CHAPTER 04

증명법

Part 1. 진위 문제

1. ○ 2. × (답은 그 반대임) 3. × (처음 시작값은 n에 따라 다를 수 있다)
4. ○ 5. ○ 6. × ($p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$를 모두 증명해야 함) 7. ○

Part 2. 선택 문제

1. (3) 2. (4) 3. (4) 4. (3) 5. (4)

Part 3. 주관식 문제

1. 수학적 귀납법
   (기초 단계) $n=1$일 때 좌변=우변=1
   (귀납 가정) 만약 $1+3+5+\cdots+(2n+1)=n^2$이라고 가정하면
   (귀납 단계) $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$

2. 집합 S에 대한 멱집합 $P(S)=2^{|2|}$임을 $|S|$에 대한 수학적 귀납법으로 적용한다. 즉, $|S|=0$이면 $S=\phi$이다.
   $P(S)=\left|2^S\right|=2^{|2|}=2$이다.
   $|S|=1$이면 $|P(S)|=2$, $\left|2^S\right|=2$이다.
   $|S|=k$일 때 $|P(S)|=\left|2^S\right|=2^{|S|}$라고 한다면
   $|S|=k+1$이면 $|P(S)|=2^{k+1}$

3. $n=1$일 때 성립한다.
   n일 때 성립한다고 가정하면
   $$\begin{aligned}(n+1)^3+2(n+1)&=n^3+3n^2+5n+3\\&=n^3+2n+3n^2+3n+3\\&=(n^3+2n)+3(n^2+n+1)\quad [3\text{의 배수}]\end{aligned}$$

4. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로 〈예제 4.6〉과 같은 방법으로 적용하여 증명함

5. ($n\geq5$에 대한 수학적 귀납법을 이용)
   (기초 단계) $n=5$인 경우 $2^5>5^2$이므로 $2^n>n^2$이 성립한다.
   (귀납 가정) 만약 $n\geq5$일 때 $2^n>n^2$이라고 가정하면 $2^{n+1}>(n+1)^2$임을 보이면 된다.

(귀납 단계) $2^{n+1}=2\cdot 2^n$

$>2\cdot n^2$

$=n^2+n^2$

$>n^2+4n=n^2+2n+2n$

$>n^2+2n+1$

$=(n+1)^2$

따라서 $n+1$인 경우에도 위의 식이 성립한다.

6. $2x+4y=21$이므로

$2(x+2y)=21$

$(x+2y)=\dfrac{21}{2}$

여기서 $\dfrac{21}{2}$이 정수가 아니므로 $x+2y$는 정수가 아니다.

따라서 $x+2y$는 정수가 아니다.

7. n과 m이 각각 짝수이므로 $n=2p$, $m=2q$(p, q는 정수)가 나타날 수 있다.
따라서 $n+m=2p+2q=2(p+q)$이므로 $n+m$은 짝수이다.

8. 왼쪽과 오른쪽이 모두 양수이므로 양변을 제곱하여 뺀 값
$|x|^2+2|x||y|+|y|^2-|x+y|^2\geq 0$이다. 따라서 성립한다.

9. $|x|>|y|$이므로 $|x|^2>|y|^2$이 된다. 또한 모든 수 z에 대해 $|z|^2=z^2$이다.
따라서 $x^2>y^2$이 된다.

10. 주어진 명제의 대우인 'a, b가 실수일 때 $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이면, $a^2+b^2\neq 0$'를 증명하면 된다.

a, b가 실수일 때 $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이면

$a^2>0$ 또는 $b^2>0$이 되므로

$a^2+b^2>0$ 이다.

이것은 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

그러므로 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

11. x와 y가 모두 홀수인 경우 xy는 당연히 홀수가 된다. 역으로 xy가 홀수이면 x와 y가 각각 홀수인 경우밖에 없다. 따라서 두 명제는 동치이다.

12. 홀수는 어떤 정수 i에 대해 $2i+1$로 나타낼 수 있고, 짝수는 어떤 정수 j에 대해 $2j$로 나타낼 수 있다. 주어진 명제에 의하면 $(2i+1)^2=2j$이고 이는 $4i^2+4i+1=2j$이다. 좌변은 2로 나누어 떨어지지 않는데 우변은 2로 나누어 떨어지므로 이것은 모순이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.

13. 두 정수의 제곱의 합이 정수가 아닌 예를 찾아보자. 가령 정수 3은 두 정수의 제곱의 합으로 나타낼 수 없다는 것을 살펴보자. 이것을 보이기 위하여 3보다 크지 않은 제곱수는 $0^2=0$, $1^2=1$뿐인데 0 또는 1로 된 2개 항의 합으로 3을 만들 수 없다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.

14. n, m이 홀수이고, $n+m$이 짝수가 아니라고 가정하자. 즉, $n+m$이 홀수라고 할 때, 이 경우에는 n이나 m 중 하나가 홀수이고, 다른 하나는 반드시 짝수여야 한다. 이것은 가정에 모순이 된다. 따라서 원래의 명제가 성립한다.

15. n은 짝수이고 m이 홀수일 때 $n+m$이 홀수가 아닌 짝수라고 가정하자. $n+m$이 짝수가 되기 위해서는 n과 m이 모두 짝수이거나 n과 m이 둘 다 홀수인 경우 외에는 없다. 그러나 가정에서 n은 짝수이고 m이 홀수이므로 모순된다. 따라서 주어진 명제가 성립한다.

16.
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$
$$=\frac{n+1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+2}{n+3}$$

17. (기초 단계) $n=1$일 때 왼쪽 $1\cdot 6$은 6의 배수

(귀납 가정) $n(n^2+5)$가 6의 배수라면

(귀납 단계) $(n+1)\{(n+1)^2+5\}=(n+1)(n^2+2n+6)$

$=(n+1)(n^2+2n)+6(n+1)=n^3+3n^2+2n+6(n+1)$

$=n^3+5n-3n^2-3n+6(n+1)$

$=n(n^2+5)-3n(n+1)+6(n+1)$ [6의 배수]

18. (기초 단계) $n=1$일 때 성립한다.

(귀납 가정) n일 때 식이 성립한다고 가정하면

(귀납 단계) $(1+2+\cdots+n+n+1)^2=(1+2+\cdots+n)^2+2(n+1)$

$(1+2+\cdots+n)+(n+1)^2$

$$=1^3+2^3+\cdots+n^3+2(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2$$
$$=1^3+2^3+\cdots+n^3+n(n+1)^2+(n+1)^2$$
$$=1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$$