TD : Maison.

lundi 29 janvier 2024 11:16

TD : 5: Interpolation :

I-1 $f(x_i) = P_{m-1}(x_i)$ $i = 1, \dots, m$; $f(x_j) = Q_{m-1}(x_j)$ $j = 2, \dots, m+1$

$$P_m(x) = \frac{(x_{m+1} - x_m)\, P_{m-1}(x) - (x_1 - x)\, Q_{m-1}(x)}{x_{m+1} - x_1}$$

II-1 $f(x) = \sqrt{x+2}$ $x_0 = 0,$ $x_1 = 1,$ $x_2 = 2$

2- $L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$,

$L_1(x) = \frac{x(x-2)}{-1} = -x^2 + 2x$

$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

On : $y_0 = f(x_0) = \sqrt{2}$ $y_1 = f(x_1) = \sqrt{3}$ $y_2 = f(x_2) = 2$

Alors : $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - 3x + 2) + \sqrt{3}(-x^2 + 2x) + x^2 - x$

$\boxed{P(x) = -0{,}02494\, x^2 + 0{,}34278\, x + \sqrt{2}}$

2- $P(0{,}1) = 1{,}448242$ $f(0{,}1) = 1{,}44914$
$P(0{,}9) = 1{,}70251$ $f(0{,}9) = 1{,}70294$

$E(0{,}1) = |f(0{,}1) - P(0{,}1)| = 8{,}98 \cdot 10^{-4}$
$E(0{,}9) = |f(0{,}9) - P(0{,}9)| = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$

III-1 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

1- $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$
$f(x_0) = 1$ $f(x_1) = \frac{1}{2}$ $f(x_2) = -\frac{1}{2}$

$f(x_0, x_1) = \frac{1/2 - 1}{1} = -\frac{1}{2}$ $f(x_1, x_2) = \frac{-1/2 - 1/2}{1} = -1$

$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{-1 + 1/2}{2} = -\frac{1}{4}$

x_k	y_k		
0	1		
1	1/2	-1/2	-1/4
2	-1/2	-1	

$N_0 = 1$ $N_1 = x$ $N_2 = x(x-1)$

Alors :

$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$

2- $E(x) = |f(x) - P(x)| = \frac{1}{(m+1)!}\pi(x) \cdot f^{(m+1)}(\xi_x)$ avec $\pi(x) = \prod_{i=0}^{m}(x - x_i)$

$= \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f^{(3)}(\xi_x)$

$= \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot f^{(3)}(\xi_x)$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ $f'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot -\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

s
-c c
-s

$f''(x) = \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} \cdot -\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$f^{(3)}(x) = \frac{\pi \times \pi \times \pi}{27} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

Alors, $E(x) = \frac{\pi^3}{162} \cdot x(x-1)(x-2) \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$

$\sin(x)$

$$E(x) \leqslant \left|\frac{\pi^3}{162} x(x-1)(x-2)\right|$$

4- $x = \frac{1}{2}$

$P(1/2) = 0{,}8125$ $\quad f(1/2) = 0{,}8660$ $\Rightarrow E = 0{,}0535$

$E_{eff} \leqslant 0{,}07177 \simeq E$

IV-1 $f(0{,}0) = 1{,}0000$; $f(0{,}1) = 1{,}1052$; $f(0{,}3) = 1{,}3499$

1.

x_i	f_i		
0,0	1,0000		
		1,052	
0,1	1,1052		0,5717
		1,2235	
0,3	1,3499		

2- $P(x) = 1 + (1{,}052)x + (0{,}5717)x(x-0{,}1) = 0{,}5717x^2 + 0{,}9948x + 1$

$f(0{,}15) \simeq P(0{,}15) = 1{,}1621$

3-

x_i	f_i			
0,0	1			
		1,052		
0,1	1,1052		0,5717	
		1,2235		0,2165
0,2	1,3499	1,2850	0,6150	
0,3	1,2214			

IV. Soit f la fonction telle que $f(0{,}0) = 1{,}0000$ – $f(0{,}1) = 1{,}1052$ – $f(0{,}3) = 1{,}3499$.

1. Déterminer la table des différences divisées.
2. Par la méthode de Newton, donner une approximation de f en 0,15.
3. Reprendre les questions précédentes si en plus des données, on a $f(0{,}2) = 1{,}2214$. la fonction tabulée étant exp, on a $\exp(0{,}15) = 1{,}16183424$. Que remarque-t-on ?

IV-

1-

x_i	$f(x_i)$
0,0	1,0000
0,1	1,

V. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0, f(0{,}5) = 0{,}2$ et $f(1) = 0{,}5$.

1. Déterminer le polynôme de Lagrange P qui interpole f aux points d'abscisses 0, 0,5 et 1.
2. En déduire une approximation de $f(0{,}25)$ et $f(0{,}75)$.
3. Sachant que $(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, déterminer la valeur exacte de $\int_0^1 f(x)dx$ et la comparer à $\int_0^1 P(x)dx$.

V-/ $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$

1-

$L_0(x) = \frac{(x-1/2)(x-1)}{-1/2 \times -1}$; $L_1(x) = \frac{x(x-1)}{1/2 \times -1/2}$; $L_2(x) = \frac{x(x-1/2)}{1 \times 1/2}$

$= 2(x-1/2)(x-1)$; $L_1(x) = -4x(x-1)$; $L_2(x) = 2x(x-1/2)$

$P(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2)$

$= 0.(\cdots) + \frac{1}{5}.(-4x(x-1) + \frac{1}{2}.(2x(x-1/2))$

$= \frac{-4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + x^2 - \frac{x}{2}$

$\boxed{P(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{10}x}$

2-

$f(0{,}25) \simeq P(0{,}25) = 0{,}0875$

$f(0{,}75) \simeq P(0{,}75) = 0{,}3375$

3- $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left[x - \arctan(x)\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} = 0,214601$$

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \int_0^1 \left(1/5\, x^2 + \frac{3}{10}x\right)dx = \left[\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{20}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{3}{20} = 0,2166$$

VI- L'espérance de vie dans un pays a évoluée dans le temps selon le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72.8	74.2	75.2	76.4

Utiliser l'interpolation de Lagrange pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.
Indication : poser $x_0 = 0$ pour l'année 1975, $x_1 = 5$ pour l'année 1980 etc.

VI-/

0 5 10 15

$x_0 = 1975 \quad x_1 = 1980 \quad x_2 = 1985 \quad x_3 = 1990$

$$L_0(x) = \frac{(x-1980)(x-1985)(x-1990)}{-5 \times -10 \times -15} = -\frac{(x-1980)(x-1985)(x-1990)}{750}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1975)(x-1985)(x-1990)}{5 \times -5 \times -10} = \frac{(x-1975)(x-1985)(x-1990)}{250}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1975)(x-1980)(x-1990)}{10 \times 5 \times -5} = -\frac{(x-1975)(x-1980)(x-1990)}{250}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1975)(x-1980)(x-1985)}{15 \times 10 \times 5} = \frac{(x-1975)(x-1980)(x-1985)}{750}$$

Alors :

$$P(x) = \frac{-72{,}8}{750}(x-5)(x-10)(x-15) + \frac{74{,}2}{250}\,x(x-10)(x-15) - \frac{75{,}2}{250}\,x(x-5)(x-15) + \frac{76{,}4}{750}\,x(x-5)(x-10)$$

le rang de 1977 est 2
$P(2) \simeq 73,4$

Rang 1983 est 8
$P(8) \simeq 74,8$

Rang 1988 est 13
$P(13) = 75,9$

VII- Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. Construire la table des différences divisées à partir des données $(x_i, f(x_i)), i = 0 \text{ à } 4, avec\ x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 27, x_4 = 64$
2. Ecrire le polynôme d'interpolation de f, noté P_4, construit sur les données de (1), en utilisant la formule de Newton.
3. Calculer $P_4(20)$ et comparer à $f(20)$.
4. Peut-on majorer l'erreur d'interpolation $E_4(x) = f(x) - P_4(x)$ sur l'intervalle considéré ? Expliquer.
5. Pour améliorer les résultats, on interpole f sur les données $(x_i, f(x_i)), i = 1 \text{ à } 4$. Ecrire le polynôme d'interpolation ainsi obtenu à l'aide de (1). On le note Q_3. Calculer $Q_3(20)$ et comparer à $f(20)$. Donner une majoration de l'erreur
$$E_3(x) = f(x) - Q_3(x)$$

1°//

x_i	$f(x_i)$				
0	0				
		1			
1	1		$-0,1071$		
		$0,1429$		$3,837.10^{-3}$	
8	2		$-0,0035$		-5.32
		$0,0526$		$4,83.10^{-5}$	
27	3		$-4,572.10^{-4}$		
		$0,0270$			
64	4				

2°// $N_0 = 1 \quad N_1 = x \quad N_1 = x(x-1) \quad N_2 = x(x-1)(x-8) \quad N_3 = x(x-1)(x-8)(x-27)$

$P_4(x) = 0 + x - 0,1071.x(x-1) + 0,0402.x(x-1)(x-8) - 6,274.x(x-1)(x-8)(x-27)$

3°// $P_4(20) =$