1. Introduction

Parmi les systèmes de numération existants, le système décimal est celui qui nous est le plus familier. Il est naturel, complet et convient parfaitement à la science moderne. Mais, il ne convient pas aux machines à compter actuelles tels que les ordinateurs, les calculatrices,... Ces machines utilisent d'autres systèmes de numération tels que le système binaire et le système hexadécimal.

Le système décimal est composé de 10 éléments appelés "unités" : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Une fois le cycle des unités épuisé, on passe au 2ième cycle, celui des dizaines ensuite des centaines,...

Le système binaire est composé de 2 éléments appelés "bits ou digits" : 0 et 1. Une fois le 1ier cycle des bits épuisé, on passe au 2ième cycle, celui des "deuzaines ?"...

Le système hexadécimal est composé de 16 éléments appelés "caractères" : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F. une fois le 1ier cycle des caractères épuisé, on passe au 2ième cycle, celui des "seizaines"...

Une façon d'encoder l'information (enregistrée sous forme de nombres dans des endroits appelés registres ou cases mémoires), c'est de grouper des bits en groupes de :

- *4 bits appelés "quartets" représentant un caractère hexadécimal,*
- *8 bits appelés "octets ou bytes" représentant 2 caractères hexadécimaux,*
- *16 bits appelés "hextets" représentant 4 caractères hexadécimaux.*

2. Conversion d'un système de numération à un autre

Avant de faire des conversions d'un système vers un autre système, définissons du point de vue mathématique ce que c'est qu'un nombre.

2-1. Définition d'un nombre

Un nombre est une somme de quantités composées chacune du produit d'un chiffre par son poids. Le poids indique la valeur de chaque chiffre du nombre correspondant à sa position dans le nombre.

$$Nombre = \sum Quantités \quad ; \quad Quantité = Chiffre \times poids \quad ; \quad Poids = base^{Position}$$

Exemple 1-1 Le nombre décimal 7834,69 s'écrirait :

$$7834,69 = 7000 + 800 + 30 + 4 + 0,6 + 0,09 = 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$$

Ici, le chiffre 7 occupe la position 3, c'est le chiffre le plus significatif et le chiffre 9 occupe la position -2, c'est le chiffre le moins significatif.

2-2. *Conversion du binaire ou hexadécimal à décimal*

Pour convertir un nombre binaire ou hexadécimale en décimal, il suffit de décomposer le nombre en ses quantités et d'en faire la somme.

Remarque : **Pour ne pas confondre les bases des nombres, on les indiquera en indice de chaque nombre.**

Exemple 1-2 Convertir en décimal les nombres : a) $10110{,}01_2$ b) $FD,2A_{16}$

a) $10110{,}01_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 16 + 4 + 2 + 0{,}25 = 22{,}25$

b) $FD,2A_{16} = F \times 16^1 + D \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + A \times 16^{-2} = 15 \times 16^1 + 13 \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + 10 \times 16^{-2}$

$FD,2A_{16} = 253{,}1640625$

2-3. *Conversion du décimal au binaire ou hexadécimal*

Pour convertir un nombre décimal au binaire ou hexadécimal, on procède comme suit :

1- on divise de façon successive la partie entière du nombre décimal par la base vers laquelle nous voulons convertir en ne gardant que les restes. Le dernier reste constitue le chiffre le plus significatif et le premier reste, le chiffre le moins significatif de la partie entière du nombre converti dans la base désirée.

2- On multiplie de façon successive la partie décimale du nombre par la base vers laquelle nous voulons convertir en ne gardant que le chiffre avant la virgule. Le premier chiffre gardé étant le chiffre le plus significatif de la partie décimale du nombre converti dans la base désirée.

Exemple 1-3 Convertir les nombres décimaux suivants dans la base désirée : a) $93{,}4375 = ?_2$ b) $963{,}90234375 = ?_{16}$

a)
$$\begin{array}{cc} R & 93 \div 2 \\ 1 & 46 \div 2 \\ 0 & 23 \div 2 \\ 1 & 11 \div 2 \\ 1 & 5 \div 2 \\ 1 & 2 \div 2 \\ 0 & 1 \div 2 \\ \uparrow 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cl} R & 0{,}4375 \times 2 \\ \downarrow 0 & \mathbf{0},875 \times 2 \\ 1 & \mathbf{1},75 \rightarrow 0{,}75 \times 2 \\ 1 & \mathbf{1},5 \rightarrow 0{,}5 \times 2 \\ \uparrow 1 & \mathbf{1},0 \rightarrow 0 \end{array}$$

$\rightarrow 93{,}4375 = 1011101{,}0111_2$

b)
$$\begin{array}{cc} R & 963 \div 16 \\ 3 & 60 \div 16 \\ 12 & 3 \div 16 \\ \uparrow 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cl} R & 0{,}90234375 \times 16 \\ \downarrow 14 & \mathbf{14},4375 \rightarrow 0{,}4375 \times 16 \\ 7 & 7{,}0 \rightarrow 0 \end{array}$$

$\rightarrow 963{,}90234375 = 3C3,E7_{16}$

2-4. Conversion du binaire à hexadécimal et inversement

Pour convertir un nombre binaire en hexadécimal, on sépare le nombre en quartets de chaque côté de la virgule et on convertit chaque quartet en son équivalent hexadécimal en utilisant la table de conversion ci-contre.

De même, pour convertir un nombre hexadécimal en binaire, on remplace chaque caractère du nombre hexadécimal par son quartet équivalent.

Hexa	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Exemple 1-4 Convertir les nombres suivants dans la base désirée :

a) $1101011{,}010001_2 = ?_{16}$ b) $AE7,D_{16} = ?_2$

a) $\underbrace{0110}\,\underbrace{1011}\,,\underbrace{0100}\,\underbrace{0100}_2 = 6B,44_{16}$ b) $AE7,D_{16} = \overbrace{1010}\,\overbrace{1110}\,\overbrace{0111}\,,\overbrace{1101}_2$

3. Opérations arithmétiques

3-1. Addition binaire

L'addition binaire suit les mêmes règles que l'addition décimale. Puisque le cycle binaire se complète après 2 symboles seulement, on a 4 possibilités :

$0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 0 = 1$ *et* $1 + 1 = 10$ *On garde 0 et on reporte 1*

Exemple 1-5 Effectuer l'opération : 111,10 + 110,11 + 11,11

Reports	1	1						
		1	0	1				
				1	0		1	
Nombres à additionner			1	1	1	,	1	0
			1	1	0	,	1	1
				1	1	,	1	1
Résultat	1	0	0	1	0	,	0	0

3-2. Soustraction binaire

La soustraction binaire suit elle aussi les mêmes règles que la soustraction décimale. On a 4 possibilités :

$0 - 0 = 0$, $1 - 1 = 0$, $1 - 0 = 1$ *et* $0 - 1 = 1$ *Et on emprunte 1*

Exemple 1-6

Effectuer l'opération : 110001,01 - 1111,11

Emprunts			0	1	1	1 10			
Nombres à soustraire	1 	~~1~~ 	~~0~~ 1	~~0~~ 1	~~0~~ 1	~~1~~ 1	, ,	10 1	1 1
Resultat	1	0	0	0	0	1	,	1	0

3-3. Complément à 2

La méthode de soustraction binaire ne permet pas de soustraire un nombre plus grand d'un nombre plus petit (où le résultat sera négatif). Elle ne permet pas non plus d'additionner 2 nombres négatifs. Pour palier à cela, on utilisera la méthode du complément à 2 (appelée aussi méthode du complément +1).

Au lieu de soustraire 1 nombre Y d'un nombre X, on additionnera à X le complément à 2 de Y :

$$X - Y \equiv X + (-Y)$$

Le complément à 2 est un code qui représentera l'expression (-Y). Pour déterminer ce code, on doit trouver l'octet correspondant à l'équivalent binaire du nombre décimal Y, on complémente ensuite l'octet (en inversant les bits : les 0 deviennent des 1 et les 1 deviennent des 0) auquel on ajoute 1. Le nombre ainsi obtenu sera le code signé qui représentera le nombre décimal négatif : -Y.

Exemple 1-7 Trouver le code binaire signé équivalent au nombre décimal : -119_{10}

On convertit le nombre décimal en binaire et on ajoute, à gauche, le nombre de zéros nécessaire pour un avoir un octet :

$119_{10} = 01110111_2$. On complémente ce nombre : $\overline{119}_{10} = 10001000_2$.

On ajoute 1 à ce nombre : $-119_{10} \leftrightarrow 10001001_{signé}$

Exemple 1-8 Trouver l'équivalent décimal du code binaire signé: $11001011_{signé}$

On complémente le code signé : $\overline{11001011}_{signé} \leftrightarrow 00110100_2$. On ajoute 1 à ce nombre : 00110101_2. On convertit ce nombre binaire obtenu en décimal : $00110101_2 \leftrightarrow 53_{10}$. Le nombre décimal équivalent au code est : $11001011_{signé} \leftrightarrow -53_{10}$

Exemple 1-9 En utilisant le complément à 2, effectuer l'opération : $33_{10} - 47_{10}$.

On convertit les 2 nombres en binaire : $33_{10} = 00100001_2$ et $47_{10} = 00101111_2$.

On détermine le code signé de - 47 : $-47_{10} \leftrightarrow 11010001_{signé}$. On additionne 33 au code signé de -47 :

Reports								1	
Nombre + code signé	33	0	0	1	0	0	0	0	1
	- 47	1	1	0	1	0	0	0	1
Résultat	- 14	1	1	1	1	0	0	1	0

On vérifie : $-14_{10} \leftrightarrow 11110010_{signé} \rightarrow 14_{10} \leftrightarrow 00001110_2$

3-4. *Addition hexadécimale*

L'addition hexadécimale suit les mêmes règles que l'addition décimale. Le 1ier cycle se complète après 16 symboles. Une fois le 1ier cycle complété, on passe au 2ième cycle et ainsi de suite. On peut aussi utiliser la table d'addition suivante.

Equivalent décimal	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	**1**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	**2**	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	**3**	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	**4**	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	**5**	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	**6**	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	**7**	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	**8**	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	**9**	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	**A**	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	**B**	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	**C**	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	**D**	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	**E**	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	**F**	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	E

Exemple 1-10 Effectuer l'opération : 1BC,EF + AD5,98

Reports		1	1		1	
Nombres à additionner	1	B	C	,	E	F
	A	D	5	,	9	8
Résultat	B	C	2	,	8	7

$F + 8 = 23_{10} = 16_{10} + 7_{10} = 17_{16}$ ou on utilise la table : intersection colonne F et ligne 8 → 17 : *on garde 7 et on reporte* 1.

$E + 9 + 1 = 24_{10} = 16_{10} + 8_{10} = 18_{16}$, avec la table : intersection colonne E et ligne A → 18 : *on garde* 8 *et on reporte* 1.

3-5. Soustraction hexadécimale

La soustraction hexadécimale suit les mêmes règles que la soustraction décimale. Si la soustraction donne un nombre négatif, on emprunte une unité au caractère de la colonne précédente. Cette unité équivalente à 16 en décimal sera ajouté au caractère qui sera soustrait.

Exemple 1-11 Effectuer l'opération : F8A,CE - E4,2D

Emprunts	E					
Nombres à	~~F~~	18	A	,	C	E
soustraire		E	4	,	2	D
Résultat	E	A	6	,	A	1

$E - D = 14_{10} - 13_{10} = 1_{10} = 1_{16}$.
$8 - E = ?$ On emprunte 1 à F qui devient E et *on ajoute* 16_{10} à $8 \rightarrow 24_{10} - E = 24_{10} - 14_{10} = 10_{10} = A$.

3-6. Soustraction hexadécimale par complément à 16

Comme pour la soustraction binaire, la méthode de soustraction hexadécimale ne permet pas de soustraire un nombre plus grand d'un nombre plus petit (où le résultat sera négatif). Elle ne permet pas non plus d'additionner 2 nombres négatifs. Pour palier à cela, on utilisera la méthode du complément à 16.

Soit à effectuer l'opération X-Y. Le complément à 16 de Y s'obtient en ajoutant autant de zéro(s) que nécessaire à Y pour qu'il ait le même nombre de caractères que X. Ensuite, on soustrait de 16, le caractère le moins significatif (celui à droite du nombre, excluant le(s) caractère(s) nuls (zéro(s)) et de 15, tous les autres caractères (à gauche du caractère le moins significatif). Enfin, une fois l'opération effectuée, on tronque tout caractère qui dépasse le nombre de caractères des 2 nombres.

Exemple 1-12 Effectuer l'opération : F8A,CE - E4,2D par complément à 16.

Emprunts							*Reports*	1		1	1		1	
Nombres à	F	8	A	,	C	E	*Nombres +*		F	8	A	,	C	E
soustraire	0	E	4	,	2	D	*complément à 16*		F	1	B	,	D	3
Résultat	E	A	6	,	A	1		+	E	A	6	,	A	1

Complément à 16 : $16 - D = 3$, $15 - 2 = D$, $15 - 4 = B$, $15 - E = 1$, $15 - 0 = F$.

4. Portes logiques

Les portes logiques sont des opérateurs logiques utilisés en algèbre de Boole et dans les circuits logiques (combinatoires) et en réseautique. Il existe plusieurs portes logiques. Celles qui nous intéressent sont :

- la porte NON (ou NOT) : qui permet d'effectuer la complémentation (inversion) logique,
- la porte ET (ou AND) : qui permet d'effectuer la multiplication logique,
- la porte OU (ou OR) : qui permet d'effectuer l'addition logique et
- la porte NONOUEX (ou XNOR) : qui permet de comparer 2 données logiques.

4-1. La porte NON

Cette porte ne possède qu'une seule entrée (variable logique) et son rôle et de complémenter les valeurs de l'entrée. Si A est la variable d'entrée et S la fonction représentant la sortie, alors : $S = \overline{A}$.

La table de vérité ainsi que le symbole représentant cette porte sont :

Table

A	S
0	1
1	0

Symbole

Exemple 1-13 Que serait la sortie S d'une porte NON qui recevrait à son entrée A, la série numérique : $1110\ 1010_2$

$\rightarrow S = 0001\ 0101_2$

4-2. La porte ET

Cette porte se traduit comme un produit de valeurs logiques. Si A et B sont 2 variables (les entrées de la porte) et S la fonction représentant la sortie, alors : $S = A \cdot B$. (On lit A croix B ou AB)

La table de vérité ainsi que le symbole représentant cette porte sont :

Remarque : S est à 0 tant que les 2 entrées ne sont pas simultanément à 1.

Table

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole

Exemple 1-14 Que serait la sortie S d'une porte ET qui recevrait à ses entrées A et B, les séries numériques

$A = 1110\ 1010_2$ et $B = 1010\ 1011_2$ $\rightarrow S = 1010\ 1010_2$

4-3. La porte OU

Cette porte se traduit comme une somme de valeurs logiques. Si A et B sont 2 variables (les entrées de la porte) et S la fonction représentant la sortie, alors : $S = A + B$. (On lit A ou B et non A plus B)

La table de vérité ainsi que le symbole représentant cette porte sont :

Table

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symbole

***Remarque** : S est à 1 tant que les 2 entrées ne sont pas simultanément à 0.*

Exemple 1-15 Que serait la sortie S d'une porte OU qui recevrait à ses entrées A et B, les séries numériques :

$A = 1110\ 1010_2$ et $B = 1010\ 1011_2 \rightarrow S = 1110\ 1011_2$

4-4. *La porte NonOuEx (XNOU)*

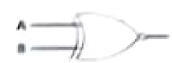
Cette porte compare 2 valeurs logiques. Si A et B sont 2 variables (les entrées de la porte) et S la fonction représentant la sortie, alors : $S = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$. (On lit NonA ouexclusif B)

La table de vérité ainsi que le symbole représentant cette porte sont :

Table

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole



***Remarque** : S est à 1 tant que les 2 entrées sont simultanément à 0 ou à 1.*

Exemple 1-16 Que serait la sortie S d'une porte XNOU qui recevrait à ses entrées A et B, les séries numériques :

$A = 1110\ 1010_2$ et $B = 1010\ 1011_2 \rightarrow S = 1011\ 1110_2$

Exemple 1-17 Soient $A = 191.74.154.70_{10}$ et $B = 255.255.128.0_{10}$, 2 adresses. Convertir A et B en binaire, ensuite effectuer les opérations : AB, $A + B$, $\overline{A \oplus B}$, $\overline{AB}$, $\overline{A + B}$, $\bar{A}\bar{B}$ *et* $\bar{A} + \bar{B}$ (compléter le tableau suivant).

	Adresse décimale	*Adresse binaire*	*Adresse hexadécimale*
A	$191.74.154.70_{10}$	$1011\ 1111.0100\ 1010.1001\ 1010.0100\ 0110_2$	$BF.4A.9A.46_{16}$
B	$255.255.128.0_{10}$	$1111\ 1111.1111\ 1111.1000\ 0000.0000\ 0000_2$	$FF.FF.80.00_{16}$
AB	$191.74.128.0_{10}$	$1011\ 1111.0100\ 1010.1000\ 0000.0000\ 0000_2$	$BF.4A.80.00_{16}$
$A + B$	$255.255.154.70_{10}$	$1111\ 1111.1111\ 1111.1001\ 1010.0100\ 0110_2$	$FF.FF.9A.46_{16}$
$\overline{A \oplus B}$	$191.74.229.185_{10}$	$1011\ 1111.0100\ 1010.1110\ 0101.1011\ 1001_2$	$BF.4A.E5.B9_{16}$
$\overline{AB}$	$64.181.127.255_{10}$	$0100\ 0000.1011\ 0101.0111\ 1111.1111\ 1111_2$	$40.B5.7F.FF_{16}$
$\overline{A + B}$	$0.0.101.185_{10}$	$0000\ 0000.0000\ 0000.0110\ 0101.1011\ 1001_2$	$00.00.65.B9_{16}$
$\bar{A}$	$64.181.101.185_{10}$	$0100\ 0000.1011\ 0101.0110\ 0101.1011\ 1001_2$	$40.B5.65.B9_{16}$
$\bar{B}$	$0.0.127.255_{10}$	$0000\ 0000.0000\ 0000.0111\ 1111.1111\ 1111_2$	$00.00.7F.FF_{16}$
$\bar{A}\bar{B}$	$0.0.101.185_{10}$	$0000\ 0000.0000\ 0000.0110\ 0101.1011\ 1001_2$	$00.00.65.B9_{16}$
$\bar{A} + \bar{B}$	$64.181.127.255_{10}$	$0100\ 0000.1011\ 0101.0111\ 1111.1111\ 1111_2$	$40.B5.7F.FF_{16}$

Remarquez que $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ *et que* $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$. Ce sont 2 lois de De Morgan

5. Exercices

1.2-1 *Convertissez en base 10, les nombres suivants :*

a) $24CD,FB_{16}$ b) $BA01,CC_{16}$ c) $62FD,CB_{16}$ d) $3A,B8_{16}$

d) $111101,110_{2}$ d) $111100,101_{2}$ e) $111001,111_{2}$ f) $10100,011_{2}$

1.2-2 *Convertissez en base 2, les nombres suivants :*

a) $92,875_{10}$ b) $72,6875_{10}$ c) $41,375_{10}$ d) $9E,D_{16}$ e) $44,5625_{10}$

1.2-3 *Convertissez en base 16, les nombres suivants :*

a) $11101010,001111_{2}$ b) $11010011101,1101101_{2}$ c) $11010111,001011_{2}$

d) $110000001000000,101110101100_{2}$ f) $2895,7890625_{10}$ g) $64,921875_{10}$

h) $89,8125_{10}$ i) $34,7890625_{10}$

1.3-1 *Effectuez les opérations binaires suivantes :*

a) $\begin{array}{r} 10111,011 \\ +1101,101 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 10111,011 \\ -1101,101 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 10011,011 \\ +11110,101 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 10011,011 \\ -\ 1110,101 \\ \hline \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 11011,011 \\ +1011,111 \\ \hline \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 100,1101 \\ -11,0011 \\ \hline \end{array}$ h) $\begin{array}{r} 1011,1011 \\ +1101,1101 \\ \hline \end{array}$ h) $\begin{array}{r} 101010,101 \\ -\ 1100,111 \\ \hline \end{array}$

1.3-2 *Déterminez l'équivalent décimal des binaires signés suivants :*

a) $10101110_{signé}$ b) $11011100_{signé}$ c) $10100000_{signé}$ d) $11010011_{signé}$

1.3-3 *Déterminez l'équivalent binaire signé (8 bits) des nombres suivants :*

a) -81_{10} b) -72_{10} c) -10_{10} d) -114_{10} e) -33_{10} f) -49_{10}

1.3-4 *En utilisant le complément à 2, effectuez les opérations suivantes : (Représentez chaque no décimal par un octet) :*

a) $55-92$ b) $-66-72$ c) $-39+23$ d) $-17-15$ e) $-23-6$