高中數學公式總整理

YOU, SHENG-YU

September 25, 2025

Contents

1 數與式 **4**
1.1 實數 4
1.2 絶對值 5
1.3 指數律 5
1.4 科學記號與常用對數 5

2 直線與圓 **6**
2.1 直線方程式 6
2.2 直線的平移 7
2.3 直線的平行與垂直 7
2.4 點與直線距離公式 7
2.5 圓方程式 8
2.6 點與圓的關係 8
2.7 直線與圓的關係 8

3 多項式函數 **8**
3.1 多項式函數定理 8
3.2 三次函數 9
3.3 廣域特徵 v.s. 局部特徵 9

4 數列與級數 **10**
4.1 等差 10
4.2 等比 10
4.3 遞迴關係式 10
4.4 常用級數和公式 11

5 排列與組合 **11**
5.1 計數原理 . . . 11
5.2 排列 . . . 12
5.3 組合 . . . 13
5.4 二項式定理 . . . 13

6 古典機率 **13**
6.1 古典機率(高一) . . . 13
6.2 數學期望值(高一) . . . 14
6.3 條件機率(高二) . . . 14
6.4 獨立事件 v.s. 互斥事件 . . . 14

7 數據分析 **15**
7.1 集中趨勢量 . . . 15
7.2 離散趨勢量 . . . 15
7.3 相關係數 . . . 16

8 三角比 **17**
8.1 銳角三角比 . . . 17
8.2 三角比的基本關係式 . . . 17
8.3 正弦定理 v.s. 餘弦定理 . . . 18
8.4 極坐標 v.s. 直角坐標 . . . 18

9 三角函數 **18**
9.1 弧度量 . . . 18
9.2 和差角公式(數A) . . . 19
9.3 二倍角與三倍角公式(數A) . . . 19
9.4 半角公式(數A) . . . 19
9.5 正餘弦疊合(數A) . . . 19

10 指數與對數函數 **20**
10.1 對數律 . . . 20
10.2 換底公式 . . . 20

11 平面向量 **20**
11.1 加減法與係數積(坐標形式) . . . 20
11.2 平行 v.s. 垂直 . . . 20
11.3 線性組合 . . . 21
11.4 內積 . . . 21
11.5 正射影 . . . 21
11.6 直線的夾角 . . . 22
11.7 柯西不等式 & 三角不等式 . . . 22

11.8 二階行列式 22
11.9 克拉瑪公式 23

12 空間向量 **23**
12.1 投影點 v.s. 對稱點 23
12.2 中點坐標 23
12.3 兩點距離公式 23
12.4 加減法與係數積(坐標形式) 24
12.5 平行 v.s. 垂直 24
12.6 重心坐標公式 24
12.7 外積 24
12.8 三階行列式 & 體積公式 25

13 空間中的平面與直線 **26**
13.1 平面方程式 26
13.2 兩平面夾角 26
13.3 點與平面距離公式 26
13.4 直線方程式 27

14 矩陣 **27**
14.1 加減法與係數積 27
14.2 矩陣乘法 27
14.3 反方陣 28
14.4 轉移矩陣 28
14.5 線性變換 29

15 數B加强區 **30**
15.1 地球坐標系統 30
15.2 黃金比例 30

16 附錄 **31**

A 面積公式 **31**
A.1 海龍公式 31
A.2 三角比 31
A.3 向量 31
A.4 行列式 31
A.5 外接圓&內切圓 32
A.6 其他 32

1 數與式

1.1 實數

- 循環小數化有理數

$$0.\overline{ab} = \frac{ab}{99}$$
$$0.a\overline{bc} = \frac{abc-a}{990}$$
$$a.b\overline{cd} = \frac{abcd-ab}{990}$$

  [口訣]
  分母:有幾個循環節就寫幾個9，沒有循環節則補0
  分子:全部扣掉沒有循環節的部分

- 二次乘法公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

- 三次乘法公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- 雙重根號的化簡

$$\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

  [口訣]
  小根號前先找2，前面相加後面相乘

- 算幾不等式

  若a、b為非零實數，則

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

  等號成立時，可得$a = b$

1.2 絕對值

- (內)分點公式

  設數線上相異兩點$A(a)$、$B(b)$，若$P(x)$為$\overline{AB}$上的分點，且$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則

  $$P=\frac{na+mb}{m+n}$$

- (外)分點公式[補充]

  設數線上相異兩點$A(a)$、$B(b)$，若$P(x)$為$\overline{AB}$外的分點，且$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則

  (1) $m \geq n$

  $$P=\frac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$$

  (2) $m \leq n$

  $$P=\frac{na+(-m)b}{(-m)+n}$$

1.3 指數律

設a、b為正實數，且r、s是任意實數，則

- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $a^r b^r = (ab)^r$

1.4 科學記號與常用對數

- 科學記號

  設a為正實數，則a可表示為

  $$a = b \times 10^n$$

  其中$1 \leq b < 10$、n為整數

- 常用對數

  任意正數a都可化成10的次方的形式，而這個次方的值以符號$\log a$表示，即

  $$a = 10^{\log a}$$

  其中$\log a$稱為a的常用對數

  [註]:特殊對數值

  $\log 2 = 0.3010$、$\log 3 = 0.4771$、$\log 7 = 0.8451$

2 直線與圓

2.1 直線方程式

- 點斜式

  設通過點$A(x_0, y_0)$且斜率為m的直線方程式為

  $$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- 斜截式

  設斜率為m且y截距為b的直線方程式為

  $$y = mx + b$$

- 截距式

  設x截距為a、y截距為b($a \neq 0$、$b \neq 0$)的直線方程式為

  $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- 一般式

  $$ax + by + c = 0$$

  [註]:一般式斜率$m = -\frac{a}{b}$

2.2 直線的平移

設h、k為正數，直線$L: ax+by+c=0$，則

- 將L向右平移h單位後，所得直線為
$$a(x-h)+by+c=0$$
- 將L向左平移h單位後，所得直線為
$$a(x+h)+by+c=0$$
- 將L向上平移k單位後，所得直線為
$$ax+b(y-k)+c=0$$
- 將L向下平移k單位後，所得直線為
$$ax+b(y+k)+c=0$$

[口訣]:平移啥就減啥

2.3 直線的平行與垂直

設兩相異直線L_1、L_2的斜率分別為m_1、m_2，則

- 若$L_1//L_2$，則$m_1=m_2$
- 若$L_1 \perp L_2$，則$m_1m_2=-1$

2.4 點與直線距離公式

- 中點坐標
若$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$為坐標平面上相異的兩點，則$\overline{PQ}$中點坐標為
$$(\tfrac{x_1+x_2}{2},\tfrac{y_1+y_2}{2})$$
- 點到直線的距離
設點$P(x_0,y_0)$、直線$L: ax+by+c=0$，則
$$d(P,L)=\tfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
- 兩平行直線的距離
設兩平行直線$L_1: ax+by+c_1=0$、$L_2: ax+by+c_2=0$，則
$$d(L_1,L_2)=\tfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2.5 圓方程式

- 標準式
  以$O(h,k)$為圓心、r為半徑的圓方程式為

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

- 一般式

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

  [註]:圓心$(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$、半徑$\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{e}{2})^2-f}$

2.6 點與圓的關係

給一個以O為圓心、r為半徑的圓和一點P，若

- $d(O,P)>r$，則P在圓外
- $d(O,P)=r$，則P在圓上
- $d(O,P)<r$，則P在圓內

2.7 直線與圓的關係

設一以$O(x_0,y_0)$為圓心、r為半徑的圓和一直線$L:ax+by+c=0$，若

- $d(O,L)>r$，則圓與直線相離
- $d(O,L)=r$，則圓與直線相切
- $d(O,L)<r$，則圓與直線相割

3 多項式函數

3.1 多項式函數定理

- 除法原理
  設多項式$f(x)$除以另一多項式$g(x)$得商式$Q(x)$且餘式為$r(x)$，則

$$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$$

- 餘式定理

  設多項式$f(x)$除以另一多項式$ax-b$，則餘式為$f(\frac{b}{a})$

- 因式定理

  設$ax-b$為多項式$f(x)$的因式，則$f(\frac{b}{a})=0$

3.2 三次函數

- 標準式

  若$V(h,k)$為三次函數$f(x)$的對稱中心，則

$$f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$$

- 一般式

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

  其對稱中心為$V(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$

3.3 廣域特徵 v.s. 局部特徵

- 廣域特徵

  若三次函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則廣域特徵為最高次項

$$f(x)=a^3$$

- 局部特徵

  若三次函數$f(x)$在$x=\alpha$可表示成

$$f(x)=a(x-\alpha)^3+b(x-\alpha)^2+c(x-\alpha)+d$$

  則$f(x)$在$x=\alpha$的局部特徵為

$$g(x)=c(x-\alpha)+d$$

4 數列與級數

4.1 等差

- 等差數列

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- 等差級數

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

- 等差中項
  若a、b、c三數成等差，則

$$b = \frac{a+c}{2}$$

4.2 等比

- 等比數列

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

- 等比級數

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

- 等比中項
  若a、b、c三數成等比，則

$$b^2 = ac$$

4.3 遞迴關係式

- 等差型

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \ (n \geq 2) \end{cases}$$

- 等比型

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = r a_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$$

4.4 常用級數和公式

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

5 排列與組合

5.1 計數原理

- 加法原理

  完成某件事有A、B兩<u>方案</u>，其中A方案有m種方法、B方案有n種方法，則完成該件事共有**m+n**種方法

- 乘法原理

  完成某件事有A、B兩<u>步驟</u>，其中A步驟有m種方法、B步驟有n種方法，則完成該件事共有**m**×**n**種方法

- 取捨原理

  (1) 兩事件

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

  (2) 三事件

  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$
  $- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

5.2 排列

- 全取排列

  若n個人全部排成一列，則方法數為

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times n$$

- 部分排列

  若n個人中取k個人出來排成一列，則方法數為

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- 相同物排列

  若有m種物品，第一種有n_1個相同物、第二種有n_2個相同物、...、第m種有n_m個相同物，共有n個物品，則排列一列的方法數為

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_m!}$$

- 重複排列

  從n種不同物品(每種至少有k個)中選出k個物品出來排成一列，期方法數為

$$n^k$$

5.3 組合

- 一般組合

  若n個人中取k個人出來，則方法數為

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- 餘組合

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

- 巴斯卡原理

$$C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} = C_k^n$$

5.4 二項式定理

- 二項式定理

  $(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y^1 + ... + C_r^n x^{n-r} y^r + ... + C_{n-1}^n x^1 y^{n-1} + C_n^n y^n$

- 組合級數

  設$f(x) = (1+x)^n = C_0^n + C_1^n x^1 + ... + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n$，則

  (1) $C_0^n + C_1^n + ... + C_{n-1}^n + C_n^n = f(1) = 2^n$

  (2) $C_0^n - C_1^n + ... - C_{n-1}^n + C_n^n = f(-1) = 0$

  (3) $C_0^n + C_2^n + ... = \frac{f(1)+f(-1)}{2} = 2^{n-1}$

  (4) $C_1^n + C_3^n + ... = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = 2^{n-1}$

6 古典機率

6.1 古典機率(高一)

- 古典機率的定義

  當S中每個樣本點出現的機會均等時，定義事件A發生的機率$P(A)$為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- 機率的性質

  設S為一試驗的樣本空間，A、B為兩事件且A'為A的補集，則

  (1) $0 \leq P(A) \leq 1$

  (2) $P(\phi) = 0$；$P(S) = 1$

  (2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  (3) $P(A') = 1 - P(A)$

6.2 數學期望值(高一)

若一試驗有n種可能的結果，各種結果所對應的數值分別為x_1、x_2、...、x_n，期發生的機率分別為P_1、P_2、...、P_n，則數學期望值(期望值)為

$$E = x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_nP_n$$

6.3 條件機率(高二)

設A、B為樣本空間中兩事件，且$P(A) > 0$，在「已知A事件發生的情況下，求B事件發生的機率」稱為條件機率，公式如下

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

6.4 獨立事件 v.s. 互斥事件

- 獨立事件

  若A、B兩事件為獨立事件，則

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- 互斥事件

  若A、B兩事件為互斥事件，則

$$P(A \cap B) = 0、P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

7 數據分析

7.1 集中趨勢量

- 平均數

  設n個數據x_1、x_2、...、x_n，且所對應的權重分別為w_1、w_2、...、w_n，則

  (1) 算術平均數

  $$\mu = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

  (2) 加權平均數

  $$W = \frac{x_1w_1+x_2w_2+...+x_nw_n}{w_1+w_2+...+w_n}$$

  (3) 幾何平均數

  $$G = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

- 中位數

  將x_1、x_2、...、x_n此n個數據由小到大排列，若

  (1) n為奇數，則中位數為$x_{\frac{n+1}{2}}$

  (2) n為偶數，則中位數為$\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

7.2 離散趨勢量

- 標準差

  設n個數據x_1、x_2、...、x_n，其算術平均數為μ，則

  (1) 標準差

  $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu^2}$$

  (2) 變異數

  $$Var(X) = \sigma^2$$

7.3 相關係數

- 相關係數

  設兩變量x、y的n筆數據為(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、...、(x_n, y_n)，且x、y的平均數分別為μ_x、μ_y，標準差分別為σ_x、σ_y，則x、y的相關係數為

  $$r = \frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+...+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}$$

  其中

  $$S_{xy} = (x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + ... + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)$$

  $$S_{xy} = (x_1 - \mu_x)^2 + ... + (x_n - \mu_x)^2$$

  $$S_{xy} = (y_1 - \mu_y)^2 + ... + (y_n - \mu_y)^2$$

- 迴歸直線

  設兩變量x、y的n筆數據為(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、...、(x_n, y_n)，其相關係數為r，則y對x的迴歸直線方程式為

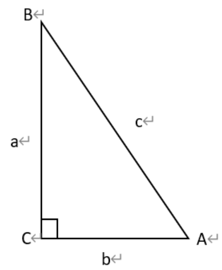
  $$y - \mu_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

  或

  $$y - \mu_y = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x - \mu_x)$$

8 三角比

8.1 銳角三角比



- 正弦

$$\sin\angle A = \frac{a}{c}$$

- 餘弦

$$\cos\angle A = \frac{b}{c}$$

- 正切

$$\tan\angle A = \frac{a}{b}$$

8.2 三角比的基本關係式

- 商數關係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

- 平方關係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

- 餘角關係

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta\text{；}\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

8.3 正弦定理 v.s. 餘弦定理

設一$\triangle ABC$，其$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊長分別為a、b、c

- 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

  其中，R為$\triangle ABC$的外接圓半徑

- 餘弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

8.4 極坐標 v.s. 直角坐標

- 極坐標轉直角坐標

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

- 直角坐標轉極坐標

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$$

9 三角函數

9.1 弧度量

- 度度量與弧度量(弳)的換算

  (1) 度度量轉弧度量

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弳}$$

  (2) 弧度量轉度度量

$$1\text{弳}=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx 57.3^\circ$$

- 扇形弧長與面積

  若扇形的半徑為r，圓心角為θ，弧長s與面積A為

$$s=r\theta\text{、}A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

9.2 和差角公式(數A)

- 正弦

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

- 餘弦

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

- 正切

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

9.3 二倍角與三倍角公式(數A)

- 二倍角

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

- 三倍角

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

9.4 半角公式(數A)

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

9.5 正餘弦疊合(數A)

$$\begin{aligned}
a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi)
\end{aligned}$$

其中

$$\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{、} \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

10　指數與對數函數

10.1　對數律

若a、b皆大於0且不等於1，c、r、s皆大於0；p、q為實數，則

- $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$
- $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
- $\log_{a^q} r^p = \frac{p}{q} \log_a r$
- $\log_a r = \frac{1}{\log_r a}$
- $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

10.2　換底公式

若a、b、c為正數，且$a \neq 1$、$c \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

11　平面向量

11.1　加減法與係數積(坐標形式)

設向量$\vec{a}$=(a_1, a_2)、向量$\vec{b}$=(b_1, b_2)、r為實數，則

- 加減法

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$$

- 係數積

$$\mathrm{r}\vec{a} = (ra_1, ra_2)$$

11.2　平行 v.s. 垂直

平面上任意兩向量$\vec{a}$=(a_1, a_2)、$\vec{b}$=(b_1, b_2)，若

- 平行

$$\vec{a} // \vec{b} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

- 垂直

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

11.3 線性組合

- 分點公式

  在$\triangle ABC$中，P為$\overline{BC}$上一點，且$\overline{BP}:\overline{CP}=m:n$，則

$$\overrightarrow{AP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

- 三點共線

  若A、P、B相異三點共線，O為任意點，且

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$

  則

$$\alpha+\beta=1$$

11.4 內積

設坐標平面上兩相異向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，其夾角為$\theta$，則

- 向量形式

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|a||b|\cos\theta$$

- 純量形式

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

11.5 正射影

設坐標平面上兩相異向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$上的正射影$\overrightarrow{u}$為

$$\overrightarrow{u}=\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$$

而正射影長$|\overrightarrow{u}|$為

$$|\overrightarrow{u}|=\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|}$$

11.6 直線的夾角

設平面上相異兩直線$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$、$L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$，且$\overrightarrow{n}_1 = (a_1, b_1)$、$\overrightarrow{n}_2 = (a_2, b_2)$分別為兩直線的法向量，若兩直線夾角為$\theta$，則

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1||\overrightarrow{n}_2|}$$

11.7 柯西不等式 & 三角不等式

- 柯西不等式

  設平面上兩任意向量$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$

  (1) 向量形式

  $$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}|$$

  等號成立於$\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b}$或$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$其中一個為$\overrightarrow{0}$

  (2) 實數形式

  $$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

  等號成立於

  $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

- 三角不等式

  設平面上兩任意向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$

  $$|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$$

  等號成立於$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$同向或$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$其中一個為$\overrightarrow{0}$

11.8 二階行列式

任意四數a、b、c、d，其行列式為

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

11.9 克拉瑪公式

給定二元一次方程組

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

設 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，則

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}、y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

12 空間向量

12.1 投影點 v.s. 對稱點

設$P(a,b,c)$為空間坐標中一點，則P對軸與平面的投影點&對稱點如下:

- 投影點

坐標軸	x軸	y軸	z軸
	(a,0,0)	(0,b,0)	(0,0,c)
坐標平面	xy平面	yz平面	xz平面
	(a,b,0)	(0,b,c)	(a,0,c)

- 對稱點

坐標軸	x軸	y軸	z軸
	(-a,b,c)	(a,-b,c)	(a,b,-c)
坐標平面	xy平面	yz平面	xz平面
	(a,b,-c)	(-a,b,c)	(a,-b,c)

12.2 中點坐標

設$P_1(a_1,b_1,c_1)$、$P_2(a_2,b_2,c_2)$為空間中相異兩點，則其中點為

$$M(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2})$$

12.3 兩點距離公式

設$P_1(a_1,b_1,c_1)$、$P_2(a_2,b_2,c_2)$為空間中任意兩點，則

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 + (c_1-c_2)^2}$$

12.4 加減法與係數積(坐標形式)

平面上任意兩向量$\vec{a}$=(a_1, a_2, a_3)、$\vec{b}$=(b_1, b_2, b_3)、r為實數，則

- 加減法

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

- 係數積

$$\mathrm{r}\vec{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

12.5 平行 v.s. 垂直

平面上任意兩向量$\vec{a}$=(a_1, a_2, a_3)、$\vec{b}$=(b_1, b_2, b_3)，若

- 平行

$$\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

- 垂直

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

12.6 重心坐標公式

設$\triangle ABC$三頂點$A(a_1, a_2, a_3)$、$B(b_1, b_2, b_3)$、$C(c_1, c_2, c_3)$，若G為此三角形重心，則

$$G(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3})$$

12.7 外積

設$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$為空間中兩不平行非零向量，則

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$$

12.8 三階行列式 & 體積公式

- 一般公式

  任意九數a_1、b_1、c_1；a_2、b_2、c_2；a_3、b_3、c_3，則三階行列式為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

- 降階法

  設針對第一列進行降階，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

  降階法係數正負原則:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- 平行六面體體積公式

  設$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$、$\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$為空間中不共平面的三個非零向量，則$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$所展開的平行六面體體積為

$$V = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = |\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}|$$

13 空間中的平面與直線

13.1 平面方程式

- 點法式
  設$P(x_0, y_0, z_0)$在平面E上，且其法向量$\overrightarrow{n} = (a, b, c)$，則
  $$E : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
- 一般式
  $$E : ax + by + cz + d = 0$$
- 截距式
  設平面E分別與x、y、z軸交於$A(a, 0, 0)$、$B(0, b, 0)$、$C(0, 0, c)$，則
  $$E : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

13.2 兩平面夾角

設$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$、$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$為不平行且相異平面，且$\overrightarrow{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$、$\overrightarrow{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$分別為兩平面的法向量，若兩平面夾角為$\theta$，則

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1||\overrightarrow{n}_2|}$$

- 兩平面垂直
  $$E_1 \perp E_2 \iff \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

13.3 點與平面距離公式

- 點到平面的距離
  設點$P(x_0, y_0, z_0)$、平面$E : ax + by + cz + d = 0$，則
  $$d(P, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
- 兩平行平面的距離
  設兩平行平面$E_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$、$E_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$，則
  $$d(E_1, E_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

13.4 直線方程式

- 參數式

  設直線L通過點$A(x_0, y_0, z_0)$且方向向量$\overrightarrow{v} = (a, b, c)$，則

$$L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{，其中}t\text{為實數}$$

- 比例式

  設直線L通過點$A(x_0, y_0, z_0)$且方向向量$\overrightarrow{v} = (a, b, c)$，其中$abc \neq 0$，則

$$L : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

14 矩陣

14.1 加減法與係數積

設$A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{m\times n}$為同階矩陣、r為實數，則

- 加減法

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

- 係數積

$$rA = [ra_{ij}]_{m\times n}$$

14.2 矩陣乘法

若$A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{n\times p}$，則

$$AB = C = [c_{ij}]_{n\times p}$$

且

$$c_{ij} = (a_{i1}b_{1j}) + (a_{i2}b_{2j}) + ... + (a_{in}b_{nj})$$

14.3 反方陣

- 定義

  給定一個方陣A，若存在一個方陣B，使得

$$AB = BA = I_n$$

  則A、B互為彼此的反方陣，記作

$$B = A^{-1}、A = B^{-1}$$

- 公式

  設$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且其行列式值$det(A) \neq 0$，則

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

14.4 轉移矩陣

滿足以下兩個條件的矩陣稱為轉移矩陣:

(1) 矩陣中每一個元素皆大於0

(2) 每一行的和皆為1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

14.5 線性變換

- 伸縮矩陣
  將點沿x軸方向伸縮h倍、y軸方向伸縮k倍，則伸縮矩陣為

$$T = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

- 旋轉矩陣
  以原點O為中心，逆時針旋轉θ角的旋轉矩陣為

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 鏡射矩陣
  由過原點且斜角為θ的鏡射軸L的鏡射矩陣為

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

- 推移矩陣
  設一常數k，則沿水平方向與沿鉛直方向的推移矩陣為
  (1) 沿水平方向推移y坐標的k倍

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  (2) 沿鉛直方向推移x坐標的k倍

$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

15　數B加强區

15.1　地球坐標系統

設A點在半徑為R的球面上，其經度為θ、緯度為ϕ，則

$$A:\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\cos\phi \\ z = R\sin\phi \end{cases}$$

15.2　黃金比例

設線段$\overline{AB}$被P點分割成兩段，其中$\overline{AP} > \overline{BP}$，若

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PA}}$$

則P稱為$\overline{AB}$的黃金分割點，此時的比例稱為黃金比例

$$\overline{PA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

16 附錄

A 面積公式

A.1 海龍公式

設a、b、c為$\triangle ABC$的三邊長，則

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

A.2 三角比

設一$\triangle ABC$，其$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊長分別為a、b、c，則

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ac\sin\angle B = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$$

A.3 向量

設平面上兩相異向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則

- 三角形面積

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

- 平行四邊形面積

$$\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

A.4 行列式

設平面上兩相異向量$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$，則

- 三角形面積

$$\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}|$$

- 平行四邊形面積

$$|a_1b_2 - a_2b_1| = |\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}|$$

A.5 外接圓&內切圓

設a、b、c為$\triangle ABC$的三邊長，且R、r分別為外接圓與內切圓半徑，s為半周長，則

- 三角形面積(外接圓半徑)

$$\triangle ABC = \frac{abc}{4R}$$

- 三角形面積(內切圓半徑)

$$\triangle ABC = rs$$

A.6 其他

- 測量員公式(多邊形亦適用)

  設n邊形頂點分別為(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)、...、(x_n, y_n)，則

$$Area = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_n \end{vmatrix}|$$

- 中線

  設$\triangle ABC$的三條中線長分別為a、b、c，且$s = \frac{a+b+c}{2}$則

$$\triangle ABC = \frac{4}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- 垂線

  設$\triangle ABC$的三高分別為h_a、h_b、h_c，則

$$\triangle ABC = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a})(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b})}}$$