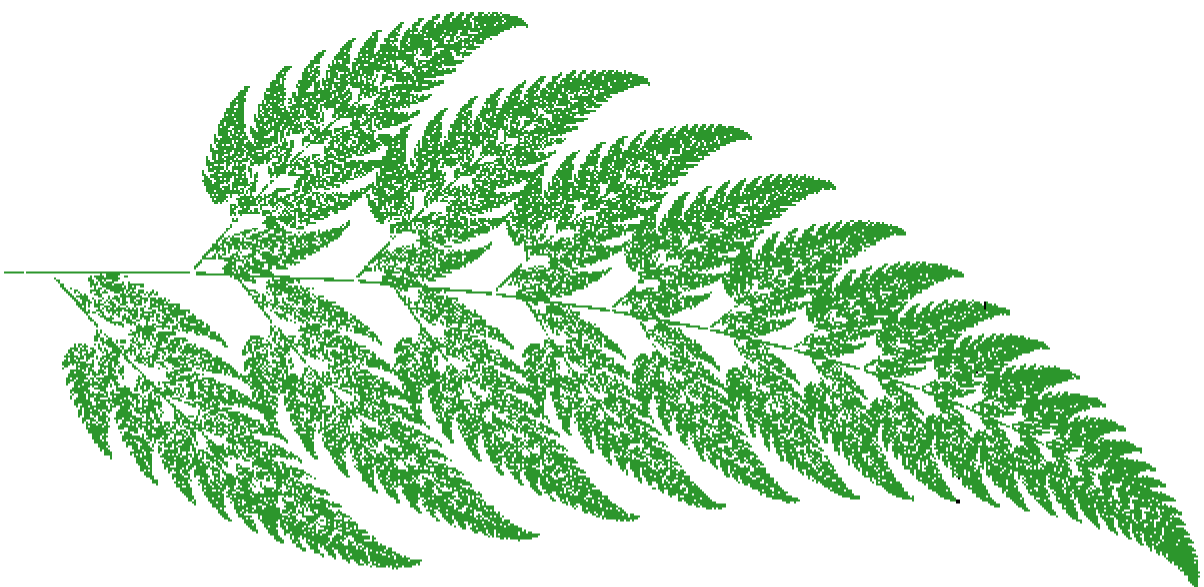
Fractal

(프렉탈)



김은주

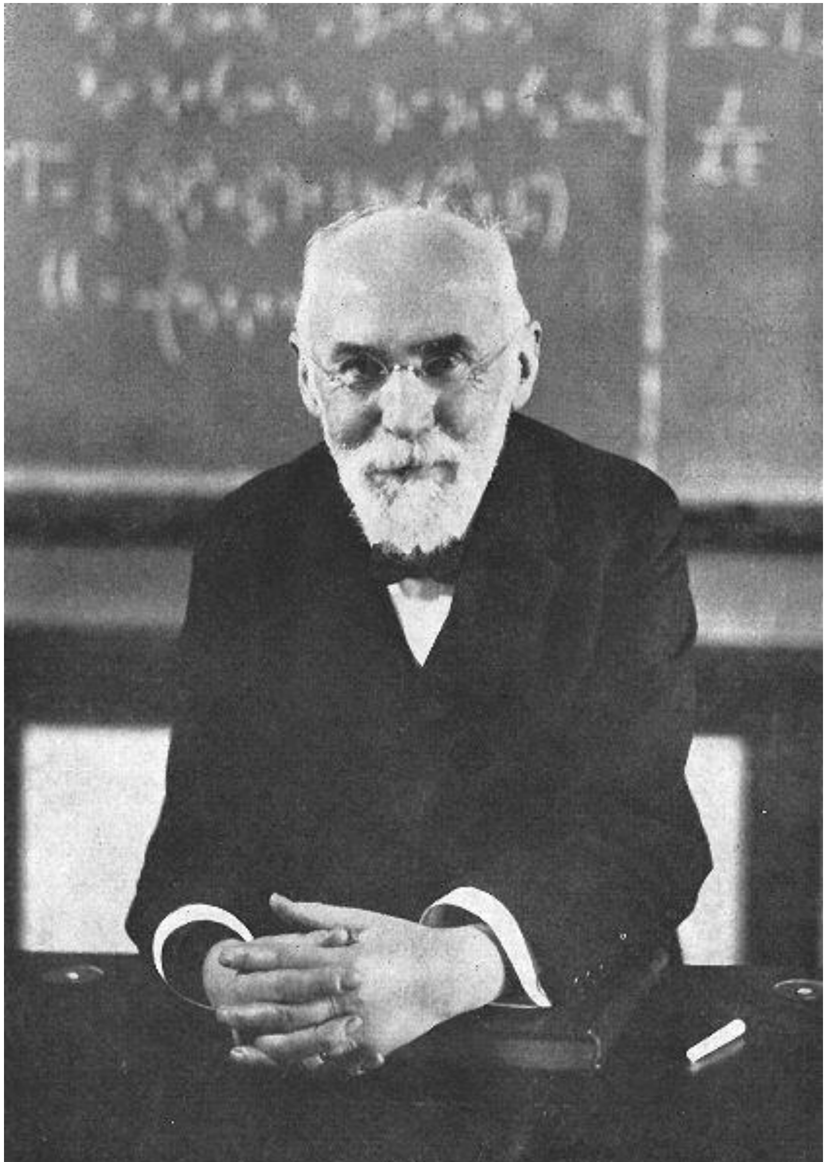
5~6^{th} March 2015

Table of Contents

카오스 이론(chaos theory)이란?

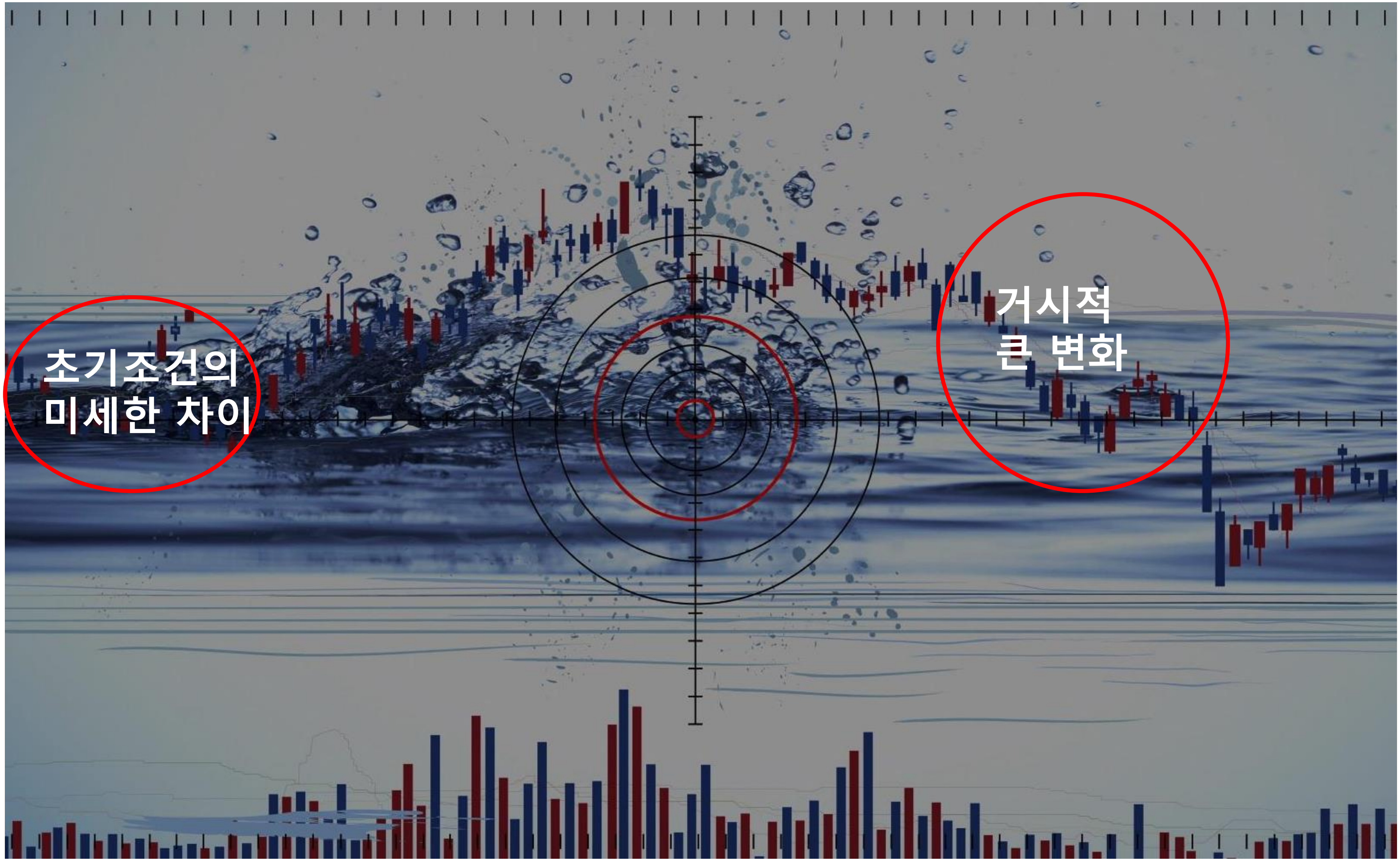
- 겉으로 보기에는 불안정하고 불규칙적으로 보이면서도 나름대로 질서와 규칙성

- 초기조건의 민감성 & 이상한 끌개



- 1987. MIT 기상학과 교수
- 1963. <대기과학 저널>에 <결정론적인 비주기적 유통 (Deterministic Nonperiodic Flow>을 발표
- 수차의 운동도 카오스계로 해석

2. E. N. Lorentz의 결과(1) –초기조건의 민감성



Ⅰ. Chaos theory

EX) Broken Windows Theory(깨진 유리창 이론)

EX) Broken Windows Theory(깨진 유리창 이론)

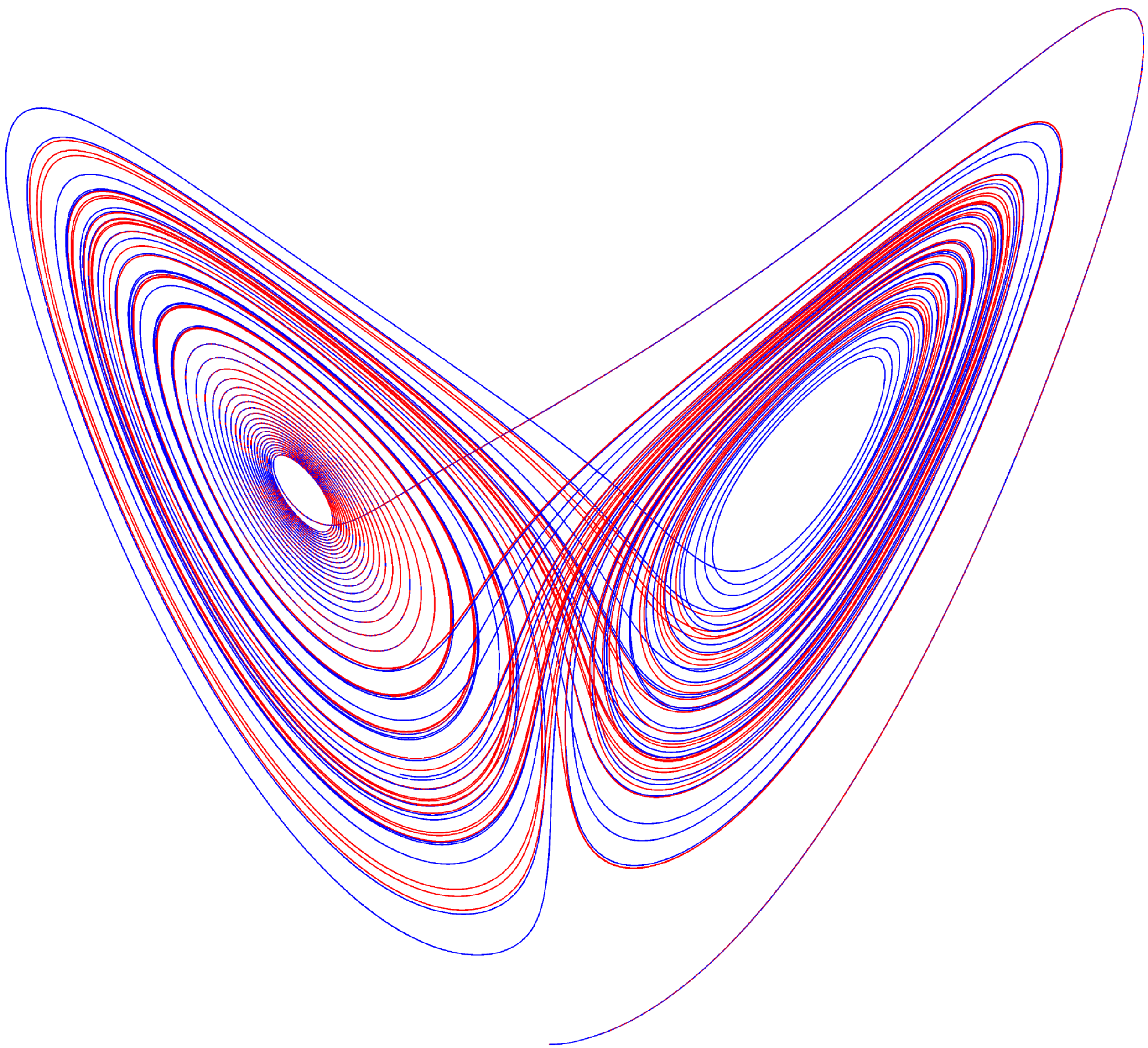
James Q. Wilson(제임스)
: 미국 정치학자

&

George L. Kelling (조지)
: 미국 범죄학자

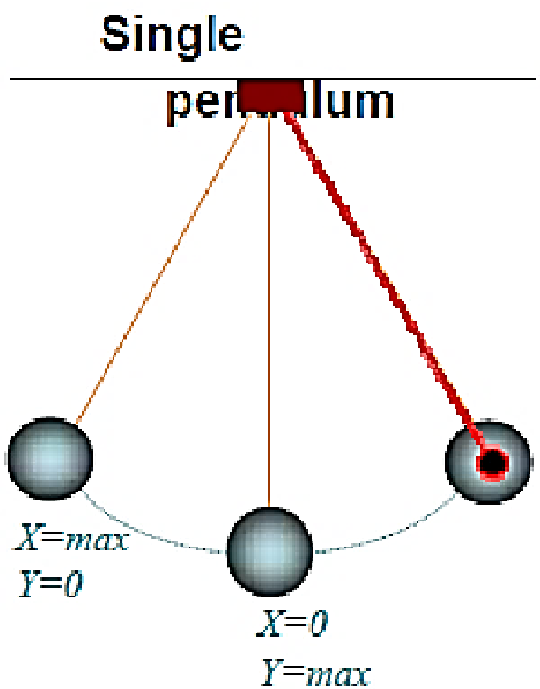
- ▶ 1982년 3월: Broken Windows Theory 발표
- ▶ 내용: 깨진 유리창 하나를 방치해 두면, 그 시점을 중심으로 범죄가 확산되기 시작한다는 이론으로, 사소한 무질서를 방치하면 큰 문제로 이어질 가능성이 높다는 의미를 담고 있음

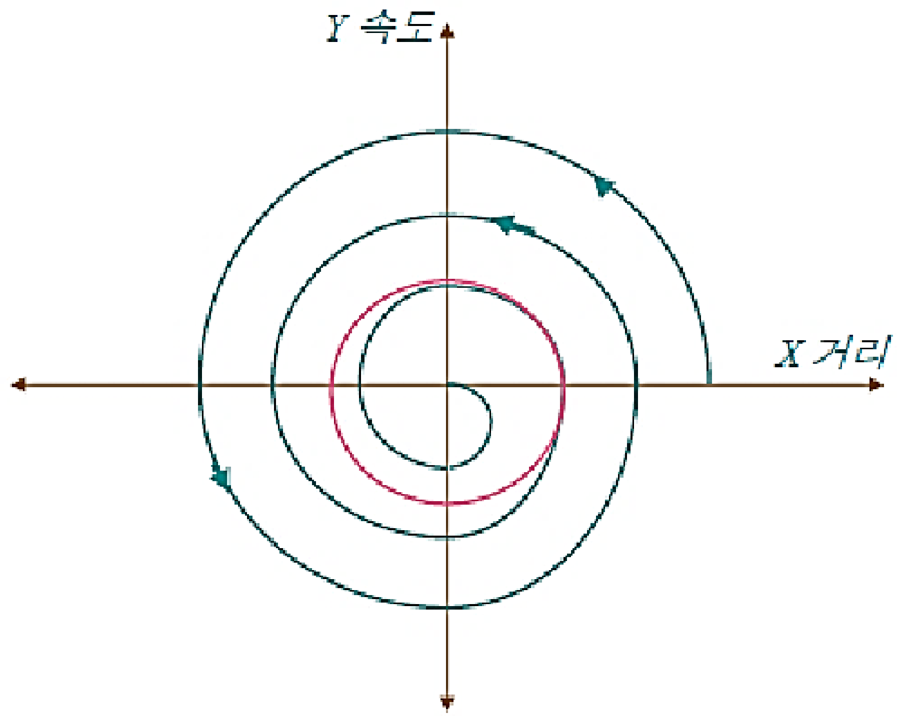
2. E. N. Lorentz의 결과(3) –끌개발견



기이한 끌개
(Strange attractor)

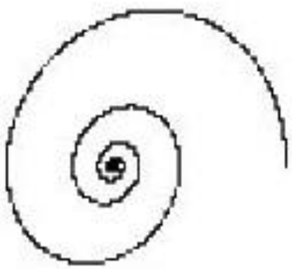
: 구체적이고 깨끗한
형상이 아닌
모호한 모습의 끌개



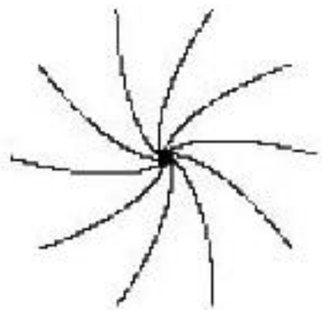


위상공간(State Space)

고정점 끌개

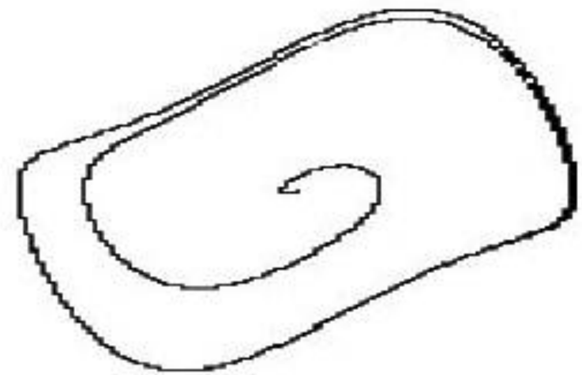


포커스

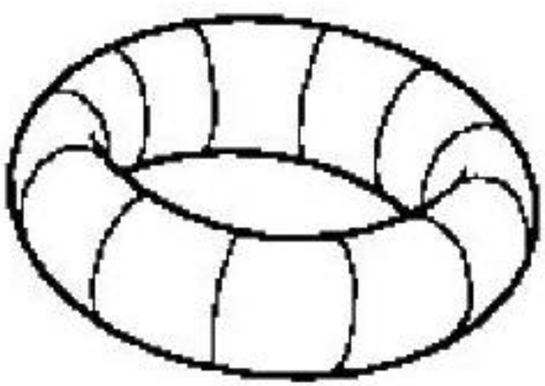


교점

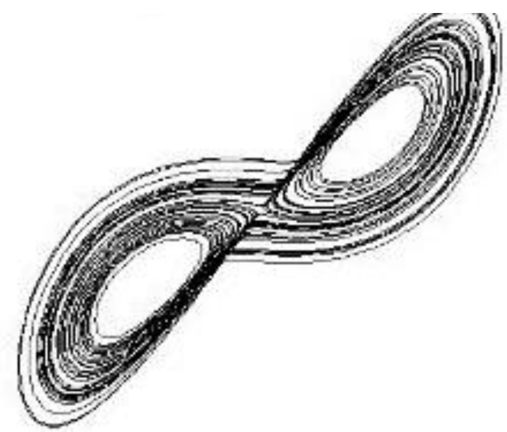
한계순환 끌개



토러스 끌개



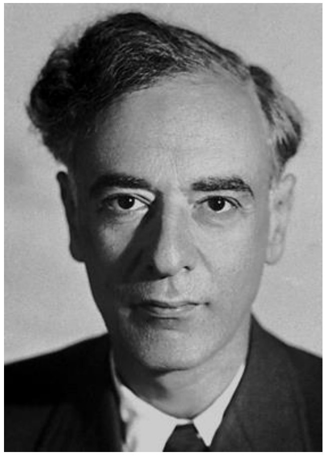
기이한 끌개



▶ Turbulence(난류)란?
- 운동하고 있는 유체에 있어서, 속도나 압력이 불규칙하게 변하는 흐름

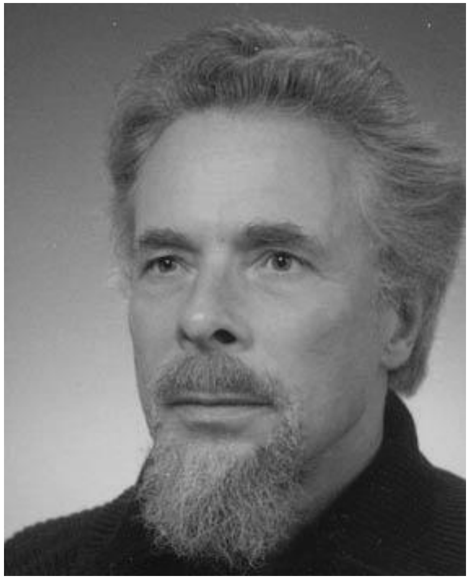
▶ "난류는 이론가의 묘지다"

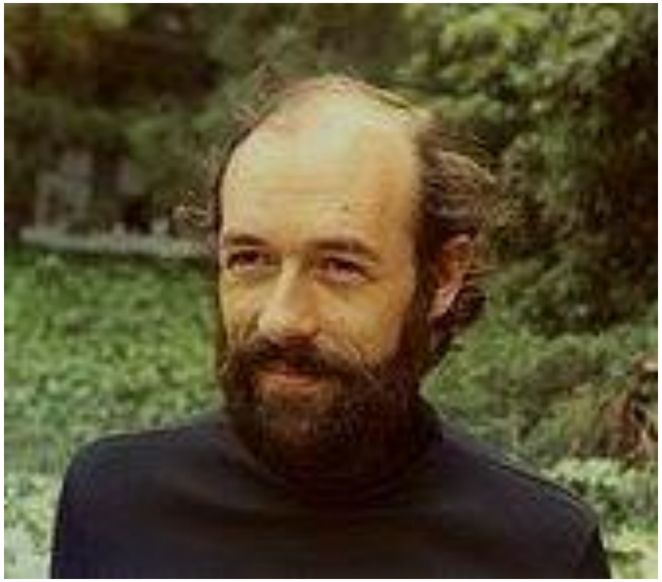
▶ 1970년대 이전:



란다우 (L. D. Landau)
: 러시아 이론 물리학자

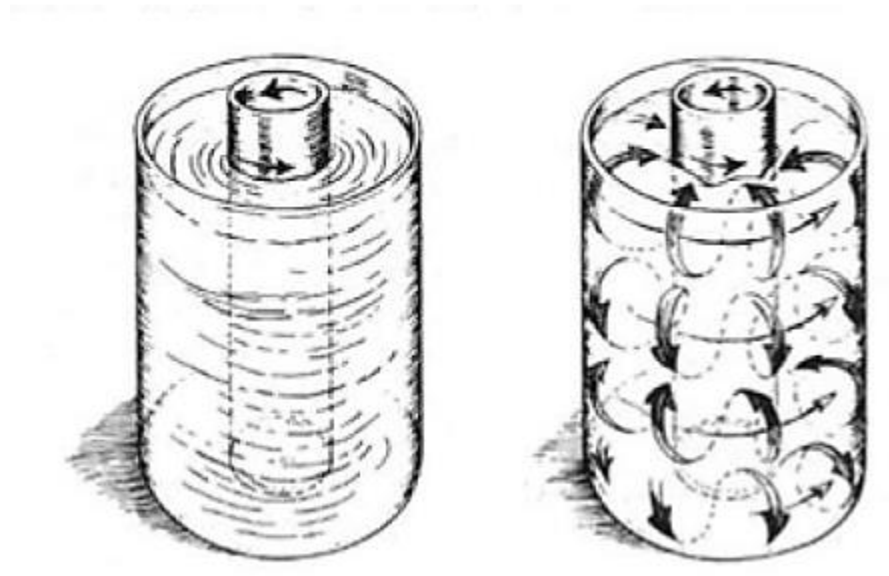
호프 (E. Hopf)
: 독일 수학자





Floris Takens (타켄스) & David Ruelle (루엘)
: 네덜란드 수학자 : 벨기에 수학자 물리학자

- ▶ 논문: " 난류의 본질에 관하여"(1973)
- ▶ (위상공간) 에너지 In = 토러스에서 한계순환고리, 마침내는 점으로
(위상공간) 에너지 Out = 끌개 점점 커짐
- ▶ 유체와 같이 에너지 균일하지 않은 경우: 끌개가 급격한 수축 팽창 반복
결국, 기이한 끌개 만듦



▶ H. L. Swinney(스위니) & J. P. Gollub(골럽)

▶ 연구: 바깥실린더는 정지되어 있고 안쪽의 실린더는 회전하는 두 개의 실린더사이의 유체 운동에 대하여

▶ 회전속도를 증가시키면서 실험을 했을 때, 유체의 운동은 프랙탈 차원의 기이한 끌개 모형을 형성

Table of Contents

Ⅰ. Review 1

Ⅱ. Fractal

Ⅱ. Fractal

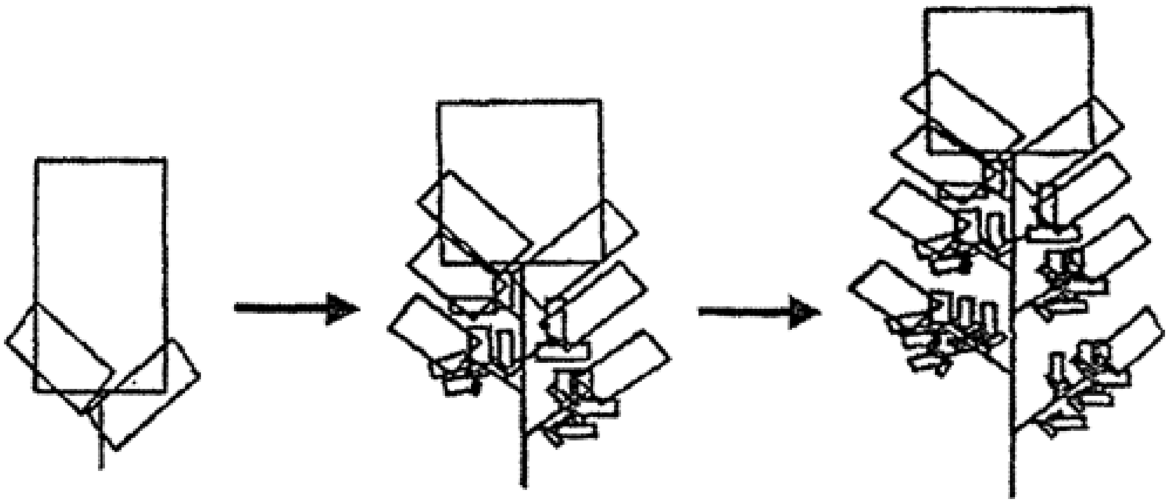
Ⅱ. Fractal

Intro. 프랙탈에 대해

Fractal(프랙탈)이란?

- 작은 구조가 전체 구조와 비슷한 형태로 끝없이 되풀이 되는 구조

- 라틴어의 부서진다(조각나다)는 의미의 동사 '프란게리(frangere)'의 형용사형인 '프락투스(fractus)'라는 낱말을 참조하여 만들어진 단어



5. Overlapping(중첩)

6. Repetition (반복)

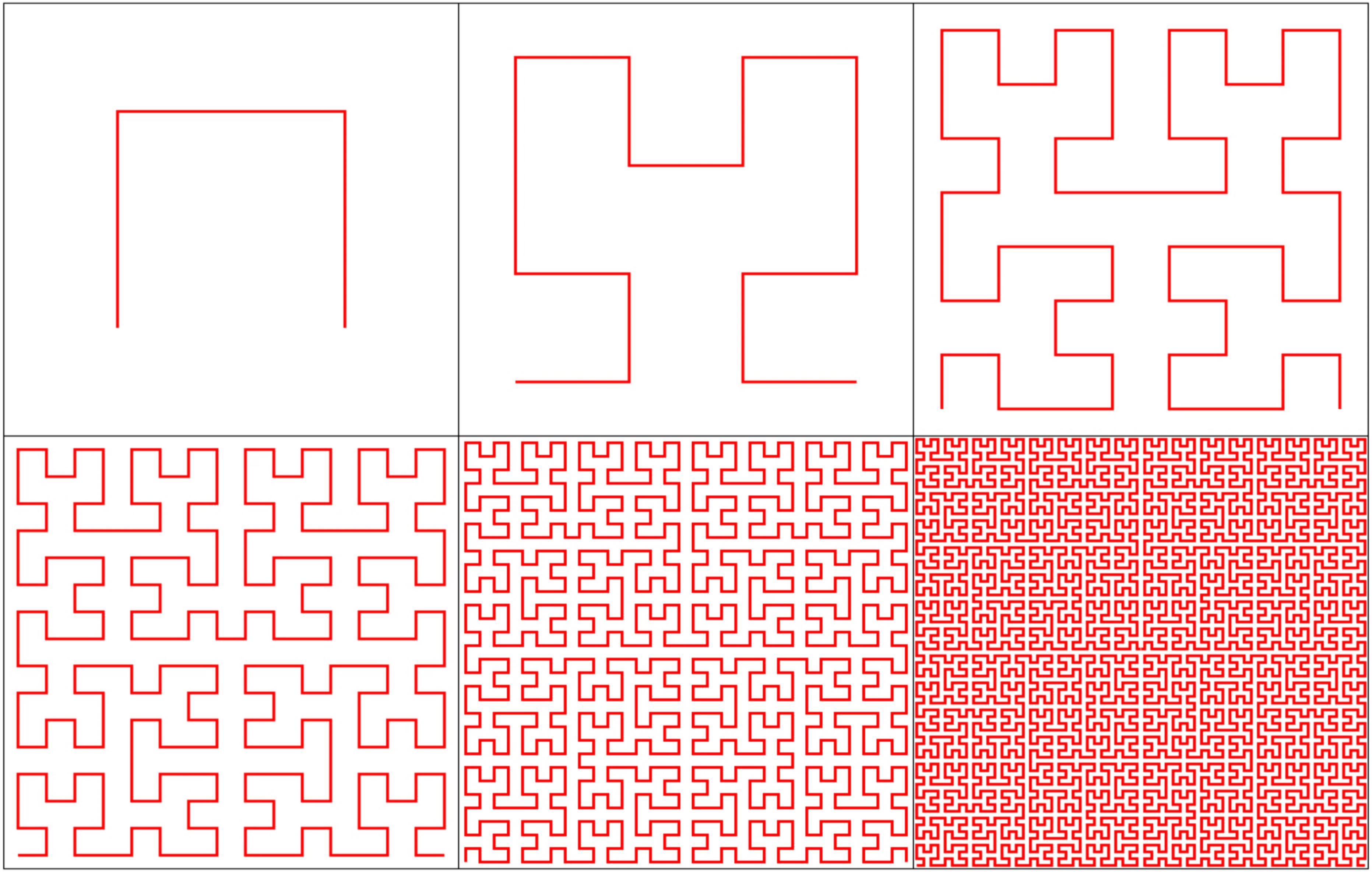
▶ G. Peano (페아노): 1858~1932
: 이탈리아의 수학자, 논리학자

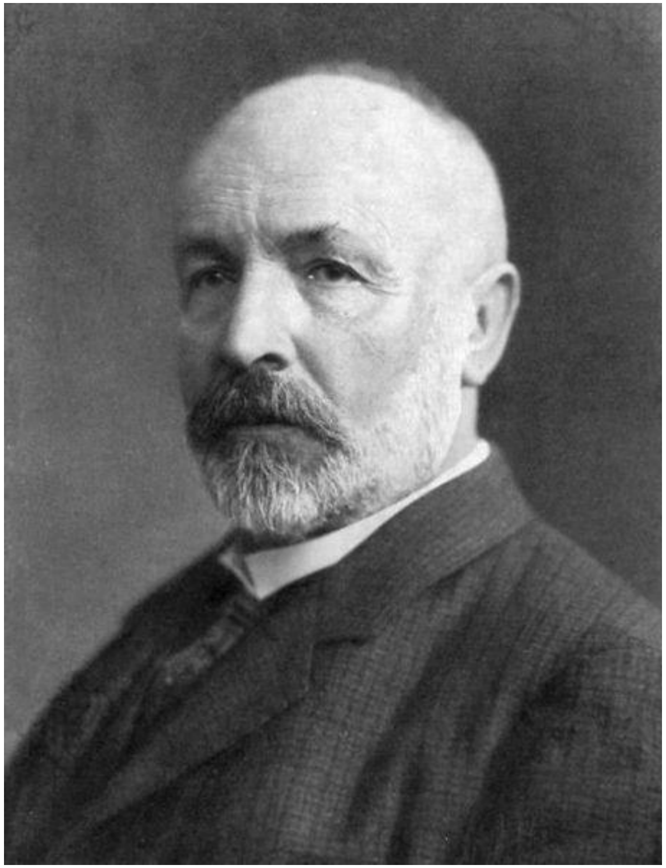
▶ 1890년경 '공간을 채우는 곡선 (Space-filling Curve)'를 발견

- 곡선이란 구부러지고 변형되는 선에 불과하여 어떻게 구부려지던 지든 1차원이라고 하는 것은 수학자들 한테는 상식.
- BUT! 페아노는 곡선을 매우 복잡한 방식으로 뒤틀어서 그것이 그려지는 종이를 전부 채울 수 있도록 만듦
- 2차원 평면을 채우는 모든 점의 집합은 곧 2차원 성을 가짐

▶기울기도 없고 차원조차도 애매한 이런 파격적인 곡선은 그 당시 수학자들에게 말로 표현하기 어려울 정도로 당혹스러운 것이었음

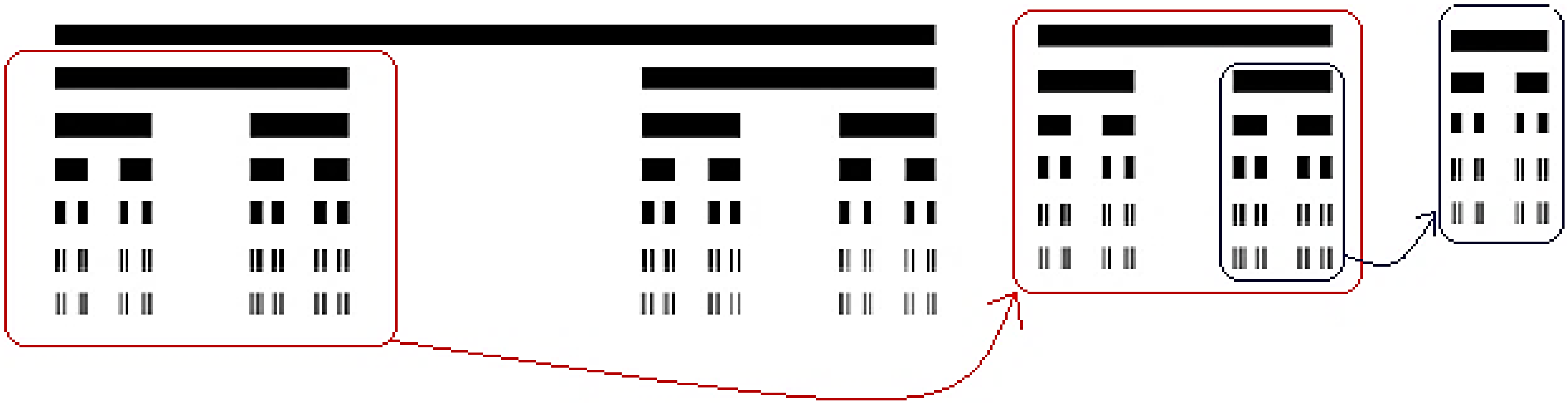
- 푸앵카레 조차도 페아노 곡선에 대한 회의적인 태도
- 당시 수학자들은 페아노 곡선을 '괴물의 집'이라 불렀음





▶ Georg Cantor(칸토어): 1845~ 1918
: 러시아에서 태어난 수학자

▶ 칸토어 집합
: 0과 1 사이의 실수로 이루어진 집합.
[0,1]로 시작하여 각 구간을 3 등분 하여 가운데 구간을 반복적으로 제외하는 방식

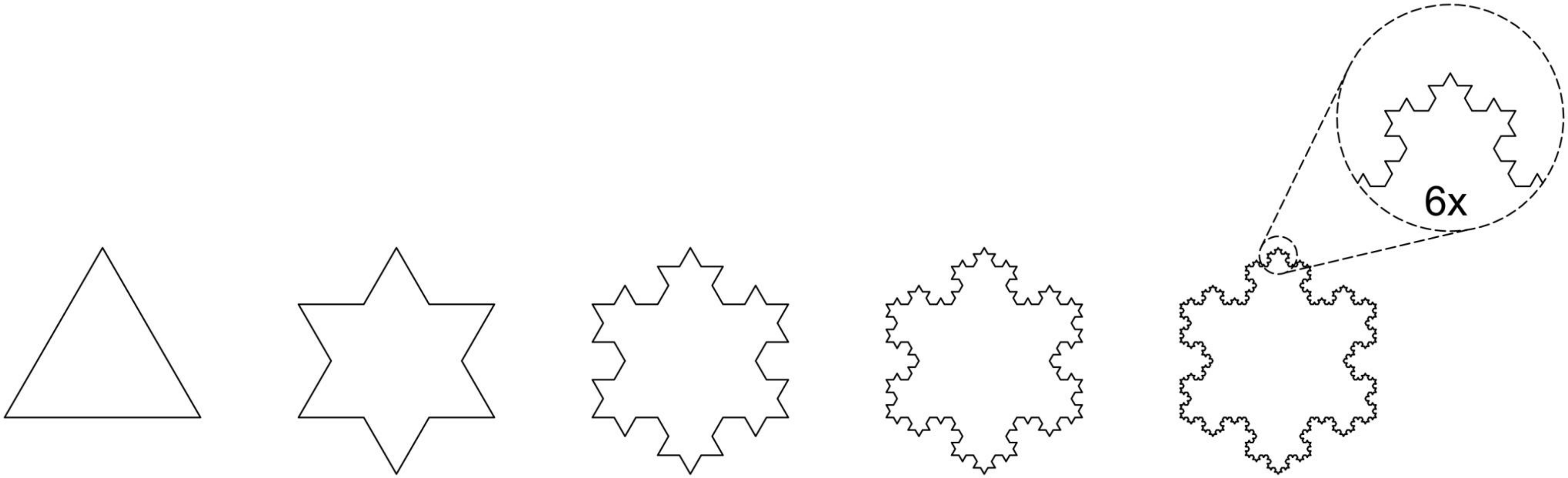


▶ 무한히 많은 점은 모였으나, 전체를 합한 길이가 0인 이상한 집단이 만들어짐.

▶ 이 집단의 아무 부분이나 선택해서 적당한 배율로 확대해 보면 전체를 닮은 자기 유사성(self-organization) 가짐

▶ Helge von Koch(코흐): 1870~ 1924
: 스웨덴 수학자

▶ 코흐 곡선
: 자신을 닮은 네 개의 부분으로 이루어져있음. 네 개의 부분 중에서 하나를 택해 확대경으로 정확히 3배 확대하여 보면 그 부분은 전체와 똑같은 모습을 띄게 됨



Koch Snowflake fractal - progression of scales

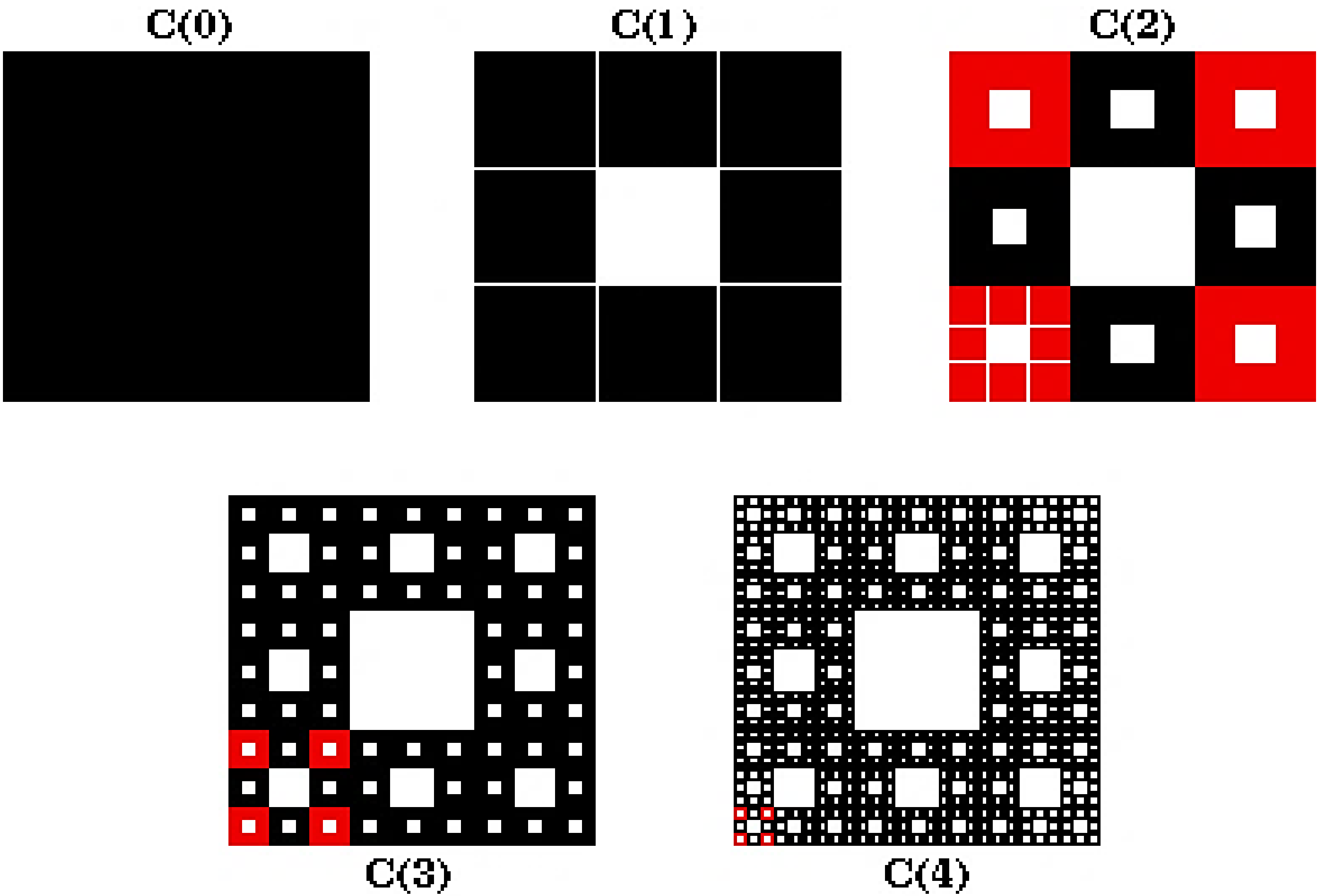
▶ Waclaw Sierpinski (시에르핀스키)
: 1882~ 1969, 폴란드 수학자

▶ 시에르핀스키 삼각형(가스켓)과 카펫

: 1. 정삼각형 하나에서 시작
2. 정삼각형의 세 변의 중점을 이으면 원래의 정삼각형 안에 작은 정삼각형 만들어짐. 이 작은 정삼각형 제거
3. 남은 정삼각형에 대해서 2번 시행.
4. 3번을 무한히 반복

Ⅱ. Fractal

4. Sierpinski Carpet & Curve(시에르핀스키 삼각형과 카펫)



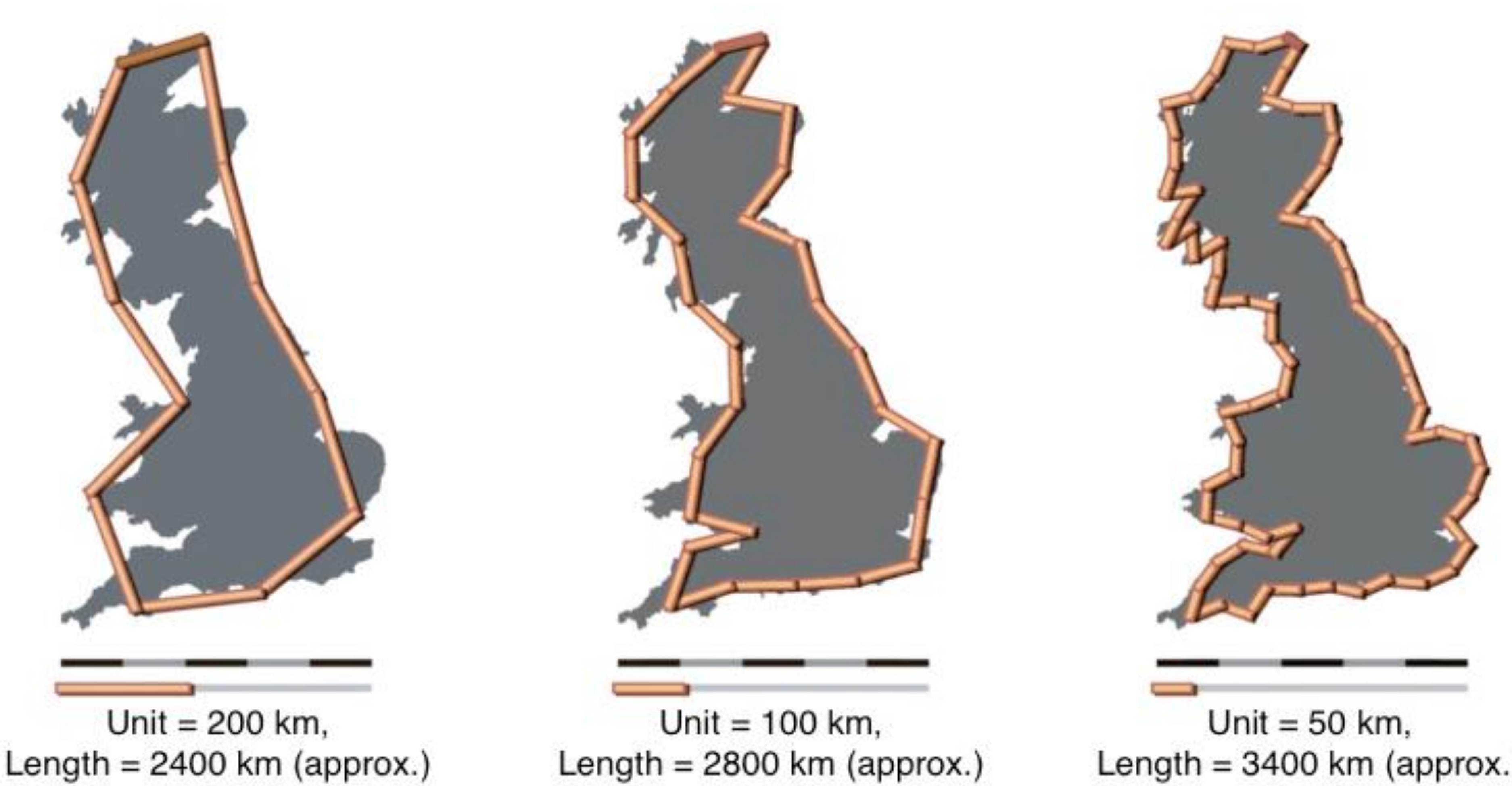
▶ Benoît B Mandelbrot (만델브로트)
: 1924~ 2010,
프랑스와 미국의 수학자

▶ 1982년에 만델브로트는
<The Fractal Geometry of Nature>
라는 책을 펴냄

▶ Q. 영국의 해안선의 길이는 얼마나
될까?

Ⅱ. Fractal

Q. 영국 해안선의 길이는?



▶ 지도를 놓고 선을 긋는 것 & 실제로 거닐면서 측정하는 것
= 큰 차이

- 자의 길이가 작아짐에 따라 점점 더 작은 크기의 만과 반도를 따라가며 재야하기 때문에 해안선의 길이는 더욱 길어짐
- 해안선의 길이는 더 작은 크기의 만과 반도를 연결한 선의 무한집합으로 생각할 수 있음

▶ 이러한 형상들은 분석하는 가장 현명한 관찰방법은 복잡한 현상들 가운데 가장 전형적인 현상의 모양 하나를 정하고 이에 관한 것을 구체적으로 세밀하게 조사하는 것임

- 프랙탈 이론을 응용하면 설명이 불가능하리라 여겨졌던 복잡한 자연의 형상을 단 몇 개의 반복형 수식으로 나타내고 또한 미적으로 그려 낼 수 있음

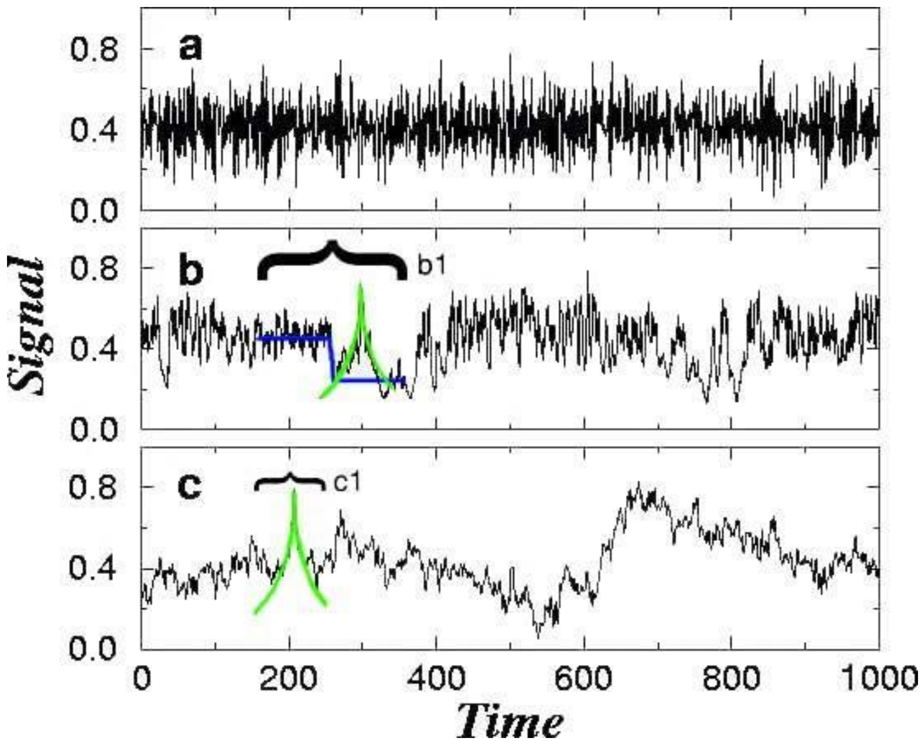
▶ 우리가 앞에서 본 페아노 곡선, 칸토어 집합, 코흐 곡선 등은 전체를 보아도 그 일부분만 보아도 동일한 차원

▶ 그러나 자연계나 사회경제계에서 관찰되는 많은 수의 구조는 이처럼 완벽하고 매끄러운 자기유사성을 가지지 않음

▶ 측정하는 부분마다 그 프랙탈 차원이 다른 구조가 섞여있는데, 이를 다중프랙탈(multi-fractal)이라고 정의

- 복잡계 내에는 자기유사성을 지닌 프랙탈 구조가 여러 곳에 깃들어 있는데, 복잡도가 증가하면 프랙탈 구조는 하나만이 나리고 여러 개가 겹쳐진, 즉 다중프랙탈 구조를 가짐
- 하나의 차원으로 복잡계를 표현하는 것이 어려워지고, 부분마다 변화하는 다양한 차원을 가진 하나의 시스템으로써 복잡계를 파악

EX) Singularity spectrum (특이성 스펙트럼)



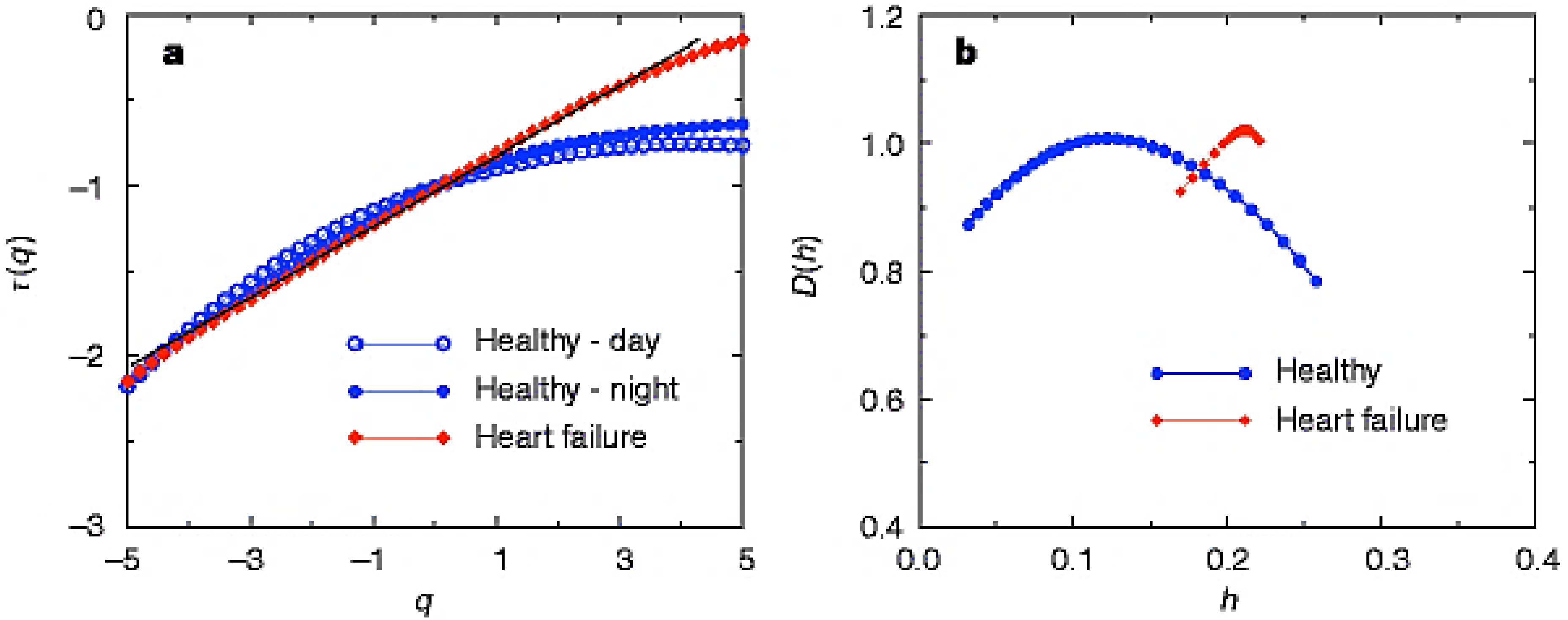
▶ 신호의 부분부분마다 나타나는 프랙탈은 군데군데 뾰족한 모양으로 특징지어짐

▶ 이러한 특징: 특이성

▶ 이러한 성질이 나타나는 점 : 특이점

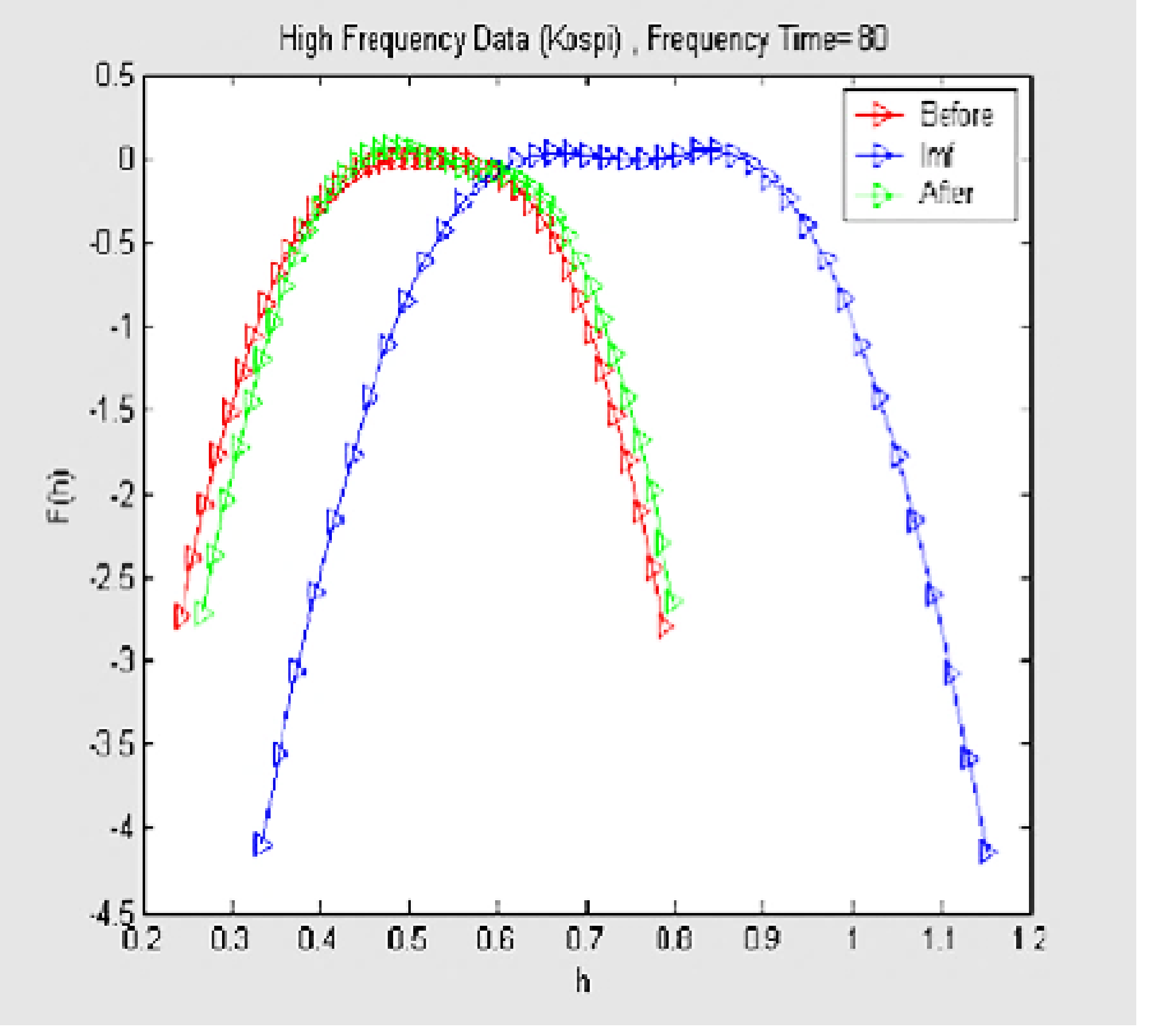
▶ 이 부근에서는 지수함수적인 급격한 변화가 관찰

EX) 심장 박동수



a
Healthy - day
Healthy - night
Heart failure
τ(q)
q
0
−1
−2
−3
−5
−3
−1
1
3
5
b
Healthy
Heart failure
D(h)
h
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

EX) 한국 주식시장


High Frequency Data (Kospi) , Frequency Time= 80
Before
Imf
After
F(h)
h
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2