点

三、(10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + bx + 3b}{x - a} = 8$, 试求常数 a, b 的值。

四、(10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ 。

五、(10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

六、(10 分)

$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应当怎样选取 a ?

七、(10 分)

设 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ ，试讨论方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的实根情况。

八、(10 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A$ ($a > 0, a \neq 1$)，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 。

第二部分 一元函数微分学

1. 求曲线 $y = x + e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程。

2. 求曲线 $y = x - \frac{1}{x}$ 与 x 轴交点处的切线方程。

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a - bx, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 点处可导, 求 a, b 的值。

4. 求下列函数的导数。

$$(1) y = \frac{x^5 + 2\sqrt{x} + 1}{x^5}$$

$$(2) y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$(3) y = \frac{\sin x}{x} + \frac{a}{\sin a}$$

$$(4) y = a^x x^a + 3^x e^x$$

$$(5)y = 3e^x \cos x$$

$$(6)y = \ln x - 2 \lg x + 3 \log_2^x$$

5.求下列函数的导数。

$$(1)y = e^{x^2}$$

$$(2)y = (2x + 5)^4$$

$$(3)y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

$$(4)y = \arctan(1 - x^2)$$

$$(5)y = \sin 2x + \cos(x^2)$$

$$(6)y = e^{\arctan \frac{1}{x}}$$

$$(7)y = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

$$(8)y = \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)^2$$

$$(9) y = \arctan \frac{x+1}{x-1}$$

$$(10) y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

6. 求下列隐函数的导数。

(1) $\sin y + xe^x = 1$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) $y^2 \sin x - \cos(x - y) = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$

(3) $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$

(4) $e^y + xy = e$, 求 $y'(0)$ 。

7. 求下列函数的微分。

(1) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $y = \tan^2(1 + 2x^2)$

(3) $xy = e^{x+y}$

(4) $\tan y = x + y$

8. 证明下列不等式。

(1) $e^x > 1 + x, (x \neq 0)$

(2) $\ln(1+x) - \ln x > \frac{1}{x+1}, (x > 0)$

9. 求下列函数的极限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

10. 求下列函数单调区间和极值。

$$(1) y = x - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$$

$$(2) y = \frac{x}{\ln x}$$

11. 求 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的极值, 凸凹区间, 拐点及渐近线.

(B) 自我测试题

一、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ b(1-x^2), & x > 0 \end{cases}$ 处处有导数, 则 a, b 分别为_____.

2. 设函数 $f(u)$ 二阶可导且 $y = f(\ln x)$, 则 $y'' =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\arctan x} =$ _____.

4. 设 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

5. 设曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 经过 $(-2, 44)$, $x = -2$ 为驻点, $(1, -10)$ 为拐点, 则 a, b, c, d 分别为_____.

二、选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 若下列各极限均存在, 则其中等式一定成立的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

2. 设 $f(x) = x \ln 2x$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = 2$, 则 $f(x_0) =$ ().

- A. 1 B. $\frac{e}{2}$ C. $\frac{2}{e}$ D. e^2

3. 设 $y = f(x)$, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + 2x)}{6x} = 3$, 则 $dy|_{x=x_0} =$ ().

- A. $-9dx$ B. $18dx$ C. $-3dx$ D. $2dx$

4. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 是大于零的可导函数, $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有 ().

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

5. 函数 $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ ().

- A. 只有极大值, 没有极小值
B. 只有极小值, 没有极大值
C. 在 $x = -1$ 处取极大值, 在 $x = 0$ 处取极小值
D. 在 $x = -1$ 处取极小值, 在 $x = 0$ 处取极大值

三、(10 分) 求函数 $y = \ln(1 + x + \sqrt{2x + x^2})$ 的导数 y' .

四、(10 分) (不做) 若 $f(x)$ 可导, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{a}{n}\right) - f\left(x - \frac{b}{n}\right) \right], (a, b \neq 0)$.

五、(10 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos xy = e - 1$ 所确定, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程.

六、(10 分) 求函数 $y = (\tan 2x)^{\cot \frac{x}{2}}$ 的导数.

七、(10 分) 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的导数.

八、(10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$.

第三部分 一元函数积分学

1. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{3x^2 + 1}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$(2) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int 2^x e^x dx$$

$$(4) \int (2e^x + \frac{3}{x}) dx$$

$$(5) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$(6) \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(7) \int (\tan^2 x + \sec^2 x) dx$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(9) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$(10) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx$$

2. 求下列不定积分（凑微分法）

(1) $\int (ax+b)^{n-1} dx$, (a, b 为常数, $a \neq 0$)

(2) $\int (\frac{1}{x^2} + \sec^2 2x + \cos 3x + xe^{x^2}) dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

(4) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

(5) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$

(6) $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$

(7) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(8) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

(9) $\int \frac{4 \arctan x - x}{1+x^2} dx$

(10) $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx$

$$(11) \int \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$(12) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$(13) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$$

$$(14) \int \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

3. 求下列不定积分（换元法）

$$(1) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{2x-3}+1} dx$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad (a > 0)$$

$$(5) \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(8) \int \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx$$

4. 求下列不定积分（分部积分）

$$(1) \int x \cos x dx$$

$$(2) \int x e^{-2x} dx$$

$$(3) \int \arcsin x dx$$

$$(4) \int x \ln(x - 1) dx$$

$$(5) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(6) \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$(7) \int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$$

$$(8) \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$(9) \int \frac{x e^{-x}}{(1 - x)^2} dx$$

$$(10) \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$$

5. 计算下列定积分。

$$(1) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

$$(2) \int_0^2 \max\{2, x^2\} dx$$

$$(3) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$(4) \int_{-e^{-1}}^{-2} \frac{1}{x+1} dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$$

6. 计算下列定积分。

$$(1) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(4) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

7. 计算下列定积分。

$$(1) \int_0^1 x \arctan x dx$$

$$(2) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$(3) \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$(4) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

$$(5) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$$

$$(6) \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$$

8. 计算下列反常积分。

$$(1) \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(4) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(5) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$(6) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

9. 求由下列各曲线所围成的图形的面积。

(1) $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$

(2) $y = 2x + 3$ 与 $y = x^2$

10. 求由曲线 $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的图形的面积。

11. 求由曲线 $y = e^{-x}$ 与过点 $(-1, e)$ 的切线及 x 轴所围图形的面积。

自我测试题

一. 填空题 (每题 2 分, 共 16 分)

1. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____.

2. $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

3. 若 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 则 $f(x) =$ _____.

4. 设 $\Phi(x) = \int_x^0 \sin(\sin t) dt$, 则 $\Phi'(-2) =$ _____.

5. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx =$ _____.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^0 \sin^2 t dt}{x^3} =$ _____.

7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\sin x + 1) dx =$ _____.

8. 设 $f(3x+1) = x e^{\frac{x}{2}}$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

二. 单项选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(b-ax) dx =$ (), $a \neq 0$.

- A. $F(b-ax) + C$ B. $-\frac{1}{a} F(b-ax) + C$
C. $-aF(b-ax) + C$ D. $\frac{1}{a} F(b-ax) + C$

2. 如果 $\int df(x) = \int dg(x)$, 则 () 不一定成立.

- A. $f(x) = g(x)$ B. $f'(x) = g'(x)$
C. $df(x) = dg(x)$ D. $d \int f'(x) dx = d \int g'(x) dx$

3. 在下列定积分中, 其值为零的是 ()

A. $\int_{-1}^1 |\sin 2x| dx$ B. $\int_{-1}^1 \cos 2x dx$ C. $\int_{-1}^1 x \sin x dx$ D. $\int_{-1}^1 \sin 2x dx$

4. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(2t) dt$, $g(x) = \int_0^{2x} \ln(1+t) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比是 ()

- A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价无穷小
C. 高阶无穷小 D. 低阶无穷小

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) > 0$. 若 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则下列说法正确的是 ()

A. $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调下降 B. $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调上升

C. $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凹函数 D. $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凸函数

6. 设曲线 $y = x^2$ 与 $y = cx^3$ ($c > 0$) 所围成的面积为 $\frac{2}{3}$, 则 $c =$ ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

三、(8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 1 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin x, & x < 1 \end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$.

四、(每题 8 分, 共 32 分) 计算下列各题

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

(2) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

(3) $\int \frac{\sin 2x}{1 + e^{\sin^2 x}} dx$.

(4) $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$

五、(8分) 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_2^{2x} f(t)dt = \cos x - \cos 1$, 求 $\int_0^\pi f(x)dx$.

六、(8分) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$, 求常数 a .

七、(8分) 求由曲线 $y_1 = x^3 - 2x, y_2 = x^2$ 所围平面图形的面积.

八、(8分) 求由 $y = e^x, x \leq 0$, y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转而得旋转体体积.