每日一題27

單元3 直線與圓-點到直線的距離

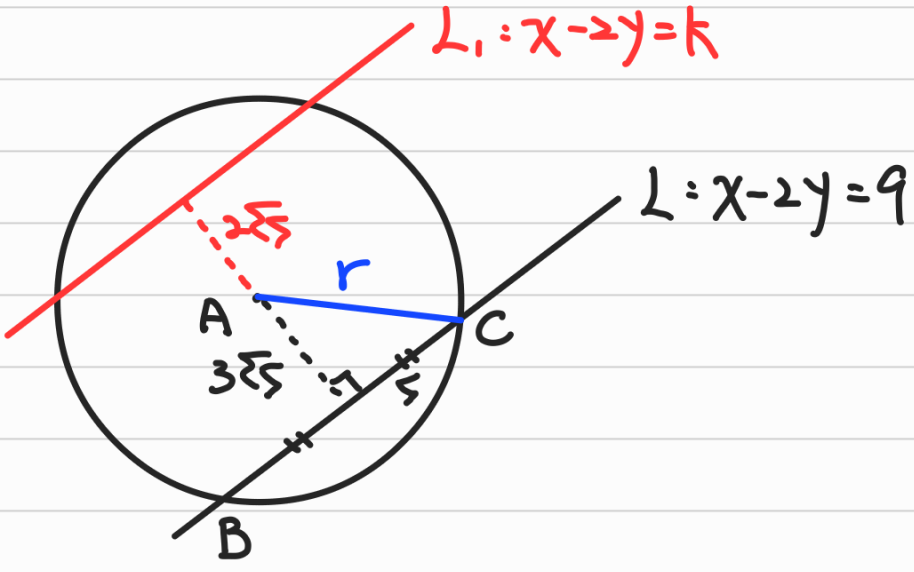
2025.09.27

114南一 第二次模考 #20

坐標平面上，直線 $L：x-2y=9$。今以點 $A(4,5)$ 為圓心，半徑為 r 畫圓 Γ。已知圓 Γ 和直線 L 交於 B、C 兩點，B 點在 C 點的左下方，且 $\overline{BC}=10$。若 P 點在圓 Γ 上，$\overline{PB}>\overline{PC}$，$\triangle PBC$ 的面積為 $25\sqrt{5}$。根據上述條件，試回答下列問題。

20. 試求 P 點坐標。（非選擇題，6 分）

〈Sol〉



$\because \triangle PBC=25\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10\cdot h=25\sqrt{5} \Rightarrow h=5\sqrt{5}$

設 P 在 $L_1：x-2y=k$ 上 $\Rightarrow d(A,L_1)=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{|4-2\cdot 5-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|-6-k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \Rightarrow |-6-k|=10$

$\Rightarrow k=4$ 或 -16（4不合）

$\therefore L_1：x-2y=-16$

$r^2 = (3\sqrt{5})^2 + 5^2 = 45 + 25 = 70$

$\Rightarrow C : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 70$

$$\begin{cases} x - 2y = -16 \Rightarrow y = \dfrac{x+16}{2} \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 70 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-4)^2 + \left(\dfrac{x+16}{2} - 5\right)^2 = 70$

$\Rightarrow (x-4)^2 + \left(\dfrac{x+6}{2}\right)^2 = 70 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + \dfrac{x^2+12x+36}{4} = 70$

$\Rightarrow 4x^2 - 32x + 64 + x^2 + 12x + 36 = 280$

$\Rightarrow 5x^2 - 20x - 180 \Rightarrow x^2 - 4x - 36 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{160}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{10}$

(負不合, $\because \overline{PB} > \overline{PC} \therefore x = 2 + 2\sqrt{10}$)

$\Rightarrow y = \dfrac{2 + 2\sqrt{10} + 16}{2} = 9 + \sqrt{10}$

$\therefore P(2 + 2\sqrt{10}, 9 + \sqrt{10})$ #