

有限元方法习题

1 一维椭圆问题

设 $\Omega \in (-1, 1)$, 试利用线性有限元方法求解如下带齐次 $Dirichlet$ 边值条件的两点边值问题

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(-1) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 真解为

$$u(x) = e^{-x^2}(1 - x^2). \quad (2)$$

2 二维椭圆问题

设 $\Omega \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, 试利用线性有限元方法求解如下带齐次 $Dirichlet$ 边值条件的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中, 真解为

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right). \quad (4)$$

3 二维抛物问题

设 $\Omega \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, $T = 1$, 试利用线性有限元方法求解如下带齐次 $Dirichlet$ 边值条件的边值问题

$$\begin{cases} u_t(X, t) - \Delta u(X, t) = f, & X = (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T]; \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T]; \\ u(X, 0) = 0, & X \in \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

其中, 真解为

$$u(x, y) = t \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right). \quad (6)$$

4 要求

1. 对于每个题目, 应该提交一个数学理论分析文档, 文档应该包括如下部分: 变分格式, 离散格式, 矩阵组装, 数值结果。
2. 在数值结果部分, 分别取剖分单元为 $N = 5, 10, 20, 40, 80$, 观察误差 $\|u - u_h\|_0$ 和 $|u - u_h|_1$ 随网格单元数 N 的变化。
3. 数值算例代码部分, 要注意代码规范。