Chapter 3 Nonlinear First-Order PDE

本章主要研究一般的一阶非线性的PDE：$F(Du,u,x)=0$，其中$x\in U$，U是$\mathbb{R}^n$中的开集。这里$F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\bar{U}\to\mathbb{R}$是给定的，$u:\bar{U}\to\mathbb{R}$是未知的，$u=u(x)$

Notation：记$F=F(p,z,x)=F(p_1,\cdots p_n,z,x_1\cdots x_n)$ 其中$p\in\mathbb{R}^n$，$z\in\mathbb{R}$，$x\in U$。

因为"p"代替梯度$Du(x)$，"z"代替$u(x)$，假设F是光滑的，令

$$\begin{cases} D_pF=(F_{p_1},\cdots F_{p_n}) \\ D_zF=F_z \\ D_xF=(F_{x_1}\cdots F_{x_n}) \end{cases}$$

我们主要关心PDE $F(Du,u,x)=0$ in U中的解u，且满足边界条件 $u=g$ on Γ。

其中Γ是∂U的某个子集，$g:\Gamma\to\mathbb{R}$是给定的。

3.1 Complete integrals, envelopes（完全积分包络）

$\frac{dy}{dx}=f(x)$ $\quad$ $u(x,c)=g(x)+c$.

$\Rightarrow y=g(x)+c$. 通解

给定初值$\Rightarrow$

3.1.1 完全积分（Complete integrals）（理解为通解）

首先考虑一阶非线性PDE $F(Du,u,x)=0$.

先假设$A\subset\mathbb{R}^n$中的一个开集，其中参数$a=(a_1\cdots a_n)\in A$，且有一个C^2的解$u=u(x;a)$

Notation：记 $(D_au,D^2_{xa}u)\triangleq\begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1a_1} & \cdots & u_{x_na_1} \\ \vdots & \vdots & & \\ u_{a_n} & u_{x_1a_n} & \cdots & u_{x_na_n}\end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$.

Definition：C^2的函数$u=u(x;a)$称为是在$U\times A$上的完全积分（Complete integrals）：满足

(i) $u(x;a)$满足PDE：$F(Du,u,x)=0$，$\forall a\in A$

(ii) $\operatorname{rank}(D_au,D^2_{xa}u)=n$ $(x\in U,a\in A)$. （n个参数$a_1\cdots a_n$独立）.

(Remark: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots a_1y'+a_0x=0$. $\Rightarrow$ 初值条件(n个) $y(x_0)=c_0, y'(x_0)=c_1, \cdots y^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1}$.

为了方看这个n个参数的独立性. $\begin{cases} y(x_0,a_1\cdots a_n)=c_0 \\ y'(x_0,a_1\cdots a_n)=c_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0,a_1\cdots a_n)=c_{n-1}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ 由隐函数组的存在定理满足

并且有此行列式 $\dfrac{\partial(y,y'\cdots y^{(n-1)})}{\partial(a_1\cdots a_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial a_n} \end{vmatrix}\neq 0.$ (初值取1情况)

Example: $\begin{cases} D_x u(x;a)=0 \\ u(x_0;a)=u_0. \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 隐函数定理 $\dfrac{\partial(u,D_xu)}{\partial(a)}=\begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1a_1} & \cdots & u_{x_na_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1a_n} & \cdots & u_{x_na_n} \end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(D_au, D^2_{xa}u)=n.$)

Interpretation: 上述条件(ii)确保 $u(x;a)$ 依赖n个独立的参数 $a_1\cdots a_n$.

下证确实如此.(反证法)

设 $B\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 上的开集, $\forall b\in B$, 假定 $v=v(x;b)$ $(x\in U)$ 是方程 $F(Du,u,x)=0$ 的解.

并且设存在一个 C^1 的映射 $\psi: A\to B$, $\psi=(\psi^1,\cdots\psi^{n-1})$, s.t

$$u(x;a)=v(x;\psi(a)) \quad (x\in U, a\in A)$$

$\psi(a)=(\underbrace{\psi^1(a)}_{b_1},\cdots\underbrace{\psi^{n-1}(a)}_{b_{n-1}})$

那现在函数 $u(x;a)$ 仅依赖于 $n-1$ 参数 $b_1,\cdots b_{n-1}$. 但是

$$u_{x_ia_j}(x;a)=\sum_{k=1}^{n-1}v_{x_ib_k}(x;\psi(a))\psi^k_{a_j}(a) \quad (i,j=1,\cdots n)$$ chain Rules.

所以 $\det(D^2_{xa}u)=\sum_{k_1\cdots k_n=1}^{n-1}v_{x_1b_{k_1}}\cdots v_{x_nb_{k_n}}\det\begin{pmatrix} \psi^{k_1}_{a_1} & \cdots & \psi^{k_1}_{a_n} \\ \vdots & & \\ \psi^{k_n}_{a_1} & \cdots & \psi^{k_n}_{a_n} \end{pmatrix}=0.$

$\det(AB)=\det A\det B.$

Cauchy-Binet 比内公式.

因为 $\forall k_1\cdots k_n\in\{1,\cdots n-1\}$, 至少有两行相等, 从而后面的行列式 $=0$.

$\left(\det\left(\overset{A}{\begin{pmatrix} v_{x_1b_1} & \cdots & v_{x_1b_{n-1}} \end{pmatrix}}\overset{B}{\begin{pmatrix} \psi^1_{a_1} & \cdots & \psi^1_{a_n} \end{pmatrix}}\right)\right)$

$$\left(\underset{n\times n}{\det(D^2_{x_a}u)}=\left|\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \vdots & \\ V_{x_n b_1} & \cdots\ V_{x_n b_{n-1}} \end{pmatrix}_{n\times(n-1)}\begin{pmatrix} \psi^{n-1}_{a_1} & \cdots & \psi^{n-1}_{a_n} \\ \vdots & & \\ \psi^{n-1}_{a_1} & \cdots & \psi^{n-1}_{a_n} \end{pmatrix}_{(n-1)\times n}\right|=0.\ ;\ \operatorname{rank}(D^2_{x_a}u)\le \operatorname{rank}B\le n-1\right)$$

$$\Rightarrow \det(D^2_{x_a}u)=0.$$

同时 $u_{a_j}(x;a)=\sum_{k=1}^{n-1}V_{b_k}(x;\psi(a))\psi^k_{a_j}(a)\ (j=1,\cdots,n)\Rightarrow D_a u$

故有 $(D_a u, D^2_{x_a}u)_{n\times n}$ 的行列式为 0，从而 $\operatorname{rank}(D_a u, D^2_{x_a}u)<n$.

Example 1. 克莱罗(Clairaut's)方程(微分几何):

$$x\cdot Du+f(Du)=u.$$

其中 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 给定的. 其完全积分是 $u(x;a)=a\cdot x+f(a)\ (x\in U)\ \forall a\in\mathbb{R}^n$.

((i) $\underline{D_x u(x;a)}=\underbrace{(\overset{D_{x_1}}{a_1},\overset{D_{x_2}}{a_2}\cdots\overset{D_{x_n}}{a_n})}=a$; $\underline{a\cdot x}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n$. 则代入原方程 $x\cdot a+f(a)=u(x;a)$.

(ii) $\underset{D_{x_1a_1}u}{(D_a u, D^2_{x_a}u)}=\begin{pmatrix} x_1+f', 1, 0\cdots 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad D_{x_1a_2} \\ x_n+f', 0\cdots\cdots 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(D_a u, D_{x_a}u)=n.$).

Example 2: eikonal 方程(几何光学):

$$|Du|=1. \quad\Rightarrow\quad u^2_{x_1}+u^2_{x_2}+\cdots u^2_{x_n}=1.$$

$\underline{a_1^2+\cdots a_n^2=1}$. n-1个独立.

其完全积分为 $\underset{n个值}{u(x;\underline{a},b)}=\underline{a\cdot x+b}\ (x\in U)\ \forall x\in U, \underset{n-1.}{a\in\partial B(0,1)}, \underset{1.}{b\in\mathbb{R}}$.

((i) $D_x u=(a_1,\cdots a_n)\Rightarrow |Du|=\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2}=1\ (a\in\partial B(0,1))$

(ii) $(D_{a,b}u, \underline{D^2_{x_a}u}, D^2_{x_b}u)=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}\Rightarrow \operatorname{rank}(D_{a,b}u, D^2_{x_a}u, D^2_{x_b}u)=n.$)

$D_{x_n a_n}u.$

$D_{x_n}u=\boxed{a_n}\ /\ D_{x_n a_n}u=\sum_{j=1}^{n-1}c_j a_j\big|_{a_n=0}.$

Example 3. Hamilton-Jacobi 方程(力学 mechanics): 最简单的形式

$$u_t+H(Du)=0$$

其中 $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 这里 u 依赖于 $x=(x_1,\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$. 令 $t=x_{n+1}$, 记 $Du=D_x u=(u_{x_1}\cdots u_{x_n})$.

则完全积分为 $u(x,t;a,b)=a\cdot x-tH(a)+b \quad (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)$

其中 $a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}$, $n+1$ 个独立的参数.

(i) $D_x u=\underline{a}$ $\quad u_t=-\underline{H(a)} \Rightarrow -H(a)+H(a)=0$.

(ii) $(D_{a_1 b}u, D^2_{xa}u, D^2_{xb}u)$ [其中 $x=(x_1\cdots x_{n+1})=(x_1\cdots x_n,t)=$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1a_1 & & x_na_1 & x_{n+1}a_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 0 & -H' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 & -H' \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+2)}. \end{array}$$

$D_{x_1 b_1}$, $D_t b_1=0$ $\quad D_{x_1 a_1}$ $\quad D^2_{ta}u \Rightarrow D_{ta_1}\cdots D_{ta_n}$

$\operatorname{rank}(D_{a_1 b}u, D^2_{xa}u, D^2_{xb}u)=n+1$)

3.1.2 包络中的新解 (New solutions from envelopes)

(线性方程的解属于方程的通解, 但非线性方程的解不一定属于方程

eg: 克莱罗方程(一维): $y=xp+\frac{1}{p}$ 其中 $p=\frac{dy}{dx}$ ⇒ 通解为 $y=cx+\frac{1}{c}$, 但是 $y^2=4x$

仍为其解, 不属于其通解) $y^2=4x \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=4 \Rightarrow p=\frac{2}{y} \Rightarrow y=\frac{2x}{y}+\frac{y}{2}=\frac{4y^2}{2y}+\frac{y}{2}=y$.

接下来去说明如何去构造一阶非线性PDE: $F(Du,u,x)=0$ 更加复杂的解, 这些解不仅仅只依赖于 n 个参数了, 而是 $n-1$ 个变量任意函数. 将这些新解称为完全积分的包络, 更一般地, 其它 m 个参数的解集族的包络.

Definition: 令 $u=u(x;a)\in C^1$, 且 $x\in U, a\in A$. 其中 $U\subset\mathbb{R}^n$, $A\subset\mathbb{R}^m$ 均为开集.

考虑向量方程 (Vector equation):

$$D_a u(x;a)=0 \quad (x\in U, a\in A)$$

$(D_{a_1}u, D_{a_2}u, \cdots D_{a_m}u)=0=(0,\cdots 0)$

$\begin{cases} D_{a_1}u=0 \\ \vdots \\ D_{a_m}u=0. \end{cases}$

假设参数 a 是关于 x 的一个 C^1 函数, 满足上述方程: $a=\phi(x)$.

因此 $D_a u(x;\phi(x))=0 \quad (x\in U)$

那我们称 $v(x)\triangleq u(x;\phi(x)) \quad (x\in U)$ 为函数 $\{u(\cdot;a)\}_{a\in A}$ 的包络.

有了包络之后，可以构造一阶非线性偏微分方程新的解：

定理1 (Construction of new solutions)

假设 $\forall a\in A$, $u=u(\cdot;a)$ 满足PDE: $F(Du,u,x)=0$. 并且满足上述条件的包络 v, 存在且是一个 C^1 函数，那么 v 满足PDE: $F(Du,u,x)=0$. $\Rightarrow F(Dv,v,x)=0$ ☆

按上述定义的包络 v 有时也称为 $F(Du,u,x)=0$ 的奇积分 (Singular integral)

奇解.

proof: 由定义得 $v(x)=u(x;\phi(x))$; $\forall i=1,2\cdots n$, 有

$$v_{x_i}(x)=u_{x_i}(x;\phi(x))+\sum_{j=1}^{m}u_{a_j}(x;\phi(x))\,\phi^j_{x_i}(x)$$

$$=u_{x_i}(x;\phi(x))$$

$a=\phi(x)$

Chain Rules. $(a_1\cdots a_m)=(\phi^1\cdots\phi^m)$

$u_{x_i}\Rightarrow u(x;a(x_i))=u(x;a_1(x)\cdots a_m(x))$

$\Rightarrow u_{a_1}(a_1(x_i))\phi^1_{x_i}+u_{a_2}\phi^2_{x_i}+\cdots u_{a_m}\phi^m_{x_i}$

(复合函数求导，且由 $D_a u(x;a)=0\Rightarrow u_{a_i}(x;a)=0$).

因此 $\forall x\in U$, $F(Dv(x),v,x)=F(Du(x;\phi(x)),u(x;\phi(x)),x)=0$.

#.

其几何意义为 $\forall x\in U$, v 的图像与 $u(\cdot;a)$ 的图像在点 $a=\phi(x)$ 处相切. 因此 $Dv=D_x u(\cdot;a)$ 在 x 处，且 $a=\phi(x)$.

Example 4. 考虑PDE: $u^2(1+|Du|^2)=1$. 其完全积分为

$$u(x,a)=\pm(1-|x-a|^2)^{1/2}\quad(|x-a|<1)$$

$\Rightarrow u(x_1,a_1)=\pm(1-(x-a)^2)^{1/2}$.

$y=\pm(1-|x-a|^2)^{1/2}$

$v=\pm1$.

计算得 $D_a u=\dfrac{\mp(x-a)}{(1-|x-a|^2)^{1/2}}=0.\Rightarrow a=\phi(x)=x$.

因此 $v(x)=u(x;x)=\pm(1-|x-a|^2)^{1/2}\big|_{a=x}=\pm1$ 为上述方程的奇积分.

(ii) $D_x u(x;a)=\dfrac{\pm(x-a)}{(1-|x-a|^2)^{1/2}}\Rightarrow(1-|x-a|^2)\left[1+\dfrac{|x-a|^2}{(1-|x-a|^2)}\right]=1.$

(ii) $\operatorname{rank}(D_a u, D^2_{xa} u) = n$.)

为了能够从完全积分中得到 $F(Du,u,x)=0$ 更多的解，可以改变上述的构造.
选取任意的开集 $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 和任意的 C^1 函数 $h: A' \to \mathbb{R}$，保证 h 的图像在 A 中.
记 $a=(a_1,\dots a_n)=(a', a_n)$；$a'=(a_1 \cdots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Definition: 一般积分 (general integral) (依赖于 h) 是函数

$$u'(x;a') = u(x;a', h(a')) \quad (x \in U, a' \in A')$$

的包络 $v' = v'(x)$，其中这个包络要存在且 $\in C^1$.

换言之，在计算包络的时候，我们不需要限制参数 a 具有 $a=(a', h(a'))$ 的形式，
其中 h 是具体的函数. 因此依赖于 n 个任意常数的 $a_1, \dots a_n$ 的完全积分，我们可以构造
一个解其依赖于 $n-1$ 个变量的任意函数 h.

$u_t + H(Du) = 0 \Rightarrow x \cdot a - tH(a) + \underline{b} = u(x,t;a,\underline{b})$

Examples. 在例3中，令 $H(p)=|p|^2$，$h \equiv 0$. ($\underline{u_t + |Du|^2 = 0}$)，那么

$$u'(x,t;a) = x \cdot a - t|a|^2.$$

$n+1 \to n+1$ 参数，$a_1 \cdots a_n, 0$.

(因为程 $u(x,t;a,b) = a \cdot x - tH(a) + b$. ($n+1$) 个参量，令 $h \equiv 0 \Rightarrow n$ 个参数，即 $b=0$)

下面计算其包络 $D_a u' = x - 2ta = 0$，因此 $a = \frac{x}{2t}$，故

$$v'(x,t) = x \cdot \frac{x}{2t} - t\left|\frac{x}{2t}\right|^2 = \frac{|x|^2}{4t} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t>0).$$

满足上述 Hamilton-Jacobi 方程 $v'_t + |Dv'|^2 = 0$.

#.

Remark: 很容易相信，一旦我们找到了方程 $F(Du,u,x)=0$ 依赖于任意函数 h 的解，
我们就找到了方程所有的解. 但事实并非如此. 假设 PDE 具有结构

$$F(Du,u,x) = F_1(Du,u,x) F_2(Du,u,x) = 0.$$

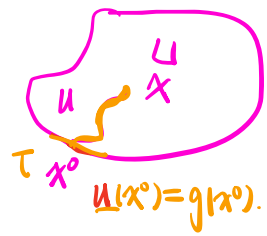
若$u_1(x,a)$为PDE: $F_1(Du,u,x)=0$的完全积分，那么可以找到对于任意函数h的一般积分。但是仍然丢失了所有满足PDE: $F_2(Du,u,x)=0$的解。

3.2 特征线 (Characteristics)

3.2.1 Derivation of characteristics ODE

回到一般的一阶非线性PDE: $F(Du,u,x)=0$ in U

且满足边界条件: $u=g$ on Γ.



其中$\Gamma\subseteq\partial U$和$g:\Gamma\to\mathbb{R}$都是给定的，假设$F,g$都是光滑函数。

接下来研究一下特征线的方法，通过把上述的PDE转化为适当的ODE系统来解决上述的边值问题，这是我们的计划。假设u满足$F(Du,u,x)=0$, $u=g$ in Γ.
且固定任意一点$x\in U$，可以通过找寻某一条U中的曲线，这条曲线连接x和点$x^0\in\Gamma$
且u是沿着这条曲线运动，来计算$u(x)$，因为已知$u=g$ on Γ，可以得知u在某边界点处x^0的值，然后去计算u沿着这条曲线的值，特别是在点x处。

Finding the characteristic ODE

如何去选择U中的这条曲线？

假设这条曲线是用参数形式的函数$X(s)=(x^1(s),\cdots x^n(s))$来决定的，其中这个参数$s$是属于$\mathbb{R}$中的某个子区间$I$。假设$u$是方程$F(Du,u,x)=0$的$C^2$的解，

定义 $z(s)\triangleq u(X(s))$ (解沿着曲线的取值)

此外，设 $p(s)\triangleq Du(X(s))$ (解的梯度沿着曲线的取值)

即 $p(s)=(p^1(s),\cdots p^n(s))$，其中 $p^i(s)=u_{x_i}(X(s))$ $(i=1,2,\cdots n)$

所以 $z(\cdot)$代表着u沿着曲线的值，$p(\cdot)$代表着梯度Du沿着曲线的值。

故我们需要选择一个函数 $X(\cdot)$ 来计算 $z(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$.

$\frac{d}{ds}p^i(s)$ $\quad u_{x_i}(X(s), X(s), \cdots X(s))$ $\quad x_1 \quad x_2 \quad x_n$

$= \frac{d}{ds}(\underline{u_{x_i}(X(s))})$ $\quad X(s) = (x^1(s), \cdots x^n(s))$

为此，首先关于 $p^i(s) = u_{x_i}(X(s))$ 求导有

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(X(s))\, \dot{x}^j(s) \quad \left(\cdot = \frac{d}{ds}\right)$$

然后这个表达式是不太有希望的，因为它包含了 u 的二阶导数. 另一方面，可以关于原方程关于 x_i 求导，那么有

$F(\underline{Du}, u, x) = 0 \xrightarrow{x_i} F_{x_i} F_{Du}$.

$F(p, z, x) = 0 \xrightarrow{x_i} \sum_{j=1}^{n} F_{p_j} \cdot u_{x_j x_i}$.

$\dot{x}^j \Rightarrow X(s) = (x^1(s), \cdots x^n(s))$

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(Du, u, x)\, u_{x_j x_i} + F_z(Du, u, x)\, u_{x_i} + F_{x_i}(Du, u, x) = 0.$$

若假设 $\dot{x}^j(s) = F_{p_j}(p(s), z(s), X(s))$ $(j = 1, 2, \cdots n)$，就可以利用.

$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(X(s))\, \dot{x}^j(s)$ 来消掉上述等式的二阶导数项.

如果我们的假设成立的话，则可以计算

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(Du, u, x)\, u_{x_j x_i} + F_z(Du, u, x)\, u_{x_i} + F_{x_i}(Du, u, x) = 0.$$

在 $x = X(s)$ 上的值，从而得到等式

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(p(s), z(s), X(s))\, u_{x_i x_j}(X(s)) + F_z(p(s), z(s), X(s))\, p^i(s) + F_{x_i}(p(s), z(s), X(s)) = 0.$$

从而有 $\dot{p}^i(s) = -F_{x_i}(p(s), z(s), X(s)) - F_z(p(s), z(s), X(s))\, p^i(s)$ $\quad (i = 1, 2, \cdots n)$

最后 $z(s) = u(X(s))$ 关于 s 求导有 $\quad p(s) = Du(X(s)) = (u_{x_1}(X(s)), \cdots u_{x_n}(X(s)))$

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(X(s))\, \dot{x}^j(s) = \sum_{j=1}^{n} p^j(s)\, \dot{x}^j(s)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p^j(s)\, F_{p_j}(p(s), z(s), X(s))$$

The Characteristic equations

综上有
$$\begin{cases} (a)\ \dot{p}(s) = -D_x F(p(s), z(s), x(s)) - D_z F(p(s), z(s), x(s))\, p(s) \\ (b)\ \dot{z}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)) \cdot p(s) \\ (c)\ \dot{x}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)) \end{cases}$$

此外 $$F(p(s), z(s), x(s)) \equiv 0$$

上述等式对于 $\forall s \in I$ 都成立.

上述这个重要的系统是关于 $2n+1$ 维一阶 ODE 方程组成的,且称为非线性一阶 PDE $F(Du, u, x)=0$ 的特征方程. 函数 $p(\cdot)=(p^1(\cdot), \cdots, p^n(\cdot))$, $z(\cdot)$, $x(\cdot)=(x^1(\cdot), \cdots, x^n(\cdot))$ 称为特征 (characteristics). 有时称 $x(\cdot)$ 为 projected characteristic (投影特征): 是全部特征 $(p(\cdot), z(\cdot), x(\cdot)) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ 到区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的投影 (projection).

定理1 (Structure of Characteristic ODE)

令 $u \in C^2(U)$ 满足 U 上的一阶非线性 PDE: $F(Du, u, x)=0$. 假设 $x(\cdot)$ 满足上述 ODE 中的 (c), 其中 $p(\cdot)=Du(x(\cdot))$, $z(\cdot)=u(x(\cdot))$. 那么 $p(\cdot)$ 满足 ODE 中的 (a). $z(\cdot)$ 满足 ODE 中的 (b), 其 $x(s) \in U$.

仍需要去寻找关上上述 ODE 系统的合适的初值条件,为了上述的定理能够成立. 见 §3.2.3.

Remark: 上述的这个特征 ODE 确实是较有用的,形成了一个有关 $x(\cdot)$, $z(\cdot)=u(x(\cdot))$ 和 $p(\cdot)=Du(x(\cdot))$ 特定的方程系统. 最关键的步骤是设 $\dot{x}=D_pF$, 使得含有二阶导的项消失了. 但这个 ODEs 是不受 u 的二阶和高阶导数所影响.

3.2.2 Examples.

在继续研究特征方程之前，可以先去考虑方程结构特别简单的某些情况。

我们需要解释在某些适当的边界条件下，如何去求解特征ODE并且计算特征的一阶PDE的解的具体表达式。

a. F linear

考虑PDE：$F(Du,u,x)$是线性且齐次的情况：

$$F(Du,u,x)=b(x)\cdot Du(x)+c(x)u(x)=0 \qquad (x\in U)$$

那么 $F(p,z,x)=b(x)\cdot p+c(x)z$，故

$$D_pF=b(x) \qquad D_xF=\dot{b}(x)p+\dot{c}(x)z \qquad D_zF=c(x)$$

那么特征ODE中的(c)为 $\dot{X}(s)=D_pF=b(X(s))$

此外特征ODE中的(b)为 $\dot{z}(s)=D_pF\cdot p=b(X(s))\cdot p(s)$

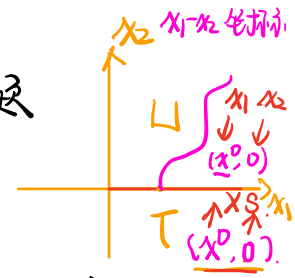
由方程本身所具有的结构 $b(X(s))\cdot p(s)+c(X(s))\cdot z(s)=0$.

从而 $\dot{z}(s)=-c(X(s))\cdot z(s)$

综上有
$$\begin{cases}(a) & \dot{X}(s)=b(X(s))\\ (b) & \dot{z}(s)=-c(X(s))z(s)\end{cases} \Rightarrow \text{解出 } (X(s),z(s))=(X(s),u(X(s)))$$

(上述的特征ODE其实不需要$p(\cdot)$)

Example 1. 接下来利用
$$\begin{cases}(a) & \dot{X}(s)=b(X(s))\\ (b) & \dot{z}(s)=-c(X(s))z(s)\end{cases}$$
来求解下列问题



$$\begin{cases}(x_2,x_1)\cdot Du-u=0\\ b\cdot D+cu=0 \Rightarrow b=(x_2,x_1)\ c=-1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1u_{x_2}-x_2u_{x_1}=u & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \Gamma\end{cases}$$

其中U为象限$\{x_1>0,x_2>0\}$和$\Gamma=\{x_1>0,x_2=0\}\subseteq\partial U$ X-S线标示

$b(x) \Leftrightarrow b(X(s))$

从而由上线性的情况可知 $b=(-x_2,x_1)$ 和 $c=-1$. 因此特征ODE为

$$\begin{cases} \dot{x}^1=-x^2, \ \dot{x}^2=x^1 \\ \dot{z}=z \end{cases}$$

$\dot{x}=b=(x_2,x_1)$

$\downarrow$

$(\dot{x}^1,\dot{x}^2)=(x_2,x_1)$

$x=x^0$,

从而有 $\begin{cases} x^1(s)=x^0\cos s, \ x^2(s)=x^0\sin s \\ z(s)=z^0e^s=g(x^0)e^s \end{cases}$ 其中 $x^0\geq 0$, $0\leq s\leq \frac{\pi}{2}$.

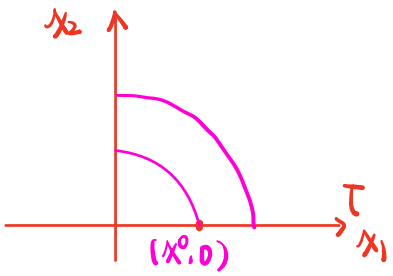
($\dot{x}^1=-x^2$, $\dot{x}^2=x^1 \Rightarrow \ddot{x}^1=-\dot{x}^2=-x^1$ 与 $\ddot{x}^2=\dot{x}^1=-x^2$

即 $\frac{d^2x^1}{ds^2}=-x^1 \Rightarrow \lambda^2+1=0. \Rightarrow \lambda=\pm i \Rightarrow x^1=c_1\cos s+c_2\sin s$

$\frac{d^2x^2}{ds^2}=-x^2 \Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i \Rightarrow x^2=c_3\cos s+c_4\sin s$

$\Rightarrow$ $x^1=c_1\cos s$, $x^2=c_4\sin s$.

在寻找边界上的初值



$\Rightarrow$ 代入初边值有 $x^1(s)=x^0\cos s$

$x^2(s)=x^0\sin s$

$(x^0,0)$

$\downarrow$ $\downarrow$

x s

$\downarrow$

$X(s)=(x^1(s),x^2(s))$

$=(x_1,x_2)$.

$=(x_0,0)$

$\dot{z}=z \Rightarrow \frac{dz}{ds}=z \Rightarrow z=z^0e^s=u(x^0)e^s=g(x^0)e^s$.)

$\begin{cases} x_1=x^0\cos s \\ x_2=x^0\sin s \end{cases} \Rightarrow x^0, s.$

固定点 $(x_1,x_2)\in U$, 选择 $s>0$, $x^0>0$, s.t. $(x_1,x_2)=(x^1(s),x^2(s))=(x^0\cos s, x^0\sin s)$

即 $x^0=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, $s=\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. 因此.

极坐标.

$$u(x)=u(X(s))=u(x^1(s),x^2(s))=z(s)=g(x^0)e^s=g\left((x_1^2+x_2^2)^{1/2}\right)e^{\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

#

b. F quasilinear (拟线性)

一阶 PDE $F(Du,u,x)=0$ 是拟线性的, 且具有形式

$$F(Du,u,x)=b(x,u(x))\cdot Du(x)+c(x,u(x))=0$$

在这种情况下 $F(p,z,x)=b(x,z)\cdot p+c(x,z)$，其中 $D_pF=b(x,z)$，$D_xF=b_1'\cdot p+c_1'$

$D_zF=b_2'\cdot p+c_2'$

因此特征ODE中的(c)有 $\dot{X}(s)=b(X(s),z(s))$，

特征ODE中的(b)有 $\dot{z}(s)=D_pF(p,z,x)\cdot p=b(X(s),z(s))\cdot p(s)=-c(X(s),z(s))$

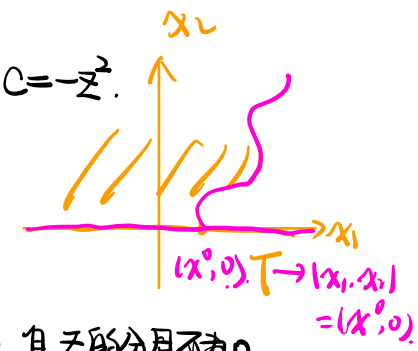
所以特征ODE为 $\begin{cases}(a) & \dot{X}(s)=b(X(s),z(s))\\ (b) & \dot{z}(s)=-c(X(s),z(s))\end{cases}$

（当F为拟线性时，同样特征ODE不需要 $p(\cdot)$）

Example 2. 上述的特征ODE $\begin{cases}(a) & \dot{X}(s)=b(X(s),z(s))\\ (b) & \dot{z}(s)=-c(X(s),z(s))\end{cases}$ 一般情况下是很难求解的.

所以考虑半线性PDE的边值问题：$\begin{cases}u_{x_1}+u_{x_2}=u^2 & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \Gamma\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(1,1)}_{b}\cdot Du-\underbrace{u^2}_{c}=0.$

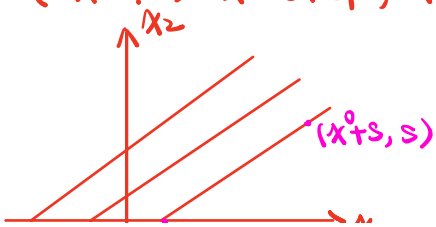
其中U为半空间 $\{x_2>0\}$ 和 $\Gamma=\{x_2=0\}=\partial U$. 这里 $b=(1,1)$ 和 $c=-z^2$.



那么特征ODE为 $\begin{cases}\dot{x}^1=1, & \dot{x}^2=1\\ \dot{z}=z^2\end{cases}$ 初值?

所以 $\begin{cases}x^1(s)=x^0+s, & x^2(s)=s\\ z(s)=\dfrac{z^0}{1-sz^0}=\dfrac{g(x^0)}{1-sg(x^0)}\end{cases}$ 其中 $x^0\in\mathbb{R}$, $s\geq 0$, 且上式的分母不为0.

($\dot{x}^1=1\Rightarrow x^1=s+c_1$; $\dot{x}^2=1\Rightarrow x^2=s+c_2$; $\frac{dz}{ds}=z^2\Rightarrow z=\frac{z^0}{1-sz^0}=\frac{u(x^0)}{1-su(x^0)}=\frac{g(x^0)}{1-sg(x^0)}$



$\Rightarrow x^1=x^0+s,\ x^2=s.$)

$y=ax+b.$

$y_x=a.$

$(x^0,0)$

因此点 $(x_1,x_2)\in U$，选取 $s>0$，和 $s^0\in\mathbb{R}$，s.t. $(x_1,x_2)=(x^1(s),x^2(s))=(x^0+s,s)$

即 $x^0=x_1-x_2$，$s=x_2$，那么

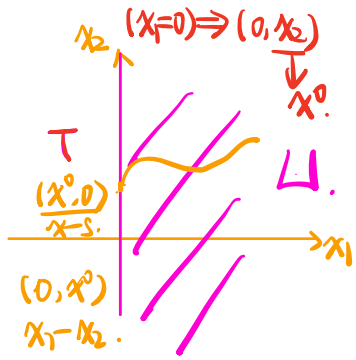
$$u(x)=u(x^1(s),x^2(s))=z(s)=\frac{g(x^0)}{1-sg(x^0)}=\frac{g(x_1-x_2)}{1-x_2g(x_1-x_2)}$$

上述解有意义当且仅当 $1-x_2g(x_1-x_2)\neq 0$

#

C.F fully nonlinear

一般情况下，如果可以的话，必须考虑完整的特征ODE.



Example 3. 考虑完全非线性问题 $\begin{cases} u_{x_1}u_{x_2}=u & \text{in } U \\ u=x_2^2 & \text{on } \Gamma \end{cases}$

其中 $U=\{x_1>0\}$，$\Gamma=\{x_1=0\}=\partial U$，这里 $F(p,z,x)=p_1p_2-z$，因此其特征ODE为

求以

$$\begin{cases} \dot p^1=p^1,\ \dot p^2=p^2 \\ \dot z=2p^1p^2 \\ \dot x^1=p^2,\ \dot x^2=p^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot p(s)=-D_xF-D_zF\cdot p \\ \dot z(s)=D_pF \\ \dot x(s)=D_pF. \end{cases}$$

(其中 $D_pF=(p_2,p_1)$ $D_xF=0$，$D_zF=-1$，$\dot p(s)=-D_xF-D_zF\cdot p=p$

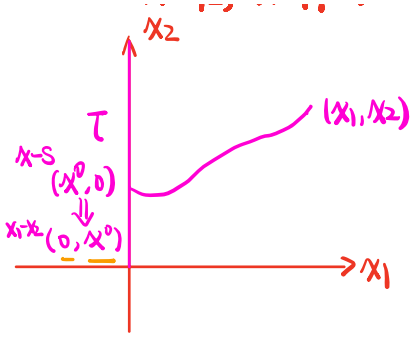
$\dot z(s)=D_pF\cdot p=2p^1p^2$ $\dot x^1=p_2$，$\dot x^2=p_1$)

解得 $\begin{cases} x^1(s)=p_2^0(e^s-1),\ x^2(s)=x^0+p_1^0(e^s-1) \\ z(s)=z^0+p_1^0p_2^0(e^{2s}-1) \\ p^1(s)=p_1^0e^s,\ p^2(s)=p_2^0e^s \end{cases}$ 其中 $x^0\in\mathbb{R}$，$s\in\mathbb{R}$，$z^0=(x^0)^2$

$s=0$，$\Rightarrow(x^0,0)$ $p=Du(x^0)=p^0=(p_1^0,p_2^0)$

($\dot p^1=p^1$，$\dot p^2=p^2\Rightarrow p^1=c_1e^s$，$p^2=c_2e^s$，取合适的边值 $\Rightarrow p^1=p_1^0e^s$，$p^2=p_2^0e^s$. $(1+c_4)p_1^0=x^0$.

$\dot x^1=p_2$，$\dot x^2=p_1\Rightarrow \dot x^1=p_2^0e^s$，$\dot x^2=p_1^0e^s\Rightarrow x^1=p_2^0(e^s+c_3)$，$x^2=p_1^0(e^s+c_4)$



$\Rightarrow x^1 = p_2^0(e^s-1)$; $x^2 = x^0 + p_1^0(e^s-1)$

$\frac{dz}{ds} = \dot{z}(s) = 2p^1p^2 = p_1^0p_2^0e^{2s}$

$\Rightarrow z(s) = p_1^0p_2^0e^{2s} + C_5$ 代入$(x^0,0)$有

$p_1^0p_2^0 + C_5 = z^0 \Rightarrow C_5 = z^0 - p_1^0p_2^0$

故 $z(s) = z^0 + p_1^0p_2^0(e^{2s}-1)$)

$u = x_2^2 \Rightarrow$ 求导 $u_{x_2} = 2x_2$

接下来必须确定 $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$，因为 $u = x_2^2$ on Γ，$p_2^0 = u_{x_2}(0,x^0) = 2x^0$. 相容性条件.

此外 PDE: $u_{x_1}u_{x_2} = u$ 代表着 $p_1^0p_2^0 = z^0 = (x^0)^2$，所以 $p_1^0 = \frac{x^0}{2}$. 从而上述表达式可化简为

$$\begin{cases} x^1(s) = 2x^0(e^s-1), \ x^2(s) = \frac{x^0}{2}(e^s+1) \\ z(s) = (x^0)^2e^{2s} \\ p^1(s) = \frac{x^0}{2}e^s, \ p^2(s) = 2x^0e^s. \end{cases}$$

固定点 $(x_1,x_2)\in U$，选取 s 和 x^0 s.t. $(x_1,x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = (2x^0(e^s-1), \frac{x^0}{2}(e^s+1))$

这个等式表明 $x^0 = \frac{4x_2-x_1}{4}$, $e^s = \frac{x_1+4x_2}{4x_2-x_1}$

$$\left(\begin{cases} x_1 = 2x^0(e^s-1) \\ x_2 = \frac{x^0}{2}(e^s+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x^0e^s - 2x^0 \\ 4x_2 = 2x^0e^s + 2x^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^0 = \frac{4x_2-x_1}{4} \\ e^s = \frac{x_1+4x_2}{4x_2-x_1} \end{cases} \right)$$

故 $u(x) = u(x^1, x^2) = z(s) = (x^0)^2e^{2s} = \frac{(x_1+4x_2)^2}{16}$

#

3.2.3 Boundary conditions

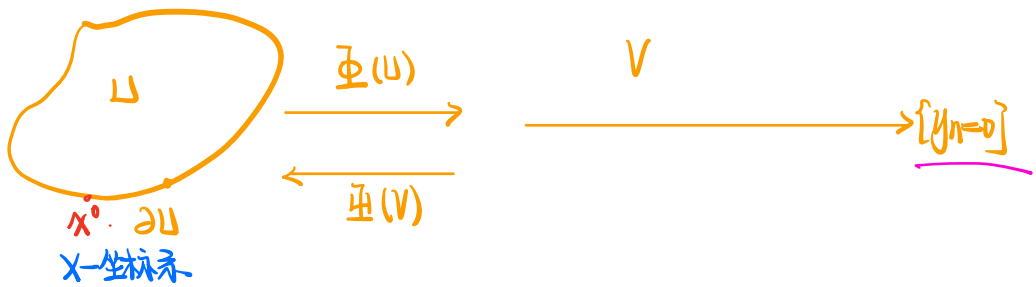
接下来去研究在 ∂U 的适当一部分边界 Γ 的某个区域内，利用特征ODE去求解边界问题 $F(Du,u,x)=0$ 和 $u=g$ on Γ.

a 拉直边界 (Straightening the boundary)

为了简化计算，首先去换元，使得 ∂U 的边界拉直。为了完成上述步骤，首先固定任意点 $x^0\in\partial U$，然后利用§C.1中的符号，找到一个光滑映射 $\Phi,\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，s.t. $\Psi=\Phi^{-1}$，且 Φ 将 x^0 附近的 ∂U 拉直。

给定任意的函数 $u:U\to\mathbb{R}$，记 $V\triangleq\Phi(U)$，设 $v(y)\triangleq u(\Psi(y))$ $(y\in V)$

那么 $u(x)=v(\Phi(x))$ $(x\in U)$



现假设 u 是 U 上边值问题 PDE: $F(Du,u,x)=0$ 的解 $\in C^1$，那么 V 中的 v 满足什么样的 PDE？

由 $u(x)=v(\Phi(x))$ $(x\in U)$，有 $u_{x_i}(x)=\sum_{k=1}^{n}v_{y_k}(\Phi(x))\Phi^k_{x_i}(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

即 $Du(x)=Dv(y)D\Phi(x)$ $(D\Phi(x)\in\mathbb{R}^{n\times n})$

$$\begin{pmatrix}\Phi^1_{x_1} & \Phi^2_{x_1} & \cdots & \Phi^n_{x_1}\\ \vdots & & & \\ \Phi^1_{x_n} & \Phi^2_{x_n} & \cdots & \Phi^n_{x_n}\end{pmatrix}$$

因此 $F(Du,u,x)=0$ 转化为

$$F(Dv(y)D\Phi(\Psi(y)),v(y),\Psi(y))=F(Du(x),u(x),x)=0.$$

即具有形式：$G(Dv(y),v(y),y)=0$ in V.

此外 $v=h$ on Δ，其中 $\Delta\triangleq\Phi(\Gamma)$，$h(y)\triangleq g(x)=g(\Psi(y))$

综上所述 原问题 $\begin{cases}F(Du,u,x)=0 & \text{on } U\\ u=g & \text{in } \partial U\end{cases}$ 转化为问题 $\begin{cases}G(Dv,v,y)=0 & \text{in } V\\ v=h & \text{on } \Delta\end{cases}$

其中 G,h 为上述中的 G,h.

关键点在于我们通过换元的方法，将 x^0 附近的边界拉直，将原边值问题

本转化为具有相同形式的另一个问题.

b. 边值的相容性条件 (Compatibility conditions on boundary data)

在先前的计算中,如果给定一点 $x^0\in\Gamma$,我们可以一开始就假设 Γ 在 x^0 附近是直的,且属于平面 $\{x_n=0\}$.

现在打算在 x^0 的附近利用特征ODE来构造 $F(Du,u,x)=0$ 的解,为此必须找到合适的初值条件:

$$p(0)=p^0,\ z(0)=z^0,\ X(0)=x^0.$$

现若曲线 $X(s)$ 穿过了 x^0,那么就有 $z^0=g(x^0)$

关于 $p(0)=p^0$ 我们应该要求什么?因为边界条件 $u=g$ in Γ 可以得知在 x^0 附近 $u(x_1,\cdots x_{n-1},0)=g(x_1,\cdots x_{n-1})$,两边同时求导可得

$$u_{x_i}(x^0)=g_{x_i}(x^0)\qquad (i=1,2\cdots n-1)$$

同时原方程PDE也要满足,因此 $p^0=(p_1^0,\cdots p_n^0)$ 满足下面的关系:

$$\begin{cases} p_i^0=g_{x_i}(x^0) & (i=1,2,\cdots n-1)\\ F(p^0,z^0,x^0)=0 \end{cases}$$

上述等式是关于 n 个常量 $p^0=(p_1^0,\cdots p_n^0)$ 的 n 个方程.

称上述的 $z^0=g(x^0)$, $p_i^0=g_{x_i}(x^0)$, $F(p^0,z^0,x^0)=0$ 为相容性条件 (Compatibility conditions) 且满足上条件的 (p^0,z^0,x^0) 称为 admissible.

注意到 z^0 是由边界条件和选择的点 x^0 唯一确定的,但向量 p^0 满足 $\begin{cases} p_i^0=g_{x_i}(x^0)\\ F(p^0,z^0,x^0)=0\end{cases}$ 可能是不存在的或者不唯一的.

c. 非特征的边界值 (Noncharacteristic boundary data)

假设取 $x^0\in\Gamma$,其中 Γ 在 x^0 附近位于超平面 $\{x_n=0\}$ 上,且 (p^0,z^0,x^0) 是 admissible

[illegible] admissible.

打算通过特征ODE的方法去在x^0附近构造方程$F(Du,u,x)=0$和$u=g$ in Γ的解u.

到目前为止已经确定对于特征ODE来说，$x(0)=x^0$, $z(0)=z^0$, $p(0)=p^0$都是恰当的边值条件. 且$x(\cdot)$在Γ上过x^0点，但仍然需要为初值点附近的点解决特征ODE.

因此我们现在必须考虑是否可以以某种恰当的方式来扰乱(perturb) (p^0,z^0,x^0)来保持相容性条件.

换言之，给定点$y=(y_1,\cdots y_{n-1},0)\in\Gamma$，且$y$足够靠近$x^0$，打算去解特征ODE:

$$\begin{cases} (a)\ \dot{p}(s)=-D_xF(p(s),z(s),x(s))-D_zF(p(s),z(s),x(s))p(s) \\ (b)\ \dot{z}(s)=D_pF(p(s),z(s),x(s))\cdot p(s) \\ (c)\ \dot{x}(s)=D_pF(p(s),z(s),x(s)) \end{cases}$$

且初值条件为 $p(0)=q(y)$, $z(0)=g(y)$, $x(0)=y$.

接下来的目标是寻找一个函数$q(\cdot)=(q^1(\cdot),\cdots q^n(\cdot))$, s.t. $q(x^0)=p^0$，且$(q(y),g(y),y)$是admissible; 即相容性条件为

$$\begin{cases} q^i(y)=g_{x_i}(y) \quad (i=1,2\cdots n-1) \\ F(q(y),g(y),y)=0 \end{cases}$$

$\forall y\in\Gamma$ (接近x^0)都成立.

Lemma 1 非特征的边界条件 (Noncharacteristic boundary conditions)

对于$\forall y\in\Gamma$ (充分靠近x^0)，且$F_{p_n}(p^0,z^0,x^0)\neq 0$，则存在唯一的解$q(\cdot)$满足

$$\begin{cases} q(x^0)=p^0 \\ q^i(y)=g_{x_i}(y) \\ F(q(y),g(y),y)=0. \end{cases}$$

我们称若满足$F_{p_n}(p^0,z^0,x^0)\neq 0$，则记admissible (p^0,z^0,x^0)为非特征的(Noncharacteristic)

证明：问题实是去寻找 $q^n(y)$，s.t. $F(q(y), g(y), y)=0$，其中 $q^i(y)=g_{x_i}(y)$ $\forall i=1,\cdots,n-1$.
因为 $F(p^0,z^0,x^0)=0$，由隐函数定理（§C.7）可以得知在非特征条件 $F_{p_n}(p^0,z^0,x^0)$ 条件有效的情况，可以找到局部存在，且唯一的 $q^n(y)$ 满足条件.

#.

一般的非特征条件（General noncharacteristic condition）

若 Γ 在 x^0 附近不是直的，则其非特征条件为 $D_pF(p^0,z^0,x^0)\cdot\nu(x^0)\neq 0$.
其中 $\nu(x^0)$ 代表着在 x^0 处 ∂U 的单位外法向量.（具体看 Problem 7）

3.2.4 Local solution

我们的目标是利用特征ODE去构造 $F(Du,u,x)=0$，$u=g$ on Γ 上在 Γ 附近的解.
在§3.2.3中选取点 $x^0\in\Gamma$ 都是假设在 x^0 附近的 Γ 是平的，且在平面 $\{x_n=0\}$ 上.
并且假定了非特征的边界条件 (p^0,z^0,x^0) 是 admissible. 由 Lemma 1 可知存在一个函数 $q(y)$ s.t. $p^0=q(x^0)$ 和 $(q(y), g(y), y)$ 是 admissible.（$\forall y$ 充分接近 x^0）.

给定任意的点 $y=(y_1,\cdots y_{n-1},0)$，可以求解特征ODE 且满足 $p(0)=q(y)$，$z(0)=g(y)$，$x(0)=y$.

Notation：记

$$p(s)=p(y,s)=p(y_1,\cdots y_{n-1},s)$$
$$z(s)=z(y,s)=z(y_1,\cdots y_{n-1},s)$$
$$x(s)=x(y,s)=x(y_1,\cdots y_{n-1},s)$$

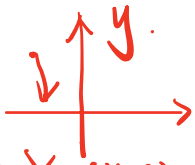
$$\begin{tikzcd}
\text{PDE} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{ODE} \arrow[d, Rightarrow] \\
x, p, z \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\star"] & \\
\text{PDE } u &
\end{tikzcd}$$

来表明特征ODE的解对于 y 和 s 的依赖性. 并且为了方便，记 x^0 仍在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上.

Lemma 2 局部可逆（Local invertibility）

假设有非特征条件 $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$，那么存在一个开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，并且包含0点，存在 x^0 的一个邻域 W 在 $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 中，存在 $\mathbb{R}^n$ 中 x^0 的邻域 V. s.t. 对于 $\forall x \in V$，都存在 $s \in I$, $y \in W$ 满足

$$x = X(y, s)$$



其中映射 $x \mapsto s, y \in C^2$.

$X(y, 0) = y$.

反解 $x \Longrightarrow X_{\cdot\cdot}(y, s)$.

proof: 我们有 $X(x^0, 0) = x^0$. 根据反函数定理（§C.6）可得，只需证 $DX(x^0, 0) \neq 0$.

由 $X(y, 0) = (y, 0)$ $(y \in T)$，有 $\forall\, i = 1, 2, \cdots n-1$.

$x = (x^1, \cdots x^n)$.

$$x^j_{y_i}(x^0, 0) = \begin{cases} \delta_{ij} & (j = 1, \cdots n-1) \\ 0 & (j = n) \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

此外由特征ODE中的 (c) $\dot{X}(s) = D_p F(p(s), z(s), X(s))$ 可得

$$x^j_s(x^0, 0) = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0)$$

因此

$$DX(x^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

由非特征征的边界条件 $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ 可得 $DX(x^0, 0) \neq 0$

#

由 Lemma 2 可知 $\forall x \in V$，都可以局部的唯一求解 $\begin{cases} x = X(y, s) \\ \text{其中 } y = y(x),\ s = s(x). \end{cases}$

最终，定义 $\begin{cases} u(x) \triangleq z(y(x), s(x)) \\ p(x) \triangleq p(y(x), s(x)) \end{cases}$ $\forall x \in V$，其中 s, y 满足 $\begin{cases} x = X(y, s) \\ \text{其中 } y = y(x),\ s = s(x). \end{cases}$

最后，我们利用特征ODE的解来去寻找原PDE的解.

定理2 局部存在性定理 (Local Existence Theorem)

函数 u 定义为 $u(x) \triangleq z(y(x), s(x)) \in C^2$，满足 PDE

$$F(Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in V)$$

且满足边界条件

$$u(x) = g(x) \qquad (x \in \Gamma \cap V)$$

proof: 1. 首先，固定 $y \in \Gamma$ 在 x^0 的附近，满足特征ODE，及对于 $p(s) = p(y,s)$，$z(s) = z(y,s)$，$X(s) = X(y,s)$ 满足 $p(y,0) = q(y)$，$z(y,0) = g(y)$，$X(y,0) = y$

2. 下证 若 $y \in \Gamma$ 充分的接近 x^0，那么有.

$$f(y,s) \triangleq F(p(y,s), z(y,s), X(y,s)) = 0 \quad (s \in I)$$

记由非特边界条件得 $f(y,0) = F(p(y,0), z(y,0), X(y,0)) = F(q(y), g(y), y) = 0$

此外

$$f_s(y,s) = \sum_{j=1}^{n} F_{p_j} \dot{p}^j + F_z \dot{z} + \sum_{j=1}^{n} F_{x_j} \dot{x}^j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(-F_{x_j} - F_z p^j) + F_z\left(\sum_{j=1}^{n} F_{p_j} p^j\right) + \sum_{j=1}^{n} F_{x_j} F_{p_j} \quad \text{(特征ODE)}$$

$$= 0.$$

那么有 $f(y,s) = 0 \quad (s \in I)$

3. 又因为 $\begin{cases} u(x) = z(y(x), s(x)) \\ p(x) = p(y(x), s(x)) \end{cases}$ 从而

$$F(p(y,s), z(y,s), X(y,s)) = F(p(x), u(x), x) = 0. \quad \forall x \in V.$$

故只需证明 $p(x)=Du(x)$ $x\in V$.

首先证明 $\forall s\in I, y\in W$, 有

$$z_s(y,s)=\sum_{j=1}^{n} p^j(y,s)\, x_s^j(y,s)$$

和

$$z_{y_i}(y,s)=\sum_{j=1}^{n} p^j(y,s)\, x_{y_i}^j(y,s) \quad (i=1,\cdots,n-1)$$

注意到由特征ODE (b) $\dot z(s)=z_s(y,s)=D_pF(p,z,x)\cdot p$; (c) $\dot x(s)=x_s(y,s)=D_pF(p,z,x)$

从而 $z_s(y,s)=x_s(y,s)\cdot p(y,s)=\sum_{j=1}^{n} p^j(y,s)\, x_s^j(y,s)$.

又固定 $y\in\Gamma$, $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, 记

$$r^i(s)\triangleq z_{y_i}(y,s)-\sum_{j=1}^{n} p^j(y,s)\, x_{y_i}^j(y,s)$$

注意到根据相容性条件 $\begin{cases} q^i(y)=g_{x_i}(y) & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ F(q(y),g(y),y)=0 \end{cases}$ 有

$x_{y_i}^j(y,0)=\delta_{ij}$

$j=i$.

$$r^i(0)=z_{y_i}(y,0)-\sum_{j=1}^{n} p^j(y,0)\, x_{y_i}^j(y,0)=\underline{g_{x_i}(y)-q^i(y)}=0.$$

$p^i\cdot \underline{x_{y_i}^i}\, 1=p^i(y,0)\Rightarrow \underline{p(0)=q(y)}$

此外得

$$\dot r^i(s)=z_{y_i s}-\sum_{j=1}^{n} p_s^j x_{y_i}^j+p^j x_{y_i s}^j$$

为了化简上述表达式, 利用 $z_s(y,s)=\sum_{j=1}^{n} p^j(y,s)\, x_s^j(y,s)$ 两边关于 y_i 求导:

$$z_{s y_i}=\sum_{j=1}^{n} p_{y_i}^j x_s^j+p^j x_{s y_i}^j$$

从而

$$\dot r^i(s)=\sum_{j=1}^{n} p_{y_i}^j x_s^j+p^j x_{s y_i}^j-\sum_{j=1}^{n}\left(p_s^j x_{y_i}^j+p^j x_{y_i s}^j\right).$$

$$=\sum_{j=1}^{n} p_{y_i}^j x_s^j-p_s^j x_{y_i}^j$$

$$=\sum_{j=1}^{n} p^j_{y_i} F_{p_j} - (-F_{x_j} - F_z p^j) x^j_{y_i} \quad (\text{特征 ODE (a)})$$

再利用 $F(p(y,s), z(y,s), x(y,s))=0$ 两边关于 y_i 求导：

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j} p^j_{y_i} + F_z z_{y_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{x_j} x^j_{y_i} = 0$$

因此有

$$r^i(s) = \sum_{j=1}^{n} p^j_{y_i} F_{p_j} - (-F_{x_j} - F_z p^j) x^j_{y_i} - \left(\sum_{j=1}^{n} F_{p_j} p^j_{y_i} + F_z z_{y_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{x_j} x^j_{y_i}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F_z p^j x^j_{y_i} - F_z z_{y_i} = F_z\left(\sum_{j=1}^{n} p^j x^j_{y_i} - z_{y_i}\right) = -F_z r^i(s)$$

因此 $r^i(\cdot)$ 满足线性 ODE $\dot{r}^i(s) = -F_z r^i(s)$，初值条件 $r^i(0)=0$. 因此 $r^i(s)=0$ $(s\in I, i=1,\cdots,n-1)$，故

$$z_{y_i}(y,s) = \sum_{j=1}^{n} p^j(y,s) x^j_{y_i}(y,s) \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

4. 最后由 $z_s(y,s) = \sum_{j=1}^{n} p^j(y,s) x^j_s(y,s)$, $z_{y_i}(y,s) = \sum_{j=1}^{n} p^j(y,s) x^j_{y_i}(y,s)$ $(i=1,\cdots,n-1)$ 有 若 $j=1,\cdots,n$.

$$u_{x_j} = z_s s_{x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} z_{y_i} y^i_{x_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p^k x^k_s s_{x_j} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} p^k x^k_{y_i} y^i_{x_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p^k \left(x^k_s s_{x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} x^k_{y_i} y^i_{x_j}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p^k x^k_{x_j} = \sum_{k=1}^{n} p^k \delta_{jk} = p^j.$$

从而有 $F(Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x\in V)$ #

3.2.5 Applications.

对于一些特殊的例子，去研究局部存在定理在这些情况下的应用.

a. F linear.

对于一阶线性的齐次PDE具有形式：

$$F(Du, u, x) = b(x)\cdot Du(x) + c(x)u(x) = 0 \quad (x\in U)$$

非特征条件在 $x^0\in\Gamma$ 处 $D_pF(p^0, z^0, x^0)\cdot\nu(x^0)\neq 0$ 变为 $b(x^0)\cdot\nu(x^0)\neq 0$.

因此不需要引入 p^0, z^0.

此外若加入边界条件 $u=g$ on Γ，那么若 $y\in\Gamma$ 在 x^0 附近，

可以求解出 $q(y)$ 满足相容性条件 $\begin{cases} q^i(y) = g_{x_i}(y) & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ F(q(y), g(y), y) = 0 \end{cases}$. 因此根据局部

$p(0)=q(y)$.

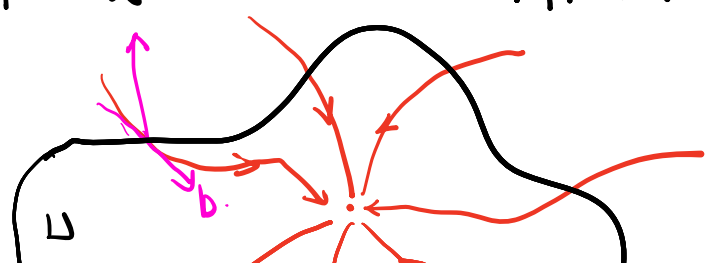
存在定理2，原PDE在 x^0 附近一个邻域 V 中都存在唯一的解且满足边界条件.

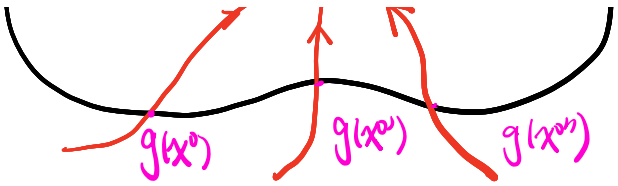
注意到在证明定理2时，充分利用了所有的特征ODE，但要知道解的存在性，事实上对于上述PDE，仅可以使用 $\begin{cases} \dot{X}(s) = b(X(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(X(s))z(s) \end{cases}$ 就能计算解. 并且注意到

特征线 $X(s)$ 从 Γ 上的不同点出发是不会出现交叉的，原因是因为 ODE: $\dot{X}(s) = b(X(s))$ 的解是唯一的.

Example 4.

假设特征ODE中的轨线方程为 $\dot{X}(s) = b(X(s))$ 如图所示 Case 1.

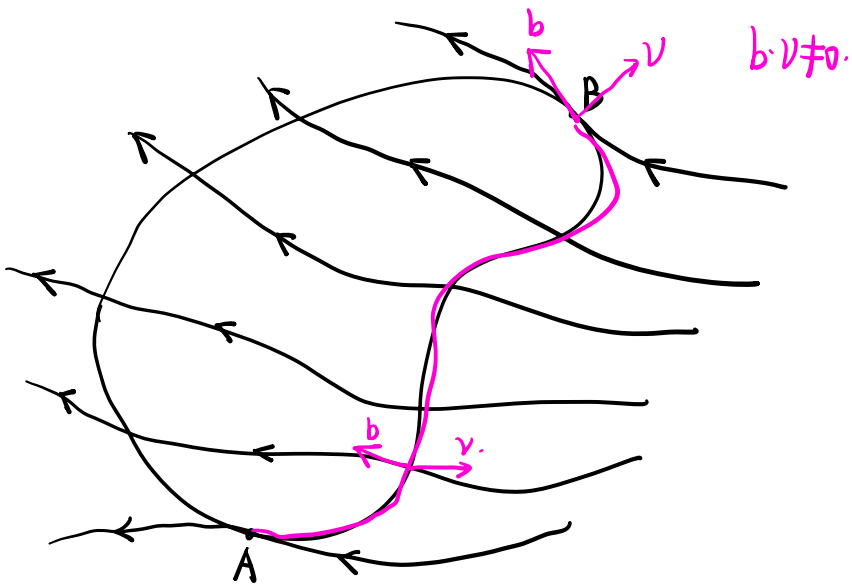




假设向量 b 在 U 中的某个点消失，或者可以将此点移到原点，且在 $\Gamma \triangleq \partial U$ 上有 $b\cdot\nu<0$.

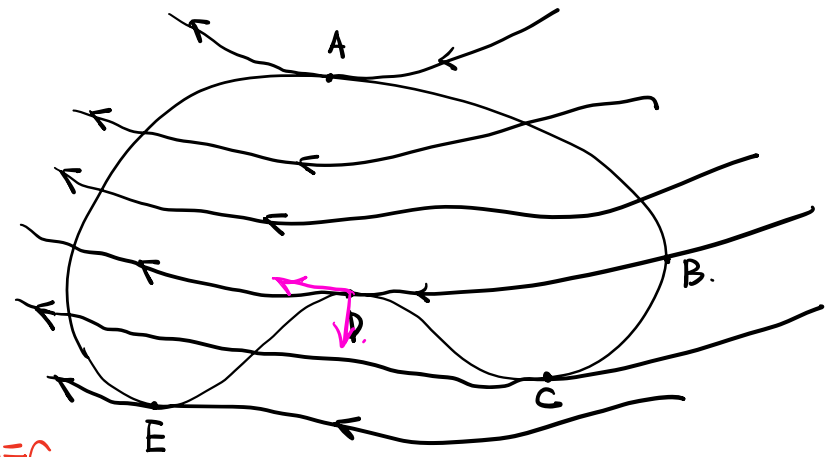
考虑下述边值问题 $\begin{cases} b\cdot Du=0 & \text{in } U \\ u=g & \text{on } \Gamma \end{cases}$，应用定理2，可以得到在 Γ 附近存在唯一的解 u. 事实上对于 $\dot{X}(s)=b(X(s))$，初值条件为 $X(0)=x^0\in\Gamma$ 的每一个解都有 $u(X(s))\equiv u(X(0))=g(x^0)$（如果 g 不是常数的话）上述问题的解可能在 U 上就不处连续：上述方程的解在特征线上的取值为常数，因此在 $x=0$ 处取不同的值.

但是现在假设特征ODE：$\dot{X}(s)=b(X(s))$ 的轨线如图所示 Case2.



假设特征ODE的每一条轨迹（除了穿过点A,B的）穿过 U，且穿过集合 $\Gamma \triangleq \{x\in\partial U \mid b(x)\cdot\nu(x)<0\}$ 在 U 上有界，在这种情况下，设 U 沿着每条线，那么原方程存在光滑解.

最后假设特征线如图所示 Case 3.



$b\cdot Du=0.$

$\dot{z}=0\Rightarrow u=C.$

所定义 u 沿着轨线的取值为常数，但是 u 将是不连续的（如果 $g(B)\neq g(D)$）.

因为 D 点处是特征的，则在 D 点附近定理 2（Local existence）不存在.

$b(D)\cdot\nu(D)=0$

b. F quaslinear

考虑 F 为拟线性情况，PDE: $F(Du,u,x)=b(x,u)\cdot Du+c(x,u)=0$

其中非特征条件 $D_pF\cdot\nu\neq0$ 在 $x^0\in\Gamma$ 处就为 $b(x^0,z^0)\cdot\nu(x^0)\neq0$，其中 $z^0=g(x^0)$.

考虑边界条件 $u=g$ on Γ，由先前的例子可以知道若 $y\in\Gamma$ 在 x^0 的附近，存在 $q(y)$ 满足

相容性条件 $\begin{cases} q^i(y)=g_{x_i}(y) & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ F(q(y),g(y),y)=0 \end{cases}$. 因此由定理 2 可得在 x^0 的某个邻域 V

方程 $\begin{cases} b(x,u)\cdot Du+c(x,u)=0 & \text{in } U \\ u=g & \text{on } \Gamma \end{cases}$ 存在唯一解. 在计算 V 中解的时候不需要使用

P(·). 仅仅考虑特征 ODE: $\begin{cases} \dot{x}(s)=b(x(s),z(s)) \\ \dot{z}(s)=-c(x(s),z(s)) \end{cases}$

然而，与线性方程的情况下对比，从 Γ 上不同的点出发的特征线可能会 V

的内部发生交叉；从而导致在U上不存在上述的局部解。

Example 5 守恒律的特征线 (Characteristics for conservation laws)

考虑一阶拟线性PDE scalar 守恒律：　　F: 向量值函数

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + \operatorname{div} F(u)$$
$$= u_t + F'(u)\cdot Du = 0 \quad \text{in } U = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

其中初值条件　$u = g$ on $\Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t=0\}$.

这里 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = (F^1, \cdots F^n)$. 为了一般化，令 $t = x_{n+1}$，同样地，其中的散度是对于空间变量 $(x_1, \cdots x_n)$ 来求，$Du = D_x u = (u_{x_1} \cdots u_{x_n})$

因为 $t = x_{n+1}$ 的特殊性，适当地调整一下符号，记 $q = (p, p_{n+1})$, $y = (x, t)$, 有

$$G(q, z, y) = p_{n+1} + F'(z)\cdot p. \qquad p = (p_1 \cdots p_n).$$

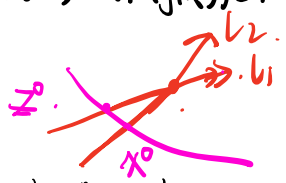
所以　$D_p G = (F'(z), 1)$, $D_y G = 0$, $D_z G = F''(z)\cdot p$.

明显有在任意的一点 $y^0 = (x^0, 0) \in \Gamma$ 上非特征条件 $G_{p_{n+1}}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ 成立，此外对应的特征 ODE (a) 有 $\begin{cases} \dot{x}^i(s) = F^{i\prime}(z(s)) & (i = 1, \cdots n) \\ \dot{x}^{n+1}(s) = 1 \end{cases}$

因此 $x^{n+1}(s) = s$，上述记 $x_{n+1} = t$，从而参数 $s = t$.

特征 ODE (b) 为 $\dot{z}(s) = 0$，因此 $z(s) = z^0 = g(x^0)$；因此有 $X(s) = F'(g(x^0))s + x^0$

因此特征线 (projected characteristic) $y(s) = (X(s), s) = (F'(g(x^0))s + x^0, s)$ $(s \geq 0)$ 为一条直线，(且 u 沿着此线为常数).



Crossing characteristics. 现在假设在不同的点 $z^0 \in \Gamma$，有 $g(x^0) \neq g(z^0)$，那么特征线在某个时刻 $t > 0$ 会发生交叉，由定理1告诉我们 $u = g(x^0)$ 在特征线上

过点 x^0，$u=g(z^0)$ 在特征线上过 z^0，那么矛盾。从而导致在任意时间 $t>0$ 的情况下原问题不存在光滑解。

#

An implicit formula. 接下来通过 $z(s)=z^0=g(x^0)$ 与 $X(s)=F'(g(x^0))s+x^0$ 来得到 u 的具体表达式。事实上给定一个 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $t>0$，由于 $s=t$，

$$u(X(s),t)=z(t)=g(X(t)-tF'(z^0))=g(X(t)-tF'(u(X(t),t)))$$

因此

$$u=g(x-tF'(u))$$

上述 u 的表达式是关于 x,t 的，类似于 §2.1 中 transport 方程的解。很容易验证 $u=g(x-tF'(u))$ 为原方程的解，且 $1+tDg(x-tF'(u))\cdot F''(u)\neq 0$。

特别地，若 $n=1$，则 $1+tg'(x-tF'(u))F''(u)\neq 0$，注意到若 $F''>0$，但 $g'<0$，那么在某个 $t>0$ 的时刻会出现矛盾。

#

c. F fully nonlinear.

对于 F 是完全非线性一阶 PDE 的情况下，其特征 ODE 的形式会变为复杂，但有些特殊结构的 PDE 有一些显著的结构。

Example 6. Hamilton-Jacobi 方程的特征线。

一般情形下的 Hamilton-Jacobi 方程

$$G(Du,u_t,u,x,t)=u_t+H(Du,x)=0$$

其中 $Du=D_xu=(u_{x_1}\cdots u_{x_n})$，记 $q=(p,p_{n+1})$，$y=(x,t)$，有

$$G(q,z,y)=p_{n+1}+H(p,x);$$

有

$$D_qG=(D_pH(p,x),1),\ D_uG=(D_xH(p,x),0),\ D_zG=0.$$

因此特征ODE (c)为 $\begin{cases} \dot{x}^i(s)=H_{p_i}(p(s),x(s)) & (i=1,2,\cdots,n) \\ \dot{x}^{n+1}(s)=1 \end{cases}$

那么同样有参数 $s=t$，特征ODE (a)为 $\begin{cases} \dot{p}^i(s)=-H_{x_i}(p(s),x(s)) & (i=1,2,\cdots,n) \\ \dot{p}^{n+1}(s)=0; \end{cases}$

特征ODE (b)为

$$\dot{z}(s)=D_pH(p(s),x(s))\cdot p(s)+p^{n+1}(s)=D_pH(p(s),x(s))\cdot p(s)-H(p(s),x(s))$$

综上所述，Hamilton-Jacobi方程的特征方程为

$$\begin{cases} (a)\ \dot{p}(s)=-D_xH(p(s),x(s)) \\ (b)\ \dot{z}(s)=D_pH(p(s),x(s))\cdot p(s)-H(p(s),x(s)) \\ (c)\ \dot{x}(s)=D_pH(p(s),x(s)) \end{cases}$$

其中 $p(\cdot)=(p^1(\cdot),\cdots p^n(\cdot))$，$z(\cdot)$ 和 $x(\cdot)=(x^1(\cdot),\cdots x^n(\cdot))$

上述特征ODE的第一个和第三个等式 $\begin{cases} \dot{x}(s)=D_pH(p,x) \\ \dot{p}=-D_xH(p,x) \end{cases}$ 称为Hamilton方程.

将在§3.3中具体去讨论Hamilton方程与Hamilton-Jacobi方程的联系，并且观察到 $z(\cdot)$ 可以忽视，仅需 $x(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ 可由求解Hamilton方程得到.

#

对于Conservation laws和Hamilton-Jacobi方程的初值问题在 $\forall t>0$ 时不存在光滑解.

3.3 Hamilton-Jacobi 方程初步 (Introduction)

本节主要考虑关于 Hamilton-Jacobi 方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

其中 $u: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是未知的, $u = u(x,t)$, $Du = D_x u = (u_{x_1}, \cdots u_{x_n})$, $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为 Hamiltonian, 初值 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

本节目标是去寻找一个在 $\forall t>0$ 时, 一个合适的弱解或广义解, 即使特征线不成立.

3.3.1 变分法 (Calculus of varations) 与 Hamilton's ODE

由§3.2.5节可知与 Hamilton-Jacobi PDE: $u_t + H(Du, x) = 0$ 相联系的两个特征方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = D_p H(p, x) \\ \dot{p} = -D_x H(p, x) \end{cases}$$

(Hamilton's ODE) 此方程在力学中和经典变分法中较常见.

(在本节中 H 不依赖于 x). 本节从变分原理 (variational principle) 角度来研究 Hamition's ODE 的来源. 然后在§3.3.2中去学习如何去构造原始初边值问题的弱解.

a. The calculus of variations

假设 $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个恰当的光滑函数, 并且称为 Lagrangian.

Notation: 记

$$L = L(v, x) = L(v_1, \cdots v_n, x_1, \cdots x_n) \quad (v, x \in \mathbb{R}^n)$$

和

$$\begin{cases} D_v L = (L_{v_1}, \cdots L_{v_n}) \\ D_x L = (L_{x_1}, \cdots, L_{x_n}) \end{cases}$$

一般情况下用 (1.5) 来替代 "v", 用 (1.5) 来替代 "x".

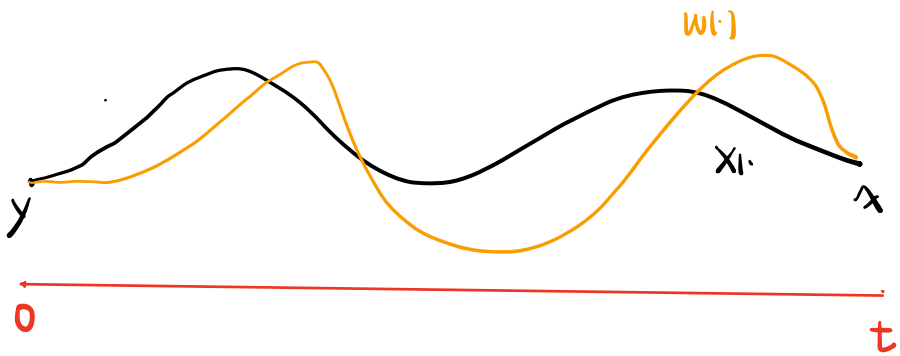
现在固定两点 $x, y \in \mathbb{R}^n$，和时间 $t>0$. 然后引入能量泛函(action functional)

$$I[w(\cdot)] \triangleq \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))\,ds \quad \left(\dot{} = \frac{d}{ds}\right)$$

其中函数 $w(\cdot) = (w^1(\cdot), w^2(\cdot), \cdots w^n(\cdot))$ 属于容许集 (admissible class)

$$\mathcal{A} \triangleq \{w(\cdot) \in C^2([0,t]; \mathbb{R}^n) \mid w(0) = y,\ w(t) = x\}$$

因此 C^2 曲线 $w(\cdot)$ 如果起始点 $s=0$ 时在 y，在 $s=t$ 时在 x，那么 w 属于 $\mathcal{A}$.



在变分法中的一个基本问题就是去寻找一条曲线 $x(\cdot) \in \mathcal{A}$ 满足

$$I[x(\cdot)] = \min_{w(\cdot) \in \mathcal{A}} I[w(\cdot)]$$

即去寻找一个函数 $x(\cdot)$ 使得 $\forall w(\cdot) \in \mathcal{A}$，能量泛函 $I[\cdot]$ 取得最小值.

接下来假设这样的函数 $x(\cdot) \in \mathcal{A}$ 满足变分问题确实存在，然后去研究其性质.

定理1 (Euler-Lagrange 方程)

函数 $x(\cdot)$ 满足下述 Euler-Lagrange 方程系统

$$-\frac{d}{ds}\left(D_v L(\dot{x}(s), x(s))\right) + D_x L(\dot{x}(s), x(s)) = 0 \quad (0 \le s \le t)$$

这是一个向量方程，是由n对二阶方程构成的。

Proof: 1. 选取一个光滑函数 $y:[0,t]\to\mathbb{R}^n$, $y(\cdot)=(y^1(\cdot),\cdots y^n(\cdot))$ 满足

$$y(0)=y(t)=0$$

和定义对 $\forall\tau\in\mathbb{R}$, $\quad w(\cdot)=x(\cdot)+\tau y(\cdot)$

那么 $w(\cdot)\in A$, 则 $I[x(\cdot)]\le I[w(\cdot)]$.

因此记实值函数 $\quad i(\tau)\triangleq I[x(\cdot)+\tau y(\cdot)]$ 在 $\tau=0$ 处取得最小值.

所以 $\quad i'(0)=0 \quad (' = \frac{d}{d\tau})$

2. 接下来去详细计算其导数. 由于

$$i(\tau)=\int_0^t L(\dot{x}(s)+\tau\dot{y}(s),\ x(s)+\tau y(s))\,ds$$

故有

$$i'(\tau)=\int_0^t\sum_{i=1}^n L_{v_i}(\dot{x}+\tau\dot{y},x+\tau y)\dot{y}^i+L_{x_i}(\dot{x}+\tau\dot{y},x+\tau y)y^i\,ds$$

设 $\tau=0$, 则有

$$0=i'(0)=\int_0^t\sum_{i=1}^n L_{v_i}(\dot{x},x)\dot{y}^i+L_{x_i}(\dot{x},x)y^i\,ds$$

对于上述式子的第一项使用分部积分，有

$$0=\sum_{i=1}^n\int_0^t\left[-\frac{d}{ds}(L_{v_i}(\dot{x},x))+L_{x_i}(\dot{x},x)\right]y^i\,ds$$

$$\left(\int_0^t L_{v_i}(\dot{x},x)\dot{y}^i\,ds=L_{v_i}(\dot{x},x)y^i\Big|_0^t-\int_0^t y^i\frac{d}{ds}(L_{v_i}(\dot{x},x))\,ds\right.$$
$$\left.=-\int_0^t\frac{d}{ds}L_{v_i}(\dot{x},x)y^i\,ds\right)$$

上述等式对于任意的光滑函数 $y(\cdot)=(y^1(\cdot),\cdots y^n(\cdot))$ 且 $y(0)=y(t)=0$ 都满足，从而

$\forall\, 0\le s\le t$, 有

$$-\frac{d}{ds}\left(L_{v_i}(\dot{x},x)\right)+L_{x_i}(\dot{x},x)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

#

Critical points (临界点) 上述过程已经说明任意满足 $I[\cdot]$ 最小值的 $x(\cdot)\in A$ 满足 Euler-Lagrange ODE 系统. 故有可能出现曲线 $x(\cdot)\in A$ 满足 Euler-Lagrange 方程但取不到最小值. 这种情况下称 $x(\cdot)$ 为 $I[\cdot]$ 的临界点. 所以最小值点是临界点, 但临界点不一定是最小值点.

$\frac{1}{2}mv^2$ 动能 $\phi(x)$ 势能.

Example. 如果 $L(v,x)=\frac{1}{2}m|v|^2-\phi(x)$, 其中 $m>0$, 则对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$m\ddot{x}(s)=f(x(s)) \Rightarrow F=ma.$$

其中 $f\triangleq -D\phi$. 上述式子为一个质量为 m 的质点在力场 f 中产生了势能 ϕ 的牛顿第二定律.

($D_vL(v,x)=mv$, $D_xL(v,x)=-D\phi(x)$. 其中 $v=\dot{x}(s)$,

$$-\frac{d}{ds}\left(D_vL(\dot{x}(s),x(s))\right)+D_xL(\dot{x}(s),x(s))=0 \Rightarrow -\frac{d}{ds}(m\dot{x}(s))-D\phi(x(s))=0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(s)=f(x(s)) \ )$$

b. Hamilton's equations

现在将 Euler-Lagrange 方程 (n 个二阶 ODE 系统) 等转化为 Hamilton 系统 ($2n$ 个一阶 ODE 系统), 接下来假设 C^2 函数 $x(\cdot)$ 为能量泛函的临界点并且满足 Euler-Lagrange 方程.

$$\begin{cases}\dot{x}=D_pH \\ \dot{p}=-D_xH\end{cases}$$

首先设

$$p(s)\triangleq D_vL(\dot{x}(s),x(s)) \qquad (0\le s\le t)$$

$p(\cdot)$ 称为位移 $x(\cdot)$ 和速度 $v(\cdot)$ 对应的广义动量 (generalized momentum).

接下来做一个重要的假设:

$$\begin{cases} \text{假设对 } \forall x, p \in \mathbb{R}^n, \text{ 方程 } p = D_v L(v, x) \text{ 可以} \\ \text{被关于 } p, x \text{ 的光滑函数 } v, \text{ 即 } \forall x, v = v(p, x) \\ \text{所唯一解决.} \end{cases} \quad (*)$$

接下来在 §3.3.2 去验证这个假设.

Definition. 与 Lagrangian L 相联系的 Hamiltonian H 为

$$H(p, x) = p \cdot v(p, x) - L(v(p, x), x) \quad (p, x \in \mathbb{R}^n)$$

其中函数 $v(\cdot)$ 由上述假设 $(*)$ 所隐示确定.

$p = D_v L$

Example (continued) 对应其 Lagrangian $L(v, x) = \frac{1}{2} m |v|^2 - \phi(x)$ 的 Hamiltonian 为

$$H(p, x) = \frac{1}{2m} |p|^2 + \phi(x) \quad \left(p = D_v L(v, x) = \underline{mv}, \ v = \frac{p}{m}. \right)$$

因此这个 Hamiltion 是总能量, 即动能和势能的总和 (kinetic and potential energies)

#.

接下来考虑 $p(\cdot), x(\cdot)$ 形式下的 Euler-Lagrange 方程:

定理 2 (Derivation of Hamilton's ODE)

函数 $x(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ 满足 Hamilton's equations:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = D_p H(p(s), x(s)) \\ \dot{p}(s) = -D_x H(p(s), x(s)) \end{cases} \quad \forall 0 \le s \le t$$

此外，映射 $s \mapsto H(p(s), x(s))$ 为常数. （能量守恒）.

上述方程是由 $x(\cdot)=(x^1(\cdot),\cdots,x^n(\cdot))$ 和 $p(\cdot)=(p^1(\cdot),\cdots p^n(\cdot))$ 组成的 $2n$ 个一阶 ODE 构成的 system.

proof: 首先注意到有 $p(s)=D_v L(\dot{x}(s), x(s))$ 和 $\dot{x}(s)=v(p(s), x(s))$

令 $v(\cdot)=(v^1(\cdot),\cdots,v^n(\cdot))$. 对于 $\forall i=1,2,\cdots n$，有

$$p\cdot v=\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot v^k$$

$$H(p,x)=p\cdot v(p,x)-L(v(p,x),x)$$

$$H_{x_i}(p,x)=\sum_{k=1}^{n} p_k v^k_{x_i}(p,x)-L_{v_k}(v(p,x),x)\,v^k_{x_i}(p,x)-L_{x_i}(v(p,x),x)$$

$$=-L_{x_i}(v(p,x),x) \quad (p_k=L_{v_k}(v,x))$$

和

$$H_{p_i}(p,x)=v^i(p,x)+\sum_{k=1}^{n} p_k v^k_{p_i}(p,x)-L_{v_k}(v(p,x),x)\,v^k_{p_i}(p,x)$$

$$=v^i(p,x) \quad (p_k=L_{v_k}(v,x))$$

因此 $H_{p_i}(p(s), x(s))=v^i(p(s), x(s))=\dot{x}^i(s)$

同样得有

$$H_{x_i}(p(s), x(s))=-L_{x_i}(v(p(s), x(s)), x(s))=-L_{x_i}(\dot{x}(s), x(s))$$

$$=-\frac{d}{ds}\left(L_{v_i}(\dot{x}(s), x(s))\right)$$

$$=-\dot{p}^i(s)$$

最终，有

$$\frac{d}{ds}H(p,x)=\sum_{i=1}^{n} H_{p_i}(p,x)\dot{p}^i+H_{x_i}(p,x)\dot{x}^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} H_{p_i}(p,x)\left(-H_{x_i}(p,x)\right) + H_{x_i}(p,x) H_{p_i}(p,x) = 0$$

#

3.3.2 Legendre transform, Hopf-Lax formula.

现在去尝试寻找 Hamilton-Jacobi PDE 和变分法问题的联系. 为了简化, 我们也只考虑 Hamiltonian 不依赖于 x, 即 $H = H(p)$.

a. Legendre transform

考虑 Lagrangian $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足这些条件: 映射 $v \mapsto L(v)$ 是凸的;

和 $\lim_{|v|\to\infty} \frac{L(v)}{|v|} = +\infty$. 其中凸性隐含了 L 是连续的.

Definition: Legendre transform of L 是

$$L^*(p) \triangleq \sup_{v\in\mathbb{R}^n} \{p\cdot v - L(v)\} \quad (p\in\mathbb{R}^n)$$

$p = DL(v)$.

$p - DL(v) = 0$.

v 一定存在.

Motivation for Legendre transform. (为什么这样定义?)

由 $\lim_{|v|\to\infty} \frac{L(v)}{|v|} = +\infty$ 可知 $L^*(p)$ 中的定义 "sup" 实际上是 "max". 那么存在某个 $v^* \in \mathbb{R}^n$

s.t. $L^*(p) = p\cdot v^* - L(v^*)$, 即映射 $v \mapsto p\cdot v - L(v)$ 在 $v = v^*$ 处取得最大值.

若给定的 L 在 v^* 处可导, 那么 $p = DL(v^*)$ (两边同时求导). 因此关于 v 的方程 $p = DL(v)$ 是有解的 (尽管有可能不是唯一的) 从而换成 $p\cdot v^* = v(p)$. 因此 $L^*(p) = p\cdot v(p) - L(v(p))$.

然而, 由 §3.3.1 中的与 L 相联系的 Hamiltonian H 的定义, 记 $H = L^*$.

因此 $L^*(p) \triangleq \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v - L(v)\}$ 可知如何从 Lagrangian L 得到 Hamiltonian H.

现在考虑：若给定 H，如何计算 L？

$L^* = H \quad H^* = L.$

定理3 Hamiltonian 和 Lagrangian 的凸对偶 (Convex duality)

假设 L 满足 $L(v)$ 是凸的，$\lim_{|v|\to+\infty}\frac{L(v)}{|v|}=+\infty$，定义 $H = L^*(p) \triangleq \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v - L(v)\}$.

(i) 那么映射 $p \mapsto H(p)$ 是凸的 和 $\lim_{|p|\to\infty}\frac{H(p)}{|p|}=+\infty$

(ii) 此外 $L = H^*$

因此 H 是 L 的 Legendre transform，反之亦然：$H = L^*$，$L = H^*$.

我们称 H 和 L 是对偶凸函数 (dual convex function). 若 H 在 p 点处可导，L 在 v 处可导，

从而有
$$\begin{cases} p\cdot v = L(v) + H(p) \\ p = DL(v) \\ v = DH(p) \end{cases}$$

$H(p) = L^* = pv - L(v)$

✓ $H = L^* \Rightarrow$ 同时求导

$L = H^* \Rightarrow$ 同时求导

proof: 1. 对于固定的 v，函数 $p \mapsto p\cdot v - L(v)$ 是线性的. 从而映射

$$p \mapsto H(p) = L^*(p) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v - L(v)\}$$ 线性的.

事实上，$\forall\, 0\le\tau\le1$，$p, \hat{p}\in\mathbb{R}^n$，有

$\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$

$$\begin{aligned} H(\tau p + (1-\tau)\hat{p}) &= \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{(\tau p + (1-\tau)\hat{p})\cdot v - L(v)\} \\ &= \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{(\tau p + (1-\tau)\hat{p})\cdot v - \tau L(v) - (1-\tau)L(v)\} \\ &\le \tau \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v - L(v)\} + (1-\tau)\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{\hat{p}\cdot v - L(v)\} \\ &= \tau H(p) + (1-\tau)H(\hat{p}) \end{aligned}$$

2. 固定 $\forall \lambda>0, p\neq 0$，那么

$$H(p)=\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v-L(v)\}\geq \lambda|p|-L\left(\lambda\frac{p}{|p|}\right)\quad \left(取 v=\lambda\frac{p}{|p|}\right)$$

$$\geq \lambda|p|-\max_{B(0,\lambda)} L$$

从而 $\dfrac{H(p)}{|p|}\geq \lambda-\dfrac{\max_{B(0,\lambda)} L}{|p|}\to \lim_{|p|\to+\infty}\dfrac{H(p)}{|p|}\geq\lambda$，由 λ 的任意性从而

$\lim_{|p|\to+\infty}\dfrac{H(p)}{|p|}=+\infty$.

$L(v)\geq p\cdot v-H(p)\quad \forall p\in\mathbb{R}^n$

3. 由 $H=L^*=\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v-L(v)\}\Rightarrow$ 从而 $\forall p,v\in\mathbb{R}^n$, $H(p)+L(v)\geq p\cdot v$

所以 $L(v)\geq \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v-H(p)\}=H^*(v)$.

另一方面，$H^*(v)=\sup_{p\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v-H(p)\}=\sup_{p\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot v-\sup_{r\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot r-L(r)\}\}$

$$=\sup_{p\in\mathbb{R}^n}\inf_{r\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot(v-r)+L(r)\}.$$

现在由因为 $v\mapsto L(v)$ 是凸的，从而存在 $s\in\mathbb{R}^n$ s.t $L(r)\geq L(v)+s\cdot(r-v)\quad (r\in\mathbb{R}^n)$

(若 L 在 q 处可导，取 $s=DL(v)$) 取 $p=s$，计算 $H^*(v)\geq \inf_{r\in\mathbb{R}^n}\{s\cdot(v-r)+L(r)\}=L(v)$.

$L=H^*$.

#

b. Hopf-Lax formula

接下来去考虑初值问题 $\begin{cases} u_t+H(Du)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$，并且 Hamilton-Jacobi

方程所对应的特征方程为 $\begin{cases}\dot p=0\\ \dot z=DH(p)\cdot p-H(p)\\ \dot x=DH(p)\end{cases}$ 其中特征方程的一、三称为 Hamilton ODE.

并且得到了一个与之对应的 Lagrangian $L=H^*$ 的最小值问题. 由 $\begin{cases} p\cdot v = L(v)+H(p) \\ p = DL(v) \\ v = DH(p) \end{cases}$

有第二个方程 $\dot{z}=DH(p)\cdot p-H(p)=L(v)=L(DH(p))=L(\dot{x})$. 但是至少在某一个小的时间内, 原问题有存在解(光滑解) u, 有 $z(t)=u(x(t),t)$ 所以

$$u(x,t)=\int_0^t L(\dot{x}(s))\,ds+g(x(0))$$

我们的目的是为使得当原问题不具有光滑解的时候, 上述解的表达式在大时间 $t>0$ 时仍有意义. §3.3.1 中的变分法提供了线索. 给定 $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, 因此假定存在曲线 $w(\cdot)$ 满足 $w(t)=x$, s.t. 表达式 $\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds+g(w(0))$ 取得最小值.

因此定义 $u(x,t)\triangleq \underline{\inf\left\{\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds+g(w(0))\,\middle|\, w(t)=x\right\}}$. 其中下确界是在所有 C^1 的函数 $w(\cdot)$ 中取得.

$X\to u$.

接下来我们为了考虑上述给定形式的 $u(x,t)$ 是否满足 Hamilton-Jacobi PDE 的初值问题:

$$\begin{cases} u_t+H(Du)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

假设 H 是光滑的且 $\begin{cases} H \text{ 是凸的且} \\ \lim\limits_{|p|\to\infty}\dfrac{H(p)}{|p|}=+\infty \end{cases}$, 因此我们假设 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的; 这意味着 $\mathrm{Lip}(g)\triangleq \sup\limits_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}}\left\{\dfrac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\right\}<\infty$.

那么有上述公式 $u(x,t)=\inf\left\{\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds+g(w(0))\,\middle|\, w(t)=x\right\}$ 可以被简化:

定理 4 Hopf-Lax 公式 (Hopf-Lax formula)

若 $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, 那么最小值问题的解 $u=u(x,t)$ 为

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$$

Definition: 称上述式子右端的表达式 $\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$ 为 Hopf-Lax 公式.

proof: 1. 固定任意的 $y\in\mathbb{R}^n$, 定义 $w(s)\triangleq y+\frac{s}{t}(x-y)$ $(0\leq s\leq t)$, 那么

$u(x,t)\triangleq\inf\left\{\int_0^t L(\dot{w}(s))ds+g(w(0))\,\middle|\,w(t)=x\right\}$ 有

$$u(x,t)\leq\int_0^t L(\dot{w}(s))ds+g(y)=tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)$$

所以有

$$u(x,t)\leq\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$$

2. 另一方面, 若 $w(\cdot)$ 是任意 C^1 的函数, 满足 $w(t)=x$, 有由 Jensen's 不等式

$$L\left(\frac{1}{t}\int_0^t\dot{w}(s)ds\right)\leq\frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{w}(s))ds$$

因此~~如果~~我们记 $y=w(0)$, 可以找到 $tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\leq\int_0^t L(\dot{w}(s))ds+g(y)$

$\left(L\left(\frac{x-y}{t}\right)=L\left(\frac{1}{t}(x-w(0))\right)=L\left(\frac{1}{t}(w(t)-w(0))\right)=L\left(\frac{1}{t}\int_0^t\dot{w}(s)ds\right)\right)$.

从而有 $$\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}\leq u(x,t)$$

3. 综上有

$$u(x,t)=\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}.$$

(上述下确界实际上是最小值 leave it as an exercise) #.

我们现在去讨论由 Hopf-Lax formula 定义的函数 $u=u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$ 的性质, 我们的最终目标是去说明这个公式提供了 Hamilton-Jacobi 方程的初值问题:

$$\begin{cases}u_t+H(Du)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$$

一个合适的弱解 (weak solution)

首先

Lemma 1 (A functional identity)

对于 $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 和 $0\le s<t$，我们有

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)\right\}.$$

换言之，去计算 $u(\cdot,t)$ 可以先计算 u 在时间 s 处的值，然后再利用 $u(\cdot,s)$ 作为在剩余时间区间 $[s,t]$ 上的初值条件

proof. 1. 固定 $y\in\mathbb{R}^n$，$0<s<t$，选取 $z\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$u(y,s)=sL\left(\frac{y-z}{s}\right)+g(z)$$ z极小值点.

现在因为 L 是凸的，$\frac{x-z}{t}=(1-\frac{s}{t})\frac{x-y}{t-s}+\frac{s}{t}\frac{y-z}{s}$，有

$$L\left(\frac{x-z}{t}\right)\le(1-\frac{s}{t})L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+\frac{s}{t}L\left(\frac{y-z}{s}\right)$$ (Jensen)

因此

$$u(x,t)\le tL\left(\frac{x-z}{t}\right)+g(z)\le(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+sL\left(\frac{y-z}{s}\right)+g(z)$$

$$=(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)$$

上述不等式对于 $\forall y\in\mathbb{R}^n$ 都是成立的. 因此 由于 $y\mapsto u(y,s)$ 是连续的，有

$$u(x,t)\le\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)\right\}.$$

2. 现选取 w s.t

$$u(x,t)=tL\left(\frac{x-w}{t}\right)+g(w)$$

设 $y\triangleq\frac{s}{t}x+(1-\frac{s}{t})w$. 那么有 $\frac{x-s}{t-s}=\frac{x-y}{t}=\frac{y-w}{s}$. 所以

$$(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s) \leq (t-s)L\left(\frac{x-w}{t}\right)+sL\left(\frac{y-w}{s}\right)+g(w)$$

$$= tL\left(\frac{x-w}{t}\right)+g(w)=u(x,t)$$

因此有

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)\right\} \leq u(x,t)$$

#.

Lemma 2 Lipschitz 连续 (Lipschitz continuity)

函数 u 在 $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ 是 Lipschitz 连续的且 $u=g$ on $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$.

proof: 1. 固定 $t>0$, $x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n$, 选取 $y\in\mathbb{R}^n$ s.t

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)=u(x,t)$$

那么

$$u(\hat{x},t)-u(x,t)=\min_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{\hat{x}-z}{t}\right)+g(z)\right\}-tL\left(\frac{x-y}{t}\right)-g(y)$$

$$\leq g(\hat{x}-x+y)-g(y) \leq Lip(g)\,|\hat{x}-x|.$$

(若 $\frac{\hat{x}-z}{t}=\frac{x-y}{t} \Rightarrow z=\hat{x}-x+y$)

因此

$$u(\hat{x},t)-u(x,t) \leq Lip(g)\,|\hat{x}-x|$$

同理调换 $\hat{x}$ 和 x 的位置有,

$$|u(x,t)-u(\hat{x},t)| \leq Lip(g)\,|x-\hat{x}|$$

2. 现在选取 $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, 选取 $y=x$, s.t $u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$.

从而有

$$u(x,t) \leq tL(0)+g(x).$$

此外

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}\geq g(x)+\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{-\mathrm{Lip}(g)|x-y|+tL\left(\frac{x-y}{t}\right)\right\}.$$

$$=g(x)-t\max_{z\in\mathbb{R}^n}\{\mathrm{Lip}(g)|z|-L(z)\}\quad\left(z=\frac{x-y}{t}\right)$$

$$=g(x)-t\max_{w\in B(0,\mathrm{Lip}(g))}\max_{z\in\mathbb{R}^n}\{w\cdot z-L(z)\}.$$

$$=g(x)-t\max_{w\in B(0,\mathrm{Lip}(g))}H.$$

上述不等式及 $u(x,t)\leq tL(0)+g(x)$ 表明了

$$|u(x,t)-g(x)|\leq Ct$$

其中 $C\triangleq\max\left(|L(0)|,\max_{B(0,\mathrm{Lip}(g))}|H|\right)$.

3. 最后选取 $x\in\mathbb{R}^n$, $0<\hat{t}<t$, 那么 $\mathrm{Lip}(u(\cdot,t))\leq\mathrm{Lip}(g)$ (由 $|u(x,t)-u(\hat{x},t)|\leq\mathrm{Lip}(g)|x-\hat{x}|$)

所以根据引理1和上述Step2中的计算有

$$|u(x,t)-u(x,\hat{t})|\leq C|t-\hat{t}|$$

其中 $C\triangleq\max\left(|L(0)|,\max_{B(0,\mathrm{Lip}(g))}|H|\right)$

#

$W^{1,\infty}(U)\Rightarrow$ Lipschitz连续

现由 Rademacher's 定理 (§5.8.3) 知 Lipschitz 连续的函数是几乎处处可微的. 所以由 Lemma 2 可得 由 Hopf-Lax 公式 $u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$ 是几乎处处可微 $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$. 接下来的定理说明 u 事实上是满足 Hamilton-Jacobi PDE 无论 u 是否可微.

定理5. (满足 Hamilton-Jacobi 方程)

假设 $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, 由 Hopf-Lax 公式 $u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$ 在 (x,t)

$(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 都是可微的，那么

$$u_t(x,t)+H(Du(x,t))=0$$

proof: 1. 固定 $v\in\mathbb{R}^n$, $h>0$, 由 Lemma 1 可得

$$u(x+hv,t+h)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{hL\left(\frac{x+hv-y}{h}\right)+u(y,t)\right\}$$

$$\leq hL(v)+u(x,t) \quad (\text{取 } y=x)$$

因此 $$\frac{u(x+hv,t+h)-u(x,t)}{h}\leq L(v)$$

令 $h\to 0^+$, 有

$$\frac{u(x+hv,t+h)-u(x,t)}{h}=\frac{u(x+hv,t+h)-u(x,t+h)+u(x,t+h)-u(x,t)}{h}=v\cdot Du(x,t)+u_t(x,t)\leq L(v)$$

上述不等式对于任意的 $v\in\mathbb{R}^n$ 都成立，所以

$$u_t(x,t)+H(Du(x,t))=u_t(x,t)+\max_{v\in\mathbb{R}^n}\{v\cdot Du(x,t)-L(v)\}\leq 0. \quad (H=L^*)$$

2. 现在选取 z, s.t. $u(x,t)=tL\left(\frac{x-z}{t}\right)+g(z)$. 固定 $h>0$, 设 $s=t-h$, $y=\frac{s}{t}x+(1-\frac{s}{t})z$.
那么 $\frac{x-z}{t}=\frac{y-z}{s}$. 因此

$$u(x,t)-u(y,s)\geq tL\left(\frac{x-z}{t}\right)+g(z)-\left[sL\left(\frac{y-z}{s}\right)+g(z)\right]$$

$$=(t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

即 $$\frac{u(x,t)-u((1-\frac{h}{t})x+\frac{h}{t}z,t-h)}{h}\geq L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

令$h\to 0^+$，即有 $\frac{x-z}{t}\cdot Du(x,t)+u_t(x,t)\geq L\left(\frac{x-z}{t}\right)$

所以

$$u_t(x,t)+H(Du(x,t))=u_t(x,t)+\max_{v\in\mathbb{R}^n}\{v\cdot Du(x,t)-L(v)\}.$$

$$\geq u_t(x,t)+\frac{x-z}{t}\cdot Du(x,t)-L\left(\frac{x-z}{t}\right)$$

$$\geq 0.$$

综上所述 $u_t+H(Du(x,t))=0$.

#.

从而有

定理6（Hopf-Lax 公式为解）Hopf-Lax formula as solution.

由 Hopf-Lax 公式 $u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$ 是在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上 Lipschitz 连续的.

且几乎处处可微，并且满足初值问题

$$\begin{cases} u_t+H(Du)=0 & \text{a.e. in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}, \end{cases}$$

3.3.3 Weak solutions, uniqueness.

a. Semiconcavity（半凹性）

上述定理6说明定义上述问题的弱解是 Lipschitz 连续的，且在 $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$ 有 $u=g$，并在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上几乎处处满足方程. 然而上述的定义并不是合适的，因为上述的弱解有可能不是唯一的.

Example. 考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t + |u_x|^2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{cases}$$

一个明显解就是 $u_1(x,t)=0$. 然而函数 $u_2(x,t)=\begin{cases} 0 & \text{if } |x|\geq t \\ x-t & \text{if } 0\leq x\leq t \\ -x-t & \text{if } -t\leq x\leq 0 \end{cases}$ 是 Lipschitz 连续的, 并且几乎处处满足 PDE (事实上, 除了线 $x=0,\pm t$). 很容易发现有无穷多个 Lipschitz 函数满足上述初值问题.

#

上述这个例子表明必须要求该解不仅仅是它几乎处处满足方程. 接下来我们将会从 Hopf-Lax 公式作为线索去得到唯一性. 下面的引理说明 u 从初值 g 处可以得到一种二阶导的估计.

Lemma 3 Semiconcavity (半凹性)

假设存在一个常数 C, s.t

$$g(x+z)-2g(x)+g(x-z)\leq C|z|^2, \quad \forall x,z\in\mathbb{R}^n.$$

定义 u 为 Hopf-Lax 公式 $u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$, 那么有

$$u(x+z,t)-2u(x,t)+u(x-z,t)\leq C|z|^2, \quad \forall x,z\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

称满足上述式子的 g 为半凹的 (Semiconcave), 容易验证若 $g\in C^2$ 和 $\sup_{\mathbb{R}^n}|D^2g|<\infty$ 那么上述 g 的式子成立.

($g(x+z)=g(x)+Dg\cdot z+\frac{1}{2}z^TD^2g\,z+o(|z|^2)$ (Taylor 公式)

$g(x-z)=g(x)-Dg\cdot z+\frac{1}{2}z^TD^2g\,z+o(|z|^2)$

$\Rightarrow g(x+z)-2g(x)+g(x-z)\leq \sup_{\mathbb{R}^n}|D^2g|\,|z|^2\triangleq C|z|^2$)

注意到 g 是半凹的当且仅当 映射 $x \longmapsto g(x)-\frac{C}{2}|x|^2$ 为凹的 (concave). 其中 C 为某个常数.

(记 $h(x)=g(x)-\frac{C}{2}|x|^2$ 凹, 由凹函数的性质有 $\forall x_1<x_2<x_3$. $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{h(x_3)-h(x_2)}{x_3-x_2}$.

取 $x-z<x<x+z$, 有

$$\frac{h(x)-h(x-z)}{z} \geq \frac{h(x+z)-h(x)}{z} \Rightarrow h(x+z)-2h(x)+h(x-z) \leq 0.$$

即 $g(x+z)-\frac{C}{2}|x+z|^2-2g(x)+C|x|^2+g(x-z)-\frac{C}{2}|x-z|^2 \leq 0$

$$\Rightarrow g(x+z)-2g(x)+g(x-z) \leq \frac{C}{2}|x+z|^2+\frac{C}{2}|x-z|^2-C|x|^2 \leq C|x|^2+C|z|^2-C|x|^2$$

$$=C|z|^2 \quad)$$

proof: 选取 $y\in\mathbb{R}^n$, s.t. $u(x,t)=tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)$, 那么, 取 $y+z$ 与 $y-z$ 代入 Hopf-Lax 公式到 $u(x+z,t)$ 和 $u(x-z,t)$, 有

$$u(x+z,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x+z-y}{t}\right)+g(y)\right\}, \quad u(x-z,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-z-y}{t}\right)+g(y)\right\}$$

故有

$$\begin{aligned} u(x+z,t)-2u(x,t)+u(x-z,t) &\leq tL\left(\frac{x+z-y+z}{t}\right)+g(y+z)-2\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right] \\ &\quad +\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y-z)\right] \\ &=g(y+z)-2g(y)+g(y-z) \leq C|z|^2. \end{aligned}$$

#.

由于半凹性条件对于 u 来说很重要, 我们考虑一些其它的情况, 使得上述条件仍然成立. 我们将不再假设 g 是半凹的, 而是假设 Hamiltonian H 是一致凸的 (uniformly convex)

Definition. 一个 C^2 的凸函数 $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 被称为一致凸的 (其中 θ 为常数 >0)

若
$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j}(p)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad \forall p,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

我们现在去证明即使如果g不是半凹的，关于H的一致凸条件也会使得u在某个时间$t>0$处变为半凹的：对于初值问题
$$\begin{cases} u_t+H(Du)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$
的Hopf-Lax解起到神奇的正则化效果。

Lemma 4 (Semiconcavity again)

假设H是一致凸的（其θ为某个常数），u是由Hopf-Lax公式所定义的解。那么
$$u(x+z,t)-2u(x,t)+u(x-z,t) \leq \frac{1}{\theta t}|z|^2 \quad \forall x,z\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

proof. 首先利用Taylor公式，那么一致凸表明
$$H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}H(p_1)+\frac{1}{2}H(p_2)-\frac{\theta}{8}|p_1-p_2|^2.$$
接下来我们认为对于Lagrangian L有如下估计
$$\frac{1}{2}L(v_1)+\frac{1}{2}L(v_2) \leq L\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2. \quad \forall v_1,v_2\in\mathbb{R}^n.$$

(Verification: 记$H^*=H(p)-\frac{\theta}{2}|p|^2$. 对于$\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，有
$$\xi^T \mathrm{Hess}(H^*)(p)\xi=\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_ip_j}(p)\xi_i\xi_j-\theta|\xi|^2\geq 0$$
因此H^*为凸函数，所以
$$\begin{aligned} H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) &= H^*\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)+\frac{\theta}{8}|p_1+p_2|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}H^*(p_1)+\frac{1}{2}H^*(p_2)+\frac{\theta}{8}|p_1+p_2|^2 \quad (\text{因为}H^*\text{为凸，由Jensen}) \\ &= \frac{1}{2}H(p_1)-\frac{\theta}{4}|p_1|^2+\frac{1}{2}H(p_2)-\frac{\theta}{4}|p_2|^2+\frac{\theta}{8}|p_1+p_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}H(p_1)+\frac{1}{2}H(p_2)-\frac{\theta}{8}(2|p_1|^2+2|p_2|^2-|p_1+p_2|^2) \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2}H(p_1)+\tfrac{1}{2}H(p_2)-\tfrac{\theta}{8}|p_1-p_2|^2 \quad ;$$

假设 $L(v_1)=p_1v_1-H(p_1)$, $L(v_2)=v_2p_2-H(p_2)$, 所以

$$\tfrac{1}{2}L(v_1)+\tfrac{1}{2}L(v_2)=\frac{p_1v_1+p_2v_2}{2}-\tfrac{1}{2}H(p_1)-\tfrac{1}{2}H(p_2)$$

故有

$$\begin{aligned}
L\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2 &\geq \frac{v_1+v_2}{2}\cdot\frac{p_1+p_2}{2}-H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2 \\
&\geq \frac{(v_1+v_2)(p_1+p_2)}{4}-\tfrac{1}{2}H(p_1)-\tfrac{1}{2}H(p_2)+\frac{\theta}{8}|p_1-p_2|^2+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2 \\
&=\tfrac{1}{2}L(v_1)+\tfrac{1}{2}L(v_2)-\frac{(v_1-v_2)(p_1-p_2)}{4}+\frac{\theta}{8}|p_1-p_2|^2+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2 \quad ① \\
&\geq \tfrac{1}{2}L(v_1)+\tfrac{1}{2}L(v_2)-\frac{(v_1-v_2)(p_1-p_2)}{4}+\frac{|p_1-p_2||v_1-v_2|}{4} \quad ② \\
&\geq \tfrac{1}{2}L(v_1)+\tfrac{1}{2}L(v_2)
\end{aligned}$$

其中 ①→② 使用平均值不等式有 $(a^2+b^2\geq 2ab)$

$$\frac{\theta}{8}|p_1-p_2|^2+\frac{1}{8\theta}|v_1-v_2|^2=\left(\sqrt{\frac{\theta}{8}}|p_1-p_2|\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{8\theta}}|v_1-v_2|\right)^2\geq\frac{2}{8}|p_1-p_2||v_1-v_2|=\frac{|p_1-p_2||v_1-v_2|}{4}\Big)$$

2. 可以在选取 y, s.t. $u(x,t)=tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)$. 那么同样在 Hopf-Lax 公式解 $u(x+z,t)$ 与 $u(x-z,t)$ 在 y 处的值, 我们计算得

$$\begin{aligned}
u(x+z,t)-2u(x,t)+u(x-z,t) &\leq \left[tL\left(\frac{x+z-y}{t}\right)+g(y)\right]-2\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right] \\
&\quad+\left[tL\left(\frac{x-z-y}{t}\right)+g(y)\right] \\
&=2t\left[\tfrac{1}{2}L\left(\frac{x+z-y}{t}\right)+\tfrac{1}{2}L\left(\frac{x-z-y}{t}\right)-L\left(\frac{x-y}{t}\right)\right] \\
&\leq 2t\cdot\frac{1}{8\theta}\left|\frac{2z}{t}\right|^2=\frac{1}{\theta t}|z|^2.
\end{aligned}$$

#

b. Weak solutions, uniqueness.

本节表明在 Lemma 3 与 Lemma 4 下的 Hopf-Lax 解 u 的半凹性条件可以被作为解的唯一性标准.

Definition. 我们说一个 Lipschitz 连续函数 $u: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是下列初值问题的一个弱解:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

其中 (a) $u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

(b) $u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0$ for a.e. $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(c) $u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq C(1+1/t)|z|^2$

其中 C 为某常数 $C \geq 0$, $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

接下来证明上述问题的弱解是唯一的, 解唯一性的关键点在于上述的不等式条件 (c).

定理 7 (Uniqueness of weak solutions).

假设 $H \in C^2$ 且满足 $\begin{cases} H \text{ is convex} \\ \lim\limits_{|p|\to+\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty \end{cases}$, g 满足是 Lipschitz 连续, 且

$\mathrm{Lip}(g) \triangleq \sup\limits_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \right\} < \infty$. 那么至多一个弱解满足上述初值问题.

proof. 1. 假设 u 和 $\tilde{u}$ 都是上述初值问题的弱解, 记 $w \triangleq u - \tilde{u}$.

观察到在任意 (y,s), 使得 u 和 $\tilde{u}$ 可导且满足 PDE, 我们有

$$\begin{aligned} w_t(y,s) &= u_t(y,s) - \tilde{u}_t(y,s) = -H(Du(y,s)) + H(D\tilde{u}(y,s)) \\ &= -\int_0^1 \frac{d}{dr} H(rDu(y,s) + (1-r)D\tilde{u}(y,s))\,dr \\ &= -\int_0^1 DH(rDu(y,s) + (1-r)D\tilde{u}(y,s))(Du(y,s) - D\tilde{u}(y,s))\,dr. \end{aligned}$$

$$\cong -b(y,s)\cdot DW(y,s)$$

所以有

$$W_t + b\cdot DW = 0 \quad a.e.$$

2. 记 $v \triangleq \phi(w) \geq 0$，其中 $\phi: \mathbb{R}\to[0,\infty)$ 是一个光滑函数，在 $W_t + b\cdot DW = 0$ 两边乘上 $\phi'(w)$ 有

$$v_t + b\cdot Dv = 0 \quad a.e$$

3. 现在取 $\varepsilon>0$，定义 $u^\varepsilon \triangleq \eta_\varepsilon * u$，$\tilde{u}^\varepsilon \triangleq \eta_\varepsilon * \tilde{u}$，其中 η_ε 是一个关于 x 和 t 的磨光子。

那么由 §C.5 有

$$|Du^\varepsilon| \leq Lip(u), \quad |D\tilde{u}^\varepsilon| \leq Lip(\tilde{u})$$

和

$$Du^\varepsilon \to Du, \quad D\tilde{u}^\varepsilon \to D\tilde{u} \quad a.e,\ as\ \varepsilon\to 0.$$

此外，在弱解定义中的条件(c)表明 $\underline{D^2u^\varepsilon, D^2\tilde{u}^\varepsilon \leq C(1+\frac{1}{s})I}$，其中C为某个恰当的常数，和 $\forall \varepsilon>0, y\in\mathbb{R}^n, s>2\varepsilon$.

(18. 设 $u(x+z)-u(x) \leq Ez$，$\forall z>0$，取 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$，有 $u^\varepsilon_x \leq E$.

$$u^\varepsilon(x) \triangleq \eta_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)\,u(x-y)\,dy$$

$$\Rightarrow u^\varepsilon_x = \lim_{z\to 0} \frac{u^\varepsilon(x+z)-u^\varepsilon(x)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)\left[u(x-y+z)-u(x-y)\right]dy}{z}$$

$$\leq \lim_{z\to 0} \frac{Ez}{z}\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)\,dy = E. \ )$$

4. 记 $b_\varepsilon(y,s) \triangleq \int_0^1 DH\left(rDu^\varepsilon(y,s) + (1-r)D\tilde{u}^\varepsilon(y,\varepsilon)\right)dr$

那么 $v_t + b\cdot Dv = 0 \Rightarrow v_t + b_\varepsilon\cdot Dv = (b_\varepsilon - b)\cdot Dv \quad a.e.;$

$v_t + b_\varepsilon\cdot Dv + (\operatorname{div} b_\varepsilon)v$

$= (\operatorname{div} b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot Dv.$

因此 $v_t + \operatorname{div}(vb_\varepsilon) = (\operatorname{div} b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot Dv \quad a.e.$

$(\operatorname{div}(vb_\varepsilon) = (\operatorname{div} b_\varepsilon)v + b_\varepsilon \cdot Dv.)$

5. 现在有

$$\operatorname{div} b_\varepsilon = \int_0^1 \sum_{k,l=1}^{n} H_{p_k p_l}(rDu^\varepsilon + (1-r)D\hat{u}^\varepsilon)(ru^\varepsilon_{x_l x_k} + (1-r)\hat{u}^\varepsilon_{x_l x_k})\,dr$$

$$\leq C(1+\tfrac{1}{s})$$

其中C为某个常数，这里注意到 H是凸的，有 $D^2H \geq 0$.

6. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, 设

$$R \triangleq \max\{|DH(p)| \mid |p| \leq \max(\operatorname{Lip}(u), \operatorname{Lip}(\hat{u}))\}$$

定义圆锥(cone):

$$C \triangleq \{(x,t) \mid 0 \leq t \leq t_0,\ |x - x_0| \leq R(t_0 - t)\}$$

接下来记

$$e(t) = \int_{B(x_0, R(t_0-t))} v(x,t)\,dx = \int_0^{R(t_0-t)} d\rho \int_{\partial B(x_0,\rho)} v(x,t)\,dS$$

$\forall t > 0$, a.e: $\dot{e}(t) = \int_{B(x_0,R(t_0-t))} v_t\,dx - R\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} v\,dS$

$$= \int_{B(x_0,R(t_0-t))} -\operatorname{div}(vb_\varepsilon) + \operatorname{div}(b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot Dv\,dx$$

$$-R\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} v\,dS$$

divergence: $\int_U \operatorname{div}(F)\,dx = \int_{\partial U} F\cdot\nu\,d$

$$= -\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} v(b_\varepsilon\cdot\nu + R)\,ds + \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (\operatorname{div} b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot Dv\,dx$$

$$\leq \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (\operatorname{div} b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot Dv\,dx$$

$$\leq C(1+1/s)e(t) + \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (b_\varepsilon - b)\cdot Dv\,dx$$

其中 $\int_{B(x_0,R(t_0-t))} (b_\varepsilon - b)\cdot Dv\,dx$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于0, a.e, $t>0$. (由 $|Du^\varepsilon| \leq \operatorname{Lip}(u)$, $|D\hat{u}^\varepsilon| \leq \operatorname{Lip}(\hat{u})$, $Du^\varepsilon \to Du$, $D\hat{u}^\varepsilon \to D\hat{u}$, a.e $(\varepsilon \to 0)$), 再由控制收敛定理 (dominated convergence Theorem) 因此

$$\dot{e}(t) \leq C(1+1/s)e(t) \quad \text{for a.e } 0<t<t_0.$$

7. 固定 $0<\varepsilon<r<t_0$ 和选取函数 $\phi(z)=0$ 若 $|z|\leq\varepsilon[\mathrm{Lip}(u)+\mathrm{Lip}(\tilde{u})]$，在其它处取值均为正.（$\phi(z)=\begin{cases}0 & |z|\leq\varepsilon(\mathrm{Lip}(u)+\mathrm{Lip}(\tilde{u}))\\ >0 & \text{otherwise}\end{cases}$）. 因为 $u\equiv\tilde{u}$ on $\mathbb{R}^n\times\{t=0\}$,

故 $v=\phi(w)=\phi(u-\tilde{u})=0$ at $\{t=\varepsilon\}$. （ε的小性）

因此 $e(\varepsilon)=0$，所以由 Gronwall's 不等式（§B.2）和 $\dot{e}(t)\leq C(1+1/s)e(t)$

有

$$e(r)\leq e(\varepsilon)e^{\int_\varepsilon^r C(1+1/s)ds}=0.$$

因此有 $$|u-\tilde{u}|\leq\varepsilon[\mathrm{Lip}(u)+\mathrm{Lip}(\tilde{u})] \quad \text{on } B(x_0,R(t_0-r))$$

上述不等式对于 $\forall\varepsilon>0$ 都成立. 所以 $u\equiv\tilde{u}$ in $B(x_0,R(t_0-r))$，从而特别地，

$u(x_0,t_0)=\tilde{u}(x_0,t_0)$.

#

从而根据引理3，引理4，定理7，有

定理8（Hopf-Lax formula as weak solution）.

假设 $H\in C^2$ 且满足 $\begin{cases}H \text{ is convex}\\ \lim\limits_{|p|\to\infty}\dfrac{H(p)}{|p|}=+\infty\end{cases}$ 且 g 满足 Lipschitz 连续和 $\mathrm{Lip}(g)<\infty$.

若 g 是半凹或者 H 是一致凸的，那么

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}$$

是 Hamilton-Jacobi 方程初值问题的唯一弱解.

Examples. (i) 考虑初值问题：
$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = |x| & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

这里 $H(p)=\frac{1}{2}|p|^2$，$L(v)=\frac{1}{2}|v|^2$，Hopf-Lax公式的唯一的解为
$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\frac{|x-y|^2}{2t}+|y|\right\}$$

假设 $|x|>t$，那么 $D_y\left(\frac{|x-y|^2}{2t}+|y|\right) = \frac{y-x}{t}+\frac{y}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

上述表达式在若 $x=y+\frac{y}{|y|}t$，$y=(|x|-t)\frac{x}{|x|}\neq 0$ 时，恒等于0. 因此 $u(x,t)=|x|-\frac{t}{2}$ (若 $|x|>t$)，
若 $|x|\leq t$，$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\frac{|x-y|^2}{2t}+|y|\right\}$ 的最小值在 $y=0$ 处取得. 所以
$$u(x,t) = \begin{cases} |x|-\frac{t}{2} & \text{if } |x|\geq t \\ \frac{|x|^2}{2t} & \text{if } |x|\leq t. \end{cases}$$

观察到上述解在 $t>0$ 时为半凹的，即使初值 $g(x)=|x|$ 不是半凹的. 这与引理4一致.

(ii) 接下来去考虑具有相反初值条件的问题：
$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = -|x| & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

那么 $$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\frac{|x-y|^2}{2t}-|y|\right\}$$

现在 $D_y\left(\frac{|x-y|^2}{2t}-|y|\right) = \frac{y-x}{t}-\frac{y}{|y|}$ $(y\neq 0)$，上述式子在 $x=y-\frac{y}{|y|}t$，$y=(|x|+t)\frac{x}{|x|}$ 处等于0. 因此
$$u(x,t) = -|x|-\frac{t}{2} \quad (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)$$

其中初值 $g(x)=-|x|$ 是半凹的，同样解在 $t>0$ 时也是.

#

在Chapter 10，继续学习 Hamilton-Jacobi PDE，在即使H不是 Convex 时.

给定一种更好的弱解的定义.