이론, 실습, 시뮬레이션

디지털 논리회로

개정 3판

Chapter 02. 수(數)의 체계

학습목표 및 목차

- 10진수, 2진수, 8진수, 16진수 등의 표현 방법을 이해할 수 있다.
- 10진수, 2진수, 8진수, 16진수 등을 상호 변환할 수 있다.
- 2진수의 연산과 2진수 음수의 표현 방법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
- 부동소수점 2진수를 IEEE 754 표준 방식으로 표현할 수 있다.

01 10진수

10진수 표현법

- 10진수: 기수가 10인 수
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 10개 수로 표현

$$9345.35 = 9\times1000 + 3\times100 + 4\times10 + 5\times1 + 3\times0.1 + 5\times0.01$$
$$= 9\times10^{3} + 3\times10^{2} + 4\times10^{1} + 5\times10^{0} + 3\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$$

- 바빌로니아인 : 60진법을 사용(기원전 4000~3000년)
- 고대 로마의 기수법에는 5진법을 사용
- 10진법의 아라비아 숫자는 인도에서 기원전 2세기에 발명

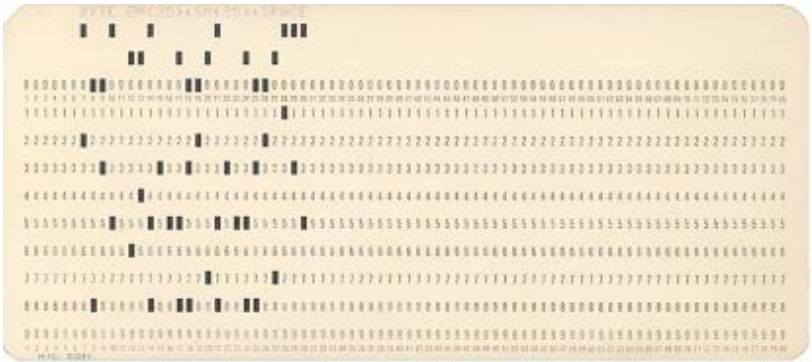
☞ 진법을 나타내는 기본수를 기수(基數, radix)라 한다. 10이 기수인 수를 10진법, 2가 기수인 수를 2진법, 12가 기수인 수를 12진법이라 한다.

02 2진수

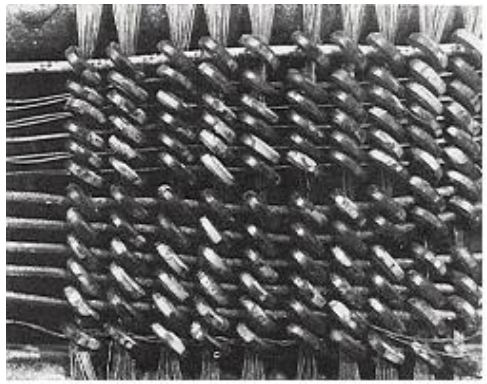
2진수 표현법

- 기수가 2인 수
- 0, 1 두 개의 수로 표현

$$1010.1011_{(2)} = 1\times1000_{(2)} + 0\times100_{(2)} + 1\times10_{(2)} + 0\times1_{(2)}$$
$$+1\times0.1_{(2)} + 0\times0.01_{(2)} + 1\times0.001_{(2)} + 1\times0.0001_{(2)}$$
$$= 1\times2^{3} + 0\times2^{2} + 1\times2^{1} + 0\times2^{0} + 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4}$$



Punch card



Core memory

03 8진수와 16진수

8진수 표현법

- 0~7까지 8개의 수로 표현

$$607.36_{(8)} = 6\times100_{(8)} + 0\times10_{(8)} + 7\times1_{(8)} + 3\times0.1_{(8)} + 6\times0.01_{(8)}$$
$$= 6\times8^{2} + 0\times8^{1} + 7\times8^{0} + 3\times8^{-1} + 6\times8^{-2}$$

- 2진수 3자리는 8진수 1자리 : $2^3 = 8^1$

$$10101110100010.0111111_{(2)} = 10\ 101\ 110\ 100\ 010.011\ 111\ 1_{(2)}$$
$$= 010\ 101\ 110\ 100\ 010.011\ 111\ 100_{(2)}$$
$$= 2\ \ 5\ \ 6\ \ 4\ \ 2.\ \ 3\ \ 7\ \ 4_{(8)}$$

2진수에 해당하는 8진수

8진수	0	1	2	3	4	5	6	7
2진수	000	001	010	011	100	101	110	111

03 8진수와 16진수

16진수 표현법

- 0~9, A~F까지 16개의 기호로 표현

$$6C7.3A_{(16)} = 6\times100_{(16)} + C\times10_{(16)} + 7\times1_{(16)} + 3\times0.1_{(16)} + A\times0.01_{(16)}$$
$$= 6\times16^{2} + C\times16^{1} + 7\times16^{0} + 3\times16^{-1} + A\times16^{-2}$$

- 2진수 4자리는 16진수 1자리 : $2^{4} = 16^{1}$

$$10101110100010.0111111_{(2)} = 10\ 1011\ 1010\ 0010.0111\ 111_{(2)}$$
$$= 0010\ 1011\ 1010\ 0010.0111\ 1110_{(2)}$$
$$= 2\ B\ A\ 2.\ 7\ E_{(16)}$$

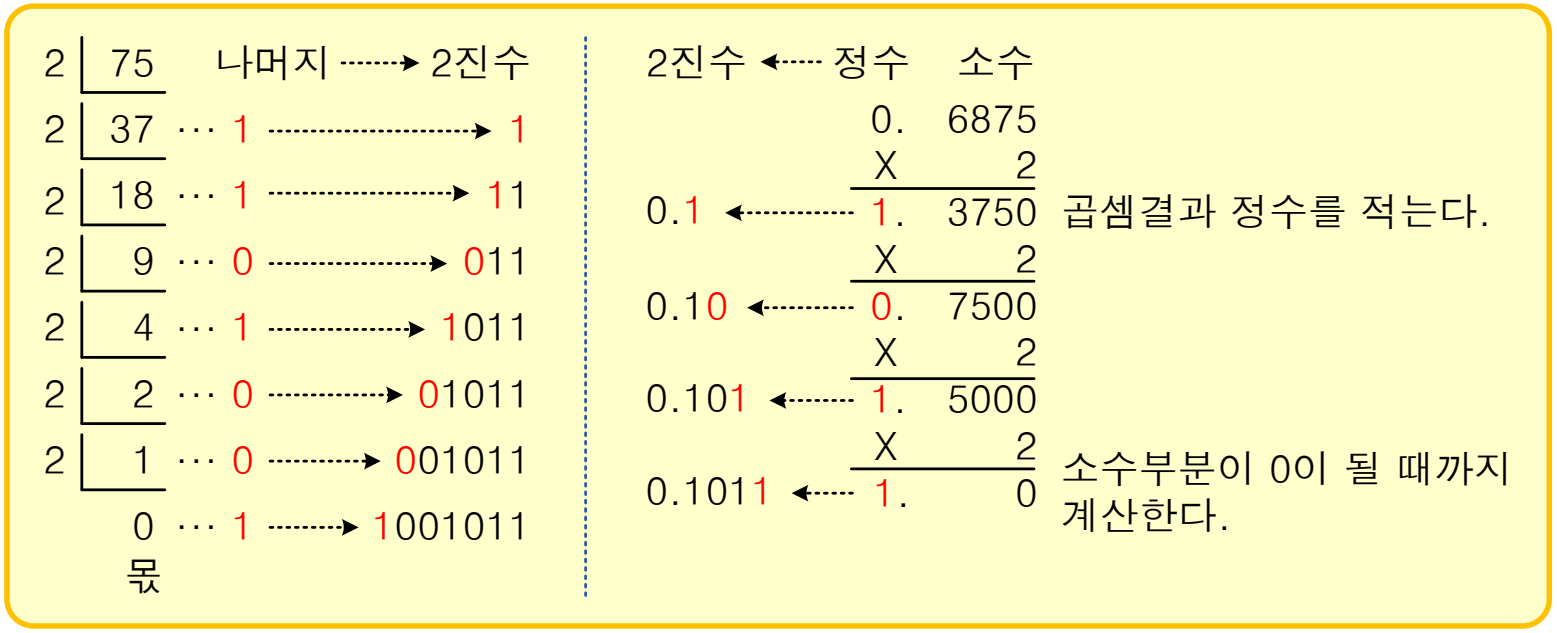
10진수	0	1	2	3	4	5	6	7
16진수	0	1	2	3	4	5	6	7
2진수	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

10진수	8	9	10	11	12	13	14	15
16진수	8	9	A	B	C	D	E	F
2진수	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

04 진법 변환

1. 10진수-2진수 변환

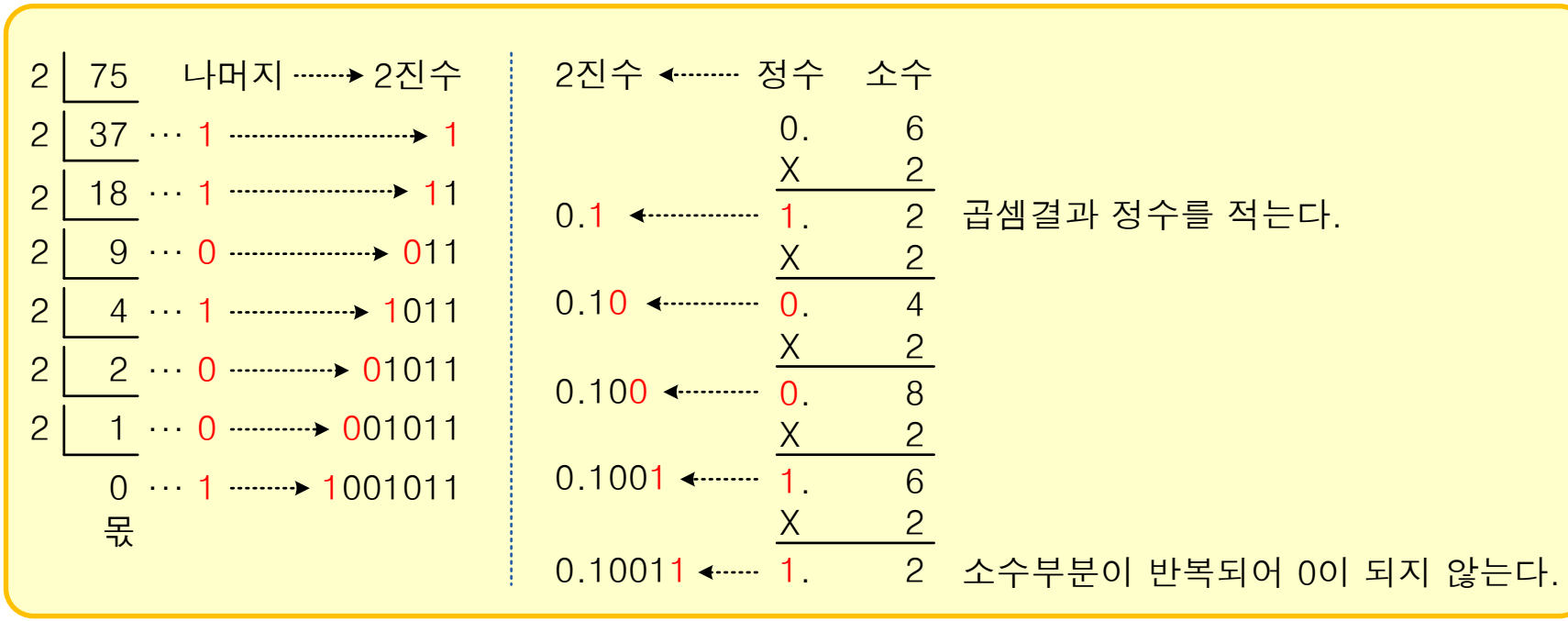
- 정수부분과 소수부분으로 나누어 변환
- 정수부분은 2로 나누고, 소수부분은 2를 곱한다.
- 10진수 75.6875를 2진수로 변환



$$75.6875_{(10)} = 1001011.1011_{(2)}$$

04 진법 변환

- 10진수 75.6을 2진수로 변환하는 경우
- 10진수 소수부분은 대부분의 경우 정확한 2진수로 변환이 안 된다.

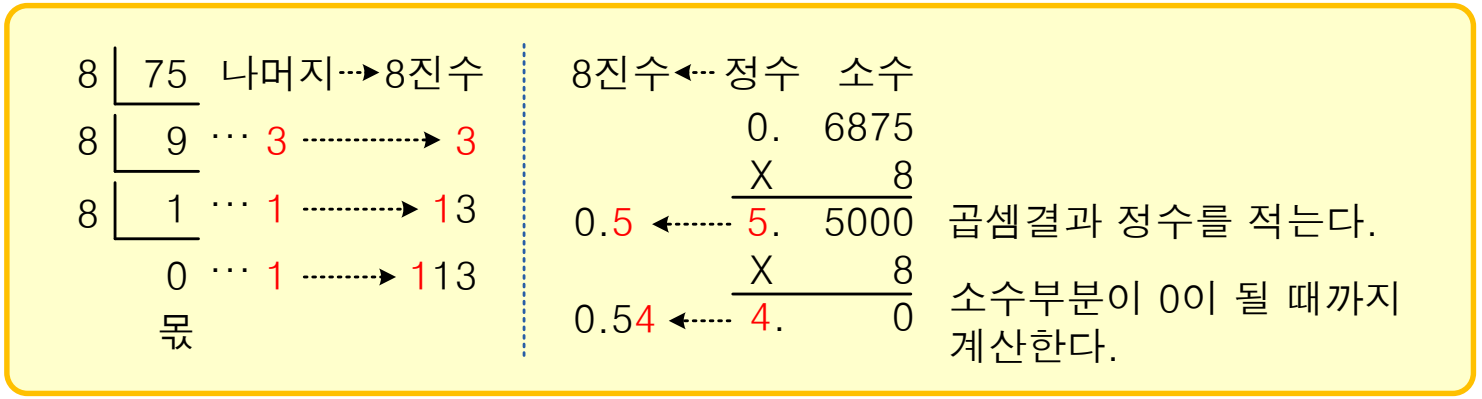


$$75.6_{(10)} = 1001011.1001\ 1001\ 1001\ 1001\ldots\ldots_{(2)}$$

04 진법 변환

2. 10진수-8진수 변환

- 10진수 75.6875를 8진수로 변환
- 8로 나누고, 곱한다.



$$75.6875_{(10)} = 113.54_{(8)}$$

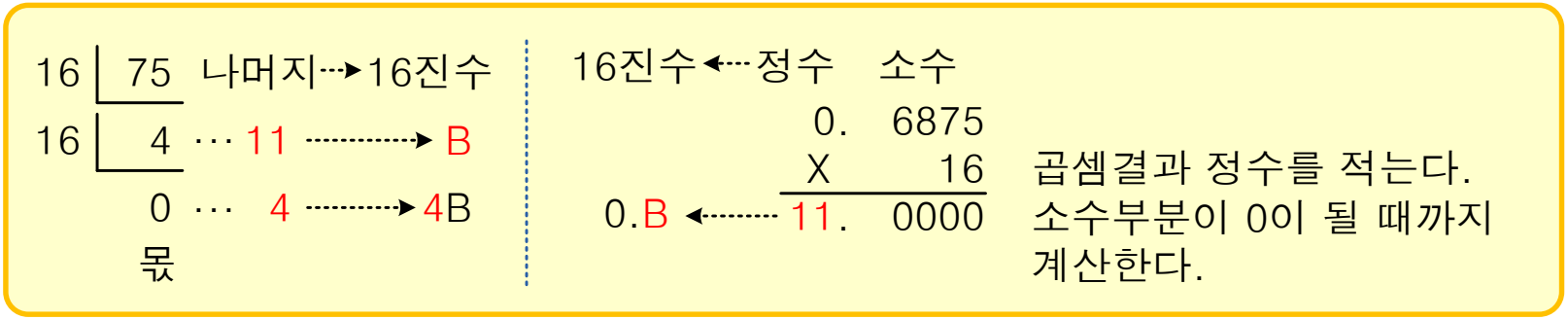
- 10진수 75.6을 8진수로 변환

$$75.6 = 113.46314631\ldots_{(8)}$$

04 진법 변환

3. 10진수-16진수 변환

- 10진수 75.6875를 16진수로 변환



$$75.6875_{(10)} = 4B.B_{(16)}$$

- 10진수 75.6을 16진수로 변환

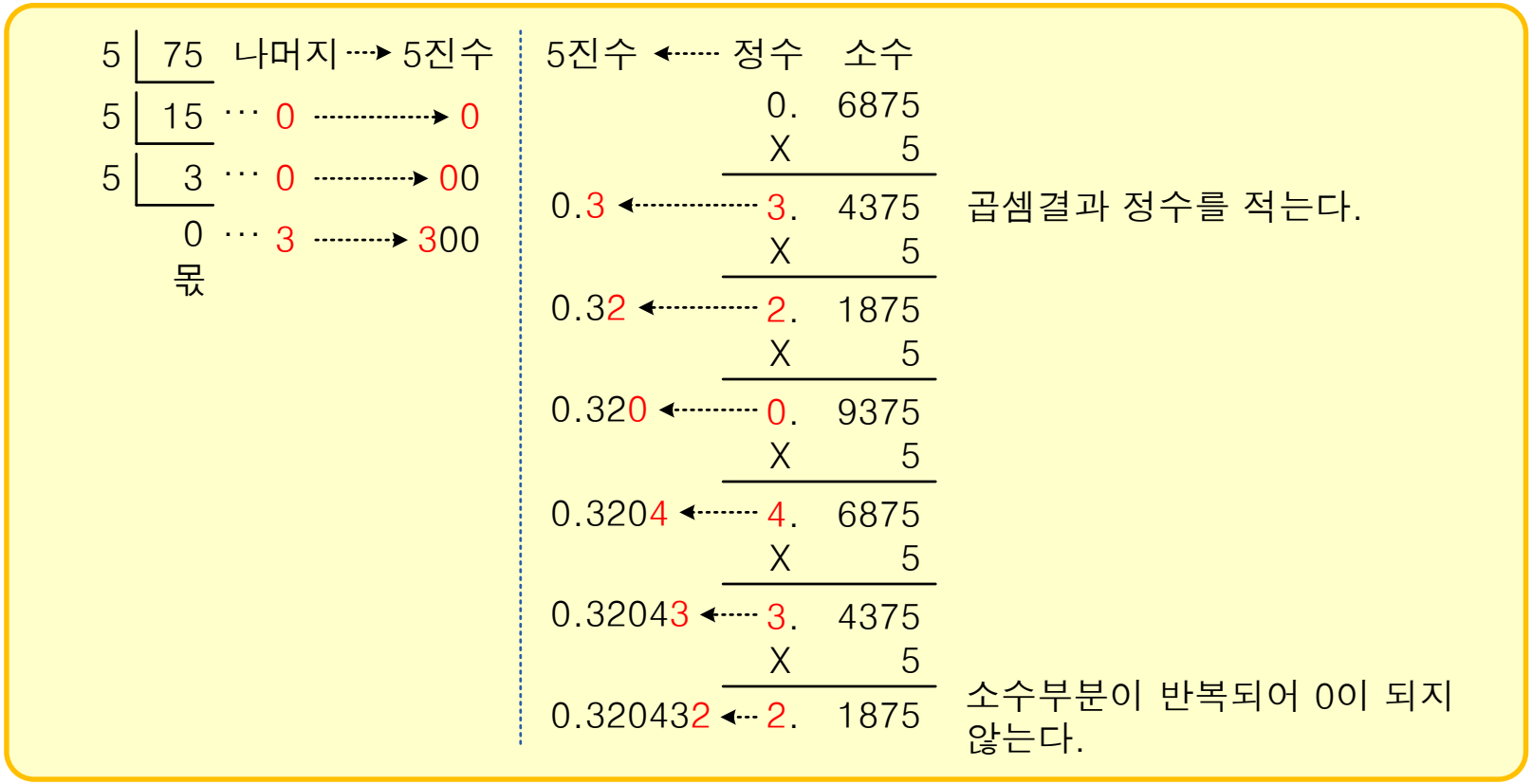
$$75.6_{(10)} = 4B.999\ldots_{(16)}$$

다른 진법의 경우도 같은 방법을
이용하여 변환할 수 있다.

04 진법 변환

10진수-5진수 변환

- 10진수 75.6875를 5진수로 변환

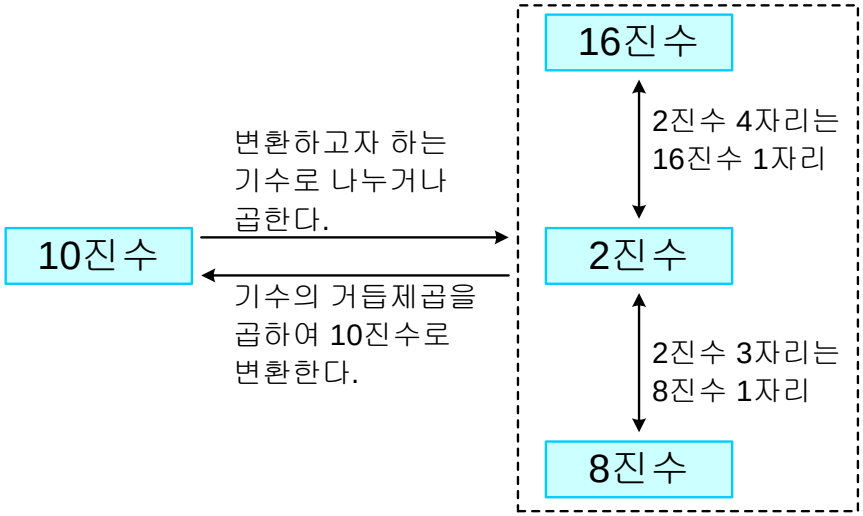


$$75.6_{(10)} = 300.32043204\ldots_{(5)}$$

04 진법 변환

4. 2진수-8진수-16진수-10진수 상호 변환

10진수	2진수	8진수	16진수
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F



04 진법 변환

상호변환 예

$$75.6875 = 1001011.1011_{(2)}$$
$$= 001\ 001\ 011.101\ 100_{(2)}$$
$$= 1\quad 1\quad 3.\quad 5\quad 4_{(8)}$$

10진→2진→8진

3자리씩 나눔

$$75.6 = 1001011.100110011001100110011\ldots_{(2)}$$
$$= 001\ 001\ 011.100\ 110\ 011\ 001\ 100\ 110\ 011\ldots_{(2)}$$
$$= 1\quad 1\quad 3.\quad 4\quad 6\quad 3\quad 1\quad 4\quad 6\quad 3\ldots_{(8)}$$

04 진법 변환

상호변환 예(Cont' d)

$$75.6875 = 1001011.1011_{(2)}$$
$$= 0100\ \ 1011.1011_{(2)}$$
$$= \quad 4 \quad B. \quad B_{(16)}$$

10진 → 2진 → 16진
4자리씩 나눔

$$75.6 = 1001011.10011001100110011001\ldots_{(2)}$$
$$= 0100\ \ 1011.1001\ \ 1001\ \ 1001\ \ 1001\ \ 1001\ldots_{(2)}$$
$$= \quad 4 \quad B. \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9\ldots_{(16)}$$

04 진법 변환

상호변환 예(Cont' d)

$$367.75_{(8)} = 011\ 110\ 111.111\ 101_{(2)}$$

8진수 1자리 = 2진수 3자리

$$9A3.50F3_{(16)} = 1001\ 1010\ 0011.0101\ 0000\ 1111\ 0011_{(2)}$$

16진수 1자리 = 2진수 4자리

$$101101.101_{(2)} = 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 + 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3}$$
$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 = 45.625_{(10)}$$

각 자리에 기수의 거듭제곱을 곱하여 10진수로 변환

04 진법 변환

상호변환 예(Cont' d)

$$364.35_{(8)} = 3\times8^2 + 6\times8^1 + 4\times8^0 + 3\times8^{-1} + 5\times8^{-2}$$
$$= 3\times64 + 6\times8 + 4\times1 + 3\times0.125 + 5\times0.015325$$
$$= 192 + 48 + 4 + 0.375 + 0.078125$$
$$= 244.453125_{(10)}$$

각 자리에 기수의 거듭제곱을 곱하여 10진수로 변환

$$A3.D2_{(16)} = 10\times16^1 + 3\times16^0 + 13\times16^{-1} + 2\times16^{-2}$$
$$= 10\times160 + 3\times1 + 13\times0.8125 + 2\times0.0078125$$
$$= 160 + 3 + 0.8125 + 0.0078125$$
$$= 163.8203125_{(10)}$$

04 진법 변환

■ 상호변환 예(Cont' d)

8진 → 2진 → 10진

$$364.35_{(8)} = 011\ 110\ 100.011\ 101_{(2)}$$

$$= 0\times2^{8} + 1\times2^{7} + 1\times2^{6} + 1\times2^{5} + 1\times2^{4} + 0\times2^{3} + 1\times2^{2} + 0\times2^{1} + 0\times2^{0}$$

$$+ 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 0\times2^{-5} + 1\times2^{6}$$

$$= 0 + 128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 + 0 + 0.15625$$

$$= 244.453125_{(10)}$$

16진 → 2진 → 10진

$$A3.D2_{(16)} = 1010\ \ 0011.1101\ \ 0010_{(2)}$$

$$= 1\times2^{7} + 0\times2^{6} + 1\times2^{5} + 0\times2^{4} + 0\times2^{3} + 0\times2^{2} + 1\times2^{1} + 1\times2^{0}$$

$$+ 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 0\times2^{-5} + 0\times2^{-6} + 1\times2^{-7} + 0\times2^{-8}$$

$$= 128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0 + 0.0625 + 0 + 0 + 0.0078125 + 0$$

$$= 163.8203125_{(10)}$$

05 2진수 정수 연산과 보수

1. 2진 양의 정수 덧셈

- 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10 (자리올림 발생)

10진수

```
carry →  11
          49
      +   58
     -----
         107
```

2진수

```
carry →  0110000
         00110001
     +   00111010
     ----------
         01101011
```

8진수

```
carry →  10
          61
      +   72
     -----
         153
```

16진수

```
carry →   0
          31
      +   3A
     -----
          6B
```

05 2진수 정수 연산과 보수

2. 2진 음의 정수 표현과 보수

- 최상위비트(MSB)를 부호비트로 사용
  - 양수(+) : 0 음수(−) : 1

- 2진수 음수를 표시하는 방법
  - 부호와 절대치(sign-magnitude)
  - 1의 보수(1's complement)
  - 2의 보수(2′s complement)

05 2진수 정수 연산과 보수

- 부호와 절대치
  - 부호비트만 양수와 음수를 나타내고 나머지 비트들은 같다.

- 1의 보수로 변환하는 방법
  - 0 → 1, 1 → 0으로 변환
    - 00000011 → 1의 보수 = 11111100

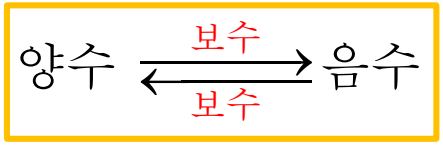
- 2의 보수로 변환하는 방법
  - 1의 보수 + 1 = 2의 보수
    - 00000011 → 2의 보수 = 1의 보수 + 1 = 11111100 + 1 = 11111101
    - 01101100 → 2의 보수 = 1의 보수 + 1 = 10010011 + 1 = 10010100

05 2진수 정수 연산과 보수

- r진법 n자릿수 x의 r의 보수 : $r^n - x$

- r진법 n자릿수 x의 r-1의 보수 : $r^n - 1 - x$
  - 567의 9의 보수 : $10^3 - 1 - 567 = 999 - 567 = 432$
  - 567의 10의 보수 : $10^3 - 567 = 1000 - 567 = 433$
  - 00000011의 1의 보수 : $2^8 - 1 - 00000011 = 11111111 - 00000011 = 11111100$
  - 00000011의 2의 보수 : $2^8 - 00000011 = 100000000 - 00000011 = 11111101$

- **양수를 보수로 바꾸면 음수**
- **음수를 보수로 바꾸면 양수**



- 2진수와 그 수의 1의 보수와의 합은 모든 bit가 1이 된다.
- 2진수와 그 수의 2 보수와의 합은 모든 bit가 0이 된다.

(자릿수를 벗어나는 비트는 제외)

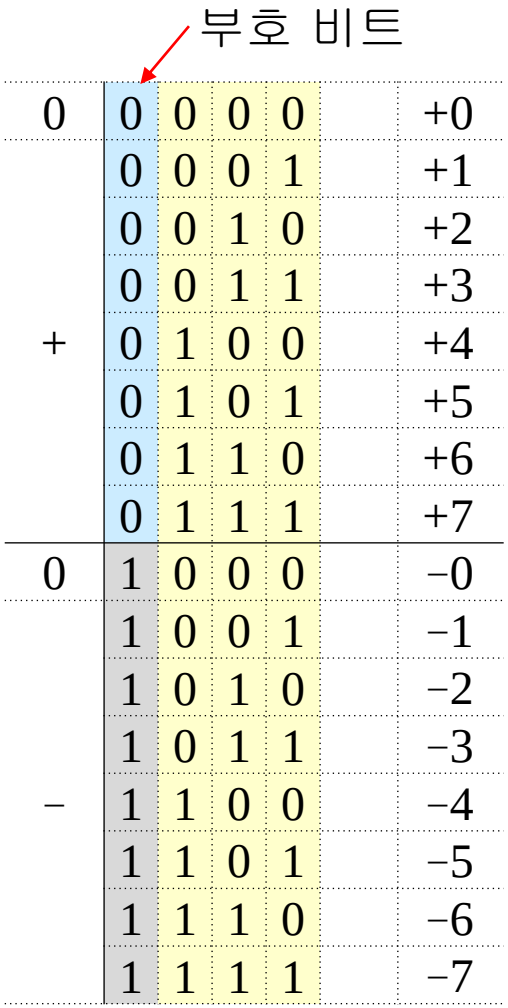
05 2진수 정수 연산과 보수

<2진수의 표현 방법 3가지(8bit)>

2진수	8비트 크기이며, MSB가 부호비트임		
	부호와 절대치	1의 보수	2의 보수
00000000	+0	+0	+0
00000001	+1	+1	+1
00000010	+2	+2	+2
00000011	+3	+3	+3
…	…	…	…
01111100	+124	+124	+124
01111101	+125	+125	+125
01111110	+126	+126	+126
01111111	+127	+127	+127
10000000	−0	−127	−128
10000001	−1	−126	−127
10000010	−2	−125	−126
10000011	−3	−124	−125
…	…	…	…
11111100	−124	−3	−4
11111101	−125	−2	−3
11111110	−126	−1	−2
11111111	−127	−0	−1

05 2진수 정수 연산과 보수

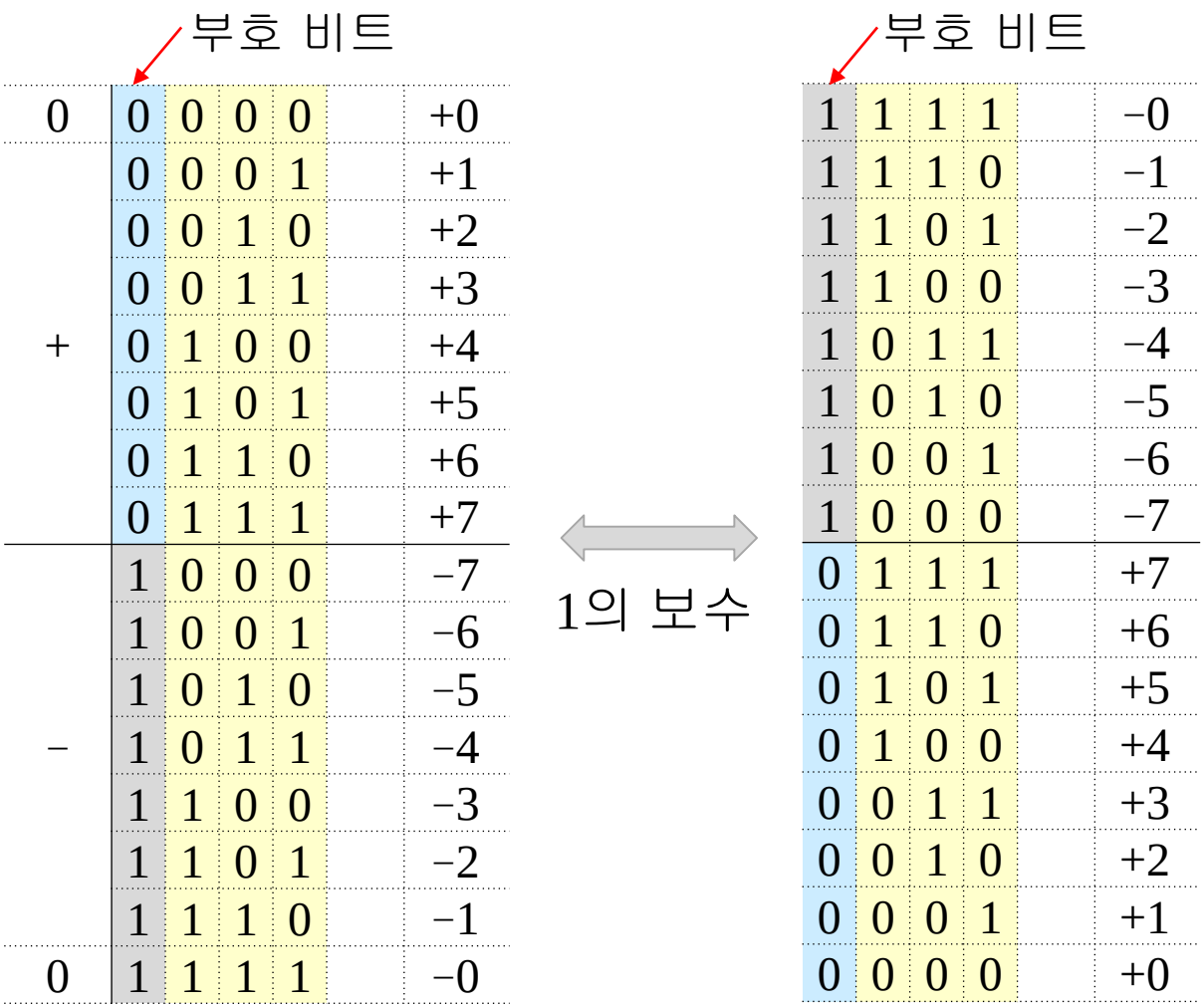
- 부호와 절대치의 표현(4bit)



	부호 비트					
0	0	0	0	0		+0
	0	0	0	1		+1
	0	0	1	0		+2
	0	0	1	1		+3
+	0	1	0	0		+4
	0	1	0	1		+5
	0	1	1	0		+6
	0	1	1	1		+7
0	1	0	0	0		−0
	1	0	0	1		−1
	1	0	1	0		−2
	1	0	1	1		−3
−	1	1	0	0		−4
	1	1	0	1		−5
	1	1	1	0		−6
	1	1	1	1		−7

05 2진수 정수 연산과 보수

- 1의 보수 표현(4bit)

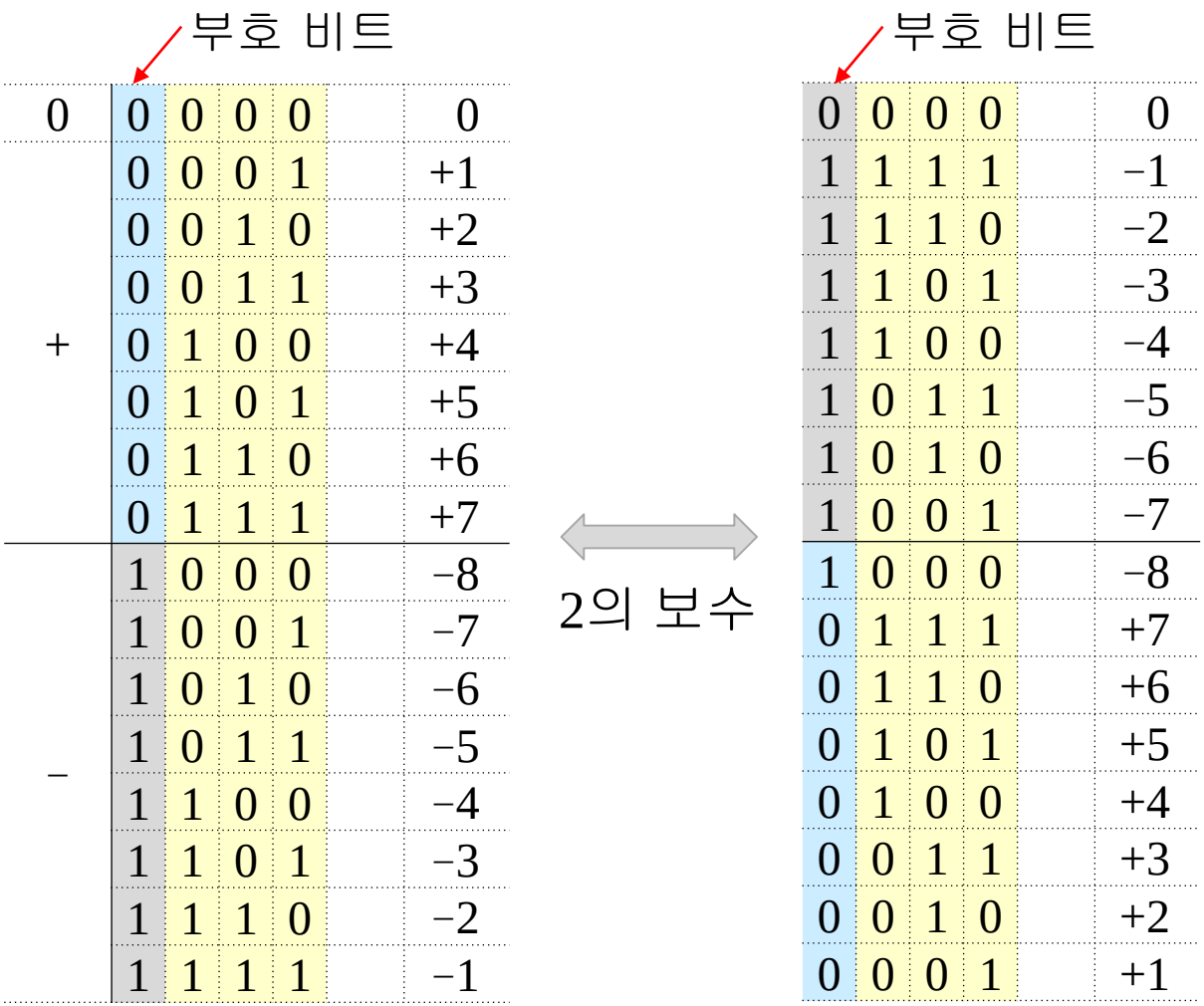


	부호					
0	0	0	0	0		+0
	0	0	0	1		+1
	0	0	1	0		+2
	0	0	1	1		+3
+	0	1	0	0		+4
	0	1	0	1		+5
	0	1	1	0		+6
	0	1	1	1		+7
	1	0	0	0		−7
	1	0	0	1		−6
	1	0	1	0		−5
−	1	0	1	1		−4
	1	1	0	0		−3
	1	1	0	1		−2
	1	1	1	0		−1
0	1	1	1	1		−0

부호					
1	1	1	1		−0
1	1	1	0		−1
1	1	0	1		−2
1	1	0	0		−3
1	0	1	1		−4
1	0	1	0		−5
1	0	0	1		−6
1	0	0	0		−7
0	1	1	1		+7
0	1	1	0		+6
0	1	0	1		+5
0	1	0	0		+4
0	0	1	1		+3
0	0	1	0		+2
0	0	0	1		+1
0	0	0	0		+0

05 2진수 정수 연산과 보수

- 2의 보수 표현(4bit)



	부호 비트					
0	0	0	0	0		0
+	0	0	0	1		+1
	0	0	1	0		+2
	0	0	1	1		+3
	0	1	0	0		+4
	0	1	0	1		+5
	0	1	1	0		+6
	0	1	1	1		+7
−	1	0	0	0		−8
	1	0	0	1		−7
	1	0	1	0		−6
	1	0	1	1		−5
	1	1	0	0		−4
	1	1	0	1		−3
	1	1	1	0		−2
	1	1	1	1		−1

부호 비트					
0	0	0	0		0
1	1	1	1		−1
1	1	1	0		−2
1	1	0	1		−3
1	1	0	0		−4
1	0	1	1		−5
1	0	1	0		−6
1	0	0	1		−7
1	0	0	0		−8
0	1	1	1		+7
0	1	1	0		+6
0	1	0	1		+5
0	1	0	0		+4
0	0	1	1		+3
0	0	1	0		+2
0	0	0	1		+1

05 2진수 정수 연산과 보수

- 뺄셈 : 보수를 취하여 더하면 뺄셈을 수행(Carry가 있으면 버림)

  7928−879 = 7928+(−879) = 7928+(−0879)

  자릿수 맞춤

  ⇨ 7928+(10^4−0879) = 7928+9121 = 17049

  ⇨ 7049

bit 수	2의 보수를 사용한 2진 정수의 표현 범위
n bit	$-2^{n-1} \sim +2^{n-1}-1$
4 bit	$-2^{4-1} \sim +2^{4-1}-1$ (−8 ~ +7)
8 bit	$-2^{8-1} \sim +2^{8-1}-1$ (−128 ~ +127)
16 bit	$-2^{16-1} \sim +2^{16-1}-1$ (−32,768 ~ +32,767)
32 bit	$-2^{32-1} \sim +2^{32-1}-1$ (−2,147,483,648 ~ +2,147,483,647)
64 bit	$-2^{64-1} \sim +2^{64-1}-1$ (−9,223,372,036,854,775,808 ~ 9,223,372,036,854,775,807)

n비트 2의 보수에 대한 10진수의 표현 범위

05 2진수 정수 연산과 보수

3. 부호 확장

- 부호 확장이란 늘어난 비트 수 만큼 부호를 늘려주는 방법

2진수 표현 방식	부호 확장 방법	예		
		구분	8bit	16bit 확장
부호와 크기	부호만 MSB에 복사하고, 나머지는 0으로 채움	양수	00101010	00000000 00101010
		음수	10010111	10000000 00010111
1의 보수	늘어난 길이만큼 부호와 같은 값으로 모두 채움	양수	00101010	00000000 00101010
		음수	10010111	11111111 10010111
2의 보수	늘어난 길이만큼 부호와 같은 값으로 모두 채움	양수	00101010	00000000 00101010
		음수	10010111	11111111 10010111

05 2진수 정수 연산과 보수

4. 2의 보수로 표현된 음수를 10진수로 변환

- 2의 보수 10101100을 10진수로 변환하는 경우

첫 번째 방법

MSB가 1이므로 음수이다. 실제크기는 -128이다.

$$10101100_{(2)} = -1\times2^7 + 0\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0$$
$$= -128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 = -128 + 44$$
$$= -84$$

두 번째 방법

2의 보수로 바꾸어 10진수로 바꾼 다음 -부호를 붙인다.

$10101100_{(2)} \Rightarrow$ 2의 보수 $01010100_{(2)}$

$$=0\times 2^7 + 1\times2^6 + 0\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0$$
$$=0+64+0+16+0+4+0+0$$
$$=84$$

➡ - 부호를 붙이면 -84

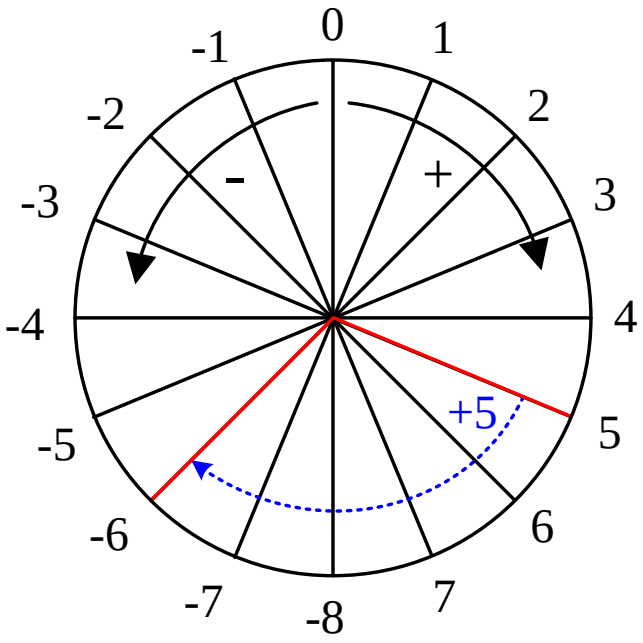
05 2진수 정수 연산과 보수

5. 2의 보수 연산

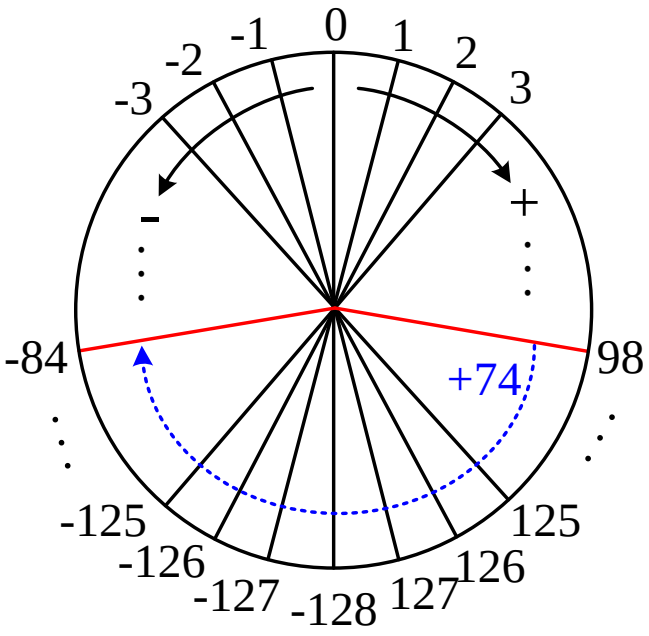
양수 + 양수 = 양수 (49+58=107)	큰 수 - 작은 수 = 양수 (58−49=9)	작은 수 - 큰 수 = 음수 (49−58=−9)
Carry → 0110000 00110001 + 00111010 0 01101011	Carry → 1111110 00111010 - 00110001 00111010 + 11001111 1 00001001 서로 같음	Carry → 0000000 00110001 - 00111010 00110001 + 11000110 0 11110111
음수 + 음수 = 음수 (−49−58=−107)	**큰 양수 + 큰 양수 = 음수** (98+74=−84)	**큰 음수 + 큰 음수 = 양수** (−98−74=+84)
Carry → 1001110 - 00110001 - 00111010 11001111 + 11000110 1 10010101	Carry → 1000010 01100010 + 01001010 0 10101100 서로 다름 overflow	Carry → 0111110 - 01100010 - 01001010 10011110 + 10110110 1 01010100 overflow

05 2진수 정수 연산과 보수

2진 정수의 2의 보수 개념도



5에서 +방향으로 5칸을 이동하면 -6이 된다.

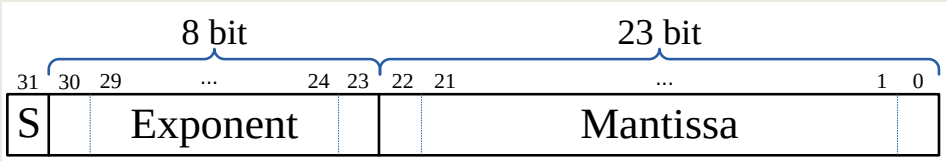
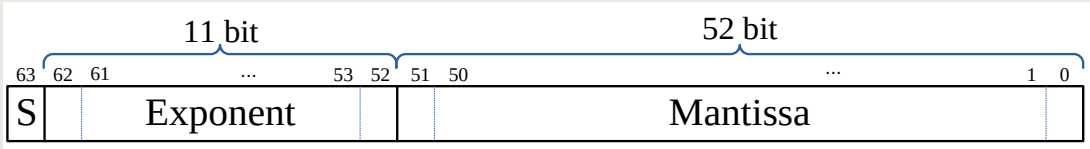


98+74는 98에 +방향으로 74칸을 이동하면 -84가 된다.

06 2진 부동소수점의 표현

- 컴퓨터의 부동소수점수는 IEEE 754표준을 따른다.
- 부호(sign), 지수(exponent), 가수(mantissa)의 세 영역으로 표시
- 단정도(single precision) 부동소수점수와 배정도(double precision) 부동소수점수의 두 가지 표현 방법이 있다.

단정도 및 배정도 부동소수점수의 비트 할당

구분	IEEE 754 표준 부동소수점수의 비트 할당	바이어스
단정도 부동소수점수		127
배정도 부동소수점수		1023

06 2진 부동소수점의 표현

정규화(normalization) : 과학적 표기 방법

- 2진수의 정규화

$$
\begin{aligned}
75.6875 &= 1001011.1011_{(2)} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{6} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{110_{(2)}}
\end{aligned}
$$

- 바이어스(bias) : 지수의 양수, 음수를 나타내기 위한 방법
  - IEEE 754 표준에서는 바이어스 127(단정도) 또는 1023(배정도)을 사용
  - 표현 지수 = 바이어스 + 2진 지수 값

부호 : 1비트	지수(bias 127) : 8비트	가수(1.xxx) : 23비트
양수	127 + 6 (01111111 + 00000110)	1.을 생략한 가수 (1.0001011011)
0	10000101	00101110110000000000000

여기에 "1."이 숨어 있다.

06 2진 부동소수점의 표현

10진수 -0.2를 단정도 부동소수점으로 표현

- 2진수로 변환하고 정규화한다.

$$
\begin{aligned}
-0.2 &= -0.0011001100110011001100\ldots_{(2)} \\
&= -1.1001100110011001100\ldots_{(2)} \times 2^{-3} \\
&= -1.1001100110011001100\ldots \times 2^{-11_{(2)}}
\end{aligned}
$$

부호 : 1비트	지수(bias 127) : 8비트	가수(1.xxx) : 23비트
양수	127 - 3 (01111111 - 00000011)	1.을 생략한 가수 (1.10011001100110011001100)
0	01111100	10011001100110011001100

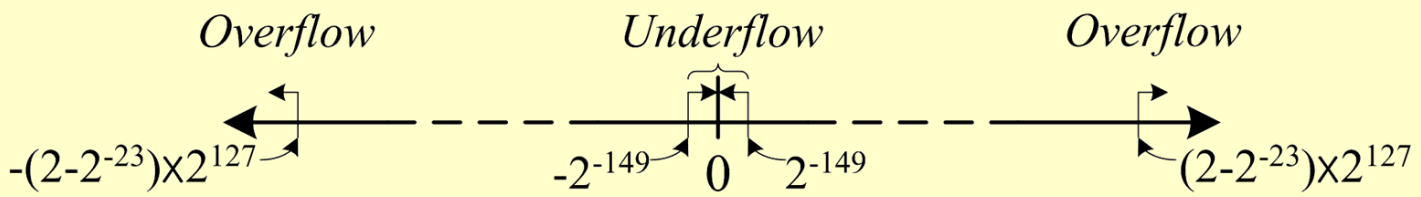
여기에 "1."이 숨어 있다.

06 2진 부동소수점의 표현

컴퓨터에서의 부동소수점수의 표현 범위

	단정도 부동소수점수	배정도 부동소수점수
비정규화된 2진수	$\sim\pm 2^{-149}$ to $\pm(1-2^{-23}) \times 2^{126}$	$\sim\pm 2^{-1074}$ to $\pm(1-2^{-52}) \times 2^{1022}$
정규화된 2진수	$\sim\pm 2^{-126}$ to $\pm(2-2^{-23}) \times 2^{127}$	$\sim\pm 2^{-1022}$ to $\pm(2-2^{-52}) \times 2^{1023}$
10진수	$\sim\pm 1.40 \times 10^{45}$ to $\pm 3.40 \times 10^{38}$	$\sim\pm 4.94 \times 10^{-324}$ to $\pm 1.798 \times 10^{308}$

단정도 부동소수점수의 표현 범위



감사합니다 ☺