每日一題29

單元4 數列與級數-
等差數列&等比數列

2025.09.29

114南一 第二次模考 #10

已知數列〈a_n〉是等比數列，公比 $r<0$；數列〈b_n〉是等差數列。若 $a_1=b_1>0$，$a_3=b_3$。試選出一定正確的選項。

(1) $a_2\neq b_2$

(2) $a_5\neq b_5$

(3) 若 $a_3<a_1$，則 $b_1>b_2>b_3>\cdots>b_k>b_{k+1}>\cdots$（$k$ 為正整數）

(4) 若 $a_3<a_1$，則 $|a_1-a_3|<|a_2-a_4|$

(5) 若 $a_3>a_1$，則 $|a_5-a_3|>|b_5-b_3|$

〈Sol〉

(1) $b_3=a_3=\underbrace{a_1}_{>0}\cdot r^2>0 \Rightarrow b_2=\frac{b_1+b_3}{2}>0$

but $\because a_1>0\cdot r<0 \therefore a_2=a_1\cdot r<0$

$\therefore a_2\neq b_2$

(2) if $a_5=b_5 \Rightarrow a_1\cdot r^4=b_1+(5-1)d$

$\Rightarrow a_1\cdot r^4=b_1+4d$

設 $r=-1, d=0 \Rightarrow a_1=b_1\cdot a_3=b_3$

(3) $\because a_3<a_1 \Rightarrow b_3<b_1 \Rightarrow d<0$

$\therefore b_1>b_2>b_3>\cdots>b_k>b_{k+1}>\cdots$

(4) $\because a_3 < a_1 \quad \therefore |r| < 1$

$$|a_2 - a_4| = |a_1 r - a_1 r^3| = |r||a_1 - a_1 r^2|$$

$$< |a_1 - a_1 r^2| = |a_1 - a_3|$$

(5) $\because a_3 > a_1 \quad \therefore |r| > 1 \quad (r^2 > 1)$

$$|b_5 - b_3| = |b_3 - b_1| = |a_3 - a_1| = |a_1 r^2 - a_1|$$

$$< r^2 |a_1 r^2 - a_1| = |a_1 r^4 - a_1 r^2|$$

$$= |a_5 - a_3| \quad \#$$