Dénombrement et Probabilités

Présenté par :
Pr.Abdelaziz Qaffou

EST-Beni Mellal – Université Sultan Moulay Slimane

DUT: GI et ARI-S3

Plan du cours

Outline

Quel rapport entre dénombrement et probabilités

- En situation d'équiprobabilité, on a $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$, donc il faut calculer le $Card(A)$, c'est à dire, le nombre d'éléments de A. D'où l'importance du dénombrement !
- Le dénombrement : déterminer le nombre d'élémenrs d'un ensemble fini.

Cardinal

- **Cardinal** : Dans un ensemble fini, le cardinal est égal au nombre d'éléments de cet ensemble.
- Notation : $Card(E) = |E| = \#E$ et $Card(\emptyset) = 0$ (par convention). Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors Card(A)=6.
- Il faut quelques prérequis sur les ensembles, les sous-ensembles et ensemble vide.

Notion d'ensemble

Définition

- Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé est :$\{1,2,3,4,5,6\}$.
- F est une partie (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. Cela se note $F \subset E$.
- On note $\emptyset$ l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Dans la suite, E, A et B seront trois sous-ensembles d'un ensemble Ω.

Notion d'ensemble

L'union

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux est appelé union de A et B, noté $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'intersection

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B est appelé intersection de A et B, noté $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}$$

On dit que deux ensembles A et B sont disjoints ou incompatibles s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$

Formule générale

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis, alors

$$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) - Card(E_1 \cap E_2)$$

.

Notion d'ensemble

Le complémentaire

L'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A est le complémentaire de A dans E noté $\bar{A}$, alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.

$$\bar{A} = \{x \in E | x \notin A\}$$

Le Produit cartésien

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est appelé produit cartésien de E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$.

Formule générale

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis, alors

$$Card(E_1 \times E_2) = Card(E_1) \times Card(E_2)$$

.

Exemple

Attention car $E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1$ comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

Principe fondamental du dénombrement

Proposition

Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possible pour l'expérience 2, alors il existe mn résultats possibles pour les deux expériences prises ensemble.

Exemple

Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés "père et fils exemplaires", combien y a-t-il de choix différents possibles ?

Problème de placement

Problématique

On souhaite répondre à la question suivante : combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments.
Ce nombre est différent selon que l'on autorise ou non les répétitions (prendre plusieurs fois le même élément) et que l'on tienne compte ou pas de l'ordre des éléments.
Il y a quatre possibilités classiques et un cas particulier.

Sans ordre et sans répétition

Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et sans ordre.
Le nombre de tirages différents est alors :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.
De combien de manières peut-il répondre ?
Une main de Poker contenant 52 cartes : l'ordre ne compte pas et il ne peut y avoir de répétition.

Sans ordre et avec répétition

Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et sans ordre. Le nombre de tirages différents est alors :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

.

Exemple

On jette simultanément trois dés (l'ordre ne compte pas)
$[1,1,5] = [1,5,1] = [5,1,1]$.
Le jeu de domino, constitue un autre cas de p-combinaison avec répétition.
Soit $E = \{1;2;3;4;5;6\}$. Combien de couples distincts peut-on créer ? (Les couples (1 ;2) et (2 ;1) sont identiques).

Avec ordre et sans répétition

Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et avec ordre. Le nombre de tirages différents est alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

- Si l'on veut tenir compte de l'ordre et pas de répétition, c'est le cas de tiercé $E = \{\text{les chevaux de départ}\}$.
- On tire successivement trois boules sans remise numérotées de 1 à 9.
- Trouver tous les bureaux (président, vice-président, trésorier et secrétaire) que l'on peut élire dans une association de 30 membres.
- Trouver le nombre de tirages successifs, sans remise, possibles de 3 boules dans une urne qui comporte 9 boules numérotées de 1 à 9.

Avec ordre et avec répétition

Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et avec ordre. Le nombre de tirages différents est alors :

$$n^p$$

.

Exemples

- Le nombre de code à 4 chiffres pour une carte bancaire. Le nombre de possibilités est 10^4.
- Le nombre de numéros de téléphone portable possibles (06 plus 8 chiffres) est de : $10^8 = 100000000$.
- Le nombre de résultats possibles lorsque l'on lance un dé à jouer 3 fois de suite est de : $6^3 = 216$.
- Le nombre de rangements possibles de 5 paires de chaussetes dans trois tiroirs (il peut y avoir un ou 2 tiroir(s) vide(s)) est de : 3^5.

n-arrangement et sans répétition

Le nombre de façon pour permuter n élément entre eux est $n!$.

Exemple

Ranger des livres sur une étagère (n-arrangement), l'ordre compte, pas de répétition, on prend tous les livres.

Calcul du nombre d'anagrammes

Théorème

Le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres comportant p_i fois $(1 \leq i \leq m)$ la lettre A_i est donné par : $\frac{n!}{p_1!p_2!...p_m!}$.

Exemple

Le mot RADAR : le nombre d'anagrammes à partir des lettres qu'on peut former par le mot RADAR est $\frac{5!}{2!2!}$.

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$.
- Formule du triangle de Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.
- Formule de binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Outline

Expérience aléatoire

On appelle une expérience ou épreuve aléatoire, toute expérience entraînant des résultats qui dépendent du hasard.

Exemple

- **Expérience 1** : On jette un dé à 6 faces et on lit le numéro de la face supérieure.
- **Expérience 2** : On jette deux fois le même dé et on note les deux numéros obtenus.

Univers

On appelle univers ou l'ensemble fondamental, noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles (on dit aussi de toutes les éventualités possibles) de cette expérience.

Exemple

Dans le cas du lancé d'un dé : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Evénement

On définit un événement comme un ensemble de résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Exemple

- Expérience 1 : A_1 est l'événement "le numéro obtenu est impair" : $A_1 = \{1;3;5\}$.
  A_2 est l'événement "le numéro obtenu est inférieur ou égal à 3" : $A_2 = \{1;2;3\}$.
- Expérience 2 : Soit B l'événement "La somme des deux numéros obtenus est 5" : $B = \{(2;3),(1;4),(3;2),(4;1)\}$.

Remarques

- L'univers Ω est appelée événement certain.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.
- Un événement A est un sous-ensemble de Ω : $A \subset \Omega$.
- On appelle événement élémentaire tout élément ω de Ω : 1,2,5 et 6 sont des événements élémentaires de $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Remarques

- L'univers Ω dépend de l'expérience considérée et aussi du choix de celui qui construit le modèle.
- Exemple de l'univers discret : pour le lancé d'un dé, on peut choisir : $\Omega = \{impair; pair\}$.
- Exemple de l'univers continu : pour la durée de vie d'une ampoule, on peut choisir : $\Omega = [0; +\infty[$.

Concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une application qui à tout événement E associe ses "chances" de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- Axiome 1 : $\mathbb{P}(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- Axiome 2 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Axiome 3 : Si E_1 et E_2 sont deux événements disjoints alors $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$

Propriétés

- Pour tout événement E, on a $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- Pour toute famille d'événements disjoints 2 à 2 $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$:
  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$.
- Si A et B sont deux événements quelconque, alors :
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Suite des Propriétés

- Une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est dite système complet d'événements si : $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
- Pour tout système complet d'événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ et pour tout événement B, on a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$.

Définition

Soient A et B deux événements telque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on note probabilité conditionnelle de A sachant B par :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

. Conséquence : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A) \times \mathbb{P}(A)$

Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

. C'est à dire $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$: la réalisation d'un événement n'affecte pas la réalisation de l'autre.

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements non impossibles. Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)$$

.

Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements non impossibles. Pour tout événement B non impossible. Pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}(A_j/B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B/A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)}$$

.

Définition

On dit qu'on est dans le cas d'équiprobabilité quand l'espace fondamental est **fini** et que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Alors pour tout événement E :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}.$$

Exemple

On considère l'expérience 2 : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}^2$.
On considère que le dé est équilibré. Soit B l'événement"la somme des deux numéros obtenus est 5", on aura : $B = \{(2;3),(3;2),(1;4),(4;1)\}$, donc $\forall (i;j) \in \Omega^2$, $\mathbb{P}((i;j)) = \frac{1}{6^2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Merci pour votre attention