EST Beni Mellal — Université Sultan Moulay Slimane

DUT-GI2 — Session d'automne 2022

Série d'exercices de variables aléatoires et lois de probabilités

– Pr.Abdelaziz QAFFOU –

Exercice 1 Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,3	0,05	0,1	0,05	0,2	p

Soit F sa fonction de répartition.
a) Calculer p.
b) Calculer $F(0,5)$.
c) Calculer $E(X)$.
d) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 2 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,4.
1. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$; $\mathbb{P}(X = 4)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$; $\mathbb{P}(X \geq 2)$

Exercice 3 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle cela une main.
Si la main contient 4 rois on gagne 100dhs, si la main contient 3 rois, on gagne 50dhs, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10dhs et si la main ne contient aucun roi, on perd 50dhs. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.
a) Etablir la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4 On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.
(a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes $n8$ et $n9$?
(b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?
(c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

Exercice 5 Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes suit une loi de Poison de paramètre $3,87$.
(a) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.
(b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes.
(c) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ?

Exercice 6 On modélise la durée de vie des galaxies par des lois exponentielles. On estime qu'une galaxie a probabilité de disparaître d'ici à un million d'année égale à $0,000002\%$.
(a) Déterminer la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle X mesurant la durée de vie de la galaxie.
(b) Quelle est l'espérance de vie de la galaxie ?
(c) Quelle est la probabilité que la galaxie ait disparu d'ici à 3 millions d'années ?
(d) Quelle est la probabilité que la galaxie soit toujours là dans 10 millions d'année ?

Exercice 7 On modélise le temps entre deux clics d'un compteur Geiger par une loi exponentielle. Le nombre moyens de clics par minutes égal à 50.
(a) Calculer le paramètre λ de la loi exponentielle.
(b) Quelle est la probabilité qu'on attende plus d'une seconde entre deux clics ?
(c) On approche un minéral légèrement radioactif du compteur et le nombre de clics passe à 100 par seconde. Quelle est la probabilité d'attendre moins d'un centième de seconde entre deux clics ?

Exercice 8 On considère une variable aléatoire X de densité :

$$f(t) = \frac{c}{1+t^2}$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bien une densité ?
(b) Calculer la fonction de répartition de X.
(c) Déterminer $\mathbb{P}(X < 0)$ et $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$.
(On rappelle que :
$\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-x) = -\arctan x$.)

Exercice 9 Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 4e^{-4x}$.
a) Calculer $F(5)$.
b) Calculer $\mathbb{P}(1 < X < 3)$.

Exercice 10 Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0,02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7,97mm et 8,03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 11 Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.
1. Soit X la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm", on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0,3$ et $\sigma = 0,1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0,36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0,25mm et 0,35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire "épaisseur de la plaque numéro i en mm" et Z la variable aléatoire "épaisseur des n plaques en mm". Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?