2.1 运输方程.

形式: $u_t + b\cdot Du = 0$ (in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$) 其中b是一个固定的向量. $b=(b_1, b_2\cdots b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$u=u(x,t)$: $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$. 即 $Du = D_x u = (u_{x_1},\cdots u_{x_n})$ [梯度关于x].

令函数 $z(s)=u(x+sb, t+s)$, 故 $\frac{d}{ds}z(s) = Du(x+sb, t+s)\cdot b + u_t(x+sb, t+s) = 0$.

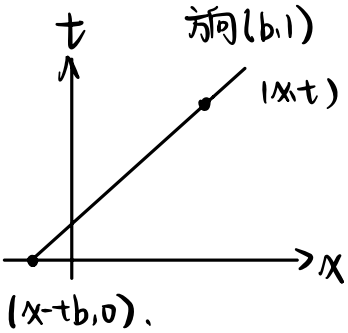
从而 $z(s)\equiv C$. 即函数 $z(s)$ 过 (x,t) 且方向 $(b,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 的直线上为常值.

Explain: $u_t + b\cdot Du = b\cdot Du + u_t = (b,1)\cdot(Du, u_t) = 0$, (实际上方向导数).

(Remark: 方向导数: $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$.) 即 $z(s)$ 在沿着方向 $(b,1)$ 上无变化.

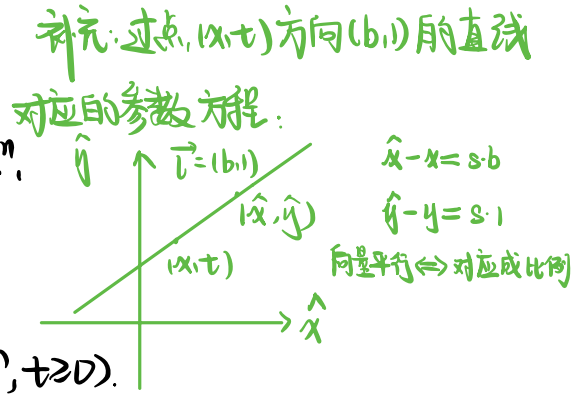
2.1.1. 初值问题

首先考虑初值问题 $\begin{cases} u_t + b\cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}. \end{cases}$ 其中 $b\in\mathbb{R}^n$.



在方程上点 $(x-tb, 0)$. 即 $s=-t$ 时

$z(-t) = u(x-tb, 0) = g(x-tb)$ $(x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)$.



Explain: 明显由上面的式子中 u 是与 g 有关的函数即 $u=g(x-tb)$. 若 $g\in C^1$. 则上述解的形式成立.
(Reason: 上述式子要满足 $u\in C^1$. 即 u_t, Du 有意义).

Weak solutions: (弱解) 如果 $g\notin C^1$, 则明显 $u(x,t)=g(x-tb)$ 不是它的解. 但是这种形式的解明确地提供一种弱且有说服力的解的选择. 所以我们称 $u(x,t)=g(x-tb)$ 是方程的弱解, 即使 $g\notin C^1$.

2.1.2. 非齐次初值问题

非齐次问题: $\begin{cases} u_t + b\cdot Du = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}. \end{cases}$

任意取定点 (x,t), 令 $z(s) = u(x+sb, t+s)$, 则

$$\frac{d}{ds}z(s) = Du(x+sb, t+s)\cdot b + u_t(x+sb, t+s) = f(x+sb, t+s)$$

故 $u(x,t)-g(x-tb)=z(0)-z(-t)=\int_{-t}^{0} z'(s)ds=\int_{-t}^{0} f(x+sb,t+s)ds$.

$=\int_0^t f(x+(s-t)b,s)ds$. [变量替换].

(令 $t+s=y$. 即 $s=y-t$ $dy=ds$. $\int_{-t}^{0} f(x+sb,t+s)ds=\int_0^t f(x+(y-t)b,y)dy$

$=\int_0^t f(x+(s-t)b,s)ds$).

从而 $u(x,t)=g(x-tb)+\int_0^t f(x+(s-t)b,s)ds$.

Remark: (Evans. P.D.E) 上述解法都是将PDE转化成了ODE.

or

双特征方法.

2.2 拉普拉斯方程 (Laplace equation)

Preparation: $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\cdots x_n)$ $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots x_n^2}$ $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-x_0|<r\}$

$B_r=B_r(0)$, $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$. $\Delta=\sum_{i=1}^n \partial_{ii}$; $\Delta u=$ trace of Hession matric

Definition: (1) Laplace equation: $\Delta u=0$.

(2) u 是 C^2 上的函数. 若满足 $\Delta u=0$, 则称 u 是调和 (harmonic) 函数

2.2.1 基本解 (Fundamental solution)

a. Laplace equation ($\Delta u=0$)

引理: (Laplace 在正交变换下保持不变), 设 u 是一个调和函数, 并且 $A=(a_{ij})$ 是一个正交阵 ($AA^T=E$), 那么 $v(x)=u(Ax)$ 也是调和函数. $\Delta v=0$

Proof: 记 $y=Ax$, 由 Chain Rule 有

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}a_{ki}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}a_{ki}a_{lj}$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=Ax.$$

$$Ax=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots a_{nn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}a_{ki}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}a_{ki}\cdot a_{lj}.$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) = A^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\right) A$ [Hession matric].

则 $\Delta v = tr\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) = tr\left(A^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}\right) \cdot A\right) = tr\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}\right) A \cdot A^T\right)$

$= tr\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}\right) = \Delta u$ $\quad (tr(AB) = tr(BA))$

由于正交变换下不改变模长，故寻找只与模长有关的解.

根据上述引理，去寻找径向解 $\Leftrightarrow$ u仅仅依赖于 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$

$\Leftrightarrow u(x) = v(r)$ (其中 v 为一个单变量函数)

目标：使用 $\Delta u = 0$ 求解 v.

$\partial_{ii} u = \partial_i (v'(r) \cdot \partial_i r) = v''(r) \cdot (\partial_i r)^2 + f'(r) \partial_{ii} r$

由于 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} \Rightarrow \partial_i r = \frac{x_i}{r}$. $\partial_{ii} r = 1/r - \frac{x_i^2}{r^3}$ 代入有

$\partial_{ii} u = v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \cdot \left(1/r - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \Rightarrow 0 = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u = v''(r) \frac{x_1^2 + \cdots x_n^2}{r^2} + v'(r) \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{x_1^2 + \cdots x_n^2}{r^3}\right)$

$= v''(r) + v'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right)$ 从而由P.D.E $\Rightarrow$ O.D.E，即

解：$v''(r) + v'(r) \frac{n-1}{r} = 0$. (同时乘 r^{n-1}) $\Rightarrow r^{n-1} v''(r) + (n-1) r^{n-2} v'(r) = 0 \Rightarrow (r^{n-1} v'(r))' = 0$.

$\Rightarrow r^{n-1} v'(r) = C$ [分离变量].

综上：$v(r) = \begin{cases} b \log r + c = b \ln r + c & (n=2) \\ b r^{2-n} + c = \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$ ($r \neq 0$时，有解) 其中b,c均为常数.

#.

Definition：基本解 $\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}$ 其中 $\alpha(n)$ 代表着 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

(Appendix：$\alpha(n) = |B_1|$，$|B_r| = \alpha(n) \cdot r^n$，$|\partial B_r| = |\partial B_1| \cdot r^{n-1}$

，$|B_1| = \int_0^1 |\partial B_r| dr = |\partial B_1| \cdot \int_0^1 r^{n-1} dr \Rightarrow |B_1| = 1/n \, |\partial B_1| \Rightarrow |\partial B_1| = n \cdot \alpha(n)$)

通常使用 $\Phi(x) = \Phi(|x|)$ 来强调这个基本解是径向的.

注：基本解 $\Phi(x)$ 的控制不等式.

$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}$，$|D^2 \Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}$ $(x \neq 0)$ 其中 $C > 0$.

#.

补充：(有点是物理的)

b. (Poisson's equation $-\Delta u=f$)

由于 a. 中 $x\mapsto \Phi(x)$ $(x\neq 0)$ 是调和的，若将原点移动到新的点 y，那么 $x\mapsto \Phi(x-y)$ $(x\neq y)$ 仍然是调和的. 由于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，从而对于 $\forall y\in\mathbb{R}^n$，映射 $x\mapsto \Phi(x-y)f(y)$ 也是调和的. 所以对于所有不同的 y 进行求和，有

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log(|x-y|)f(y)dy & (n=2)\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy & (n\geq 3).\end{cases} \quad (8)$$

然而这个猜想并不全对，In fact，$D^2\Phi(x-y)$ 在 $y=x$ 处是奇点.

定理 1 (满足 Poisson's equation)

条件：$f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$，即 f 是 2 阶连续可导，且 f 有紧支集.

设 $u=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy$ (8)，那么 (i) $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $-\Delta u=f$ in $(\mathbb{R}^n)$.

证明：(i) 由卷积的交换律，得

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f(x-y)dy$$

根据偏导数的定义有

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\right]dy \quad \text{其中 } h\neq 0.$$

e_i 是 n 维 $(0,0\cdots\overset{i}{1},\cdots 0)$.

因为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛的，根据求导与积分交换顺序得，令 $h\to 0$.

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\to f_{x_i}(x-y)$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x_i}=u_{x_i}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f_{x_i}(x-y)dy \quad (i=1,2,\cdots n)$

同理就有

$$u_{x_ix_j}=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f_{x_ix_j}(x-y)dy \quad (i,j=1,2\cdots n)$$

由上述式子右端表达式是连续的，从而 $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) 由 Φ 在 $y=0$ 处发生了爆破 ($y\to 0$, $\Phi\to\infty$), 故设 $\varepsilon>0$, 取一个球 $B(0,\varepsilon)$, 则

$$\Delta u(x)=\int_{B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy+\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy.$$

$$\triangleq I_\varepsilon+J_\varepsilon$$

对 I_ε, J_ε 进行估计, 有

$$|I_\varepsilon|\le \underbrace{C\|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|dy}_{②}\le\begin{cases}C\varepsilon^2|\ln\varepsilon| & (n=2)\\ C\varepsilon^2 & (n\ge 3)\end{cases}$$ 其中 C 为一个常数.

①

注: ① → ②: 由于 $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, 从而取其上确界 $\|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

② → ③: $\Phi(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln|y| & (n=2)\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|y|^{n-2}} & (n\ge 3)\end{cases}$, $\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|dy=\begin{cases}\int_{B(0,\varepsilon)}|\frac{1}{2\pi}\ln|y||dy\\ \int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|y|^{n-2}}dy\end{cases}$

$$\le\begin{cases}\left|\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|\right|\int_{B(0,\varepsilon)}dy=\left|\frac{1}{2\pi}\alpha(n)\varepsilon^n\cdot|\ln\varepsilon|\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\alpha(n)\varepsilon^2|\ln\varepsilon|\right| & (n=2)\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{B(0,\varepsilon)}dy=\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\alpha(n)\varepsilon^n=\frac{1}{n(n-2)}\varepsilon^2\end{cases}$$

令 $x-y=u$. $\Delta_x f(u)=\Delta_x f\cdot u_{xx}=\Delta_x f(x-y)$

$\Delta_y f(u)=\Delta_y f\cdot u_{yy}=\Delta_y f(x-y)$

对 J_ε 由分部积分公式得

?

$$J_\varepsilon=\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_y f(x-y)dy=-\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy$$

$$+\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)dS(y)=:K_\varepsilon+L_\varepsilon.$$ (其中 $\vec{\nu}$ 代表着沿 $\partial B(0,\varepsilon)$ 的单位外法向量)

对 L_ε 进行估计, 有:

$$|L_\varepsilon|\le\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|dS(y)\le\begin{cases}C\varepsilon|\ln\varepsilon| & (n=2)\\ C\varepsilon & (n\ge 3)\end{cases}$$

注: $\int_{\partial B(0,\varepsilon)}dS(y)=|\partial B_1|\cdot r^{n-1}=|\partial B_1|\varepsilon^{n-1}$.

$$K_\varepsilon=-\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy\overset{\text{分部}}{=}\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Delta\Phi(y)f(x-y)dy-\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y)$$

$$=-\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y)$$ (Φ 满足 $\Delta\Phi=0$, 在原点处)

由于 $D\Phi(y)=D\left(\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|y|^{n-2}}\right)=\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\cdot(2-n)\cdot\frac{1}{|y|^{n-1}}\cdot\frac{y}{|y|}$ $(y\ne 0)$.

$=\frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{y}{|y|^n}$, 且 $\vec{\nu}=\frac{-y}{|y|}=\frac{-y}{\varepsilon}$ [在 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上].

从而 $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)=\nu\cdot D\Phi(y)=\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$; 由 $|\partial B_\varepsilon|=|\partial B_1|\cdot\varepsilon^{n-1}$, $|\partial B_1|=n\cdot\alpha(n)$

从而 $|\partial B_\varepsilon| = n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$，$\Rightarrow$

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\,dS(y) = -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)\,dS(y) \longrightarrow -f(x)\ (\varepsilon\to 0)$$

综上所述 $\varepsilon\to 0$，有 $-\Delta u = f$.

#.

基本解的解释：(Interpretation)

有时记 $-\Delta\Phi = \delta_0$ in $\mathbb{R}^n$，其中 $\delta_0 = \begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$，从而 $-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x\Phi(x-y)f(y)\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n}\delta_x f(y)\,dy = f(x)\quad (x\in\mathbb{R}^n)$

2.2.2 平均值公式 (Mean-value formulas)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集，并且 u 是 U 上的调和函数，下述公式说明了 $u(x)$ 的值等于 u 在球面 $\partial B(x,r)$ 上的积分平均值同时也等于 u 在整个球 $B(x,r)$ 的积分，其中 $B(x,r)\subset U$

① $\Phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u\,dS$　　② $C = u(x)$.

② $\Phi'(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = C$.

定理2：平均值公式

若 $u\in C^2(U)$ 是调和的，那么 $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u\,dS = \fint_{B(x,r)} u\,dy$，$\forall B(x,r)\subset U$.

补充：$\fint_{\partial B(x,r)} f\,dS = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} f\,dS$；$\fint_{B(x,r)} f\,dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} f\,dy$

证明：1. 设

$$\Phi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z)$$

(为了方便对 r 求导，使用变量替换，$y = x+rz$，$z\in(0,1)$)

那么 $\Phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot z\,dS(z) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot\frac{y-x}{r}\,dS(z)$

注意到 $\frac{y-x}{r}$ 是 $\partial B(0,1)$ 单位法向量，从而有

$$\Phi'(r) = \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot\frac{y-x}{r}\,dS(y) \overset{\text{方向导数}}{=\!=\!=} \fint_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}$$

$$\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS(y) \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\,dy = \frac{r}{n}\cdot\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\,dy$$

P715.

$= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy = 0$. [u(x)是调和的]

从而 $\Phi(r)$ 是常值的，那么 $\Phi(r) = \lim_{t\to 0}\Phi(t) = \lim_{t\to 0}\fint_{\partial B(x,t)} u(y)\,dS(y) = u(x)$

2. 使用极坐标替换有 $\int_{B(x,r)} u\,dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u\,dS\right) ds$

$$= u(x)\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}\,ds = \alpha(n)r^n u(x).$$

综上所述有 $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u\,dS = \fint_{B(x,r)} u\,dy$. #

定理3.（平均值性质的逆命题）

如果 $u\in C^2(U)$，满足 $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u\,dS \quad \forall$ 球 $B(x,r)\subset U$.

那么 u 是调和的.

证明：（反证法）若 $\Delta u \not\equiv 0$，则 $\exists B(x,r)\subset U$，不妨设 $\Delta u > 0$. 由上述定理有

$$0 = \Phi'(r) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy > 0.$$ 从而矛盾. #

（Remark: $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u\,dS$ 两边关于 r 求导）.

2.2.3 调和函数的性质

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集.

a. 强极大值原理（Strong maximum principle），唯一性（uniqueness）.

推论：一个非常数的调和函数，必定在边界上取得最大值，且在内部取不到最大值.

$\bar{U} = U\cup\partial U$ $u\in C(\partial U)$.

定理4（强极大值原理）

设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ 在 U 上满足 Laplace equation

(i) 则 $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ ✓.

(ii) 此外，如果 U 是连通的，且存在一点 $x_0\in U$, s.t. $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$，从而 u 是 U 中的常值函数.

(i)称为Laplace方程的极大值原理，(ii)称为弱极大值原理. 若将"u"替换成"-u"有"极大"与"极小".

证明：假设存在点 $x_0\in U$，满足 $u(x_0)=M:=\max_{\bar U} u$，不妨设对于 $0<r<\mathrm{dist}(x_0,\partial U)$

从而根据平均值性质得到

$\forall x\in B(x_0,r)$ $\quad u\le M \Rightarrow \fint_{B(x_0,r)} u\,dy$

$$M=u(x_0)=\fint_{B(x_0,r)} u\,dy\le M$$

$$=\frac{1}{\alpha(n)nr^n}\int_{B(x_0,r)} u\,dy$$

$$\le \frac{M}{\alpha(n)nr^n}\cdot n\alpha(n)r^n=M.$$

不等式成立当且仅当在 $B(x_0,r)$ 内有 $u\equiv M$，即 $\forall y\in B(x_0,r)$，$u(y)=M$. 因此集合 $S\triangleq\{x\in U\mid u(x)=M\}$ 是 U 中的开集也是闭集？如果 U 是连通的，则 $U=S=\{x\in U\mid u(x)=M\}$

即 u 在 U 中是常值函数. #

(注释：开集：$\forall x\in S,\exists r>0$, st $B(x,r)\in S$. 闭集：由于 $u\in C(\bar U)$，用闭集的定义即可)

Remark：S有在一个连通子集使得恒为最大值，且该子集的边界是U边界的一部分，从而最大值在U的边界上取得.

(反证)

正性(Positivity)：弱极大值原理推出：

若 U 是连通的，$u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$ 满足 $\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$ 其中 $g\ge 0$.

那么，如果 g 在 ∂U 上某一部分满足 $g>0$，则 u 在 U 中任何一点都是满足 $u>0$ (连续到边)

定理5 (Uniqueness)唯一性：

取 $g\in C(\partial U)$，$f\in C(U)$，那么至多存在一个解 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$ 满足边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

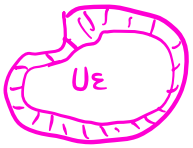
证明：不妨设 u 与 $\tilde u$ 都是满足上述方程的解，则构造 $w=\pm(u-\tilde u)$ 满足Laplace方程，由弱极值原理有 $\max_{\bar U}|w|=\max_{\partial U}|w|=g-g=0\Rightarrow w\equiv 0$，即 $u=\tilde u$.

#

b. 正则性(Regularity)

下面证明若 $u\in C^2$ 是调和的，那么必然有 $u\in C^\infty$. 因此调和函数是无穷次可微的.

定理6 (光滑性) Smoothness. 如果 $u\in C(U)$，在 $\forall B(x,r)\subset U$ 内都满足 m.v.p. 则 $u\in C^\infty(U)$.



证明：首先引入磨光算子的定义，设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，$\varepsilon>0$，$U_\varepsilon\triangleq\{x\in U\mid dist(x,\partial U)>\varepsilon\}$

定义：$\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 如下：$\eta(x)\triangleq\begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$，其C是一个常数，s.t.

$\eta(x)$ 为径向函数

$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx=1$，称 $\eta(x)$ 为 Standard mollifier (光滑子)，记 $\eta_\varepsilon(x)\triangleq\frac{1}{\varepsilon^n}\eta(x/\varepsilon)$

(η_ε 叫磨光算子，ε 叫伸缩因子)，则 $\eta_\varepsilon\in C^\infty$，且满足 $\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x)dx=1$，$spt(\eta_\varepsilon)\subset B(0,\varepsilon)$

($spt(u)$ 表示 u 中函数值不为0的点构成的集合：$spt(u)=\overline{\{u\in U\mid u(x)\neq 0\}}$.)

补充：

定义：若 $f:U\to\mathbb{R}$ 是可积的(局部即可)，则有 $f^\varepsilon:=\eta_\varepsilon * f$ in U_ε.

即 $f^\varepsilon(x)=\int_{U_\varepsilon}\eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy=\int_{B(0,\varepsilon)}\eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy \quad \forall x\in U_\varepsilon$.

性质 (光滑子)：(i) $f^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)$

(ii) $f^\varepsilon\to f$ a.e. $(\varepsilon\to 0)$

(iii) 若 $f\in C(U)$，那么 f^ε 在 U 的紧子集上一致收敛到 f.

(iv) 若 $1\leq p<\infty$ 和 $f\in L^p_{loc}(U)$，那么 $f^\varepsilon\to f$ 在 $L^p_{loc}(U)$ //.

回到光滑性的证明，取 $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$ in $U_\varepsilon=\{x\in U\mid dist(x,\partial U)>\varepsilon\}$. 从而 $u^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)$

通过说明 $u\equiv u^\varepsilon\ (x\in U_\varepsilon)$ 来说明 u 是光滑的.

$\forall x\in U_\varepsilon$，则 $u^\varepsilon(x)=\int_U\eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy$ (η_ε 定义)

$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)}u\,dS\right)dr=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)}u\,dS\right)dr.$

$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\cdot n\alpha(n)r^{n-1}u(x)dr=\frac{1}{\varepsilon^n}u(x)\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)n\alpha(n)r^{n-1}dr$

$= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon dy = \underline{u(x)}$ $\quad \left[\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{r}{\varepsilon}),\ \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon \underline{n\alpha(n) r^{n-1} dr} = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon dS \right]$.

因此 $u^\varepsilon \equiv u$ in U_ε，从而 $u \in C^\infty(U_\varepsilon)$，$\forall \varepsilon > 0$，令 $\varepsilon \to 0$，$U \to U_\varepsilon$.

#

注：有了光滑性，才对任意阶导数进行估计.

C、调和函数的局部估计.

引：记 $u: U \to \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可积的，$\|u\|_{L^p(U)} \triangleq \left(\int_U |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \le p < \infty)$ 设 $\alpha_i \in N^+$，$1 \le i \le n$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$ 叫多重指标，记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ 为多重指标的阶. 定义 $D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$

$= \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n} u(x)$.

若 k 是一个非负整数，则 $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$. $|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

定理（导数的估计）假设 u 在 U 上是调和的，那么

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

对于 $\forall B(x_0,r) \subset U$ 与任意多重指标 α，$|\alpha| = k$ 都成立. 其中 $C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}$，$C_k = \frac{(2^{n+1} nk)^k}{\alpha(n)}$ $(k = 1, 2 \cdots)$

证明：1.（数学归纳法）当 $k = 0, 1$ 时有

已知 $\Delta u = 0$，两边同时对 x_i 求导，有 $(\Delta u)_{x_i} = \Delta u_{x_i} = 0$（混合偏导数相等）

从而 u_{x_i} $(i = 1, 2 \cdots n)$ 也是调和的. 那么有取半径 $\frac{r}{2}$，x_0 为圆心的球 $B(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset U$.

根据 M.V.P 有 $|u_{x_i}(x_0)| = \left|\fint_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i} dx\right| = \left|\frac{1}{\alpha(n)(\frac{r}{2})^n} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i} dx\right|$

$= \left|\frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i} dx\right| = \left|\frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u \nu_i dS\right|$（其中 ν_i 是 $\partial B(x_0,\frac{r}{2})$ 向外的单位外法向量）

$\le \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \cdot |\partial B(x_0,\frac{r}{2})| = \frac{2^n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}$ $(|\partial B(x_0,\frac{r}{2})| = \alpha(n) \cdot (\frac{r}{2})^{n-1} \cdot n)$

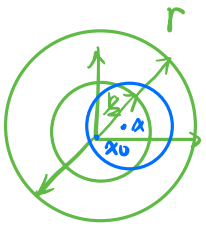
（Remark: Gauss-Green Th. App.1）

i) 若 $\partial U\in C^1$ 在 ∂U 上定义一个向外的单位向量场 $\vec{\nu}=(\nu^1,\cdots\nu^n)$

ii) 记 $u\in C^1(\bar{U})$，记 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\nu\cdot Du$ 为 u 的外方向导数.

C.2 i) 假设 $u\in C^1(\bar{U})$ 那么有 $\int_U u_{x_i}dx=\int_{\partial U}u\cdot\nu^i dS$ $(i=1,2,\cdots n)$

ii) $\int_U \operatorname{div} u\,dx=\int_{\partial U}u\cdot\nu dS$ （散度定理，Divergence Th）.



如果 $x\in\partial B(x_0,r/2)$，那么 $B(x,r/2)\subset B(x_0,r)\subset U$，从有.

$$|u(x)|=\left|\fint_{B(x,r/2)}u\,dx\right|=\left|\frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r/2)}u\,dx\right|\le\frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x,r/2))}$$

$\le\frac{1}{\alpha(n)}\left(\frac{2}{r}\right)^n\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$ 即为 $k=0$ 时情况显然成立，（$k=0$ 时即为 u 的上界）

综合上述的不等式有 当 $k=1$ 时，即 $|\alpha|=1$，有

$$|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/2))}\le\frac{2n}{r}\cdot\frac{1}{\alpha(n)}\left(\frac{2}{r}\right)^n\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$=\frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)}\frac{1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

2. 现在考虑 $k\ge2$ 时的情况，由数学归纳法得，假设定理中的函式子对于多重指标 $\le k-1$ 的情况都成立. 固定 $B(x_0,r)\subset U$，令 $|\alpha|=k$，从而对于 $i\in\{1,2,\cdots n\}$，$|\beta|=k-1$，有

$D^\alpha u=(D^\beta u)_{x_i}$

同理可得 (1). $|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{kn}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial(B(x_0,r/k))}$

如果 $x\in\partial B(x_0,r/k)$，$\Rightarrow B(x,\frac{k-1}{k}r)\subset B(x_0,r)\subset U$，因此利用定理的归纳假设有

$$|D^\beta u(x)|\le\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}=\frac{(2^{n+1}n)^{k-1}(k-1)^{k-1-n-k+1}k^{n+k-1}}{\alpha(n)\,r^{n+k-1}}\|u\|_{L^1}$$

综上有 $|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{kn}{r}\cdot\frac{(2^{n+1}n)^{k-1}(k-1)^{-n}k^{n+k-1}}{\alpha(n)r^{n+k-1}}\|u\|_{L^1B(x_0,r)}\le\frac{(2^n n)^k k^k}{\alpha(n)r^{n+k}}\|u\|_{L^1B(x_0,r)}$

$=\frac{(2^n nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$，因此 $|\alpha|=k$ 的情况也是成立的.

#.

d. 刘维尔定理（Liouville's Th）$\mathbb{R}^n$ 上不存在非平凡的有界调和函数

定理8(Liouville's Th) 设 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是调和且有界的,那么 u 是常数.

证明: 固定 $x_0\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, 由定理7有. 在 $B(x_0,r)$ 上. $(k=1)$

$$|Du(x_0)|\le\frac{\sqrt{n}\,C_1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$ (√n这个系数无影响~).

$$=\frac{\sqrt{n}\,C_1}{r^{n+1}}\int_{B(x_0,r)}|u|\,dx\le\frac{\sqrt{n}\,C_1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}|B(x_0,r)|$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,C_1}{r^{n+1}}\alpha(n)r^n\|u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}=\frac{\sqrt{n}\,C_1\alpha(n)}{r}\|u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\xrightarrow{u\text{有界}}0\ (r\to\infty)$$

因此 $Du\equiv0$, 即 u 为常数.

#.

定理9 (表达式) 令 $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n\ge3$, 则 Poisson 方程 $-\Delta u=f$, $x\in\mathbb{R}^n$ 的有界解都有如下形式 $u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy+C$ $(x\in\mathbb{R}^n)$. (C 为某一个常数)

证明: $\forall n\ge3$ 时, 由于 $\Phi(x)\to0$ $(|x|\to\infty)$, 则考虑 $\tilde{u}(x)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy$ 是 Poisson 方程在 $\mathbb{R}^n$ 中的有界解, 则若 u 是另一个解, 由 Liouville 定理有, $w=u-\tilde{u}$ 是一个常数. 从而 $\tilde{u}=u+C$.

#.

注: 当 $n=2$ 时, $\Phi(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ 无界 ($|x|\to\infty$ 时) 从而 $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy$ 也可能无界.

e. 解析性 (Analyticity) (一个函数可以写成幂级数的形式)

引理: 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 称作在 x_0 附近解析, 如果存在 $r>0$, 和一系列常数 $\{f_\alpha\}$ 满足

$$f(x)=\sum_\alpha f_\alpha(x-x_0)^\alpha\quad(|x-x_0|<r)$$ (其中求和表示对所有多重指标 α 求和).

注: 如果 f 在 x_0 处附近解析, 则在 x_0 附近 $f\in C^\infty$, 另外 $f_\alpha=\frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}$ 其中 $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$

因此 $f(x)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$ $(|x-x_0|<r)$

定理10（解析性）设u在U上是调和的，那么u在U上是解析的.

证明：1. 固定$x_0\in U$，下证u可以被一个x_0邻域内收敛的级数来表示.

2. 取$r=\frac{1}{4}\mathrm{dist}(x_0,\partial U)$. 则$M:=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,2r))}<\infty$. （$u$调和$\Rightarrow$积分有限）

$\forall x\in B(x_0,r)$，由于$B(x,r)\subset B(x_0,2r)\subset U$，则由导数的估计有

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\le\frac{1}{r^{n+|\alpha|}}\cdot\frac{(2^{n+1}n)^{|\alpha|}}{\alpha(n)}|\alpha|^{|\alpha|}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$=M\cdot\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}$$

根据$\frac{k^k}{k!}<e^k\ (\forall k>0)$，因此有 $|\alpha|^{|\alpha|}\le e^{|\alpha|}|\alpha|!$（$\alpha$为多重指标）

（Remark：由e^x的Taylor展开式，$e^k=1+k+\frac{k^2}{2!}+\cdots\frac{k^n}{n!}\Rightarrow e^k>\frac{k^k}{k!}$ ）.

根据多项式展开：$n^k=(1+1\cdots+1)^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\Rightarrow|\alpha|!\le\underline{n^{|\alpha|}\alpha!}$

结合上述不等式有 $\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}$

$$\le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}e^{|\alpha|}|\alpha|!$$

$$\le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}n^{|\alpha|}e^{|\alpha|}\alpha!=M\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!$$

3. u在x_0点处的Taylor展开式为$\sum_\alpha\frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$，下证该级数收敛，只需证余项收敛于0. 取$|x-x_0|<\frac{r}{2^{n+2}n^2e}$（为了化简）

Lagrange型余项为 $R_N(x)=u(x)-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$

$$=\sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha u(x_0+t(x-x_0))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\quad\text{其中 }t\in[0,1]$$

且t依赖于x，$t=t(x)$.

从而有 $|R_N(x)|\le M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N\left(\frac{r}{2^{n+2}n^2e}\right)^N=M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{1}{2n}\right)^N$

$$\le Mn^N\left(\frac{1}{2n}\right)^N=\frac{M}{2^N}\to0\ (N\to\infty)$$

(Remark: $\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{1}{2n}\right)^N \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n=N \Rightarrow$ 总共有 n^N 次，有 $\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{1}{2n}\right)^N \leq n^N\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^N$)

#

f. Harnack不等式.

注：记 $V\subset\subset U$ 表示，$V\subset\bar{V}\subset U$ 且 $\bar{V}$ 是紧集.

定理11 (Harnack不等式) (用下确界控制上确界)

对每个连通的开集 $V\subset\subset U$，存在一个正的常数 C (只依赖于 V 的选取). s.t.

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

不等式对于任意定义在 U 上的非负调和函数 u 成立.

(Specially: $u(x)\leq \sup_V u \leq C\inf_V u \leq Cu(y) \Rightarrow \frac{1}{C}u(y)\leq u(x)\leq Cu(y)$, $\forall x,y\in V$.)

不等式即言 V 里面的非负调和函数是可以比较的，在 V 中任意点 x，$u(x)$ 不可太小或者太大.(除非 u 在 V 中本来就很小 or 大)

证明：记 $r:=\frac{1}{4}\mathrm{dist}(V,\partial U)$，取 $x,y\in V$，$|x-y|\leq r$，那么

$$u(x)=\fint_{B(x,2r)}u\,dz=\frac{1}{\alpha(n)2^n r^n}\int_{B(x,2r)}u(z)\,dz\geq\frac{1}{2^n\alpha(n)r^n}\int_{B(y,r)}u(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2^n}\fint_{B(y,r)}u\,dz\to\frac{1}{2^n}u(y)\quad(r\to 0)$$

从而有 $2^n u(y)\geq u(x)\geq\frac{1}{2^n}u(y)$. ($x,y\in V$, $|x-y|\leq r$)

(上述证明说明 x,y 距离小的时候可以满足，根据 $V\subset\subset U$，可用有限个球覆盖).

当 V 是连通的，且 $\bar{V}$ 紧集，则可以用有限的一序列球 $\{B_i\}_{i=1}^N$ 来覆盖 $\bar{V}$，其半径为 $\frac{r}{2}$，且 $B_i\cap B_{i-1}\neq\phi$ $(i=2,\cdots N)$，从而有 $u(x)\geq\frac{1}{2^{n(N+1)}}u(y)$, $\forall x,y\in V$.

#.

2.2.4. Green函数.

设$U\subset\mathbb{R}^n$是开集且有界,且$\partial U\in C^1$,想去得到一个通用的解来表示Poisson方程.

$-\Delta u=f$ $(x\in U)$并且满足边界条件 $u=g$ $(x\in\partial U)$.

a.引入Green函数

设$u\in C^2(\bar{U})$上的任一函数,固定$x\in U$,选择$\varepsilon>0$, s.t $B(x,\varepsilon)\subset U$,由Green公式有

在区域$V_\varepsilon:=U-B(x,\varepsilon)$关于$u(y)$与$\Phi(y-x)$有

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x)-\Phi(y-x)\Delta u(y)dy=\int_{\partial V_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)-\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y).$$

其中ν是∂V_ε上的单位外法向量.

由于$\Delta\Phi(y-x)=0$ $(x\neq y)$.有

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y)\right|\leq C\varepsilon^{n-1}\max_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi|=C\varepsilon^{n-1}\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon & n=2\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\varepsilon^{2-n} & n\geq 3\end{cases}$$

$=o(1)$ $(\varepsilon\to 0)$

另外由于$\vec{\nu}=\frac{-y}{|y-x|}=\frac{-y}{\varepsilon}$ $\forall y\in\partial B(0,\varepsilon)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=\nu\cdot D\Phi(y)=-\frac{y}{\varepsilon}\cdot\frac{-1}{n\alpha(n)}\cdot\frac{-y}{\varepsilon^n}$有

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}u(y)dS(y)\longrightarrow u(x)\quad(\varepsilon\to 0).$$

(注: $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\Big|_{y-x=\varepsilon}=\left(-\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\cdot D\Phi(y-x)=-\frac{y-x}{\varepsilon}\cdot\frac{(-1)}{n\alpha(n)}\frac{y-x}{\varepsilon^n}=\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$ $y\in\partial B(x,\varepsilon)$.)

因此令$\varepsilon\to 0$有

$$u(x)=\int_{\partial U}\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)-u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)dS(y)-\int_U\Phi(y-x)\Delta u(y)dy\quad\forall x\in U,\forall u\in C^2(\bar{U}).$$

上述式子表明:如果知道u在U上的值,$\frac{\partial u}{\partial\nu}$,$u$在$\partial U$上的值,即可求出$u(x)$.

然而由于Poission方程并不知道$\frac{\partial u}{\partial\nu}$在边界上的值,从而引入

x固定,引入corrector(修正)函数$\phi^x=\phi^x(y)$.满足下列边界条件:

$$\begin{cases}\Delta\phi^x=0 & \text{in } U\\ \phi^x=\Phi(y-x) & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

再次使用Green公式有 $\int_U u(y)\Delta\phi^x(y)-\Delta u(y)\,\phi^x(y)\,dy=\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y)-\phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS$

$=\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y)-\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS(y)$.

$\Rightarrow -\int_U \phi^x(y)\Delta u(y)\,dy=\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y)-\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS(y)$.

从而 $u(x)=\int_U[\phi^x(y)-\Phi(y-x)]\Delta u(y)\,dy+\int_{\partial U} u(y)\cdot\left(\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y)-\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\right)dS(y)$.

(上述式子中没有出现 $\frac{\partial u}{\partial\nu}$，这就是引入 ϕ^x 的优点)

Definition: U上的Green函数为 $G(x,y)\triangleq\Phi(y-x)-\phi^x(y)$，$x,y\in U$. $(x\neq y)$

综上有 $u(x)=-\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)-\int_U G(x,y)\Delta u(y)\,dy$ $(x\in U)$

其中 $\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)=\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y)-\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)=D_yG(x,y)\cdot\nu(y)$. 其中 ν 是G关于变量y的单位外法向量

假设 $u\in C^2(\bar U)$ 是下面的解 $\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$ 有

定理12(利用Green函数来表达) 若 $u\in C^2(\bar U)$ 是方程 $\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的解，则

$u(x)=-\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)+\int_U f(y)G(x,y)\,dy$ $(x\in U)$

(Interpretation of Green's Function) 固定 $x\in U$, G是关于y的函数，从而有

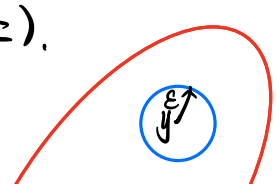
$$\begin{cases}-\Delta G=\delta_x & \text{in } U\\ G=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

定理13 (Green函数的对称性) $\forall x,y\in U, x\neq y$. 有 $G(y,x)=G(x,y)$.

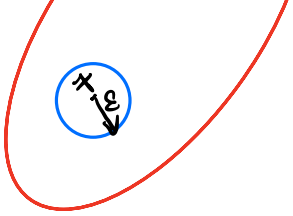
证明: 固定 $x,y\in U, x\neq y$. 记 $v(z)\triangleq G(x,z)$, $w(z)\triangleq G(y,z)$ $(z\in U)$

从而满足 $\Delta v(z)=0$ $(z\neq x)$ $\Delta w(z)=0$ $(z\neq y)$, $w=v=0$ (∂U上).

对于 $\varepsilon>0$, 考虑区域 $V\triangleq U-[B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon)]$ (ε充分小).



利用Green公式有



$$\int_V v(z)\Delta w(z)-w(z)\Delta v(z)\,dz=\int_{\partial V} v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}-w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS(z)$$

$$=\int_{\partial B(x,\varepsilon)+\partial B(y,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}-w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS(z)=\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}-w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS(z)$$

$$+\int_{\partial B(y,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}-w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS(z)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B(x,\varepsilon)} w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}-v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}\,dS(z)=\int_{\partial B(y,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial w}{\partial \nu}-w(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS(z).$$

其中ν是$\partial B(x,\varepsilon)\sqcup\partial B(y,\varepsilon)$的单位外法向量，由$w$是在$x$点处附近是光滑的.(基本解的正则性).

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial w}{\partial \nu}v\,dS\right|\le C\cdot\varepsilon^{n-1}\sup_{\partial B(x,\varepsilon)}|v|\ (\tfrac{\partial w}{\partial \nu}\text{有界})=o(1)\quad(\varepsilon\to 0).$$

另一方面，$v(z)=\Phi(z-x)-\phi^x(z)$，$\phi^x(z)$在U内是光滑的. 因此有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial v}{\partial \nu}w\,dS=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\vec{\nu}\cdot Dv\cdot w\,dS=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\left[\vec{\nu}\cdot\left(D\Phi(z-x)-D\phi^x(z)\right)\right]$$

$$w\,dS=\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial\Phi(z-x)}{\partial \nu}w\,dS}_{\downarrow\ w(x)}-\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial\phi^x(z)}{\partial \nu}\cdot w\,dS}_{\text{有界}}=w(x).$$

同理就有 $G(y,x)=w(x)=v(y)=G(x,y)$

b. 半空间上的Green函数 (for a half-space)

半空间是指$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$ (半空间是无界的,先前的计算没法用)

Definition: 如果$x=(x_1,\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n_+$,则它关于$\partial\mathbb{R}^n_+$的对称点是$\tilde{x}=(x_1,\cdots x_{n-1},-x_n)$

设$\phi^x(y)\triangleq\Phi(y-\tilde{x})=\Phi(y_1-x_1,\cdots y_{n-1}-x_{n-1},y_n+x_n)$. $x,y\in\mathbb{R}^n_+$.

(Remark: $\phi^x(y)$同样满足 $\begin{cases}\Delta\phi^x=0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+\\ \phi^x=\Phi(y-x)-\Phi(y-\tilde{x}) & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\end{cases}$)

$\Phi(y-x)=\Phi(y-\tilde{x})$ on $\partial\mathbb{R}^n_+$.

则在半空间上的 Green 函数为：

$$G(x,y)\triangleq\Phi(y-x)-\Phi(y-\tilde{x})\qquad(x,y\in\mathbb{R}^n_+,\ x\neq y)$$

那么有 $G_{y_n}=\Phi_{y_n}(y-x)-\Phi_{y_n}(y-\tilde{x})=\dfrac{-1}{n\alpha(n)}\left[\dfrac{y_n-x_n}{|y-x|^n}-\dfrac{y_n+x_n}{|y-\tilde{x}|^n}\right]$

若 $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$，则

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)=\nu(y)\cdot DG(x,y)=(0,0,\cdots 0,-1)\cdot(G_{y_1},\cdots G_{y_n})=-G_{y_n}(x,y)$$

$$=\frac{1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n-x_n-y_n-x_n}{|y-x|^n}\right]=\frac{-2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}$$ （其 ν 为 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上的单位外法向量）

下面设 u 满足下面的边界上的初值问题：$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+\\ u=g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\end{cases}$

假设由有界域上的 Green 函数推测：

$$u(x)=-\int_{\partial U}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)+\int_U f(y)G(x,y)\,dy$$

$$=-\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)+\int_{\mathbb{R}^n_+}0\cdot G(x,y)\,dy$$

$$=\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy$$ $x\in\mathbb{R}^n_+$ 作为解的表示形式，记为 Poisson 公式.

记函数 $K(x,y)=\dfrac{2x_n}{n\alpha(n)}\dfrac{1}{|x-y|^n}$ $(x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+)$ 为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的 Poisson 核.

下面验证上述推测 $u(x)$ 的表达式为方程的解.

定理14.[半空间的 Poisson 公式] 设 $g\in C(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，定义

$u(x)=\dfrac{2x_n}{n\alpha(n)}\displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy$，则

(i) $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

(ii) $\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n_+$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=g(x^0)$ $\quad\forall x^0\in\partial\mathbb{R}^n_+$.

证明: 1. 固定 x, 映射 $y\mapsto G(x,y)$ 在除了 $y=x$ 以外的地方调和. 由于 $G(x,y)=G(y,x)$ 则 $x\mapsto G(x,y)$ 在除了 $x=y$ 以外的地方调和, 由于调和函数的偏导数仍然是调和的 ($\Delta u=0\Rightarrow(\Delta u)_x=0\Rightarrow\Delta(u_x)=0$), 因此 $x\mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)=K(x,y)$ 在 $x\in\mathbb{R}^n_+$, $y\in\mathbb{R}^n_+$ 上是调和的. 从而 $u=\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)g(y)dy\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$

(调和函数的正则性)

2. 直接计算得到 $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)dy=1$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^n_+$.

由于 g 有界, 则 u 也有界, 由于 $x\mapsto K(x,y)$ 在 $x\neq y$ 处光滑, 可得 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

且 $\Delta u(x)=\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Delta_x K(x,y)g(y)dy=0$ $\quad x\in\mathbb{R}^n_+$.

3. 固定 $x^0\in\partial\mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon>0$, 由 g 的连续性得 $\exists\delta$ 充分小 >0, 使得当 $|y-x^0|<\delta$ 时, $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$, 有 $|g(y)-g(x^0)|<\varepsilon$.

如果 $|x-x^0|<\delta/2$, $x\in\mathbb{R}^n_+$, 则

$$|u(x)-g(x^0)|=\left|\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)[g(y)-g(x^0)]dy\right|$$

$$\leq\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(x^0,\delta)}K(x,y)|g(y)-g(x^0)|dy+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+-B(x^0,\delta)}K(x,y)|g(y)-g(x^0)|dy$$

$\triangleq I+J$

由于 $\int$

I 满足 $I \le \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(x^0,\delta)} k(x,y)\,\varepsilon\,dy \le \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} k(x,y)\,dy = \varepsilon$.

Futhermore, 若 $|x-x^0| \le \frac{\delta}{2}$, $|y-x^0| \ge \delta$ (积分区域为 $\partial\mathbb{R}^n_+ - B(x^0,\delta)$) 有

$$|y-x^0| \le |y-x| + |x-x^0| \le |y-x| + \tfrac{1}{2}|y-x^0|$$

因此 $|y-x| \ge \frac{1}{2}|y-x^0|$, 则

$$J \le 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ - B(x^0,\delta)} k(x,y)\,dy$$

$$\le \frac{2^{n+1}\|g\|_{L^\infty}\, x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ - B(x^0,\delta)} \frac{1}{|y-x^0|^n}\,dy \longrightarrow 0 \quad (x_n \to 0^+)$$

综上所述, 当 $|x-x^0|$ 充分小时, 有 $|u(x) - g(x^0)| \le 2\varepsilon$

#.

C. 球上的 Green 函数 (Green's Function for a ball)

Definition: 如果 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, 则 $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ 称为 x 关于 $\partial B(0,1)$ 的对偶点 (dual point)

映射 $x \mapsto \tilde{x}$ 叫做通过单位球面 $\partial B(0,1)$ 的反演点 (inversion)

开球

去求 $U = B^0(0,1)$ 上的 Green 函数, 固定 $x \in B^0(0,1)$, 首先找到 $\phi^x = \phi^x(y)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0 & \text{in } B^0(0,1) \\ \phi^x = \Phi(y-x) & \text{on } \partial B^0(0,1) \end{cases}$$

, 那么 Green 函数就为 $G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$.

想法是把奇点 $x \in B^0(0,1)$ 映到 $\tilde{x} \notin B(0,1)$

下面考虑 $n \ge 3$ 的时候, 映射 $y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y-\tilde{x})$ 在 $y \ne \tilde{x}$ 调和, 则

$$\phi^x(y) \triangleq \Phi(|x|(y-\tilde{x}))\text{ 在 } U \text{ 中调和}.$$

另外如果 $y \in \partial B(0,1)$, $x \ne 0$, 则

$$|x|^2|y-\tilde{x}|^2 = |x|^2\left(|y|^2 - 2y\cdot\tilde{x} + |\tilde{x}|^2\right) = |x|^2\left(|y|^2 - \frac{2y\cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right)$$

$=|x|^2-2y\cdot x+1=|x-y|^2$ $(y\in\partial B(0,1),\ |y|=1)$

则 $(|x|\,|y-\hat{x}|)^{-(n-2)}=|x-y|^{-(n-2)}$，则 $\Phi(|x|(y-\hat{x}))=\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|(y-\hat{x})|^{n-2}}$

$=\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}=\Phi(y-x)$. 从而 $\phi^x(y)=\Phi(y-x)$，$y\in\partial B(0,1)$

故 $\phi^x(y)=\Phi(|x|(y-\hat{x}))$ 满足 corrector 函数的定义.

Definition：单位球上的格林函数为 $G(x,y)=\Phi(y-x)-\Phi(|x|(y-\hat{x}))$ $(x,y\in B(0,1),\ x\neq y)$

同样对于 $n=2$ 时也成立.

若假设 u 是下面边界问题的解：$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B^0(0,1)\\ u=g & \text{on } \partial B(0,1)\end{cases}$

那么 $u(x)=-\int_{\partial B(0,1)}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)$，且 $G_{y_i}(x,y)=\Phi_{y_i}(y-x)-\Phi(|x|(y-\hat{x}))_{y_i}$.

但 $\Phi_{y_i}(y-x)=\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}$，$\Phi(|x|(y-\hat{x}))_{y_i}=\frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{y_i|x|^2-x_i}{(|x|\,|y-\hat{x}|)^n}=\frac{1}{-n\alpha(n)}\frac{y_i|x|^2-x_i}{|x-y|^n}$

(Remark: $\Phi(|x|(y-\hat{x}))_{y_i}=\left(\frac{1}{n\alpha(n)(n-2)}\frac{1}{|x|(y-\hat{x})|^{n-2}}\right)_{y_i}$

$=\frac{1}{n\alpha(n)(n-2)}^{-(n-2)}\frac{1}{|x|(y-\hat{x})|^{n-1}}\cdot\frac{|x|(y_i-\hat{x}_i)}{|(y-\hat{x})|}=\frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{y_i|x|^2-x_i}{|x|(y-\hat{x})|^n}$)

若 $y\in\partial B(0,1)$，$\vec{\nu}=(y_1,\cdots y_n)$，$|\vec{\nu}|=1$，以及 $\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)=\sum_{i=1}^n y_iG_{y_i}(x,y)$

$=-\frac{1}{n\alpha(n)|x-y|^n}\sum_{i=1}^n y_i((y_i-x_i)-y_i|x|^2+x_i)=-\frac{1}{n\alpha(n)|x-y|^n}\left[\sum_{i=1}^n(y_i^2-y_ix_i-y_i|x|^2+y_ix_i)\right]$

$=-\frac{1}{n\alpha(n)|x-y|^n}\left[\sum_{i=1}^n y_i^2(1-|x|^2)\right]=\frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$

从而有 $u(x)=-\int_{\partial B(0,1)}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\,dS(y)=\frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dS(y)$.

下面把单位球推广到普通球，设u是下面边值问题的解：

$$\begin{cases} \Delta u=0 & \text{in } B^0(0,r) \\ u=g & \text{on } \partial B^0(0,r) \end{cases} \quad r>0.$$

则作变换 $\tilde{u}(x)=u(rx)$，$\tilde{g}(x)=g(rx)$ ⟹ 有 poisson 公式：

$$u(x)=\frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\int_{\partial B(0,r)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dS(y) \qquad (x\in B^0(0,r))$$

记 $K(x,y)=\frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\frac{1}{|x-y|^n}$ $(x\in B^0(0,r), y\in\partial B(0,r))$ 为球 $B(0,r)$ 的 Poisson 核.

定理15（球上的 Poisson 公式）假设 $g\in C(\partial B(0,r))$，$u(x)=\frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\int_{\partial B(0,r)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dS(y)$，

那么 (i) $u\in C^\infty(B^0(0,r))$

(ii) $\Delta u=0$ in $B^0(0,r)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{x\to x^0\\ x\in B^0(0,r)}} u(x)=g(x^0) \quad \forall x^0\in\partial B(0,r)$.

证明同定理14.

#.

2.2.5 能量方法（Energy methods）

a. 唯一性（Uniqueness） 边值问题 $\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in } U \\ u=g & \text{on } \partial U \end{cases}$

由极值原理证明过解的唯一性，下面用能量方法来证明唯一性.

假设U为有界开集，且 $\partial U\in C^1$.

定理16.（Uniqueness）则至多存在一个解u满足上述边值问题.

证明：设$\tilde{u}$也为方程的解. 记 $w=u-\tilde{u}$. 那么 $\Delta w=0$ in U. 从而有

$$\int_U w\Delta w\,dx=\int_{\partial U} w\frac{\partial w}{\partial \nu}dS-\int_U Dw\cdot Dw\,dx$$

$\Rightarrow$ (由 $w=0$ on ∂U) 有 $0=-\int_U w\Delta w\,dx=\int_U |Dw|^2dx \Rightarrow Dw\equiv 0$ in U.

根据 $w=0$ on $\partial U \Rightarrow w=0$ in $U \Rightarrow u=\tilde{u}$ in U

#.

b. Dirichlet's principle：说明上述边值问题的解可以表示成一个函数的最小值.

定义 energy functional：$I[w]:=\int_U \frac{1}{2}|Dw|^2-wf\,dx$，其中 w 属于一个容许集 (admissible set) $\mathcal{A}=\{w\in C^2(\bar{U})\mid w=g \text{ on } \partial U\}$.

(Remark：容许集(admissible set)：$\mathcal{A}$是有界的且$\mathcal{A}$的边界为零测集)

定理17 (Dirichlet's principle) 假设 $u\in C^2(\bar{U})$ 满足 $\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$，那么 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$，相反，if $u\in\mathcal{A}$，满足 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$. 那么 u 是方程的解.

换言之，如果 $u\in\mathcal{A}$，PDE $-\Delta u=f$ 等价于 u 使得 energy $I[\cdot]$ 最小.

证明：1. 选择一个 $w\in\mathcal{A}$，那么有 $0=\int_U(-\Delta u-f)(u-w)\,dx$

$\Rightarrow 0=-\int_U \Delta u\,(u-w)\,dx-\int_U f(u-w)\,dx \overset{\text{分部积分}}{=\!=} \int_U Du\cdot D(u-w)\,dx-\int_{\partial U}(u-w)\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$

$-\int_U f(u-w)\,dx$ (边界上 $u=w$ on ∂U) $=\int_U Du\cdot D(u-w)\,dx-\int_U f(u-w)\,dx$.

因此有

$$\int_U |Du|^2-uf\,dx=\int_U Du\cdot Dw-fw\,dx\le\int_U \frac{1}{2}|Du|^2dx+\int_U \frac{1}{2}|Dw|^2-wf\,dx$$

$\left(Du\cdot Dw \le |Du||Dw| \le \frac{|Du|^2+|Dw|^2}{2} = \frac{1}{2}|Du|^2+\frac{1}{2}|Dw|^2 \right)$.

$\Rightarrow \int_U \frac{1}{2}|Du|^2 - uf\,dx \le \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf\,dx$ 即 $I[u]\le I[w]$ $(w\in\mathcal{A})$

当 $u\in\mathcal{A}$，由 w 的任意性，有 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$.

2. 相反，设 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$. 固定 $v\in C_c^\infty(U)$，记 $i(\tau)=\underline{I[u+\tau v]}$ $(\tau\in\mathbb{R})$

其中 $\forall\tau$，有 $u+\tau v\in\mathcal{A}$，从而函数 $i(\cdot)$ 在零处取到最小值. $(I[u]=\min, =I[u+0\cdot\tau]=i(0))$.

因此 $\frac{d}{d\tau} i(\cdot)\Big|_{\cdot=0} = i'(0)=0$. 但 $i(\tau)=\int_U \frac{1}{2}|Du+\tau Dv|^2-(u+\tau v)f\,dx$

$=\int_U \frac{1}{2}|Du|^2+\tau Du\cdot Dv+\frac{\tau^2}{2}|Dv|^2-(u+\tau v)f\,dx$

$\Rightarrow i'(\cdot)=\int_U Du\cdot Dv+\tau|Dv|^2-vf\,dx \Rightarrow 0=i'(0)=\int_U Du\cdot Dv-vf\,dx=\int_U Du\cdot Dv\,dx-\int_U vf\,dx$

$\underline{\underline{\text{分部积分}}}$ $\int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS-\int_U v\Delta u\,dx-\int_U vf\,dx=\int_U(-\Delta u-f)v\,dx$ $(v\in C_c^\infty(U))$

由 v 的任意性 $\Rightarrow -\Delta u=f$ in U.

弱解的定义.

2.3 热方程 (Heat equation)

热传导方程：$u_t-\Delta u=0$，非齐次热传导方程：$u_t-\Delta u=f$.
其中给定合适的初值与边界条件. 这里 $t>0$, $x\in U\subset\mathbb{R}^n$, U 为开集. 未知数 $u:\bar{U}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$
$u=u(x,t)$, 而 Laplace 算子是关于空间 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的, 即 $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}$. 在非齐次的方程中 $f:U\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是给定的.

主要思路是用调和函数中用到的方法来类比热传导方程. 所以思路类似.

2.3.1 基本解.

a. 基本解的起源 (Derivation) 用 Laplace 方程得到解一个 PDE 的重要思路一般都是先求出特解. 注意到 Heat Equation 是关于时间分量 t 的一阶偏导数和关于空间分量 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的二阶偏导数. 因此, 若 $u(x,t)$ 为 Heat Equation 的解, 那么 $u(\lambda x,\lambda^2 t)$ $t\in\mathbb{R}$ 也是 Heat Equation 的解.

(Remark: $u_t=u_t(\lambda x,\lambda^2 t)=\lambda^2 u_t$ $\quad\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\partial_{ii}u(\lambda x,\lambda^2 t)=\lambda^2\Delta u$
从而有 $\lambda^2 u_t-\lambda^2\Delta u_x=0\Rightarrow\lambda^2(u_t-\Delta u)=0$.)

因此 $\frac{r^2}{t}$ $(r=|x|)$ 这个 Scaling 对热方程来说很重要, 不妨去考虑一个形如 $u(x,t)=v(\frac{r^2}{t})$ $=v(\frac{|x|^2}{t})$ $(t>0, x\in\mathbb{R}^n)$ 的解.

虽然上面的方法最可以得到所要的结果, 但若考察形如 $u(x,t)=\frac{1}{t^\alpha}v(\frac{x}{t^\beta})$ $(x\in\mathbb{R}^n, t>0)$ 的解 u 可能更简便, 其中常数 α,β. 函数 $v:(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ 待定, 上述形式等价于做伸缩变换 (dilation scaling) : $u(x,t)\mapsto\lambda^\alpha u(\lambda^\beta x,\lambda t)$, 即 $u(x,t)=\lambda^\alpha u(\lambda^\beta x,\lambda t)$ $\forall\lambda>0, x\in\mathbb{R}^n, t>0$. 取 $\lambda=\frac{1}{t}$, 有 $u(x,t)=\frac{1}{t^\alpha}v(\frac{x}{t^\beta})=\frac{1}{t^\alpha}u(\frac{x}{t^\beta},1)\Rightarrow v(y)\triangleq u(y,1)$

令 $u(x,t)=\frac{1}{t^\alpha}v(\frac{x}{t^\beta})$ 代入 $u_t-\Delta u=0$ 计算得: 记 $y=\frac{x}{t^\beta}$

$$u_t=-\alpha t^{-\alpha-1}v(y)+t^{-\alpha}Dv(y)\cdot(-\beta)xt^{-\beta-1}=-\alpha t^{-\alpha-1}v(y)-\beta xt^{-\alpha-\beta-1}Dv(y)$$

$$= -\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + (-\beta) t^{-\alpha-1} y \cdot Dv(y).$$

$$\Delta u \Rightarrow u_x = \frac{1}{t^\alpha} Dv(y) \cdot t^{-\beta} \Rightarrow \Delta u = t^{-\alpha} \cdot t^{-2\beta} \Delta v(y) = t^{-\alpha-2\beta} \Delta v(y)$$

从而 $u_t - \Delta u = 0 \Rightarrow$

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \quad 其 y = \frac{x}{t^\beta}.$$

为了使上述式子转化为只有 y 的形式 我们取 $\beta = 1/2$，从而就可以把 t 消去得

$$\alpha v + \tfrac{1}{2} y \cdot Dv(y) + \Delta v(y) = 0$$

考虑 v 是径向解 (radial solution) 使问题简化，即 $v(y) = w(|y|)$，其中 $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

则上式变成

$$w_{y_i}(|y|) = w' \cdot \frac{y_i}{r} \qquad w_{y_i y_i}(|y|) = w''\left(\frac{y_i}{r}\right)^2 + w' \cdot \frac{r - y_i \cdot \frac{y_i}{r}}{r^2} = w''\left(\frac{y_i}{r}\right)^2 + w' \frac{r^2 - y_i^2}{r^3}$$

$$y Dw = w'\left(\frac{y_1^2 + \cdots y_n^2}{r}\right) = r w' \qquad \Delta w = w''\left(\frac{y_1^2 + \cdots y_n^2}{r^2}\right) + w' \frac{n r^2 - r^2}{r^3}$$

$$= w'' + w' \frac{(n-1)}{r} \Rightarrow \Delta v = \Delta w$$

$$\Rightarrow \alpha w + \tfrac{1}{2} r w' + \Delta w = 0 \Rightarrow \alpha w + \tfrac{1}{2} r w' + w'\left(\frac{n-1}{r}\right) + w'' = 0 \quad 其中 r = |y|, \ ' = \frac{d}{dr}$$

若设 $\alpha = 1/2$. 上式简化为 $(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0 \Rightarrow (r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w)' = 0$

$\Rightarrow r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$. 其中 a 为某一个常数.

为了方便，添加(边值条件) $\lim_{r \to \infty} w' = 0$, $\lim_{r \to \infty} w = 0$，则而 $a = 0$. 有 $w' = -\frac{1}{2} r w$

用分离变量，有在常数 b, s.t. $w = b e^{-r^2/4} \Rightarrow$ 由 $y = \frac{x}{t^\beta} \Rightarrow |y| = \frac{1}{t^{2\beta}} |x|$.

$$\Rightarrow |r| = |y| = \frac{|x|}{t^{2\beta}} = \frac{|x|}{t} \Rightarrow v = b e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \Rightarrow u = \frac{b}{t^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$

$$\Phi(x) \quad (L) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n \geq 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

Definition: 定义函数 $\Phi(x,t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$

为Heat Equation的基本解.

注意到Φ在$t=0$处有奇性，有时记$\Phi(x,t)=\Phi(|x|,t)$强调基本解是关于x的径向解.

引理(Lemma) 基本解的积分. $\forall t>0$，有$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x,t)dx=1$. (核函数).

证明: $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}dx$.

$$=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x_i^2}{4t}}dx_i=1.$$

$$\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x_i^2}{4t}}dx_i\xlongequal[dx_i=(4t)^{1/2}dz]{\frac{x_i}{\text{令}(4t)^{1/2}=z}}\frac{1}{(\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz\Rightarrow\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x_i^2}{4t}}dx\right.$$

$$\left.=\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\cdot(\pi)^{n/2}=1\right)$$

#

b. 初值问题 (Inital-value problem) 下面用Φ来解下面的初值(Cauchy问题)

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}.\end{cases}$$

假设函数$(x,t)\mapsto\Phi(x,t)$在除了$(0,0)$处以外的地方满足Heat Equation，则对于固定$y\in\mathbb{R}^n$，函数$(x,t)\mapsto\Phi(x-y,t)$也满足(同Laplace)，因此作卷积

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy$$

$$=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}g(y)dy\qquad(x\in\mathbb{R}^n,t>0)$$

那也应为上面初值问题的解.

定理1 初值问题的解 (solution for I.v.p) 设$g\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，定义

$u=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy$，则

(i) $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$

(ii) $u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=0 \quad (x\in\mathbb{R}^n, t>0)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t)=g(x^0) \quad \forall x^0\in\mathbb{R}^n.$

证明: 1. 由于函数 $\frac{1}{t^{n/2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$ 无穷次可微,且在 $\mathbb{R}^n\times[\delta,\infty)$. $(\delta>0)$ 的任意阶导数有界

则 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$. 此外由 Φ 为基本解,有

$$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}(\Phi_t-\Delta\Phi)(x-y)g(y)dy=0. \quad (x\in\mathbb{R}^n, t>0)$$

(Remark,并不能直接交换极限,变分法).

2. 固定 $x^0\in\mathbb{R}^n$, 取 $\varepsilon>0$. 于 $\delta>0$, s.t 当 $|y-x^0|<\delta$ 时, $|g(y)-g(x^0)|<\varepsilon$

若 $|x-x^0|<\delta/2$, 且 $|y-x^0|\geq\delta$, 则 $|y-x^0|\leq|y-x|+|x-x^0|\leq|y-x|+\delta/2\leq|y-x|+\frac{1}{2}|y-x^0|$

$\Rightarrow |y-x|\geq\frac{1}{2}|y-x^0|$

基本解的性质.

$$|u(x,t)-g(x^0)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)(g(y)-g(x^0))dy\right|\leq\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy$$

$$\leq\int_{B(x^0,\delta)}\Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy+\int_{\mathbb{R}^n-B(x^0,\delta)}\Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy$$

$:=I+J$

明显有 $I\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)dy=\varepsilon$.

再考虑 J: $J\leq 2\|g\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n-B(x^0,\delta)}\Phi(x-y,t)dy$

$$\leq\frac{C}{t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n-B(x^0,\delta)}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy\leq\frac{C}{t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n-B(x^0,\delta)}e^{\frac{-|y-x^0|^2}{16t}}dy.$$

$dz=\sqrt{t}\,dy\Rightarrow dz=t^{n/2}dy$

$$=C\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\delta/\sqrt{t})}e^{\frac{-|z|^2}{16}}dz. \quad \left(令\ z=\frac{y-x_0}{\sqrt{t}}\right)\longrightarrow 0\ (t\to0^+)$$

因为 $|x-x^0|<\delta/2$ 且 $t>0$, 从而 $|u(x,t)-g(x^0)|<2\varepsilon$.

$\Phi(x)\Rightarrow\Delta\Phi=\delta_0.$ #.

$\int_{\mathbb{R}^n}\delta_0dx=1.$ $\delta_0=\begin{cases}\infty & x=0.\\ 0. & x\neq0\end{cases}$

基本解的解释: 有时候也用 Dirac 函数表示: $\begin{cases}\Phi_t-\Delta\Phi=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\end{cases}$

$$\Phi=\delta_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}.$$

C. 非齐次问题

下面考虑非齐次问题：$\begin{cases} u_t-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}. \end{cases}$ 如何去寻找解的表达式？

由齐次问题的思路，应该考虑映射 $(x,t)\longmapsto\Phi(x-y,t-s)$；它仍为热方程的解。（固定 $y\in\mathbb{R}^n$，$0<s<t$）。现在固定 s，那么函数 $u=u(x,t;s)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,dy$

满足方程 $\begin{cases} u_t(\cdot;s)-\Delta u(\cdot;s)=0. & \text{in } \mathbb{R}^n\times(s,\infty) \\ u(\cdot;s)=f(\cdot,s) & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=s\}. \end{cases}$，上述方程只是初值问题

的另一种形式，（开始时间由 $t=0\Rightarrow t=s$，$g\Rightarrow f(\cdot,s)$）。从而明显上述的 $u(\cdot;s)$ 并不是

非齐次问题的解。

然后由 Duhamel's 原理告诉我们在刚刚齐次方程的基础上，关于 s 积分就能

得到非齐次的解。下面考虑 $u(x,t)=\int_0^t u(x,t;s)\,ds \quad (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)$

即 $u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds=\int_0^t\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}f(y,s)\,dy\,ds.$

$\forall x\in\mathbb{R}^n, t>0.$

下证上述 u 的表达式成立，不妨假设 $f\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ 且 f 有紧支集。

空间 x

时间 t

定理2（非齐次问题的解）

定义 $u=\int_0^t\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}f(y,s)\,dy\,ds$，则

(i) $u\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$

(ii) $u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}^n, t>0)$

(iii) $\lim_{(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t)=0 \quad \forall x^0\in\mathbb{R}^n.$

(iii) $(x,t)\to(x,0)$
$x\in\mathbb{R}^n, t>0$

证明(ii) 由于 Φ 在 $(0,0)$ 处为奇点，则不可以直接求导验证，首先换元，

记 $u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds$，由于 $f\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ 具有紧支集，

且 $\Phi=\Phi(y,s)$ 在 $s=t>0$ 附近 $t>0$ 附近光滑，则 $\Phi*f=f*\Phi \Leftarrow$ (换元)

$$u(x,t+h)=\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t+h-s)dyds$$

$$u_t(x,t)=\lim_{h\to0}\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)[f(x-y,t+h-s)-f(x-y,t-s)]dyds$$

$$+\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t+h-s)dyds.$$

$$=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f_t(x-y,t-s)dyds$$ [Lebegues控制收敛Th 极限号&积分号交换顺序]

$$+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy$$

(Remark: $\lim_{h\to0}\dfrac{\int_t^{t+h}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t+h-s)dy\right)ds}{h}\overset{L'Hospital}{=\!=}\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t+h)f(x-y,t+h-t)dy$

$=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy$)

同理有 $u_{x_ix_j}(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f_{x_ix_j}(x-y,t-s)dyds$ $(i,j=1,2\cdots n)$，则有 $u_t, D_x^2u, u, D_xu\in C(\mathbb{R}^n)$

(卷积向交换律)，

(ii) $$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\right)f(x-y,t-s)\right]dyds+$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy=\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dyds$$ $(\Delta_yf=\Delta_xf)$

$$+\int_0^\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dyds+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy\triangleq J_\varepsilon+J_\varepsilon+K.$$

可知 $$|J_\varepsilon|=\left|\int_0^\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dyds\right|\le(\|f_t\|_{L^\infty}+\|D^2f\|_{L^\infty})\int_0^\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)dyds$$

$\leq C\varepsilon$ $\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)dy=1\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_\varepsilon^t -\Phi(y,s)\frac{\partial}{\partial s}f(x-y,t-s)ds\right]dy.$$

$$-\int_\varepsilon^t \Phi(y,s)\frac{\partial}{\partial s}f(x-y,t-s)ds$$
$$=-\Phi(y,s)f(x-y,t-s)\Big|_{s=\varepsilon}^{s=t}+\int_\varepsilon^t\frac{\partial}{\partial s}\Phi\cdot f ds$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}-\Phi(y,t)f(x-y,0)dy$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)dy$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^t\frac{\partial}{\partial s}\Phi\cdot f ds\,dy$$

用分部积分得.

$$I_\varepsilon=\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dyds=-\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\frac{\partial}{\partial s}f(x-y,t-s)dyds$$

$$-\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\Delta_y f(x-y,t-s)dyds=-\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^t\Phi(y,s)\frac{\partial}{\partial s}f(x-y,t-s)dyds$$

(Lebesgue交换积分顺序)

$$-\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)\Delta_y f(x-y,t-s)dyds\overset{\text{分部积分}}{=\!=}\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^t\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y,s)f(x-y,t-s)dyds$$

(关于s使用分部积分)

$$+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)dy-\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy-\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_y\Phi(y,s)f(x-y,t-s)dyds$$

$$=\int_\varepsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)\Phi(y,s)\right]f(x-y,t-s)dyds+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t-\varepsilon)dy$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)dy-K.$$

综上有 $u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,0)f(x-y,t)dy$

$=\int_{\mathbb{R}^n}\delta_0 f(x-y,t)dy=f(x,t)$ (与上述同Th1证明)

更easy~.

(iii) 由 $|u(x,t)|=\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t-s)dyds\right|\leq\|f\|_{L^\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)dyds$

$=t\|f\|_{L^\infty}\Rightarrow\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leq t\|f\|_{L^\infty}\longrightarrow0\quad(t\to0)$

#

Conclusion:

综上所述,可以知道初值的非齐次方程的解 $\begin{cases}u_t-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$

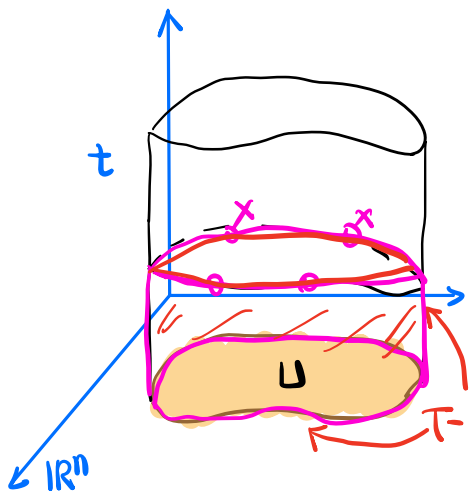
为 $u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds$

2.3.2 平均值性质 (Mean-value formula)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集,固定时间 $T>0$.

Definition: (i) 把抛物柱面 (parabolic cylinder) 定义为 $U_T = U\times(0,T]$. 把 U_T 的抛物边界记为 $\Gamma_T \triangleq \overline{U}_T - U_T$

(Remark: 记 U_T 为 $\overline{U}\times[0,T]$ 的内部: U_T 是包含顶部 $U\times\{t=T\}$, 而抛物边界 Γ_T 是由底部和 $U\times[0,T]$ 的垂直侧边组成, 而不包含顶部)



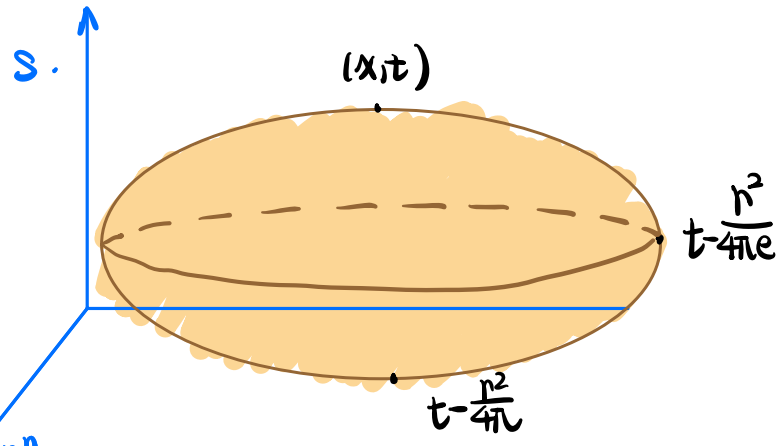
$$\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

下面想把调和函数的平均值性质类比于此, 但没有简单的表达式. 若观察到固定 x 以后, 球面 $\partial B(x,r)$ 上的点在 Laplace 方程的基本解 $\Phi(x-y)$ 的值是一样的 (即等值面 (level set)), 因此受到启发, 也许固定 (x,t) 以后热传导方程的基本解 $\Phi(x-y,t-s)$ 的等值面与平均值性质有关.

Definition: 固定 $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, $r>0$. 定义

$$E(x,t;r)=\{(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid s\le t,\ \Phi(x-y,t-s)\ge \frac{1}{r^n}\}$$

这是一个有关时间-空间的区域. $E(x,t;r)$ 的边界是 $\Phi(x-y,t-s)$ 的一个等值面. 点 (x,t) 称为顶部的中心. $E(x,t;r)$ 有时叫做"热球" (heat ball)



$$\Phi(y,-s)=\Phi(-y,-s)$$

$$e^{\frac{-|y|^2}{-4s}}=e^{\frac{-|-y|^2}{-4s}}$$

$\swarrow \mathbb{R}^n$

(Remark: 由 $\Phi(x-y,t-s)=\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}}e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}\geq\frac{1}{r^n}\Rightarrow e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}\geq\frac{(4\pi(t-s))^{n/2}}{r^n}$

$\Rightarrow \underline{|x-y|^2\leq 2n(t-s)}(2\ln r-\ln 4\pi(t-s))$ 球，记 $f(s)=2n(t-s)(2\ln r-\ln 4\pi(t-s))$

$f'(s)=-2n(2\ln r-\ln 4\pi(t-s))+2n(t-s)\left(-\frac{4\pi}{4\pi(t-s)}\right)=2n[1+\ln 4\pi(t-s)-2\ln r]=0$:

$\Rightarrow s=t-\frac{r^2}{4\pi e}$. 并且由 $|x-y|^2\geq 0$ 则 $2n(t-s)(2\ln r-\ln 4\pi(t-s))\geq 0\Rightarrow t-\frac{r^2}{4\pi}\leq s\leq t$.

且 $f'(s)>0$ $(s<t-\frac{r^2}{4\pi e})$ $f'(s)>0$ $(s>t-\frac{r^2}{4\pi e})$.

从而 $|x-y|^2\leq f(s)$. 在 $s\in[t-\frac{r^2}{4\pi},t-\frac{r^2}{4\pi e}]\cup[t-\frac{r^2}{4\pi e},t]$.)

定理3. (Heat Equation的平均值性质) 设 $u\in C_1^2(U_T)$ 满足 Heat Equation. 则对任意的 $E(x,t;r)\subset U_T$, 有 $u(x,t)=\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x,t;r)}u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds$.

上述公式由 Laplace 方程 M.V.P 对 Heat 方程的模仿，观察到等式右端 $u(y,s)$ 只包含 $s\leq t$ 时间的值，原因是 $u(x,t)$ 的值应该与未来的时间无关.

证明: 对时间空间坐标进行平移 s,t 令 $x=0$ 和 $t=0$. 假设 u 是光滑的，有必要的话也可以对其进行磨光. 记 $E(r)=E(0,0;r)$, 有

$$\phi(r)\triangleq\frac{1}{r^n}\iint_{E(r)}u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds=\iint_{E(1)}u(ry,r^2s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds.$$

(Remark: 令 $y=ry'$ $dy=r^ndy'$ $(y_1\cdots y_n)=(ry_1\cdots ry_n)$ (n维) $s=r^2s'$ $ds=r^2ds'$ 有 $\frac{1}{r^n}\iint_{E(r)}u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds$

$=\frac{1}{r^n}\iint_\Omega u(ry',r^2s')\frac{r^2|y'|^2}{r^4s'^2}r^nr^2dy'ds'$ $\left(E(r):=\left\{(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,s\leq t,\Phi(y,-s)\geq\frac{1}{r^n}\right\}\right.$

$\Rightarrow\Phi(y,-s)=\frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}}e^{\frac{-|y|^2}{-4s}}\geq\frac{1}{r^n}\Rightarrow\frac{1}{(-4\pi s')^{n/2}r^n}e^{\frac{-r^2|y|^2}{-4r^2s}}\geq\frac{1}{r^n}$

$\Rightarrow\frac{1}{(-4\pi s')^{n/2}}e^{\frac{|y'|^2}{4s'}}\geq 1$. 即 $\Phi(y',-s')\geq 1$, 通过变量替换得 $E(r)\to E(1)$.)

从而计算 $\phi'(r)=\iint_{E(1)}\sum_{i=1}^n u_{y_i}\cdot y_i\frac{|y|^2}{s^2}+2ru_s\frac{|y|^2}{s}dyds$

$\frac{d}{dr}u(ry,r^2s)$
$=(u_{y_1}\cdot y_1+u_{y_2}\cdot y_2+\cdots u_{y_n}\cdot y_n$
$+u_s\cdot 2r\cdot)\frac{|y|^2}{s^2}$

$=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}\sum_{i=1}^n u_{y_i}\cdot y_i\cdot\frac{|y|^2}{s^2}+2u_s\frac{|y|^2}{s}dyds$

$\triangleq A+B$.

(Remark: $\phi'(r)=\frac{d}{dr}\left(\iint_{E(1)} u(ry,r^2s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds\right)$ $\frac{|y|^2}{s^2}\frac{d}{dr}(u(ry,r^2s))=\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\cdot y_i\cdot\frac{|y|^2}{s^2}+2ru_s\cdot\frac{|y|^2}{s^2}$

同上一步换元 令 $y=\frac{y'}{r}$ $s=\frac{s'}{r^2}$ $dy=\frac{1}{r^n}dy'$ $ds=\frac{1}{r^2}ds'$ 同理 $E(1)\to E(r)$.

$$\iint_{E(r)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\cdot\frac{y_i'}{r}\cdot\frac{r^4|y'|^2}{r^2s'^2}+2ru_s\cdot\frac{|y'|^2r^2}{r^2s'}\right)\frac{1}{r^{n+2}}dy'ds'$$

$$=\iint_{E(r)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\cdot y_i'\cdot\frac{|y'|^2}{s'^2}+2u_s\frac{|y'|^2}{s'}\right)\frac{1}{r^{n+1}}dy'ds'=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\cdot y_i\cdot\frac{|y|^2}{s^2}+2u_s\frac{|y|^2}{s}dyds$$

其 u_{y_i}, u_s 代表对 u 的第 i 个空间变量求导，u_s 代表对时间变量求导.)

下面引入一个辅助函数：$\psi\triangleq-\frac{n}{2}\ln(-4\pi s)+\frac{|y|^2}{4s}+n\ln r$.

注意到在 $\partial E(r)-\{(0,0)\}$ 上 $\psi=0$. (原因是 $\partial E(r)-\{(0,0)\}$: $\Phi(y,-s)=\frac{1}{r^n}\Rightarrow$

$\frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}}e^{\frac{|y|^2}{4s}}=\frac{1}{r^n}\Rightarrow\frac{|y|^2}{4s}=\ln(-4\pi s)^{n/2}-\ln r^n=\frac{n}{2}\ln(-4\pi s)-n\ln r\Rightarrow-\frac{n}{2}\ln(-4\pi s)$

$+\frac{|y|^2}{4s}+n\ln r=0$; $\psi_s=-\frac{n}{2}\cdot\frac{-4\pi}{-4\pi s}-\frac{|y|^2}{4s^2}=-\frac{n}{2s}-\frac{|y|^2}{4s^2}$; $\psi_{y_i}=\frac{2|y|}{4s}\cdot\frac{y_i}{|y|}=\frac{y_i}{2s}$)

那么

$$B=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}2u_s\frac{|y|^2}{s}dyds=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}4u_s\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\psi_{y_i}dyds \quad ①$$

$$=-\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}4nu_s\psi+4\sum_{i=1}^{n}u_{s y_i}y_i\psi dyds \quad ②$$

关于 y_i 分部积分

关于 s 分部积分

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}-4nu_s\psi+4\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\cdot y_i\psi_s dyds \quad ③$$

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}-4nu_s\psi+4\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}y_i\left(-\frac{n}{2s}-\frac{|y|^2}{4s^2}\right)dyds \quad \left(\psi_s=-\frac{n}{2s}-\frac{|y|^2}{4s^2}\right)$$

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}-4nu_s\psi-\frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}y_i dyds-A.$$

(Remark: ①$\longrightarrow$② 关于 y_i 分部积分 $\iint_{E(r)}4u_s\sum_{i=1}^{n}y_i\psi_{y_i}dyds=\int_{\sqcup}\prod_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}4u_s y_i\psi_{y_i}dy_i ds$

其中 $\int_{a_i}^{b_i}4u_s y_i\psi_{y_i}dy_i=\int_{a_i}^{b_i}4u_s y_i d\psi=\psi 4u_s\cdot y_i\Big|_{a_i}^{b_i}-\int_{a_i}^{b_i}4\psi(u_{s y_i}\cdot y_i+u_s)dy_i$

(由 ψ 在 $\partial E(r)-(0,0)$ 上 $=0$. 从而 $\psi(b_i)=\psi(a_i)=0$, 即 $\psi 4u_s\cdot y_i\Big|_{a_i}^{b_i}=0$.).

从而 $\iint_{E(r)}4u_s\sum_{i=1}^{n}y_i\psi_{y_i}dyds=-\int_{\sqcup}\prod_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}(4u_s\psi+4\psi u_{s y_i}\cdot y_i)dy_i ds$

$$= -\iint_{E(r)} 4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi \, dy ds;$$

② → ③ 关于s分部积分. $\iint_{E(r)} 4\sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi \, dy ds = \sum_{i=1}^{n} \iint_{E(r)} 4u_{sy_i} y_i \psi \, ds dy$

$$= -\iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} 4\psi_s y_i \cdot u_{y_i} ds dy \quad (\text{边界上 } \psi = 0) \quad)$$

由 $\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$, 因此

$$\phi'(r) = A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} \cdot y_i \, dy ds \quad (u\text{满足 } u_s = \Delta_y u)$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n\Delta u \psi \, dy ds - \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \, dy ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n u_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \, dy ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n u_{y_i} \cdot \frac{y_i}{2s} - \frac{2n}{s} u_{y_i} \cdot y_i \, dy ds$$

$$= 0.$$

(Remark: $\iint_{E(r)} -4n\Delta u \psi \, dy ds = \int_a^b \left(\int_\Omega -4n\Delta u \psi \, dy \right) ds = \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} 4n u_{y_i} \cdot \psi_{y_i} \, dy ds$

由 $\int_\Omega -4n\Delta u \psi \, dy = \int_{\partial\Omega} -4n Du \underbrace{\psi}_{=0} \nu \, dS + \int_\Omega 4n Du D\psi \, dy$. ($\psi$在边界上$=0$)

$$= \int_\Omega 4n (u_{y_1} \cdots u_{y_n})(\psi_{y_1}, \cdots \psi_{y_n}) dy$$

$$= \int_\Omega 4n \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} \cdot \psi_{y_i} \, dy.$$

则 ϕ 三常数. 故 $\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \lim_{t\to 0} \iint_{E(1)} u(ty, t^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$

$$= u(0,0) \lim_{t\to 0} \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0,0) \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4u(0,0).$$

(Remark: 其中 $\frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \left(\int_{\Phi(y,-s)\geq 1} \frac{|y|^2}{s^2} dy \right) ds.$

原因 $s \in [t - \frac{r^2}{4\pi}, t]$, 其中 $t=0, x=0, r=1 \Rightarrow s \in [-\frac{1}{4\pi}, 0]$.

$\Phi(y,-s) \geq 1 \Rightarrow |y|^2 \leq 2ns \ln(-4\pi s)$

从而原式 $=\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} ds \int_{|y|^2\le 2ns\ln(-4\pi s)} \frac{|y|^2}{s^2}dy = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} ds \int_0^{\sqrt{2ns\ln(-4\pi s)}} dr \int_{\partial B(0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} dS$

$=\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} ds \int_0^{\sqrt{2ns\ln(-4\pi s)}} \frac{r^2}{s^2}\cdot n\alpha(n) r^{n-1} dr = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{n\alpha(n)}{(n+2)} \frac{(2ns\ln(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}}}{s^2} ds$

令 $e^{-t}=-4\pi s$ $\quad s=\frac{-1}{4\pi}e^{-t}$

$\underline{\underline{ds=\frac{e^{-t}}{4\pi}dt}}$ $\quad \frac{n\alpha(n)}{(n+2)} \int_0^{+\infty} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{nt}{2}} t^{\frac{n+2}{2}} dt$ （令 $t'=\frac{nt}{2}$, $t=\frac{2}{n}t'$, $dt=\frac{2}{n}dt'$）

$= \frac{n\alpha(n)}{n+2} \int_0^{+\infty} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} e^{-t'} \left[\left(\frac{2}{n}\right)t'\right]^{\frac{n+2}{2}} \cdot \frac{2}{n}dt'$. （记 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

且 $\alpha(n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$

$= \frac{n\alpha(n)}{n+2} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t'} t'^{\frac{n+2}{2}} dt'$

$= \frac{n\pi^{n/2}}{(n+2)\Gamma(n/2+1)} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)$ （由 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \Rightarrow \Gamma(\frac{n+4}{2})=\frac{n+2}{2}\Gamma(n/2+1)$）

$=4$ ）

#.

2.3.3 解的性质 (Properties of solutions)

a. 最大值原理和唯一性.

首先将利用平均值性质，证明强最大值原理

定理4 Heat 方程的强最大值原理 (Strong maximum principle for the Heat equation)

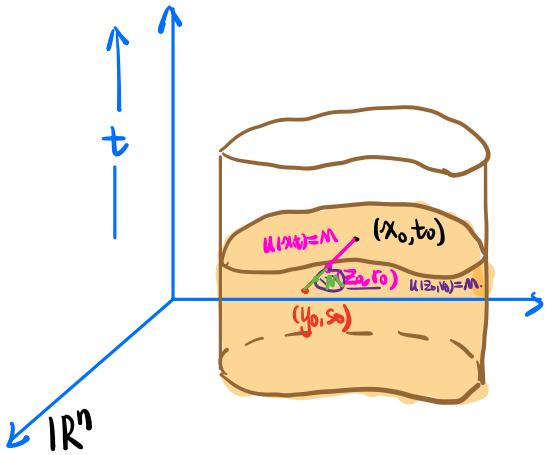
设 $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$ 是热方程在 U_T 内的解，则

(i) $\max\limits_{\bar{U}_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$

(ii) 另外，如果 U 连通，且存在点 $(x_0,t_0)\in U_T$, s.t. $u(x_0,t_0)=\max\limits_{\bar{U}_T} u$，则 u 在 $\bar{U}_{t_0}$ 内是常数的.

(Remark: (i) 叫做 Heat 方程的最大值原理；(ii) 叫做强最大值原理. 把 max 换成 min 同样成立)

Interpretation: 如果u在内部的某一点取到最大值，那么u在该点时间前的值为常数。直观地来看，如果在时间$[0,t_0]$范围内的初值和边界值都是常数，那么解也是常数。但是若$t>t_0$范围时边界条件变化的话那么解就会发生改变。



$r_0\geq s_0 \Rightarrow r_0=s_0$. (反证法).

$r_0>s_0 \Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow r_0=s_0$

证明: 1. 如果存在点$(x_0,t_0)\in U_T$满足$u(x_0,t_0)=M\triangleq \max\limits_{\Gamma_T} u$，则对充分小的$r>0$，$E(x_0,t_0;r)\subset U_T$. 由平均值性质得

$$M=u(x_0,t_0)=\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s)\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds$$
$$\leq M\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)}\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds=M.$$

$\left(\frac{1}{r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)}\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds=4\right)$

等号成立的条件是$u\equiv M$在$E(x_0,t_0;r)$处成立. 即$u(y,s)=M\quad \forall (y,s)\in E(x_0,t_0;r)$

下证$\forall 0\leq t<t_0$时$u(x,t)\equiv M$.

下面在U_T中画一条线段L连接(x_0,t_0)与任意一点$(y_0,s_0)\in U_T$，$s_0<t_0$，取

$$r_0=\min\{s\mid s\geq s_0,\ u(x,t)=M,\ (x,t)\in L,\ s\leq t\leq t_0\}.$$

由于u连续，则上面的r_0存在. 如果$r_0>s_0$，则$u(z_0,r_0)=M$，$\exists (z_0,r_0)\in L\cap U_T$. 则对充分小的$r>0$，$u\equiv M$在$E(z_0,r_0;r)$内成立，由前面的论证过程，可知$\exists \tau>0$，s.t $L\cap\{r_0-\tau\leq t\leq r_0+\tau\}\subset E(z_0,r_0;r)$，因此找到了比$r_0$更小的$r_0-\frac{\tau}{2}$满足$u(z,r_0-\frac{\tau}{2})=M$. 矛盾. 因此$r_0=s_0$，则$u\equiv M$在$L$上成立.

2. 下面固定任意一点$x\in U$与时间$0\leq t\leq t_0$，则存在点集$\{x_i\}_{i=0}^m$，$x_m=x$，s.t 所有连接x_{i-1}与x_i的n维空间上的线段都在U中（这是因为由多边形路径连接x_0所定义在U

对每个对的m在上的线段都在U_T中.(这个因多边形的性质,知道这些线段中点的集合是非空的,开的且对应是闭的).选择时间$\{t_i\}_{i=0}^{m}$, $t_m=t$,则所有n+1维空间上连接(x_{i-1},t_{i-1})与(x_i,t_i)的线段都在U_T中.从而由Step1.可知u在所有线段上满足$u\equiv M$,因此$u(x,t)\equiv M$. $0\le t<t_0$.

#

无限传播速度(Infinite propagation speed again):强最大值原理告诉我们:如果U是连通的,$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\overline{U_T})$满足

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0 & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\}. \end{cases}$$

其中$g\ge 0$,那么如果g在U中某一处是正的,则u在U_T内部每一处都是正的.

定理5 有界域上的唯一性

设$g\in C(\Gamma_T)$, $f\in C(U_T)$,则存在至多一个解$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\overline{U_T})$满足下面的方程:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f & \text{in } U_T \\ u=g & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

证明:若u与$\tilde{u}$都是上述问题的解,取$w=\pm(u-\tilde{u})$也是解

$$\begin{cases} w_t-\Delta w=0 & \text{in } U_T \\ w=0 & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

在Γ_T上取0,由最大值原理有$w\equiv 0$在U_T内成立.

在前面的研究中假设U是有界开集,对于无界区域($\mathbb{R}^n$为例),此时的问题叫做Cauchy问题.由于区域是无界的,所以有必要对充分大的|x|加一个条件来控制解.

定理6 Cauchy问题的最大值原理.

假设$u\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times(0,T])\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,T])$满足

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T) \\ \end{cases}$$

$u=g$ on $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$.

且满足如下增长速率的估计：

$$u(x,t)\le Ae^{a|x|^2},\ (x\in\mathbb{R}^n,\ 0\le t\le T)$$ 其中 $A,a>0$ 为常数.

则 $$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} u=\sup_{\mathbb{R}^n} g$$

证明：1. 先设 $4aT<1$. 则 $\exists\varepsilon>0$, $4a(T+\varepsilon)<1$. 固定 $y\in\mathbb{R}^n$, $\mu>0$, 定义

$$v(x,t)\triangleq u(x,t)-\underbrace{\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}}_{\text{热方程基本解.}}\quad (x\in\mathbb{R}^n,\ t>0)$$

则由热方程的基本解有 $v_t-\Delta v=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,T]$.

固定 $r>0$, 记 $U\triangleq B^0(y,r)$, $U_T=B^0(y,r)\times(0,T]$, 由有界区域上的最大值原理可知

$$\max_{U_T} v=\max_{\Gamma_T} v.\quad \text{(内部的情况)}$$

2. 如果 $x\in\mathbb{R}^n$, 则

$$v(x,0)=u(x,0)-\frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}}e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}}\le u(x,0)=g(x)\quad (t=0\text{时})$$

$x\in\partial B^0(y,r)$.

若 $|x-y|=r$, $0\le t\le T$ 那么 $|x|-|y|\le r\Rightarrow |x|\le r+|y|$.

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le Ae^{a|x|^2}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le Ae^{\underline{a(r+|y|)^2}}-\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}$$

由 $4a(T+\varepsilon)<1$, 可知 $\exists\sigma>0$, s.t. $\frac{1}{4(T+\varepsilon)}=a+\sigma$, 当 r 充分大的时候. (在有界域边界→到整体)

$e^{a(r+|y|)^2}$ 与 $e^{(a+\sigma)r^2}$ 相比较：令 $r\to\infty$ 时. $\frac{e^{(a+\sigma)r^2}}{e^{a(r+|y|)^2}}\to\infty$.

从而 $v(x,t)\le-\infty$. $(r\to\infty)$ 时.

那么明显有 $v(x,t)\le Ae^{a(|y|+r^2)}-\mu(4(a+\sigma))^{n/2}e^{(a+\sigma)r^2}\le\sup_{\mathbb{R}^n} g$. $(r\to\infty)$

综上所述有 $v(y,t)=u(y,t)\le\sup_{\mathbb{R}^n} g$ 令 $\mu\to0$, 且 $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $0\le t\le T$ 时.

3. 若上述的 $4aT<1$ 不成立，($T<\frac{1}{4a}$)，则先选 $T_1=\frac{1}{8a}$，在区间 $[0,T_1]$，$[T_1,2T_1]$…上依次使用上述的结果.

$T_1<\frac{1}{4a}$

#

定理7 Cauchy问题的唯一性 (Uniqueness for Cauchy problem)

设 $g\in C(\mathbb{R}^n)$，$f\in C(\mathbb{R}^n\times[0,T])$，则存在至多一个解 $u\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times(0,T])\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,T])$

满足下列的I.V.P.: $\begin{cases} u_t-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T) \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

满足下面的增长速率: $|u(x,t)|\le Ae^{a|x|^2}$ $(x\in\mathbb{R}^n, 0\le t\le T)$ 其中 $A,a>0$.

证明: 取 u 与 $\tilde{u}$ 满足上述条件，那么取 $w\triangleq\pm(u-\tilde{u})$ 即可.

#.

6. 正则性 (Regularity)

讨论 Heat equation 解的光滑性.

定理8 光滑性 (Smoothness)

假设 $u\in C_1^2(U_T)$ 满足 Heat equation in U_T. 那么 $u\in C^\infty(U_T)$.

注: 即使 u 在 Γ_T 上不光滑，上述光滑性依然有效.

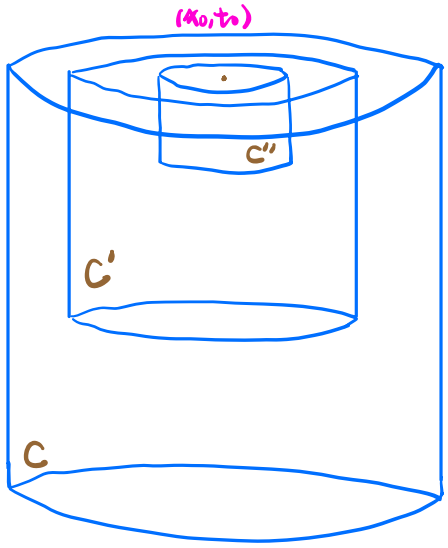
证明: 1. 首先选近似圆柱 (cylinder) $C(x,t;r)=\{(y,s)\mid |x-y|\le r, t-r^2\le s\le t\}$，半径为 r，高为 r^2，顶点为 (x,t)

因为 $(x_0,t_0)\in U_T$，所以存在足够小的 $r>0$, s.t. $C\triangleq C(x_0,t_0;r)\subset U_T$. 同样以 (x_0,t_0) 为顶点，定义更小的圆柱 $C'\triangleq C(x_0,t_0;\frac{3}{4}r)$，$C''\triangleq C(x_0,t_0;\frac{1}{2}r)$

取一个光滑的 cutoff function (切割函数) $\zeta=\zeta(x,t)\in C^\infty$ s.t.

$$\begin{cases} 0\le\zeta\le1, \quad \zeta\equiv1 \text{ on } C' \\ \zeta\equiv0 \text{ 在 } C \text{ 的抛物边界附近}. \end{cases}$$

并且在 $(\mathbb{R}^n\times[0,t_0])-C$ 上延拓为 $\rho\equiv 0$.



2、暂时假设 $u\in C^\infty(U_T)$ 并且设 $v(x,t)\triangleq\rho(x,t)u(x,t)$ $\quad(x\in\mathbb{R}^n, 0\le t\le t_0)$

那么 $v_t=\rho u_t+\rho_t u$, $\Delta v=\rho\Delta u+2D\rho\cdot Du+u\Delta\rho$ 且 $v=0$ (on $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$)(原因是 $\rho\equiv 0$ 在 $(\mathbb{R}^n\times[0,t_0])-C$.

从而有

(u是Heat equation的解)

$$v_t-\Delta v=\rho u_t+\rho_t u-(\rho\Delta u+2D\rho\cdot Du+u\Delta\rho)=\rho(u_t-\Delta u)+\rho_t u-2D\rho\cdot Du+u\Delta\rho$$
$$=\rho_t u-2D\rho\cdot Du-u\Delta\rho\triangleq\tilde f \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,t_0)$$

即上述 v 满足:
$$\begin{cases} v_t-\Delta v=\tilde f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,t_0)\\ v=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$$

现在定义函数

$$\tilde v(x,t)\triangleq\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\tilde f(y,s)\,dy\,ds$$

由定理2. 非齐次 i.v.p 的解的表达式有 $\tilde v$ 满足下述方程
$$\begin{cases} \tilde v_t-\Delta\tilde v=\tilde f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,t_0)\\ \tilde v=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}.\end{cases}$$

因为 $|v|,|\tilde v|\le A$, 其中 A 为某个常数 ($v=\rho(x,t)u(x,t)$, ρ 光滑, $u\in C^2_1(U_T)$, $\Rightarrow$ 有界, 同时 $|\tilde v|$ 有界)

根据定理7 (Cauchy问题解的唯一性) 得 $v\equiv\tilde v$, 即

$$v(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)\,dy\,ds.$$

现在假设 $(x,t)\in C''$，由于在圆柱C外部 $\rho\equiv 0$，

$$v(x,t)=\rho(x,t)u(x,t)=u(x,t)$$ （$(x,t)\in C''$，ρ在C'上，$\rho\equiv 1$，$C''\subset C'\Rightarrow\rho\equiv 1$在$C''$上）

从而 $u(x,t)=v(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)\,dy\,ds$

$$=\iint_C\Phi(x-y,t-s)\left[(\rho_s(y,s)-\Delta\rho(y,s))u(y,s)-2D\rho(y,s)\cdot Du(y,s)\right]dy\,ds$$

（积分区域本来在$\mathbb{R}^n\times[0,t]$，但由于在$\mathbb{R}^n\times[0,t]-C$处 $\rho\equiv 0$，则$\tilde{f}(y,s)=0\Rightarrow$只考虑C上即可。）

由分部积分得，

$$u(x,t)=\iint_C\Phi(x-y,t-s)\left[(\rho_s(y,s)-\Delta\rho(y,s))\right]u(y,s)\,dy\,ds-\underline{\iint_C\Phi(x-y,t-s)\cdot 2D\rho(y,s)Du(y,s)\,dy\,ds}$$

（Remark: $\iint_C\Phi(x-y,t-s)\cdot 2D\rho(y,s)Du(y,s)\,dy\,ds=\iint_{\partial C}\Phi(x-y,t-s)\cdot\underline{2D\rho(y,s)}\cdot u(y,s)\nu\,dy\,ds$

ρ在C的边界附近 $\rho\equiv 0$.

$$-\iint_C D[\Phi(x-y,t-s)\cdot 2D\rho(y,s)]\,u(y,s)\,dy\,ds$$

$$=-\iint_C D_y\Phi(x-y,t-s)\cdot 2D\rho(y,s)\,u(y,s)\,dy\,ds-\iint_C\Phi(x-y,t-s)2\Delta\rho(y,s)\,u(y,s)\,dy\,ds.$$

代入有：$u(x,t)=\iint_C\Phi(x-y,t-s)[(\rho_s(y,s)+\Delta\rho(y,s))]u(y,s)\,dy\,ds-\iint_C D_y\Phi\cdot 2D\rho\cdot u\,dy\,ds$

$$=\iint_C[\Phi(x-y,t-s)(\rho_s(y,s)+\Delta\rho(y,s))+2D_y\Phi(x-y,t-s)\cdot D\rho(y,s)]u(y,s)\,dy\,ds.)$$

上述式子成立的前提是 $u\in C^\infty$，若u仅仅是 $u\in C_1^2(U_T)$，那么只需对u做磨光，$u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$，再令$\varepsilon\to 0$，即可。

3. 上述式子可以简记为 $u(x,t)=\iint_C K(x,t,y,s)u(y,s)\,dy\,ds$. （$(x,t)\in C''$）

其中 $K(x,t,y,s)=0$，$\forall(y,s)\in C'$（因为 $\rho\equiv 1$ on C'），所以K在$C-C'$上光滑。

由表达式可得 u在 $C''=C(x_0,t_0;\frac{1}{2}r)$ 上 $u\in C^\infty$的。

（Remark: 由于$\forall(y,s)\in C$，K在$C-C'$上光滑$\Rightarrow$u光滑在C''上，那么，$\forall(x_0,t_0)\subset U_T$，都可以取定一个$C''$，从而u在$U_T$上是光滑的。）

都可以取这样的C，从而证明上是几何的.)

#.

C. 热传导方程解的局部估计 (Local estimates) [称对于变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 t 估计]

定理9 导数的估计 (Estimates on derivatives)

存在指标 $k,l=0,1,2,\cdots$ 常数 $C_{k,l}$，对于任意热传导方程的解，以及任意圆柱 $C(x,t;r/2)\subset C(x,t;r)\subset U_T$，满足

$$\max_{C(x,t;r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))}$$

证明：1. 固定 U_T 中的某一点，对其进行坐标平移，变成点 $(0,0)$，记 $C(1)=C(0,0;1)$ $C(1/2)=C(0,0;1/2)$.

由定理8的证明过程得

$$u(x,t)=\iint_{C(1)} K(x,t,y,s)u(y,s)\,dyds \qquad ((x,t)\in C(1/2))$$

所以有

$$|D_x^k D_t^l u(x,t)| \leq \iint_{C(1)} |D_t^l D_x^k K(x,t,y,s)|\,|u(y,s)|\,dyds$$

$$\leq C_{kl}\|u\|_{L^1(C(1))}$$ (K为Smooth，C_{kl}为一个常数)

2. 现考虑圆柱 $C(r)=C(0,0;r)$，$C(r/2)=C(0,0;r/2)$. 记 $v(x,t)\triangleq u(rx,r^2t)$，那么在 $C(1)$ 中满足 $v_t-\Delta v=0$，那么由Step1得

$$|D_x^k D_t^l v(x,t)| \leq C_{kl}\|v\|_{L^1(C(1))}, \quad ((x,t)\in C(1/2))$$

但 $D_x^k D_t^l v(x,t)=r^{2l+k}D_x^k D_x^l u(rx,r^2t)$；$\|v\|_{L^1(C(1))}=\iint_{C(1)}|v|\,dyds=\iint_{C(1)}u(ry,r^2s)\,dyds$

(令 $ry=z$，$r^2s=h$ $\quad dy=\frac{1}{r^n}dz \quad ds=\frac{1}{r^2}h \quad C(0,0,1)=\{(y,s)\mid |y-0|\leq 1,\ -1\leq s\leq 1\}$.

$\Rightarrow C(0,0,r)=\{(z,h)\mid |z|\leq r,\ -r^2\leq h\leq 0\}$.)

$$=\iint_{C(r)}\frac{1}{r^{n+2}}u(z,h)\,dzdh=\frac{1}{r^{n+2}}\|u\|_{L^1(C(r))}$$

因此 $\forall (x,y)\in C(1/2)$，有 $\quad |D_x^k D_t^l u(rx, r^2 t)| \leq \frac{C_{kl}}{r^{2l+k}} \|v\|_{L^1(C(1))} = \frac{C_{kl}}{r^{2l+k+n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}$

即 $\max\limits_{C(1/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{kl}}{r^{2l+k+n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}$

#

2.3.4 能量方法 (Energy methods)

a. 唯一性

考虑初值问题 $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$

之前使用极值原理来证明了唯一性，下面使用分部积分来证明解的唯一性

我们设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 中的开集且有界的，$\partial U\in C^1$，时间 $T>0$ 是给定的.

定理10 唯一性 (Uniqueness) 上述I.v.p 有且仅有一个解 $u\in C_1^2(\overline{U_T})$

证明：1. 若 $\tilde{u}$ 是另一个解，$w \triangleq u-\tilde{u}$ 满足 $\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } U_T \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$

2. 设 $e(t) \triangleq \int_U w^2(x,t)\,dx \quad (0\leq t\leq T)$ $\Leftarrow \|w\|^2_{L^2(U)}$

那么 $\dot{e}(t) = 2\int_U w w_t\,dx \quad (\because = \frac{d}{dt}) = 2\int_U w\Delta w\,dx \quad (w_t - \Delta w = 0)$

$\overset{\text{分部积分}}{=\!=} 2\left[\int_{\partial U} w Dw \nu\,dS - \int_U |Dw|^2 dx\right] (w|_{\partial U}=0) = -2\int_U |Dw|^2 dx \leq 0.$

从而 $e(t)$ 单调↘，故 $e(t)\leq e(0)=0$. 又 $e(t)=\int_U w^2 dx \geq 0$，$\Rightarrow e(t)=0 \Rightarrow w=0$

即 $w = u-\tilde{u} = 0$ 在 U_T 上. $\triangle$.

b. 向后唯一性 (Backwards uniqueness)

Explain: 即从一时间 T 时两个解函数值相等，则在此时刻之前，两解恒相等.

假设 $u, \tilde{u}$ 都是在 U_T 上热方程的光滑解，且在边界上 ∂U 的值相同：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \partial U \times [0,T] \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } U_T \\ \tilde{u} = g & \text{on } \partial U \times [0,T]. \end{cases}$$

但并没有假设 $u = \tilde{u}$ 在 $t=0$ 时。

定理 11 向后唯一性 (Backwards uniqueness)

假设 $u, \tilde{u} \in C_1^2(U_T)$ 满足上述两个方程，如果 $u(x,T) = \tilde{u}(x,T)$ $(x \in U)$.

那么 U_T 上有 $u \equiv \tilde{u}$.

证明：1. 记 $w \triangleq u - \tilde{u}$，设 $e(t) \triangleq \int_U w^2(x,t)\,dx$ $(0 \le t \le T)$，那么就有

$$\dot{e}(t) = \frac{d}{dt} e(t) = -2\int_U |Dw|^2 dx$$

w_t 的支撑.

$$\Rightarrow \ddot{e}(t) = -4\int_U Dw \cdot Dw_t\,dx \overset{\text{分部}}{=\!=} -4\left[\int_{\partial U} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu}\,dS - \int_U \Delta w \cdot w_t\,dx\right]$$

$$= 4\int_U \Delta w\, w_t\,dx = 4\int_U (\Delta w)^2 dx \quad (\Delta w = w_t)$$

由于 w 在 ∂U 上满足 $w=0$，那么 $\int_U |Dw|^2 dx = \int_{\partial U} w\, Dw\,dx - \int_U w \Delta w\,dx$ $(w|_{\partial U} = 0)$

$$= -\int_U w \Delta w\,dx \le \left(\int_U w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U (\Delta w)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Hölder})$$

$$\Rightarrow (\dot{e}(t))^2 = 4\left(\int_U |Dw|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_U w^2 dx\right)\left(4\int_U (\Delta w)^2 dx\right) = e(t) \cdot \ddot{e}(t)$$

即 $\ddot{e}(t) e(t) \ge (\dot{e}(t))^2$ $(0 \le t \le T)$

2. 若 $\forall\, 0 \le t \le T$ 时，$e(t) = 0$，那么 $u \equiv \tilde{u}$ 恒成立. 反之，存在一个区间 $[t_1, t_2] \subset [0,T]$. 且满足 $\forall\, t_1 \le t < t_2$ 时，$e(t) > 0$ 且 $e(t_2) = 0$，(反证法，$e(t)$ 单调 $\downarrow$)

3. 记 $f(t) \triangleq \ln e(t)$ $(t_1 \le t < t_2)$. 那么 $\ddot{f}(t) = \dfrac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \dfrac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} = \dfrac{\ddot{e}(t) e(t) - \dot{e}(t)^2}{e^2(t)} \ge 0$

从而 f 在区间 $[t_1, t_2]$ 上为凸函数.

所以若 $0 < T < 1$，$t_1 < t < t_2$，有

$$f((1-\tau)t_1+\tau t) \leq (1-\tau)f(t_1)+\tau f(t)$$ (凸函数定义)

即

$$e((1-\tau)t_1+\tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^{\tau}$$ (令 $t \to t_2$，由连续性有)

$$\Rightarrow \quad 0 \leq e((1-\tau)t_1+\tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^{\tau} = 0$$ ($e(t_2)=0$)

从而由 τ 的任意性，$\forall t_1 \leq t \leq t_2 \Rightarrow e(t)=0$，这与假设矛盾。从而 $e(t) \equiv 0$，$\forall 0 \leq t \leq T$. #

Conclusion：a、b 区别在于 a 中确保了 $t=0$ 时 $u=0$，但 b 中仅在 $\partial\Omega \times [0,T]$ 上 $u=0$，从而有区别）

2.4 波动方程 (Wave equation)

本节主要讨论波动方程 $u_{tt}-\Delta u=0$ 与非齐次波动方程 $u_{tt}-\Delta u=f$，给定某个适的初值和边界条件，其中 $t>0$ 和 $x\in U$，且 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。未知量为 $u:\bar{U}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$，$u=u(x,t)$，其中 Laplace 算子是对于空间变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 计算。函数 $f:U\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是给定的。一个简单缩写为 $\Box u:=u_{tt}-\Delta u$

我们将发现 wave 方程的解与 Laplace 方程和热方程的解相差较大，比如波动方程的解一般都不是 C^∞ 的，且传递速度是有限的等。

2.4.1 解的球面平均 (Solution by spherical means)

之前学过对于 Laplace 方程和 Heat 方程，用 scaling 的方法来寻找方程的解。然而对于 wave 方程在 $n=1$ 的时候可以直接用一种简单方程表示解，在 $n\geq 2$ 时就使用球面平均的方法。

a. $n=1$ 时的解，达朗贝尔公式 (Solution for $n=1$, d'Alembert's formual)

首先考虑在 $\mathbb{R}$ 上的一维 wave 方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$

其中 g,h 给定，尝试去寻找有关 g 和 h 的公式。

首先注意到方程本身可以进行分解 (Factored)，记

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u=u_{tt}-u_{xx}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{tt}-u_{xx}=0\right)$$

记 $v(x,t)\triangleq\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=u_t-u_x$.

那么有 $v_t(x,t)+v_x(x,t)=0\quad(x\in\mathbb{R},t>0)$

$u=g\ (t=0)$ 特征线.

$u_t+bDu=0.$ $(1,b)\cdot(u_t;Du)$

$\Rightarrow u=g(x-tb)$

$\left(v_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = u_{tt} - u_{xt} \quad v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = u_{xt} - u_{xx} \right.$

$\left. u_{tt} - u_{xt} + u_{xt} - u_{xx} = 0 \right)$

上述式子是一个常系数的transport方程，由§2.1.1中transport方程的解 $(n=1, b=1)$ 得到

$$v(x,t) = a(x-t)$$

$$\begin{cases} u_t + b\cdot Du = f \\ u = g \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\,ds$$

其中 $a(x) \triangleq v(x,0)$，综上有 $v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t)$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$

上述方程是一个非齐次的transport方程，从而由§2.1.2中的非齐次的transport方程解的表达式 $(n=1, b=-1, f(x,t) = a(x-t))$. 记 $b(x) \triangleq u(x,0)$ $=g$，有

$$u(x,t) = \int_0^t a(x+(t-s)-s)\,ds + b(x+t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + b(x+t)$$

(Remark: 令 $x+(t-s)-s = x+t-2s = y$ $\quad s = \frac{x+t-y}{2}$ $\quad ds = -\frac{1}{2}dy$ $\quad s=t \Rightarrow y = x-t,\ s=0 \Rightarrow y = x+t$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} a(y)\,dy = \int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{2}a(y)\,dy$)

接下来由初值条件去计算a和b，有 $b(x) = g(x)$ $\quad x\in\mathbb{R}$. (代入上述解即可)

且 $\underline{a(x)} = v(x,0) = \underbrace{u_t(x,0)}_{h} - \underbrace{u_x(x,0)}_{-g'(x)} = h(x) - g'(x) \quad (x\in\mathbb{R})$

那么上述的解有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)\,dy + g(x+t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + g(x+t) - \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(x-t)\right].$$

因此

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \quad (x\in\mathbb{R}, t>0)$$

此式称为达朗贝尔公式 (d'Alembert's formual)

上述过程是假设u是足够光滑的情况下成立的，下证它确实是u的解.

定理1. 波动方程的解 (Solution for wave equation, $n=1$)

$u_t(\cdot,0)=h$

设 $g\in C^2(\mathbb{R})$, $h\in C^1(\mathbb{R})$, 定义 u 为上述的 d'Alembert's 公式. 那么

(i) $u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

(ii) $u_{tt}-u_{xx}=0$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u(x,t)=g(x^0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u_t(x,t)=h(x^0)$

$H(x+t)-H(x-t)$

(Remark: (i) 由 d'Alembert's 公式 $u(x,t)=\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy$, 因为 $g\in C^2$, $h\in C^1\Rightarrow\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy\in C^2\Rightarrow u(x,t)\in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

(ii) $u_t=\frac{1}{2}[g'(x+t)-g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)+h(x-t)]$

$u_{tt}=\frac{1}{2}[g''(x+t)+g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h'(x+t)-h'(x-t)]$ $\Rightarrow u_{tt}-u_{xx}=0$.

$u_x=\frac{1}{2}[g'(x+t)+g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)-h(x-t)]$

$u_{xx}=\frac{1}{2}[g''(x+t)+g''(x-t)]+\frac{1}{2}[h'(x+t)-h'(x-t)]$

$=h(\xi)(x+t-(x-t))$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u(x,t)=\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}}\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy=g(x^0)$ (积分第一中)

$\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u_t(x,t)=\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}}\frac{1}{2}[g'(x+t)-g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)+h(x-t)]=h(x^0)$.)

Remark (i) 由 d'Alembert's 公式, 解 u 具有形式 $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$, 其中 F, G 为合适的函数.

相反具有上面这种形式的解都满足 $u_{tt}-u_{xx}=0$. 因此一维情形下 wave 方程的解可以写成 $u_t-u_x=0$ 的解和 $u_t+u_x=0$ 的解的和的形式. 这是由于 $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x})$ 所引起的.

$\begin{cases}u_t-u_x=0\\ u=F\Rightarrow u=F(x+t)\end{cases}$ $\begin{cases}u_t+u_x=0\\ u=G\Rightarrow u=G(x-t)\end{cases}$

$u_{tt}-u_{xx}=0$ $u_t(\cdot,0)=h$ $u(\cdot,0)=g$.

(ii) 由 d'Alembert's 公式, 可以看出若 $g\in C^k$, $h\in C^{k-1}$, 那么 $u\in C^k$, 但不是一般光滑的.

因此 Wave 方程在初值光滑时, 没法光滑, 但热方程可以.

对初值正则性依赖更高.

$\begin{cases}u_t-\Delta u=0=f\\ u=g\in C^2\end{cases}\Rightarrow u\in C^\infty$ $f\in C^\infty$.

更依赖于 f 正则性

反射方法 (A reflection method) Extension.

接下来考虑 $\mathbb{R}_+=\{x>0\}$ 上的初边值问题. Dual point.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & \text{in } \mathbb{R}_+\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}_+\times\{t=0\} \\ u=0 & \text{on } \{x=0\}\times(0,\infty) \end{cases}$$

其中 g,h 是给定的, 且 $g(0)=h(0)=0$. (相容性条件)

考虑对上述方程的解 u,g,h 进行 奇 延拓 (odd reflection). 设

关于空间.

$$\tilde{u}(x,t)\triangleq\begin{cases} u(x,t) & (x\geq 0,\ t\geq 0) \\ -u(-x,t) & (x\leq 0,\ t\geq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x)\triangleq\begin{cases} g(x) & (x\geq 0) \\ -g(-x) & (x\leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x)\triangleq\begin{cases} h(x) & (x\geq 0) \\ -h(-x) & (x\leq 0) \end{cases}$$

从而方程变为
$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx} & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \tilde{u}=\tilde{g},\ \tilde{u}_t=\tilde{h} & \text{on } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$
由 d'Alembert's 公式有

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t)+\tilde{g}(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{h}(y)\,dy$$

代入上述 $\tilde{u},\tilde{g},\tilde{h}$ 的定义有 $x\geq 0,\ t\geq 0$.

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy & \text{若 } x\geq t\geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t)-g(t-x)]+\frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t}h(y)\,dy & \text{若 } 0\leq x\leq t \end{cases}$$

$\Rightarrow x\geq -t\Rightarrow x\geq 0.$

$$\tilde{g}(x+t)=\begin{cases} g(x+t) & (x+t\geq 0) \\ -g(-x-t)\times & (x+t\leq 0) \end{cases}\Rightarrow g(x+t).$$

$x\leq -t$ $\quad x\leq 0.$

$x\geq t$

$$\tilde{g}(x-t)=\begin{cases} g(x-t) & (x-t\geq 0) \\ -g(-x+t) & (x-t\leq 0) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} g(x-t) & (x\geq t) \\ -g(t-x) & (x\leq t) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(y)=\begin{cases} h(y) & (y\geq 0) \\ -h(-y) & (y\leq 0) \end{cases}\Rightarrow \int_{x-t}^{0}-h(-y)\,dy+\int_{0}^{x+t}h(y)\,dy$$

若 $x\leq t$ $\int_{x-t}^{0}h(y)\,dy=\int_{0}^{x-t}h(-y)\,dy$ 若 $x\geq t$ $=\int_{0}^{t-x}h(y)\,dy\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy$

$=\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy.$

$\int_{x-t}^{x+t} = \int_{x-t}^{0} + \int_{0}^{x+t} h(y)dy$ $\quad -\int_0^{t-x} h(y)dy + \int_0^{x+t} h(y)dy = \int_{t-x}^{x+t} h(y)dy$

$x-t=0$

若$h\equiv 0$，则上述公式可以看作成初始位移g分成两部分，一部分以速度1向右移动，另一部以速度1向左移动，后者在$x=0$上反射出去。

注意到上述的解并不属于C^2，除非$g''(0)=0$.（在$x=t$的奇性）

b. 球面平均（Spherical means）

设$n\geq 2$，$m\geq 2$，且$u\in C^m(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$满足初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

目的是为了解出解u的表达式（含有g,h），要引入u关于特定球面上的平均值。

这些平均值是由时间t和半径r构成，并且满足Euler-Poisson-Darboux equation.

那么在奇数n维下的波动方程就可以转化成一维的wave equation，最后使用d'Alembert's公式就可以得到方程的解。

符号（Notation）：(i) 令$x\in\mathbb{R}^n$，$t>0$，$r>0$，定义

$$U(x;r,t)\triangleq \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,dS(y)$$

为$u(\cdot,t)$在球面$\partial B(x,r)$上的平均值。

(ii) 类似地，

$$\begin{cases} G(x;r)\triangleq \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\,dS(y) \\ H(x;r)\triangleq \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\,dS(y) \end{cases}$$

固定x，我们将U看成r,t的函数，那么发现U满足下列PDE：

引理1 (Euler-Poisson-Darboux equation)

固定 $x\in\mathbb{R}^n$, 令 u 满足 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$, 那么 $U\in C^m(\overline{\mathbb{R}_+}\times[0,\infty))$ 且

有 $\begin{cases} U_{tt}-U_{rr}-\frac{n-1}{r}U_r=0 & \text{in } \mathbb{R}_+\times(0,\infty) \\ U=G,\ U_t=H & \text{on } \mathbb{R}_+\times\{t=0\}. \end{cases}$

上述方程称为 Euler-Poisson-Darboux 方程. (注意到 $U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r$ 是在极坐标下 Δ 的半径部分)

(Remark: $\Delta u=\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}$ $\quad u_{x_i}=U_r\cdot r_{x_i}=U_r\cdot\frac{x_i}{r}$

$u_{x_ix_i}=U_{rr}\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+U_r\cdot\frac{1}{r^2}\cdot(1\cdot r-x_i\cdot r_{x_i})=U_{rr}\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+U_r\frac{1}{r^2}(r-\frac{x_i^2}{r})$

$=U_{rr}\frac{x_i^2}{r^2}+U_r\cdot(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^2})$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}=U_{rr}+U_r\cdot(\frac{n}{r}-\frac{1}{r})=U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r$.)

证明: 1. 由§2.2.2 Th2证明得 $r>0$ 有

$$U_r(x;r,t)=\frac{r}{n}\fint_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy.$$

附. 单位外法向量

(Remark: $U(x;r,t)=\fint_{\partial B(x,r)}u(y,t)dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y,t)\,dS(y)$

(令 $y=x+wr\Rightarrow dS(y)=r^{n-1}dS(w)$ $[|\partial B_r|=|\partial B_1|r^{n-1}]$) $=\frac{r^{n-1}}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,1)}u(x+wr,t)dS(w)$

$w\in\partial B(0,1)$

$=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}u(x+wr,t)dS(w)\Rightarrow U_r(x;r,t)=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}Du(x+wr,t)\cdot w\,dS(w)$

(令 $x+wr=y$. $dS(w)=\frac{1}{r^{n-1}}dS(y)$) $=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}Du(y,t)\cdot w\,dS(w)$ [w 为单位外法向量]

$=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\operatorname{div}(Du(y,t))dy$ (散度定理) $=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy$

$=\frac{r}{n}\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy=\frac{r}{n}\fint_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy$) $\quad \int_U \operatorname{div}F\,dx=\int_{\partial U}F\cdot\nu\,dS.$

由此有 $\lim_{r\to0^+}U_r(x;r,t)=0$ ($\lim_{r\to0^+}\frac{r}{n}\underbrace{\fint_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy}_{\text{有界}}=0$)

有特殊 $\Delta u(x,t)$

再求导有

$$U_{rr}(x;r,t)=\fint_{\partial B(x,r)}\Delta u\,dS+\left(\frac{1}{n}-1\right)\fint_{B(x,r)}\Delta u\,dy$$

(Remark: $\frac{r}{n}\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y,t)dy$

$=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,s)}\Delta u(y,t)\,dS(y)\right)ds \overset{\text{求导}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \frac{1-n}{n\alpha(n)r^n}\left[\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,s)}\Delta u(y,t)dS(y)\right)ds\right]+\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\Delta u(y,t)dS(y)$ (变上限积分求导)

$=\frac{1-n}{n}\fint_{B(x,r)}\Delta u\,dy+\fint_{\partial B(x,r)}\Delta u\,dS.)$

因此 $\lim_{r\to0^+}U_{rr}(x;r,t)=\frac{1}{n}\Delta u(x,t)$ $\left(\Delta u(x,t)+\left(\frac{1}{n}-1\right)\Delta u(x,t)=\frac{1}{n}\Delta u(x,t)\right)$

同理可以计算 U_{rrr}, 等. 故有 $U\in C^m(\overline{\mathbb{R}_+}\times[0,\infty))$ $(u\in C^m(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

2. $U_r=\frac{r}{n}\fint_{B(x,r)}\Delta u(y,t)\,dy=\frac{r}{n}\fint_{B(x,r)}u_{tt}\,dy$ (波动 $u_{tt}=\Delta u$)

$U_{tt}-U_{rr}-\frac{n-1}{r}U_r=0$

$r^{n-1}U_{tt}-r^{n-1}U_{rr}-r^{n-2}U_r(n-1)=0$

$=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}u_{tt}\,dy$

$r^{n-1}U_{tt}=(r^{n-1}U_r)_r.$

因此 $r^{n-1}U_r=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(x,r)}u_{tt}\,dy$

且 $(r^{n-1}U_r)_r=(n-1)r^{n-2}U_r+(r^{n-1})U_{rr}=\left[\frac{1}{n\alpha(n)}\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,s)}u_{tt}\,dS(y)\right)ds\right]_r$

$=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(x,r)}u_{tt}\,dS=r^{n-1}\fint_{\partial B(x,r)}u_{tt}\,dS=r^{n-1}U_{tt}$

即 $r^{n-1}U_{tt}-(n-1)r^{n-2}U_r-(r^{n-1})U_{rr}=0\Rightarrow U_{tt}-U_{rr}-\frac{n-1}{r}U_r=0.$

#

基尔霍夫

c. Solution for $n=3,2$, Kirchhoff's and Poisson's formulas.

接下来的目的是将 Euler–Poisson–Darboux 方程转化为一般的一维波动方程.

整个过程较为复杂, 所以先考虑简单情况 $n=3,2$ 时.

Solution for $n=3$. 取$n=3$时，设$u\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$满足方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g \quad u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$

U, G, H定义如上，那么记 $\tilde{U}\triangleq rU$，$\tilde{G}\triangleq rG$，$\tilde{H}\triangleq rH$.

那么有$\tilde{U}$满足 $\begin{cases} \tilde{U}_{tt}-\tilde{U}_{rr}=0 & \text{in } \mathbb{R}_+\times(0,\infty) \\ \tilde{U}=\tilde{G},\ \tilde{U}_t=\tilde{H} & \text{on } \mathbb{R}_+\times\{t=0\} \\ \tilde{U}=0 & \text{on } \{r=0\}\times(0,\infty)\end{cases}$ （r半径$\in\mathbb{R}_+$）

(E-P-D equation)

事实上 $\tilde{U}_{tt}=rU_{tt}=r[U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r]=r[U_{rr}+\frac{2}{r}U_r]=rU_{rr}+2U_r$ （此处系数2就代表着$n=3$可以但$n=2$不行）

且 $\tilde{U}_{rr}=(\tilde{U}_r)_r=((rU)_r)_r=(U+U_r\cdot r)_r=U_r+U_r+rU_{rr}=2U_r+rU_{rr}$

$\Rightarrow \tilde{U}_{tt}=\tilde{U}_{rr}$

且注意到 $\tilde{G}_{rr}(0)=0$ （$\tilde{G}=rG\Rightarrow\tilde{G}_{rr}=2G_r+rG_{rr}\Rightarrow\tilde{G}_{rr}(0)=2G_r(0)=0$. 其$G_r(0)$ $=\lim_{r\to0^+}\frac{r}{3}\fint_{B(x,r)}\Delta g(y)dy=0$. (类比$U_r$计算) [为了说明半空间上的解$\in C^2$]）

由半空间上的wave equation求解公式有 $0\le r\le t$，

$$\tilde{U}(x;r,t)=\tfrac{1}{2}[\tilde{G}(r+t)-\tilde{G}(r-t)]+\tfrac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\tilde{H}(y)dy$$

并且有 $\lim_{r\to0^+}U(x;r,t)=u(x,t)$ (积分平均值性质)，那么有

差分.

$$u=\lim_{r\to0^+}U(x;r,t)=\lim_{r\to0^+}\frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}=\lim_{r\to0^+}\left[\frac{\tilde{G}(r+t)-\tilde{G}(r-t)}{2r}+\frac{\int_{t-r}^{r+t}\tilde{H}(y)dy}{2r}\right]$$

$=\tilde{G}'(t)+\tilde{H}(t)$

其中 $\tilde{G}'(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,t)}g\,dS\right)$，$\tilde{H}(t)=t\fint_{\partial B(x,t)}h\,dS$

故 $$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,t)}g\,dS\right)+t\fint_{\partial B(x,t)}h\,dS$$

但是 $\fint_{\partial B(x,t)}g(y)dS(y)=\fint_{\partial B(0,1)}g(x+tz)dS(z)$，且

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)}g\,dS\right)=\fint_{\partial B(0,1)}Dg(x+tz)\cdot z\,dS(z)=\fint_{\partial B(x,t)}Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y)$$

(Remark: 令 $y=x+zt$ $\quad dS(y)=t^{n-1}dS(z)$ $\quad \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)=\frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}}\int_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)$

$=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)} g(x+zt)\,dS(z)=\fint_{\partial B(0,1)} g(x+zt)\,dS(z)$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(0,1)} g(x+zt)\,dS(z)\right)=\fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+zt)\cdot z\,dS(z)$

$\overset{令y=x+zt}{=}\fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\frac{y-x}{t}\,dS(y)$)

综上有

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)+t\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS=\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS+t\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)$$

$$+t\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS=\fint_{\partial B(x,t)} th(y)+g(y)+Dg(y)\cdot(y-x)\,dS(y) \qquad (x\in\mathbb{R}^3,t>0)$$

上述公式称为三维wave equation的Kirchhoff's公式.

Solution for $n=2$. (tricky)

在$n=2$时,没有办法像刚才将Euler-Poisson-Darboux方程转化为一维的wave方程.

做法是将$n=2$时wave方程看作成一个$n=3$时的问题,其中第3个空间变量x_3不出现.

事实上,假设$u\in C^2(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$满足 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$ $(n=2)$.

记 $\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t)\triangleq u(x_1,x_2,t)$

那么有 $\begin{cases} \bar{u}_{tt}-\Delta\bar{u}=0 & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ \bar{u}=\bar{g},\ \bar{u}_t=\bar{h} & \text{on } \mathbb{R}^3\times\{t=0\}\end{cases}$ 其中$\bar{g}(x_1,x_2,x_3)\triangleq g(x_1,x_2)$, $\bar{h}(x_1,x_2,x_3)\triangleq h(x_1,x_2)$

记$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 且 $\bar{x}=(x_1,x_2,0)\in\mathbb{R}^3$,那么上述方程由Kirchhoff's公式就有

$$u(x,t)=\bar{u}(\bar{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}\right)+t\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{h}\,d\bar{S}$$

其中 $\bar{B}(\bar{x},t)$ 代表在$\mathbb{R}^3$中以$\bar{x}$为球心,半径为$t>0$的球, $d\bar{S}$ 代表在 $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$ 上的一维曲面积度

其中 $\bar{B}(\bar{x},t)$ 代表有限个球体的并集，并且 $t>0$ 为常数，dS 代表有在 $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$ 上的二维平面的测度

观察到 $\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}$

$$=\frac{2}{4\pi t^2}\int_{B(x,t)}g(y)\left(1+|D\sigma(y)|^2\right)^{1/2}dy$$

其中 $\sigma(y)=(t^2-|y-x|^2)^{1/2}$ $(y\in B(x,t))$，且2是因为 $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$ 是由两个半球面组成的.

(Remark: $\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{1}{|\partial\bar{B}(\bar{x},t)|}\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,dS$ (球的面积公式 $4\pi r^2$)

下一步: $\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}(y_1,y_2,y_3)\,d\bar{S}(y)$

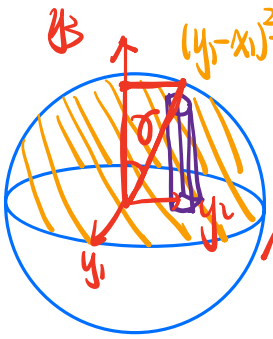
(曲面积分化二重积分: 若 $z=z(x,y)$ 有 $\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\underbrace{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}_{\sqrt{1+|Dz|^2}}\,dx\,dy$) $|Dz|^2$.

这里曲面 z 为球面 $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$: (考虑上半球面) (用对称性)

$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-0)^2=t^2\Rightarrow y_3=(t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2)^{1/2}\triangleq(t^2-\underbrace{|y-x|^2}_{\text{二维向量 } y=(y_1,y_2)})^{1/2}$

故 $\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}(y_1,y_2,y_3)\,d\bar{S}(y)=2\int_{B(x,t)}g(y_1,y_2)\sqrt{1+|Dy_3|^2}\,dy_1dy_2=2\int_{B(x,t)}g(y_1,y_2)\sqrt{1+|D\sigma(y)|^2}\,dy$

其 $\sigma(y)=(t^2-|y-x|^2)^{1/2}$)



$\frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}=\frac{1}{\cos\sigma}$

$\sigma^2(1+|D\sigma|^2)=t^2$

且注意到 $(1+|D\sigma|^2)^{1/2}=t(t^2-|y-x|^2)^{-1/2}$，因此有

$$\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{1}{2\pi t}\int_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy=\frac{1}{2}\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$$

(Remark: 可以通过计算 $(1+|D\sigma|^2)^{1/2}=t(t^2-|y-x|^2)^{-1/2}$，若把 $\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}$ 看作曲面积分(第一型)

把 $\int_{B(x,t)}g(y)\frac{1}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$ 看作一个曲面积分(第二型) $\left(\underbrace{\iint_{B(x,t)}}_{\text{曲面(二维)}}g(y)\frac{1}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy_1dy_2\right)$

由第二型曲面与第一型曲面的关系有

$$\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}(y_1,y_2,y_3)\,dy_1dy_2 = \int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\ \cos\gamma\, d\bar{S}$$ （其 $\cos\gamma$ 表示法向量在 y_3 方向上的夹角）

$$\Rightarrow \int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\, d\bar{S} = \int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}(y_1,y_2,y_3)\frac{1}{\cos\gamma}\,dy_1dy_2 = \int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}(y_1,y_2,y_3)\frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy_1dy_2$$

$$= \int_{B(x,t)} g(y)\frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy\ )$$

所以 $$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}\right) + t\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{h}\,d\bar{S}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy\right) + \frac{t}{2}\fint_{B(x,t)}\frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$$

并且由 $$t^2\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy = t\fint_{B(0,1)}\frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)^{1/2}}\,dz$$ （与上面类似）

所以 $$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy\right) = \fint_{B(0,1)}\frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)^{1/2}}\,dz + t\fint_{B(0,1)}\frac{Dg(x+tz)\cdot z}{(1-|z|^2)^{1/2}}\,dz$$

$$= t\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy + t\fint_{B(x,t)}\frac{Dg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$$

综上有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)}\frac{tg(y)+t^2h(y)+tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy \qquad \forall x\in\mathbb{R}^2, t>0.$$

上述公式称为二维波动方程的 Poisson 公式.

d. Solution for odd n.

此节主要研究奇数 $n\geq 3$ 时, Euler–Poisson–Darboux 方程

Lemma 2 (Some useful identities) 令 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in C^{k+1}$, 那么 $\forall k=1,2,\cdots$

(i) $$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d\phi}{dr}(r)\right)$$

(ii) $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k\, r^{j+1}\frac{d^j\phi}{dr^j}(r)$

其中常数 β_j^k $(j=0,\cdots k-1)$ 是不依赖于 ϕ.

此外

(iii) $\beta_0^k=1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)$

开始在假设 $n\geq3$ 是一个奇整数. 令 $n=2k+1$ $(k\geq1)$

因此假设 $u\in C^{k+1}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ 满足方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$

那么函数 $U=\fint_{\partial B(x,r)}u(y,t)\,dS(y)\in C^{k+1}$.

Notation: 记 $\begin{cases} \tilde{U}(r,t)\triangleq\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;r,t)\right) \\ \tilde{G}(r,t)\triangleq\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}G(x;r)\right) \\ \tilde{H}(r)\triangleq\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}H(x;r)\right)\end{cases}$ $(r>0,t\geq0)$

那么 $\tilde{U}(r,0)=\tilde{G}(r)$, $\tilde{U}_t(r,0)=\tilde{H}(r)$.

接下来将结合Lemma1和Lemma2来将Euler-Poisson-Darboux方程化为wave方程.

Lemma 3 ($\tilde{U}$ 满足一维wave方程) 有 $\begin{cases} \tilde{U}_{tt}-\tilde{U}_{rr}=0 & \text{in } \mathbb{R}_+\times(0,\infty) \\ \tilde{U}=\tilde{G},\ \tilde{U}_t=\tilde{H} & \text{on } \mathbb{R}_+\times\{t=0\} \\ \tilde{U}=0 & \text{on } \{r=0\}\times(0,\infty)\end{cases}$

证明: 若 $r>0$, $\tilde{U}_{rr}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right)$

$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left(r^{2k}U_r\right) \quad (\text{Lemma2 (i)})$$

$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}U_{rr}+2kr^{2k-2}U_r\right]$$

$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\left(U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r\right)\right] \quad \text{(E-P-D equation)}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U_{tt}\right)=\tilde{U}_{tt}.$$

由Lemma 2 (ii)得出 $\tilde{U}=0$ on $\{r=0\}$.

(Remark: $\tilde{U}\big|_{r=0}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;r,t)\right)\Big|_{r=0}=\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{2j+1}\frac{d^j}{dr^j}(U)\Big|_{r=0}=0.$)

#

你上由半空间上的波动方程的解可以得到 $\forall\, 0\le r\le t$ 有

$$\tilde{U}(r;t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t)-\tilde{G}(t-r)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy$$

并且由 $u(x;t)=\lim_{r\to 0}U(x;r;t)$，此外根据Lemma 2(ii)可以得到

$$\tilde{U}(r;t)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;t;r)\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{2j+1}\frac{\partial^j}{\partial r^j}U(x;r;t)=\frac{\beta_0^k r U+\beta_1^k r^2\boxed{\frac{\partial}{\partial r}U_t}}{\beta_0^k r+\beta_1^k r}\cdots$$

故有

$$u(x;t)=\lim_{r\to 0}U(x;r;t)=\lim_{r\to 0}\frac{\tilde{U}(r;t)}{\beta_0^k r}$$

因此 $u(x;t)=\frac{1}{\beta_0^k}\lim_{r\to 0}\left[\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)}{2r}+\frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy\right]$

$$=\frac{1}{\beta_0^k}\left[\tilde{G}'(t)+\tilde{H}(t)\right]$$

最终，当 $n=2k+1$ 时，有表达式

$$\begin{cases} u(x;t)=\frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x;t)}g\,dS\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x;t)}h\,dS\right)\right] \\ \text{其中 } n \text{ 为奇数，} \gamma_n=1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n,\ t>0. \end{cases}$$

$=(n-2)!!$

$\frac{n+1}{2}\to\frac{n-3}{2}\Rightarrow 2.$

$\underbrace{u_t}_{\in C^1}=\underbrace{h}_{\in C^1}$

注意到 $\gamma_3=1$，所以上述式子在 $n=3$ 时满足Kirchhoff's公式.

下证上述解的表达式确实提供了wave方程的解.

定理2 奇数维下波动方程的解 (Solution of wave equation in odd dimensions)

假定 n 为奇数, $n\geq 3$. 假设 $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h\in C^m(\mathbb{R}^n)$. 其中 $m=\frac{n+1}{2}$.

定义 u 为上述解的表达式, 那么

(i) $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

(ii) $u_{tt}-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} u(x,t)=g(x^0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} u_t(x,t)=h(x^0)$ $\quad\forall x^0\in\mathbb{R}^n$.

proof: 1. 假定 $g\equiv 0$. 故 $u(x,t)=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)$

那么由 Lemma 2(i) 有 $u_{tt}=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}H_t\right)$

(Remark: $u_{tt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left[\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)\right]=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)$

$=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}H_t\right)$)

由 §2.2.2 中的 Th2 中计算可得, $H_t=\frac{t}{n}\int_{B(x,t)}\Delta h\,dy$ (Lemma 1. 证明)

所以 $u_{tt}=\frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int_{B(x,t)}\Delta h\,dy\right)$

$$=\frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)}\Delta h\,dS\right)$$

($u_{tt}=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}\cdot\frac{t}{n}\cdot\frac{1}{\alpha(n)t^n}\int_{B(x,t)}\Delta h\,dy\right)=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(x,t)}\Delta h\,dy\right)$

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x,t)}\Delta h\,dy=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_{\partial B(x,s)}\Delta h\,dS\right)=\int_{\partial B(x,t)}\Delta h\,dS.$)

另一方面: $\Delta H(x,t)=\Delta_x \fint_{\partial B(0,t)} h(x+y)\,dS(y)=\fint_{\partial B(x,t)} \Delta h\,dS.$

$$\left(\Delta H(x,t)=\Delta_x\left(\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,dS(y)\right)\overset{令\,y-x=z}{=\!=\!=}\Delta_x\left(\fint_{\partial B(0,t)} h(x+z)\,dS(z)\right)\right.$$

$$\left.=\fint_{\partial B(0,t)}\Delta\, h(x+z)\,dS(z)=\fint_{\partial B(x,t)}\Delta h\,dS.\right)$$

$$\Rightarrow \Delta u=\Delta\left(\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)\right)=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\Delta H\right)$$

$$=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)}\Delta h\,dS\right)=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)t^{n-1}}\int_{B(x,t)}\Delta h\,dS\right)$$

$$=\frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)}\Delta h\,dS\right)=u_{tt}.$$

综上有 $u_{tt}=\Delta u$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

同理有 $h\equiv 0$ 时也有 $u_{tt}=\Delta u$. 综合有 $u_{tt}=\Delta u$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

2. 证明满足初值条件.

① $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t)=g(x^0)$. $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$u(x,t)=\frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_j^{\frac{n-3}{2}}t^{j+1}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)\right]+\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_j^{\frac{n-3}{2}}t^{j+1}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta_0^{\frac{n-3}{2}}t\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)+\beta_1^{\frac{n-3}{2}}t^2\frac{\partial}{\partial t}(\cdot\,\cdot)+\cdots\right]$$

故 $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t)=\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)=\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)} t\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)+\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS$

$=g(x^0)$

② $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)} u_t(x,t)=h(x^0)$

$$u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS\right)\right]\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sigma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \beta_j^{\frac{n-2}{2}} t^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\, dS\right)\right] + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \beta_j^{\frac{n-2}{2}} t^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\fint_{\partial B(x,t)} h\, dS\right)\right)$$

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0)} u_t(x,t) = \lim_{(x,t)\to(x^0,0)} \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} h\, dS\right) = h(x^0)$$

#

Remark: (i) 注意到求解 $u(x,t)$ 仅需要 g, h 在 $\partial B(x,t)$ 上的值而不要在 $B(x,t)$ 上的值.

(ii) 比较 $n=3$ 时 u 的求解公式与达朗贝尔公式 $(n=1)$, 会发现后者需要 g 的导数. 这说明当 $n>1$ 时, wave 方程的解在 $t>0$ 时没法和初值 g 一样光滑, 在 $t>0$ 时 g 的非正则性可能导致 u 的正则性更差.

(iii) wave 方程具有有限传播速度

(iv) 另一种完全不同的 u 的表达式求法在 §4.3.3.

e. Solution for even n.

现假设 n 是一个偶数.

假设 u 是 C^m 解, 满足方程 $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$, $m = \frac{n+2}{2}$. 下求 u 的表达式.

由 $n=2$ 时, 记 $\bar{u}(x_1, \cdots x_{n+1}, t) \triangleq u(x_1 \cdots x_n, t)$ 满足 $\mathbb{R}^{n+1} \times (0,\infty)$ 上的 wave equation, 且初值条件为 $\bar{u} = \bar{g}$, $\bar{u}_t = \bar{h}$ on $\mathbb{R}^{n+1} \times \{t=0\}$.

其中 $\begin{cases} \bar{g}(x_1 \cdots x_{n+1}) \triangleq g(x_1 \cdots x_n) \\ \bar{h}(x_1 \cdots x_{n+1}) \triangleq h(x_1 \cdots x_n) \end{cases}$

当 $n+1$ 为奇数时, 可以使用 $n=$ 奇时的求解公式 (用 $n+1$ 代替 n, 含有 $\bar{u}, \bar{g}, \bar{h}$ 的表达式) 但需要 u, g, h 的形式. 这也是一种降维方法 (method of descent)

固定 $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, 记 $\bar{x}=(x_1,\cdots x_n,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 那么有

$$u(x,t)=\frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n+1}\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n+1}\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{h}\,d\bar{S}\right)\right]$$

其中 $\bar{B}(\bar{x},t)$ 代表着以 $\bar{x}$ 为圆心, t 为半径 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的球. $d\bar{S}$ 表示 $\partial\bar{B}(x,t)$ 上 n 维平面的测度.

现在有

$$\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n}\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S},$$

并且注意到 $\partial\bar{B}(x,t)\cap\{y_{n+1}\geq 0\}$ 是函数 $\gamma(y)\triangleq(t^2-|y-x|^2)^{1/2}$ $(\forall y\in B(x,t)\subset\mathbb{R}^n)$ 的图像.

同样地, $\partial\bar{B}(x,t)\cap\{y_{n+1}\leq 0\}$ 是函数 $-\gamma$ 的图像. 因此有

$$\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^n}\int_{B(x,t)}g(y)\left(1+|D\gamma(y)|^2\right)^{1/2}dy.$$

其中这个"2"是因为 $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$ 是由两个半平面组成. 且注意到 $(1+|D\gamma(y)|^2)^{1/2}=t(t^2-|y-x|^2)^{-1/2}$

因此得

$$\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)}\bar{g}\,d\bar{S}=\frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^{n-1}}\int_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy$$

$$=\frac{2t\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)}\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy$$

同理对于 $\bar{h}$ 也有类似的表达式, 所以

$$u(x,t)=\frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{2\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B(x,t)}\frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy\right)\right]$$

又因为 $\gamma_{n+1}=1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)$, $\alpha(n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, 且 $\gamma_n=2\cdot4\cdots(n-2)\cdot n$.

因此, 对于偶数 n 具有表达式为

$$\begin{cases}u(x,t)=\frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B(x,t)}\frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy\right)\right.\\ \qquad\qquad\qquad\

$$+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\int_{B(x,t)}\frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy\right)\Bigg] \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

n为偶数，其中 $\gamma_n=2\cdot4\cdots(n-2)\cdot n$.

$$\left(\frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{2\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)}=\frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{2\cdot\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{(n+1)\pi^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right.$$ 由 $\alpha(n+1)=\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}\alpha(n)$

$$=\frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{2}{(n+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$ 其中 $\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n+2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(n+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n+2}{2}}}$ $\left(\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!!\sqrt{\pi}}{2^n}\right)$

$\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\left(\frac{n}{2}\right)!$ （由 $(2n)!!=2^n\cdot n!\Rightarrow\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot2^{n/2}=(n)!!$）

$$\Rightarrow\frac{1}{\gamma_{n+1}}\cdot\frac{2}{(n+1)}\frac{(n+1)!!}{2^{n/2+1}}\frac{2^{n/2}}{(n)!!}=\frac{1}{(n)!!}\Bigg)=\frac{1}{\gamma_n}.$$

当 $n=2$ 时，因为 $\gamma_2=2$，故也满足 Poisson's 公式.

定理3. 偶数维空间下的 wave 方程的解. (Solution of wave equation in even dimensions)

假设 n 为偶数，设 $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h\in C^m(\mathbb{R}^n)$，其 $m=\frac{n+2}{2}$，u 为上述表达式，那么

(i) $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

(ii) $u_{tt}-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

和

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}}u(x,t)=g(x^0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}}u_t(x,t)=h(x^0)$ 对点 $x^0\in\mathbb{R}^n$.

证明过程同Th2. 对系列，与 n 为奇数时相比，n 为偶数时需要计算 $u(x,t)$, $u=g$, $u_t=h$ 在 $B(x,t)$ 上的值而不是 $\partial B(x,t)$.

Huygens原理 (Huygens' principle): 比较奇数维与偶数维的求解公式.

发现在n为奇数且$n\geq 3$时, 在点$x\in\mathbb{R}^n$处g和h的值只在圆锥$C=\{(y,t)\mid t>0, |x-y|<t\}$的边界$\{(y,t)\mid t>0, |x-y|=t\}$上影响u的取值. 另一方面若n为偶数, g和h的值在C的内部影响u的值. 换言之, 在x点处的扰动在奇数维中会沿着一个尖锐的波前(wavefront)推进(无后效现象), 但在偶数维中"扰动"会在波前经过以后持续带来影响(有反效现象). 这就是Huygens原理.

(三维空间中例如人在谈话时可以清楚听到对方的声音. 在二维平面上, 例如把石头丢入水中有层层浪花).

2.4.2 非齐次的问题 (Nohomogeneous Problem)

接下来考虑非齐次的波动方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=0, u_t=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

由Duhamel's原理受启发得, 定义$u=u(x,t;s)$为下述方程的解

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot;s)-\Delta u(\cdot;s)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(s,\infty) \\ u(\cdot;s)=0, u_t(\cdot;s)=f(\cdot,s) & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=s\} \end{cases}$$

$u(x;t,t)$.
$u(x,s;s)$.

令 $u(x,t)\triangleq\int_0^t u(x,t;s)\,ds \quad (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)$

Duhamel's原理断言这个$u(x,t)$就是方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=0, u_t=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

定理4 非齐次波动方程的解 (Solution of nonhomogeneous wave equation)

假设$n\geq 2$, $f\in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. 定义$u=\int_0^t u(x,t;s)\,ds$. 那么

(i) $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

(ii) $u_{tt}-\Delta u=f$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

和

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\,t>0}} u(x,t)=0$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\,t>0}} u_t(x,t)=0$, $\forall x^0\in\mathbb{R}^n$

proof: 1. 若n为奇数, $[\frac{n}{2}]+1=\frac{n+1}{2}$, 由定理2, 有 $u(\cdot,\cdot;s)\in C^2(\mathbb{R}^n\times[s,\infty))$, $\forall s\geq 0$,
故由s的任意性, $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, 若$n$为偶数, $[\frac{n}{2}]+1=\frac{n+2}{2}$, 由定理3得
因此 $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

2. 接下来计算

$$u_t(x,t)=u(x,t;t)+\int_0^t u_t(x,t;s)\,ds=\int_0^t u_t(x,t;s)\,ds$$

$$u_{tt}(x,t)=u_t(x,t;t)+\int_0^t u_{tt}(x,t;s)\,ds=f(x,t)+\int_0^t u_{tt}(x,t;s)\,ds.$$

此外: $\Delta u(x,t)=\int_0^t \Delta u(x,t;s)\,ds=\int_0^t u_{tt}(x,t;s)\,ds$

因此

$$u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t)\qquad (x\in\mathbb{R}^n,t>0).$$

并且明显有 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$. $\left(u(x,0)=\int_0^0 u(x,t;s)\,ds=0.\right.$

$\left.u_t(x,0)=\int_0^0 u_t(x,t;s)\,ds=0\right)$

#.

对于一个一般的非齐次wave方程问题的解就是方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$

的解与方程 $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=0,\ u_t=0 & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$ 的解的和.

Examples: (i) 去具体计算一下 $n=1$ 时 $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty)\\ \end{cases}$ 的解

$u_t=0$ on $\mathbb{R}\times\{t=0\}$.

此情形下由 d'Alembert's 公式有

$$u(x,t;s)=\frac{1}{2}\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy \quad , \quad u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds.$$

那么 $$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)\,dy\,ds \quad (x\in\mathbb{R},t\geq 0)$$ (换元)

(ii) 对于 $n=3$ 的情形. Kirchhoff's 公式告诉

$$u(x,t;s)=(t-s)\fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,dS$$

所以 $$u(x,t)=\int_0^t (t-s)\left(\fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,dS\right)ds$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\partial B(x,t-s)}\frac{f(y,s)}{(t-s)}\,dS\,ds \qquad |\partial B(x,t-s)|=4\pi(t-s)^2$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\partial B(x,r)}\frac{f(y,t-r)}{r}\,dS\,dr.$$

因此 $$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)}\frac{f(y,t-|y-x|)}{|y-x|}\,dy \quad (x\in\mathbb{R}^3,t\geq 0)$$ (极坐标公式)

满足 $n=3$ 时的 wave 方程. 右端的被积函数 (integrand) 被称为推迟势, 滞后势 (retarded potential)

2.4.3 能量方法 (Energy methods)

由奇数维和偶数维的 wave 方程解的表达式可得知对于空间维数越大, 为了确保方程的解是 C^2 的, 需要假设初值 g 和 h 有更高的光滑性, 这说明可能有其它更好的办法去描述解的光滑程度.

在这一节主要是通过特定的积分"能量"泛函来说明对于任意维数 n, wave 方程

解性质不错.

a. 唯一性 (Uniqueness)

令 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, ∂U 边界光滑. 令 $U_T=U\times(0,T]$, $\Gamma_T=\overline{U_T}-U_T$, 其中 $T>0$.

下面考虑初/边值问题
$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } U_T \\ u=g & \text{on } \Gamma_T \\ u_t=h & \text{on } U\times\{t=0\}. \end{cases}$$

定理5 波动方程解的唯一性 (Uniqueness for wave equation)

存在至多一个解 $u\in C^2(\overline{U_T})$ 满足上述方程.

proof: 若 $\tilde{u}$ 是另一个解, 那么 $w\triangleq u-\tilde{u}$, 满足
$$\begin{cases} w_{tt}-\Delta w=0 & \text{in } U_T \\ w=0 & \text{on } \Gamma_T \\ w_t=0 & \text{on } U\times\{t=0\}. \end{cases}$$

定义其能量 $E(t)\triangleq\frac{1}{2}\int_U w_t^2(x,t)+|Dw(x,t)|^2dx \quad (0\le t\le T)$ $\quad \int_U Dw\cdot Dw_t\,dx$

那么计算得 $\dot{E}(t)=\int_U w_t w_{tt}+Dw\cdot Dw_t\,dx \quad (\cdot=\frac{d}{dt})$ $\quad =\int_{\partial U} w_t\cdot Dw\cdot\nu\,ds$

$=\int_U w_t(w_{tt}-\Delta w)\,dx=0$. (分部积分. $w|_{\partial U}=0$) $\quad -\int_U \Delta w\cdot w_t\,dx$.

从而 $E(t)=C$, 故 $\forall\, 0\le t\le T$, $E(t)=E(0)=0$, $(w_t(x,0)=0,\ Dw(x,0)=0)$

所以 $w_t, Dw\equiv 0$ (导数为0) in U_T, 又因为 $w\equiv 0$ on $U\times\{t=0\}$, 从而 $w=u-\tilde{u}$ in U_T.

#

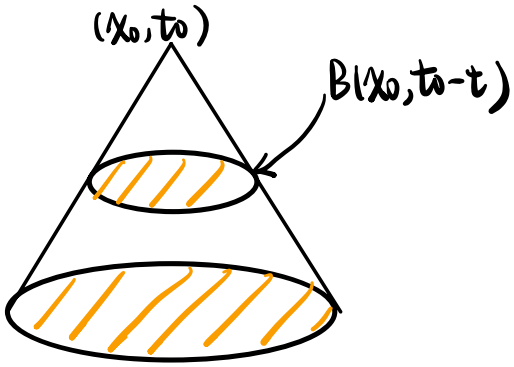
b. 区域的依赖性 (Domain of dependence)

下面去介绍在全空间上的波动方程的解对于区域的依赖性.

假设 $u\in C^2$ 满足 $u_{tt}-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

固定 $x_0\in\mathbb{R}^n$, $t_0>0$, 考虑 backwards wave cone (顶点 (x_0,t_0))

$$K(x_0,t_0)\triangleq\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0,\ |x-x_0|\le t_0-t\}$$



定理6 有限传播速度 (Finite propagation speed)

若 $u\equiv u_t\equiv 0$ on $B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$，那么 $u\equiv 0$ within cone $K(x_0,t_0)$.

特别地，来源于 $B(x_0,t_0)$ 外部的任何干扰"disturbance"对于 $K(x_0,t_0)$ 内部的解没有影响，所有它具有有限传播速度。我们已经在 $g=u$ 和 $h=u_t$ on $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$ 足够光滑时得知解的有限传播速度，下面用能量方法。

proof: 定义局部能量 $e(t)\triangleq \frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t)+|Du(x,t)|^2\,dx \quad (0\le t\le t_0)$

那么 $\dot{e}(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt}+Du\cdot Du_t\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|Du|^2\,dS$

$$=\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t(u_t-\Delta u)\,dx+\underline{\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial \nu}u_t\,dS} \quad \text{(分部积分)}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|Du|^2\,dS$$

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial \nu}u_t-\frac{1}{2}u_t^2-\frac{1}{2}|Du|^2\,dS$$

(注 $\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t)+|Du(x,t)|^2\,dx=\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt}+Du\cdot Du_t\,dx$

$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t_0-t}\left(\int_{\partial B(x_0,r)} u_t^2(x,t)+|Du(x,t)|^2\,dS\right)dr=\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt}+Du\cdot Du_t\,dx$

$-\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t)+|Du|^2\,dS$.)

注意到 $\left|\frac{\partial\partial}{\partial t} u_t\right| \le |u_t||Du| \le \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|Du|^2$ (Cauchy不等式)

故 $\dot{e}(t) \le 0$, 从而 $e(t) \le e(0) = 0$ $\forall\, 0 \le t \le t_0 \Rightarrow e(t) = 0$ $\forall\, 0 \le t \le t_0$,

因此 $u_t \equiv 0$, $Du \equiv 0$, 所以 $u \equiv 0$ within cone $K(x_0, t_0)$.

#.