NP-완비(완전) NP-Completeness

참고자료: 쉽게 배우는 알고리즘

NP-완비(완전)NP-Completeness

문제의 종류

풀 수 없는 문제들
(Unsolvable)
(Undecidable)

정지 문제
…

여기에 속할 것이라고
강력히 추정!

NP-완비(완전)

현실적인 시간내에
풀 수 없는 문제들

NP-complete problem

풀 수 있는 문제들
(Solvable)
(Decidable)

최소 신장 트리 문제
최단 거리 문제
…

P

현실적인 시간내에
풀 수 있는 문제들

현실적인 시간

- 다항식 시간을 의미
  - 입력의 크기 n의 다항식으로 표시되는 시간
  - 예: $3n^k + 5n^{k-1} + \ldots$
- 비다항식 시간의 예
  - 지수 시간
    - 예: 2^n
  - 계승시간
    - 예: $n!$

K는 상수
입력크기 n

n^k

$O(n^k)$ 알고리즘
⇒ 현실적인 시간 내에
풀 수 O

정렬 $O(n \log n)$ $O(n^2)$
→ 다항식 시간의 알고리즘

$2^n > n^k$

Yes/No 문제와 최적화 문제

Decision problem

↳ 답은 Yes or NO

- Yes/No 문제
  - 예: 그래프 G에서 해밀토니안(Hamiltonian) 경로(사이클)가 존재하는가?
  - 해밀토니안 경로(사이클) – 모든 정점을 한번만 지나는 경로(사이클)

Path O Cycle X

모든 정점을 지나는 사이클은 존재X.

- 최적화 문제
  - 예: 에지에 가중치가 있는 그래프 G에서 길이가 가장 짧은 해밀토니안 경로(사이클)의 길이를 구하라 => Traveling Salesman Problem (TSP)

NP-Complete 이론

- Yes/No 의 대답을 요구하는 문제에 국한
  - 그렇지만 최적화 문제와 밀접한 관계를 갖고 있다
- 문제를 현실적인 시간에 풀 수 있는가에 관한 이론
- 거대한 군을 이룸
  - 이 중 한 문제만 현실적인 시간에 풀면 다른 모든 것도 저절로 풀리는 논리적 연결관계를 갖고 있다

현재까지의 연구결과

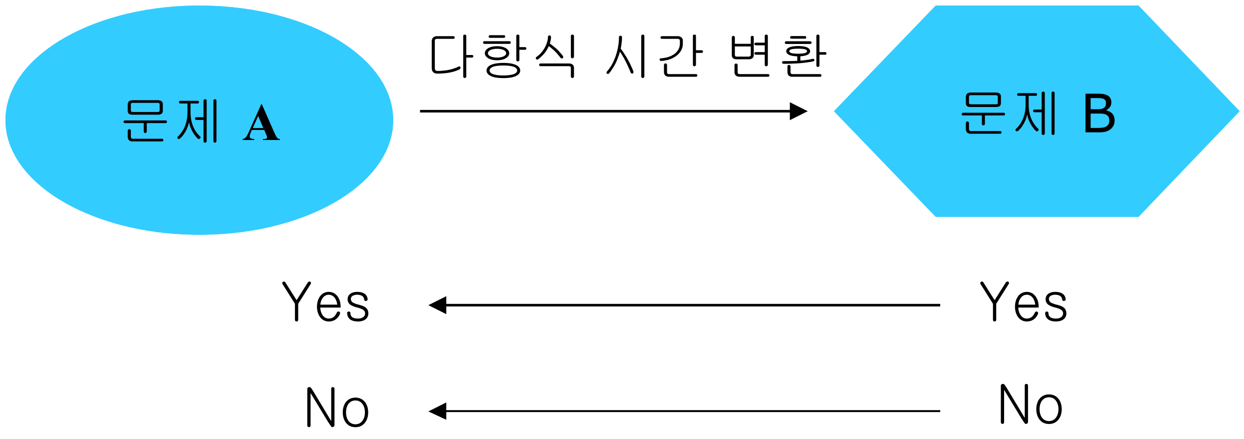
- 어떤 문제가 NP-Complete임이 확인되면

⇨ 지금까지의 연구결과로는 이 문제를 현실적인 시간에 풀 수 있는 방법은 아직 없다

- 그렇지만 이 사실이 아직 증명은 되지 않음
- 클레이수학연구소의 21세기 7대 백만불짜리 문제 중의 하나
  - P=NP 문제

- 상황
  - 문제 B는 쉽다
  - 문제 A는 Yes/No 대답이 일치하는 문제 B로 쉽게 변형된다

쉽다 = 현실적인 시간에 풀 수 있다



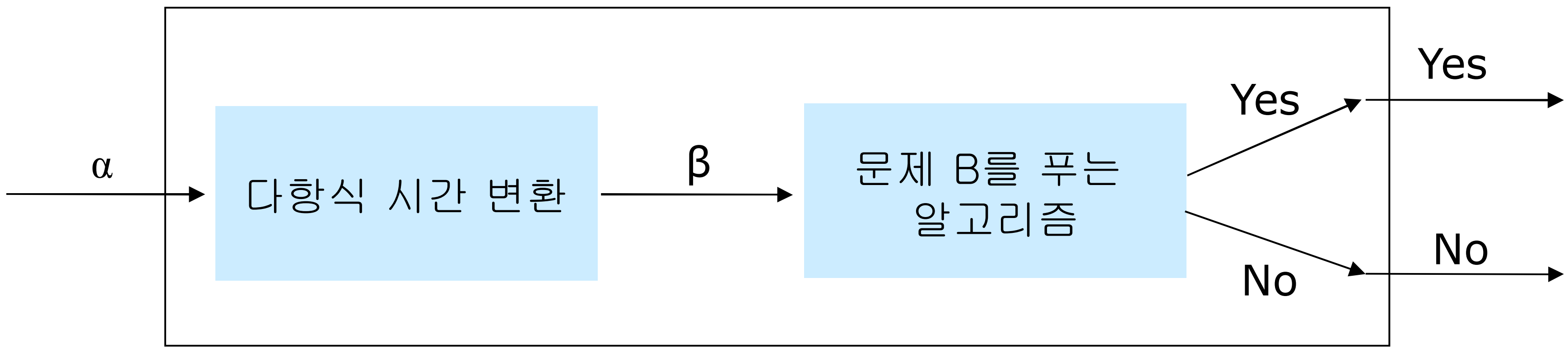
✓ 문제 A도 쉬운가?

Poly-Time Reduction (다항식 시간 변환)

- 문제 A의 사례 α를 문제 B의 사례 β로 바꾸되 아래 성질을 만족하면 polynomial-time reduction이라 하고, 이를 $\alpha \le_p \beta$ 로 표기한다

  ① 변환은 다항식 시간에 이루어진다

  ② 두 사례의 답은 일치한다



문제 A를 푸는 알고리즘

1. 문제 A를 다항식 시간에 문제 B로 변환한다
2. 변환된 문제 B를 푼다
3. 문제 B의 대답이 Yes이면 Yes, No이면 No를 리턴한다

✓ 문제 B가 쉬운 문제라면 문제 A도 쉬운 문제이다

P와 NP

- P
  - Polynomial
  - 다항식 시간에 Yes 또는 No 대답을 할 수 있으면 P
- NP
  - Nondeterministic Polynomial
  - Non-Polynomial의 준말이 아님!
  - Yes 대답이 나오는 해를 제공했을 때, 이것이 Yes 대답을 내는 해라는 사실을 다항식 시간에 확인해줄 수 있으면 NP
- 어떤 문제가 NP임을 보이는 것은 대부분 아주 쉽다
  - NP-Complete 증명에서 형식적으로 확인하고 넘어가는 정도

NP-Complete/Hard

NP : Yes 대답이 나오는 해를 제공하면 이를 다항식 시간에 확인할 수 있으면 됨

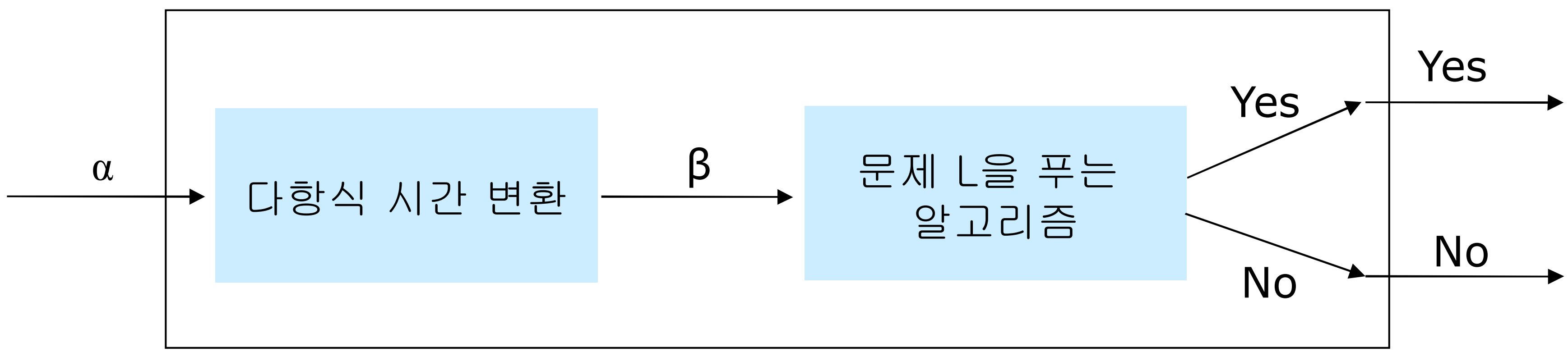
- 다음 성질을 만족하면 문제 L은 NP-Hard이다
  - 모든 NP 문제가 L로 다항식 시간에 변환가능하다
- 다음의 두 성질을 만족하면 문제 L은 NP-Complete이다
  1) L은 NP이다.
  2) L은 NP-Hard이다.

✓ NP-Complete는 NP-Hard의 일부이므로 NP-Complete인 문제를 NP-Hard이라고 불러도 맞다

✓ NP-Complete의 성질 1)은 대부분 자명하므로 핵심에 집중하기 위해 NP-Hard에 초점을 맞추자

정리 1

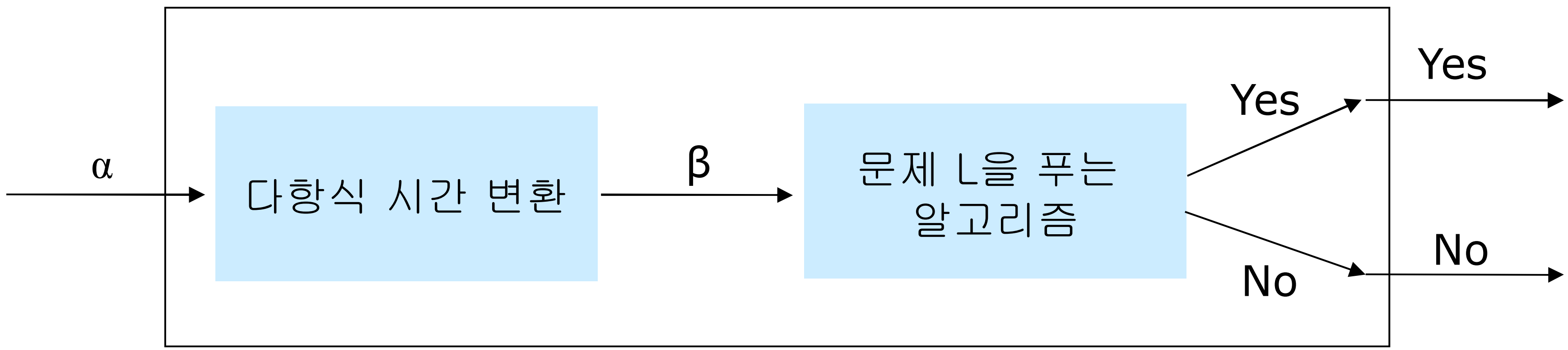
- 문제 L이 다음의 성질을 만족해도 NP-hard이다
  - 알려진 임의의 NP- Hard 문제 A로부터 문제 L로 다항식 시간에 변환가능하다



문제 A를 푸는 알고리즘

✓ 만일 문제 L을 쉽게 풀 수 있다면, 문제 A도 쉽게 풀 수 있다

➔ 그러므로 모든 NP 문제를 쉽게 풀 수 있다



문제 A를 푸는 알고리즘

✓ 만일 문제 L이 쉬운 문제라면 문제 A도 쉬운 문제이다

➔ 그러므로 모든 NP 문제도 쉬운 문제이다

NP-Hard 증명의 예

- 해밀토니안 싸이클 decision 문제:

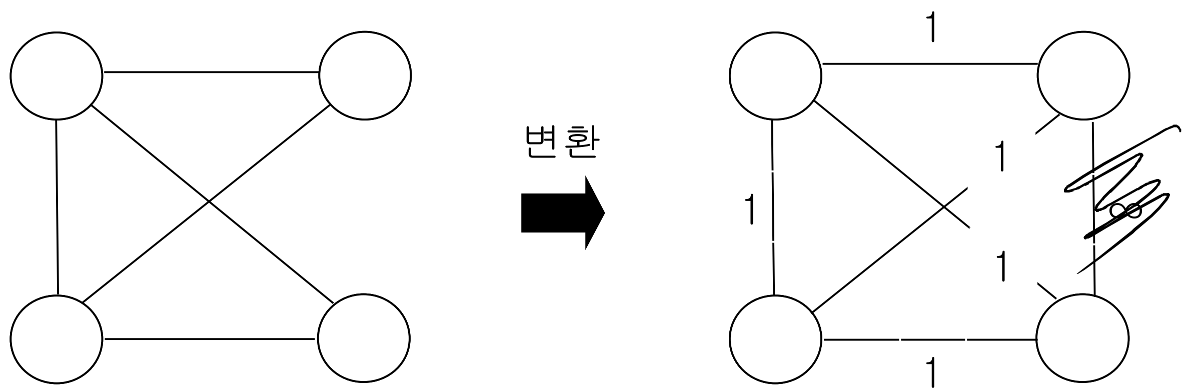
  \- 주어진 그래프가 해밀토니안 사이클을 가지고 있는가?

  => NP-complete

- TSP (Traveling Salesperson Problem) decision 문제

  \- 에지에 가중치가 있는 그래프와 양수 k에 대하여, 모든 정점들을 한번씩 방문하면서 길이가 k이하인 사이클이 있는가?

- 해밀토니안 사이클 문제의 instance(사례) A를 아래와 같이 TSP 문제의 instance B로 다항식 시간에 변환한다



해밀토니안 싸이클 문제의 instance TSP 문제의 instance

Instance A가 해밀토니안 사이클을 갖는다

⇔ Instance B가 길이 4 이하인 해밀토니안 사이클을 갖는다

(그래프의 크기가 n이면 4 대신 n)

➢ 그러므로 TSP는 NP-Hard이다.

Vertex 수와 일치

직관과 배치되는 NP-Complete 문제의 예

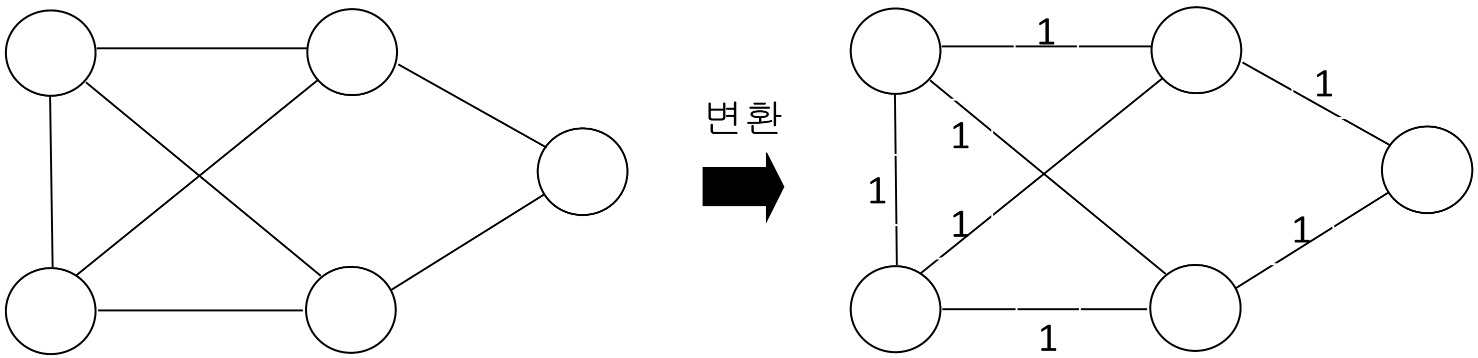
- Shortest path
  - 그래프의 정점 s에서 t로 가는 shortest path는 간단히 구할 수 있다
- Longest path
  - 그래프의 정점 s에서 t로 가는 longest path는 간단히 구할 수 없다
  - NP-hard

✓ 얼핏 비슷해 보이지만 위 두 문제의 난이도는 천지차이다!
(지금까지의 연구 결과로는)

- Longest Path 문제
  - 주어진 그래프에서 vertex s에서 t로 가는 길이 k 이상인 simple path가 존재하는가?

- 두 점 사이 해밀토니안 경로 문제
  - 주어진 그래프에서 정점 s에서 t에 이르는 해밀토니안 경로가 존재하는가?
  - NP-Complete이라고 알려져 있음

- 두 점 사이 해밀토니안 경로 문제의 instance A로부터 Longest Path 문제의 instance B로 다항식 시간



HAM-PATH-2-POINTS 문제의 instance

LONGEST-PATH 문제의 instance

Instance A가 두 점 s와 t사이에 해밀토니안 경로를 갖는다

⇔ Instance B가 두 점 s와 t 사이에 길이 4 이상인 (사실은 정확히 4) 단순 경로를 갖는다 (그래프의 크기가 n이면 4 대신 n-1)

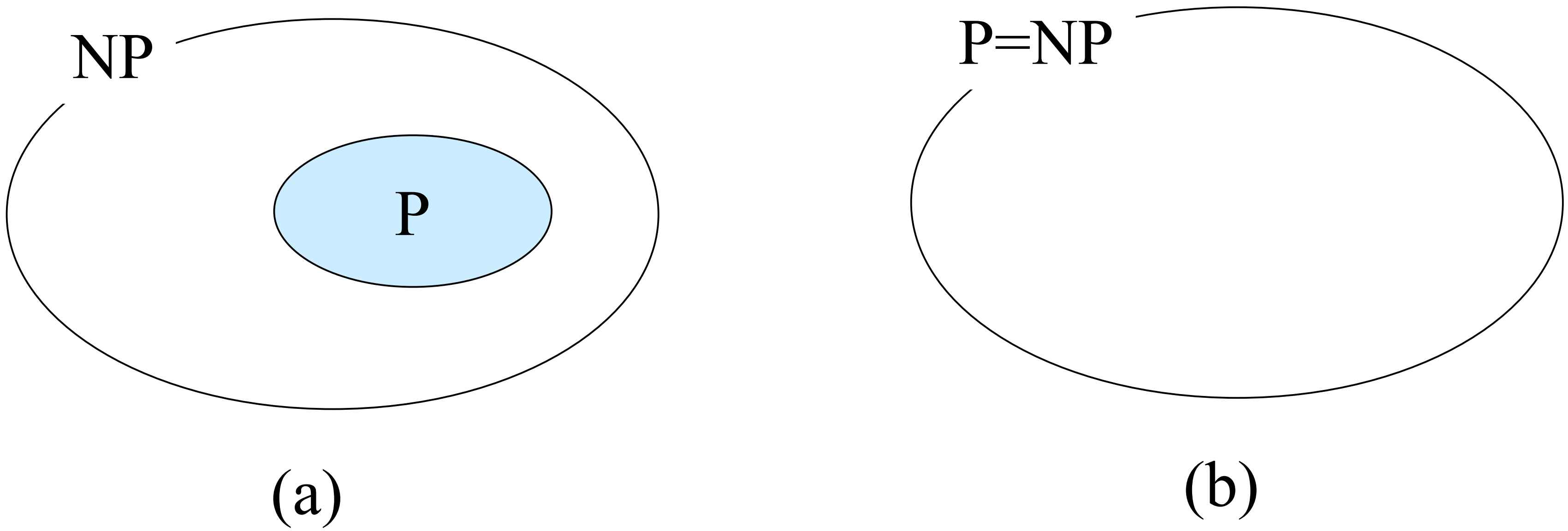
➢ 그러므로 Longest Path 문제는 NP-Hard이다.

NP 이론의 유용성

- 어떤 문제가 NP-Complete/Hard임이 확인되면
  - ⇨ 쉬운 알고리즘을 찾으려는 헛된 노력은 일단 중지한다
  - ⇨ 주어진 시간 예산 내에서 최대한 좋은 해를 찾는 알고리즘 (heuristic) 개발에 집중한다

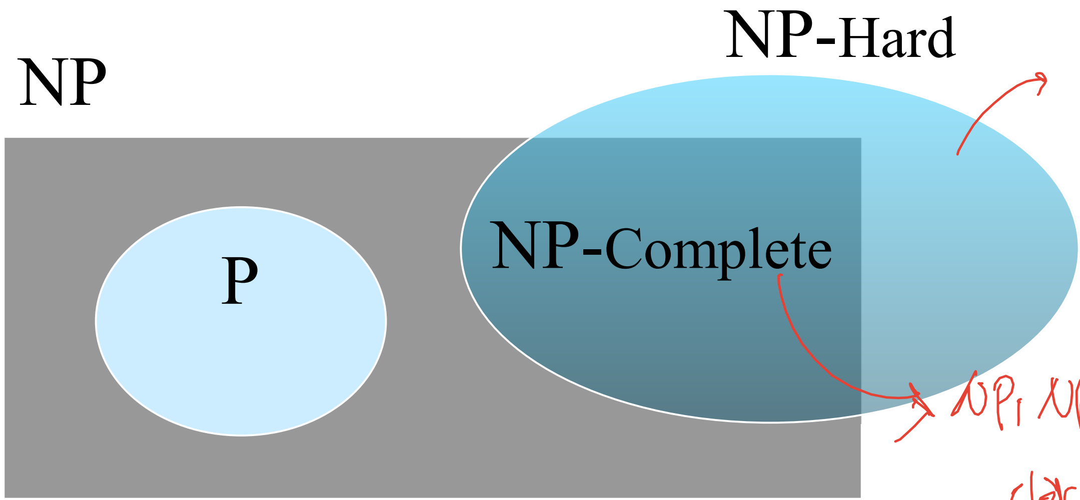
Remind: 때로는 어떤 것이 불가능하다는 사실이 유용할 때도 있다.
-- 레오나드 레빈

P와 NP의 포함 관계



- ✓ 위 (a)인지 (b)인지는 아직 밝혀지지 않음.
- ✓ (a)일 것이라 강력히 추정됨.
- ✓ 백만불의 상금이 걸려 있다.

NP와 NP-Complete, NP-Hard의 관계



모든 NP 문제를 다항식 시간에 변환이 가능하나, 변환을 하여도 풀기 어려움

NP, NP-hard에 모두 속하고 다항식 시간안에 모든 NP문제로 변환이 가능하면서, 변환후 해결 가능

✓ P 부분은 추정