

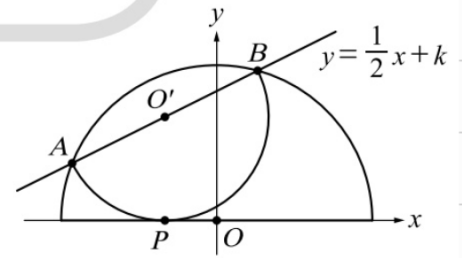
每日一題18

單元3 直線與圓-  
直線與圓的關係

2025.09.18

# 114翰林第一次模考 #12

如右圖，坐標平面上有大小兩個半圓，其中大半圓的圓心為  $O(0, 0)$  且直徑落在  $x$  軸上，小半圓圓心為  $O'$  且直徑的兩端  $A, B$  為直線  $L: y = \frac{1}{2}x + k$  ( $k > 0$ ) 與大半圓圓周的交點，小半圓的圓周與  $x$  軸相切於  $P$  點。試選出正確的選項。



- (1) 線段  $AB$  的中垂線必過原點  $O(0, 0)$
- (2) 小半圓的圓心  $O'$  落在直線  $y = -2x$  上
- (3) 原點  $O$  到直線  $L$  的距離為  $\frac{|k|}{\sqrt{5}}$
- (4) 若大半圓的半徑為 2，則小半圓半徑為  $\sqrt{2}$
- (5) 若大半圓的半徑為 2，則  $k = \frac{10}{3}$

<Sol>

$$(1) \because A, B \text{ 在大圓上} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB}$$

$$\text{且小圓圓心 } O' \Rightarrow \overline{O'A} = \overline{O'B}$$

$\therefore O, O'$  於  $AB$  中垂線上

( $\because$  性質：線上一點到兩端點等距)

$$(2) \because m_{AB} = \frac{1}{2} \therefore m_{AB \text{ 中垂線}} = -2$$

$$\text{By (1), 設中垂線: } y - 0 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x$$

$\therefore O'$  亦於  $y = -2x$  上

$$(3) \overleftrightarrow{AB}: y = \frac{1}{2}x + k \Rightarrow 2y = x + 2k \Rightarrow x - 2y + 2k = 0$$

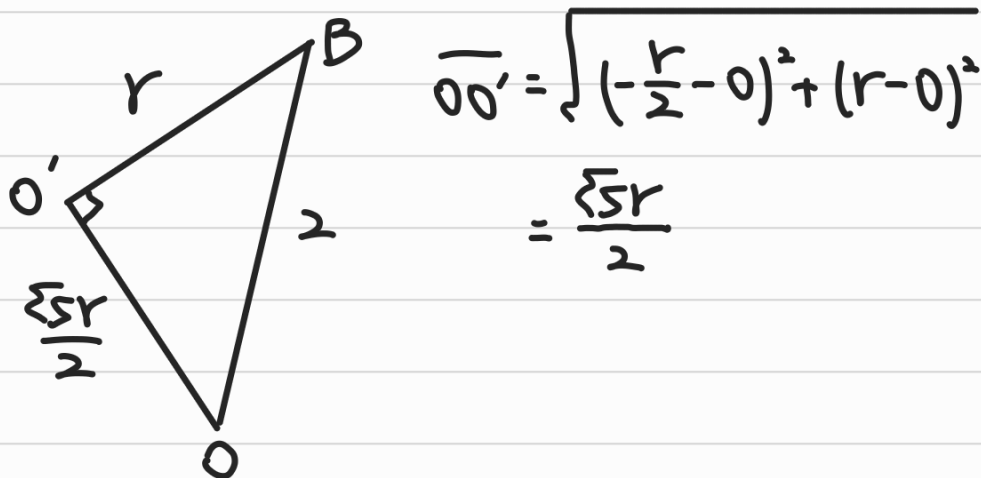
$$\Rightarrow d(O, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|0 - 2 \cdot 0 + 2k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2k|}{\sqrt{5}}$$

(4) 設小圓半徑:  $r$

by (2),  $O'$  於  $y = -2x$  上且  $\overline{OP} = r$

$\Rightarrow O'(-\frac{r}{2}, r)$  ( $\because \overline{OP} = r$ ,  $O'$  的  $y$  坐標  $= r$ )

$\therefore \triangle OO'B$  為直角  $\triangle$



$$\Rightarrow r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}r}{2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow r = \pm \frac{4}{3} \text{ (負不合)}$$

$$(5) \text{ by (4), } \overline{OO'} = \frac{\sqrt{5}r}{2} = d(O, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|2k|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{4}{3}}{2} = \frac{2|k|}{\sqrt{5}} \Rightarrow 4|k| = 5 \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow |k| = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{5}{3} \text{ (負不合) } \#$$

