Calcul matriciel

I Matrices

Définition 1 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.

Exemple

➔ **La matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ **est une matrice** 2×3 **à deux lignes et trois colonnes**

➔ a_{23} **est le coefficient situé à l'intersection de la** $2^{ième}$ **ligne et de la** $3^{ième}$ **colonne vaut** 5.

Définition 2 :

Soit A une matrice $n \times p$.

➤ **Si** $p = 1$, A **est une matrice colonne :** $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

➤ **Si** $n = 1$, A **est une matrice ligne :** $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$

➤ **Si** $n = p$, A **est une matrice carrée. Les coefficients** a_{ii} **sont appelés coeffic diagonaux :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

➤ **La matrice** $n \times p$ **dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la matrice nulle**

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathcal{M}_(n,p)(\mathbb{K})$.

(1) Pour $n = 1$. on dit que A est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$.

(2) Pour $p = 1$ on dit que A est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

(3) Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 1.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice de type $(4,3)$.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice de type $(2,4)$.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice carrée d'ordre 2.*

DÉFINITION 1.3. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ deux matrices de types (n,p),*

(1) *On dit que $A = B$ si $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p; a_{ij} = b_{ij}$.*

(2) *La transposée de la matrice A est une matrice notée A^t définie par*

$$A^t = (a_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n},$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p,n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.

EXEMPLE 1.4. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 1.5. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par les opération suivantes :*

$$(+) : \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}.$$

et

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

$$\left(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}\right), \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Alors $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de dimension* $n \times p$, *sachant que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$

2. Produit de deux matrices

DÉFINITION 2.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$, *on définit le produit de la matrice* A *par* B *comme étant une matrice* $C = (c_{ij})_{1\leq i\leq,1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$, *avec* $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{31}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$.

REMARQUE 2.2.
(1) *L'élément* C_{ij} *de la matrice* C *se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne* i *de la matrice* A *par la les éléments de la colonne* j *de la matrice* B.
(2) *Le produit de deux matrice ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice* A *correspond au nombre de lignes dela matrice* B.

EXEMPLE 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A est de type $(2, 3)$ *et B de type* $(3, 4)$ *ainsi C sera de type* $(2, 4)$.

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.2 + 0.1 & 1.2 + 1.0 + 0.1 & 1.0 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.1 + 0.0 \\ 2.1 + 2.2 + 0.1 & 2.2 + 2.0 + 0.1 & 2.0 + 2.1 + 0.0 & 2.1 + 2.1 + 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.4. *Le produit deux matrice n'est pas commutatif voiçi un exemple :*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matrices carrées

Définition 3.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$,*

(1) *La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principle de A.*

(2) *La trace de A est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*

(3) *A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.*

(4) *A est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*

(5) *A st dite symétrique si $A = A^t$.*

Exemple 3.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice diagonale.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice triangulaire inférieure.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice triangulaire supérieure .*

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, *$A_4$ est une matrice symétrique.*

Proposition 3.3. *Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identitée notée I_n définie par :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 3.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ on dit que A est invesible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$.*

Exemple 3.5. *Montrons que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est inversible et ceci en cherchant la matice* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *telle que*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Les Déterminants

Définition 4.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$, *on appelle déterminant de A le nombre réel donné par :* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. *On le note* $\det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

Exemple 4.2. *Calculons le* $\det(A)$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0.(2) = -1.$$

Définition 4.3. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple 4.4.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}0.\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13$$

Proposition 4.5. *Pour calculer le déterminant d'une matrice A on peut développer A suivant n'importe quelle ligne ou colonne.*

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

Exemple 4.6. *On reprend la même matrice de l'exemple pécédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}.0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

Définition 4.7. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Définition 4.8. *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, *le déterminant suivant la j-ème colone est :*

$$det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, \dots, n.$$

Le déterminant suivant la i-ème ligne est :

$$det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, \dots, n.$$

Où A_{ij} représent ce que nous appelons le déterminant mineur du terma a_{ij}, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu de $det(A)$ en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Proposition 4.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

(1) $det(A) = det(A^t)$.

(2) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont égales (ou deux colonnes).*

(3) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont proportinnelles (ou deux colonnes le sont).*

(4) $det(A) = 0$ *si une ligne est combinaison linéaires de deux autres lignes de A (même chôse pour les colonnes).*

(5) *$det(A)$ ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaires d'autres lignes (même chôse pour les colonnes).*

(6) *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(A.B) = det(A).det(B)$.*

EXEMPLE 4.10. (1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, *car la ligne 1 est égale à la ligne 3*, $L_1 = L_3$.

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *car* $L_1 = 3 * L_4$.

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, *car* $C_1 = C_2$.

DÉFINITION 4.11. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, ..., V_n)$ et on le note $det(V_1, V_2, ..., V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.*

EXEMPLE 4.12. *Soit $V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, alors*

$$det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

PROPOSITION 4.13. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow det(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0$*

EXEMPLE 4.14. *Soit $V_1 = (1, 2, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.*

4.1. Le rang d'un matrice.

DÉFINITION 4.15. *Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A et on note rgA l'ordre de la plus grande matrice carrée B prise (extraite) dans A telle que $detB \neq 0$.*

EXEMPLE 4.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $detA = 2 \neq 0, rgA = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $detA = 0 \neq 0, rgA = 1$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $rgA < 4 (rgA \leq 3)$ *la plus grande matrice carrée contenue* dans A est d'ordre 3, dans cet exmple on a : 4 possibilité :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detC_1 = detC_2 = 0$ *et* $detC_3 = detC_4 = 0$ *donc le* $rgA < 3$ *et on a :*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

THÉORÈME 4.17. *le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.*

DÉFINITION 4.18. *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on appelle cofacteur d'indice* i *et* j *de* A *le scalaire*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}.$$

Avec A_{ij} *est la matrice déduite de* A *par suppression de la ligne* i *t la colonne* j.
La matrice $C = (c_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice* C^t *est appellée la comatrice de* A.

EXEMPLE 4.19. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. *Calculons les coffacteurs de* A

$$c_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{11} = (-1)^{1-2} det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{11} = (-1)^{1+3} det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3-1} det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$A \text{est inversible } \Leftrightarrow det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t.$$

Où C^t est la comatrice de A.

Exemple 4.21. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 2 \neq 0$ donc elle est inversible, de plus*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.

Alors la matrice A est diagonalisable et la matrice diagonale D associée à A est donnée par : :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

chaque $\lambda_i$se répete m_i fois, la matrice P est formé des vecteurs propres.

REMARQUE 7.9. *Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distincts alors A est diagonalisable et la matrice diagonale D associée à A est :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 7.10. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *admet les valeur propres $\lambda_1 = 2$ double et $\lambda_2 = 1$ simple la matrice diagonale D est donnée par;* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et la matrice de passage est donnée par :* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle système de n équations linéaires à p inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où les $(x_j)_{j=1,..,p}$ sont les inconnues, les $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$.

`1)Forme matricielle du système :`

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système (S) devient ;

DÉFINITION 8.1. *On appelle solution du système (S) tout élément $X = (x_1, ..., x_p)$ vérifiant les n équations de (S) ceci revient à trouver un vecteur X tel que $AX = B$ ou encore un élément $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(X) = B$.*

EXEMPLE 8.2.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 3x-y=4 \\ x-y=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3)Rang d'un système linéaire :

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. Si r est le rang du système linéaire (S), alors $r \leq n$ et $r \leq p$.

8.1. Système de Cramer.

DÉFINITION 8.3. *Le système (S) est dit de Cramer si $n = p = r$ c'est à dire, (S) est un système de n équations à n inconnus et telle que*

$$\det A \neq 0.$$

THÉORÈME 8.4. *Tout Le système de Cramer admet une solution donnée par : $X = A^{-1}B$.*

EXEMPLE 8.5.

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

$\det A = 1 \neq 0, rgA = 2,$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 8.6. *Dans un système de Cramer, la solution est donnée par les formules :*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, ..., n.$$

Où les A_i est la matrice réduite de A, en remplaçant la colonne i par le vecteur B.

EXEMPLE 8.7.

$$(S): \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$det A = 4 \neq 0, rg A = n = p = 3$ *((S) est un système de cramer).*

$$x = \frac{det A_1}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{det A_2}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{det A_3}{det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$