Programmation linéaire

Présenté par :
Pr.Abdelaziz Qaffou

EST-Beni Mellal – Université Sultan Moulay Slimane

DUT-Génie Informatique
2ème année-S3-2023-2024

Plan du cours

Outline

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple,la main-d'oeuvre, les matières premières, les capitaux, ... qui sont disponibles en quantité limitée et qu'on veut répartir d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication.

Notre approche pour résoudre ce type de problèmes sera divisée en deux étapes principales :

1. **La modélisation** du problème sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires qui permettra ainsi de bien identifier et structurer les contraintes que doivent respecter les variables du modèle ; de plus, on doit définir l'apport de chaque variable à l'atteinte de l'objectif poursuivi par l'entreprise, ce qui se traduira par une fonction à optimiser.
2. La détermination de **l'optimum mathématique** à l'aide de certaines techniques propres à la programmation linéaire.

Nous étudierons 3 méthodes pour résoudre les différents types de problèmes de programmation linéaire :

1. la première est basée sur une résolution graphique, elle est donc limitée à 2 ou 3 variables.
2. La deuxième méthode est plus algébrique.
3. La troisième méthode porte le nom de méthode (ou algorithme) du simplexe.

Outline

Exemple

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M_1 et M_2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 DH pour M_1 et 200 DH pour M_2.

	M_1	M_2	Temps libres
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.

Modélisation

Posons x_1 le nombre de bureaux du modèle M_1 et x_2 le nombre de bureaux du modèle M_2. Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter. La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de Sciage :

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

Les autres contraintes sont :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 22 \text{ (Assemblage)} \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \text{ (Sablage)} \end{aligned}$$

Il s'ajoute à ces contraintes des contraintes de positivité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif, on a donc :

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire

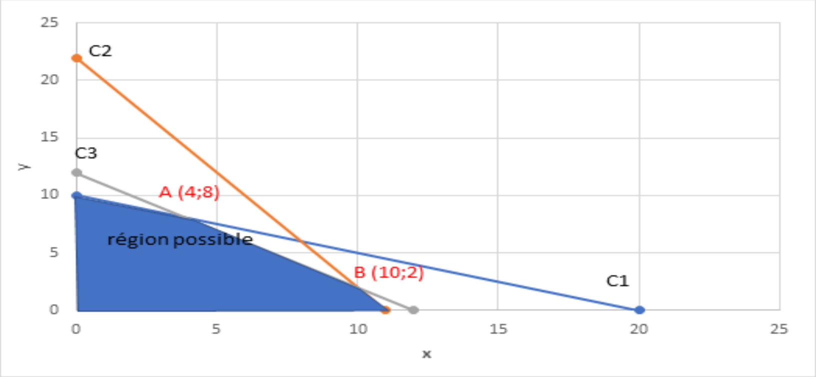
La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction $f(x_1, x_2) = 300x_1 + 200x_2$ (s'appelle **fonction économique**).
Le programme linéaire est :

$$\max f(x_1, x_2) = 300x_1 + 200x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 22 \\ x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Résolution graphique

Graphiquement les solutions réalisables sont les points du polygone convexe de la figure suivante :



Résolution graphique

Pour chacune de ces solutions, c'est-à-dire pour chacun des points du polygone convexe, la compagnie fera un profit positif. Si la compagnie fabrique trois exemplaires du modèle M_1 et deux exemplaires du modèle M_2, le profit sera :

$$f(3;2) = 300 \times 3 + 200 \times 2 = 1300 DH.$$

Il ne saurait être question de calculer le profit réalisable pour chacun des points du polygone convexe. Pour avoir une vision globale du problème, représentons le profit réalisé par le paramètre p. On a :

$$300x_1 + 200x_2 = p$$

qui représente une famille de droites parallèles. En isolant x_2, on obtient :

$$x_2 = -\frac{300x_1}{200} + \frac{p}{200} = -\frac{3x_1}{2} + \frac{p}{200}$$

Résolution graphique

Il s'agit donc d'une famille de droites de pente $-\frac{3}{2}$ et dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{p}{200}$. Parmi les droites de cette famille, seules celles ayant des points communs avec le polygone convexe nous intéressent. La fonction $f(x_1; x_2)$ atteindra sa valeur maximale lorsque l'ordonnée à l'origine $\frac{p}{200}$ de la droite :

$$x_2 = -\frac{3x_1}{2} + \frac{p}{200}$$

atteindra sa valeur maximum tout en passant par au moins un despoints du polygone convexe.

Résolution graphique

Graphiquement on constate que la droite respectant ces conditions semble être la droite de la famille passant par le point-sommet $(10;2)$. Le profit est alors :

$$f(10;2) = 300 \times 10 + 200 \times 2 = 3400.$$

Il reste à s'assurer algébriquement des coordonnées du point-sommet en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Outline

Pour résoudre des problèmes de programmation linéaire ayant un nombre de variables (principales) supérieur à trois, nous devons obligatoirement faire appel à une autre méthode de résolution que celle déjà étudiée. Toutefois, avant d'aborder la méthode du simplexe comme technique de résolution d'un problème de programmation linéaire, vous découvrirez dans cette section une version modifiée - la méthode algébrique - qui permettra d'étudier les différentes étapes à franchir pour arriver à une solution optimale.

Variables d'écart

- La méthode de résolution que nous étudions dans cette section nécessite que les contraintes du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires au lieu d'inéquations.
- On peut facilement transformer une inéquation linéaire ayant un signe $\leq$ en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite variable d'écart.

Variables d'écart

Soit la $i^{\text{ième}}$ contrainte :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$$

Additionnant au premier membre de l'inéquation, la variable d'écart x_{n+1} vérifiant que $x_{n+1} \geq 0$, on obtient :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

et alors

$$x_{n+1} = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n)$$

représente l'écart entre la quantité disponible de la ressource i et la quantité effectivement utilisée par l'ensemble des x_j. Si la quantité b_i représente des heures (disponibilité d'un département par exemple), la variable d'écart introduite dans la contrainte correspondante représentera alors un temps mort, qui peut être soit positif soit nul.
Nous ajoutons autant de variables d'écart différentes qu'il existe de contraintes du type $\leq$.

Exemple Fil rouge

L'entreprise Simco fabrique différents modèles d'appareils électroménagers. Le programme actuel de fabrication est de 500 unités du modèle Elec-100 et 400 unités du modèle Elec-200. Le vice-président de la fabrication veut déterminer si les contributions aux bénéfices de l'entreprise peuvent être augmentées en modifiant le programme actuel de fabrication. Il possède l'information suivante sur le nombre d'heures requises pour fabriquer chaque modèle, ainsi que le temps disponible à chaque atelier.

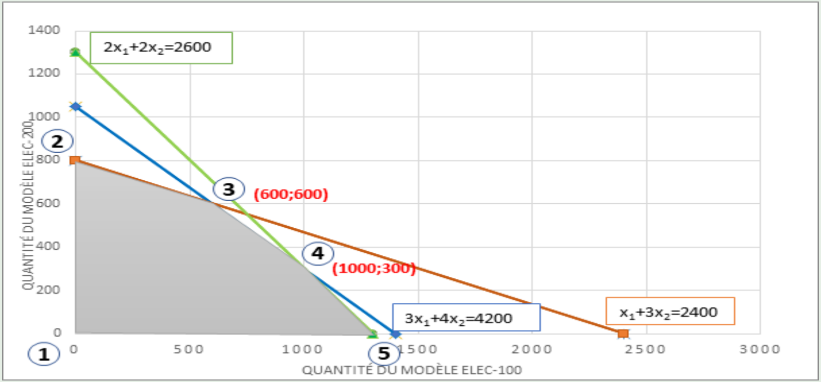
	Elec-100	Elec-200	
Atelier	Nbre d'heures	Nbre d'heures	temps disponible
Assemblage	3	4	4200 heures
Vérification	1	3	2400 heures
Empaquetage	2	2	2600 heures
Contribution	100 DH/unité	120 DH/unité	

Exemple Fil rouge

Les contraintes du modèle fil rouge exprimées sous forme d'inéquations linéaires, peuvent se ramener à un système d'équations linéaires en introduisant trois variables d'écart, x_3, x_4 et x_5 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ \text{où } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2600 \\ \text{où } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1;2;3;4;5 \end{cases}$$

Résolution graphique



Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

On peut considérer que les variables d'écart permettant de mesurer le niveau d'activités fictives alors, pour qu'elles n'influencent pas l'optimisation, on suppose nuls les bénéfices ou coûts liés à ces activités. Ainsi, à chaque variable d'écart x_j correspondra le coefficient $c_j = 0$ dans la fonction économique.
Prenant le programme linéaire suivant :

$$\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 120x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \qquad \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

Il devient :

$$\max f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{lllll} 3x_1 + 4x_2 & & & & \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 & & & & \leq 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 & & & & \leq 2600 \\ x_1 & & & & \geq 0 \\ & x_2 & & & \geq 0 \\ & & x_3 & & \geq 0 \\ & & & x_4 & \geq 0 \\ & & & & x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

Résolution complète de l'exemple Fil rouge

Après l'introduction des 3 variables d'écart :
x_3 =temps mort en heures à l'atelier d'assemblage,
x_4 =temps mort en heures à l'atelier de vérification,
x_5 =temps mort en heures à l'atelier d'empaquetage.
l'exemple fil rouge s'écrit alors :
maximiser $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$
sous contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2600 \\ \text{où } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1;2;3;4;5 \end{cases}$$

Programme initial

Dans le programme de base initial, on exprime toujours les variables d'écart (ici x_3, x_4, x_5) en fonction des variables principales (ici x_1, x_2). Donc au départ, ce sont les variables d'écart qui sont dans le programme de base et les variables principales sont hors programme.

$$\begin{cases} x_3 = 4200 - 3x_1 - 4x_2 \ (1) \\ x_4 = 2400 - x_1 - 3x_2 \ (2) \\ x_5 = 2600 - 2x_1 - 2x_2 \ (3) \end{cases}$$

Comme $x_1 = x_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = 4200 \text{ heures} \\ x_4 = 2400 \text{ heures} \\ x_5 = 2600 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :
$f_1(0;0;4200;2400;2600) =$
$100 \times 0 + 120 \times 0 + 0 \times 4200 + 0 \times 2400 + 0 \times 2600 = 0$

Programme initial

Programme de base N°1
$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 0$ unité
$x_3 = 4200$ heures
$x_4 = 2400$ heures
$x_5 = 2600$ heures
fonction économique $= 0$ DH

Ce programme de base correspond au point extrême 1 de la résolution graphique. Bien qu'il soit réalisable, il n'est pas financièrement attrayant pour l'entreprise. Comme aucun atelier n'est en opération, on peut évidemment améliorer la valeur de la fonction économique en fabriquant quelques unités de l'un ou de l'autre des appareils électroménagers.

Révision du programme initial

On doit maintenant examiner la possibilité d'améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant l'une ou l'autre des variables principales (soit x_1, soit x_2 mais non les deux simultanément) dans le programme de base et en sortant une variable actuellement dans le programme de base. Nous savons que nous ne pouvons jamais avoir plus de m (ici 3) variables positives dans un programme de base.
Le choix de la variable (actuellement hors programme) à introduire dans le programme s'effectue à l'aide d'un critère qui permet d'améliorer le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique.

Critère d'entrée d'une variable dans le programme de base

À chaque programme, on choisira la variable (actuellement hors programme) qui donne la meilleure augmentation de la valeur de la fonction économique c'à d. la variable dont la contribution au bénéfice est la plus élevée. On portera évidemment notre choix sur des variables dont les coefficients sont positifs.
À chaque étape de la résolution (chaque programme), nous exprimons la fonction économique en fonction des variables hors programme :
Donc à cette étape-ci, la fonction économique de l'entreprise Simco est :

$$\text{fonction économique} = 100x_1 + 120x_2$$

x_1 et x_2 sont des variables hors programme.
D'après l'expression de la fonction économique, l'augmentation sera la plus élevée si nous introduisons la variable x_2 dans le programme, Donc :

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_2}$$

Détermination de la variable sortante

Cherchons d'abord la plus grande quantité du modèle Elec-200 (x_2) que l'on peut fabriquer tout en respectant les conditions imposées par les équations (1), (2) et (3).
Nous ne pouvons excéder les temps disponibles à chaque atelier.
Il s'agit donc de déterminer la plus grande valeur pouvant être prise par x_2 dans chaque équation. Ainsi dans la première équation (1) :

$$x_3 = 4200 - 3x_1 - 4x_2$$

Le modèle Elec-200 (variable x_2) exige 4 heures d'assemblage par unité.
Comme nous avons 4200 heures disponibles, on peut alors fabriquer :
$\frac{4200}{4} = 1050$ unités du modèle Elec-200 Ainsi :
(1) $x_3 = 4200 - 3x_1 - 4x_2 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= 1050$ unités
(2) $x_4 = 2400 - x_1 - 3x_2 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= \frac{2400}{3} = 800$ unités
(3) $x_5 = 2600 - 2x_1 - 2x_2 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= \frac{2600}{2} = 1300$ unités

Détermination de la variable sortante

Pour s'assurer que toutes les contraintes soient respectées en même temps, on choisit parmi ces valeurs **la plus petite quantité positive** :
$x_2 = 800$ unités
Ce minimum s'obtient dans l'équation (2). On utilise donc tout le temps disponible à l'atelier de vérification pour fabriquer 800 unités du modèle Elec-200. Il n'y aura donc plus aucun temps mort à cet atelier : $x_4 = 0$.
C'est la variable qui sort du programme :

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_4}$$

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

Puisque $x_2 = 800$ et que $x_1 = 0$, on a alors

$$\begin{cases} x_3 = 4200 - 3.0 - 4.800 = 1000 \text{ heures} \\ x_4 = 2400 - 1.0 - 3.800 = 0 \text{ heures} \\ x_5 = 2600 - 2.0 - 2.800 = 1000 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_2(0;800;1000;0;1000) = 100.0 + 120.800 + 0.1000 + 0.0 + 0.1000 = 96000$$

ou simplement :

$$f_2(0;800) = 100.0 + 120.800 = 96000$$

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base N°2
$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 800$ unité
$x_3 = 1000$ heures
$x_4 = 0$ heures
$x_5 = 1000$ heures
fonction économique $= 96000$ DH

Il correspond au point-sommet 2 de la résolution graphique. S'agit-il du programme optimal ?

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

Toutefois, avant de tester si le programme est optimal, il faut d'abord transformer les équations (1), (2) et (3) pour exprimer les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_2, x_3, x_5.
- Variables hors programme (les nulles) : x_1, x_4.

$$\begin{cases} x_3 = 4200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 2400 - x_1 - 3x_2 \\ x_5 = 2600 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_2 = 800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 = 2600 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4200 - 3x_1 - 4(800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4) \\ x_2 = 800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 = 2600 - 2x_1 - 2(800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4) \end{cases}$$

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

On obtient finalement :

$$\begin{cases} x_3 = 1000 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_4 \ (4) \\ x_2 = 800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \ (5) \\ x_5 = 1000 - \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4 \ (6) \end{cases}$$

Il nous reste à exprimer la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_1 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct-éco} = 100x_1 + 120x_2 \\ x_2 = 800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \text{fct-éco} = 96000 + 60x_1 - 40x_4$$

$$\boxed{\text{variables hors programme : } x_1 \text{ et } x_4}$$

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

Cette dernière expression nous indique qu'on peut améliorer encore la valeur de la fonction économique puisque le coefficient de la variable x_1 est positif. En effet, nous remarquons que la fabrication d'une unité du modèle Elec-100 ($x_1 = 1$) permettra d'augmenter la valeur de la fonction économique de 60 DH (le coefficient de la variable x_1). Toutefois, ceci ne peut se faire sans diminuer la fabrication au modèle Elec-200 (x_2) puisqu'actuellement le temps disponible à l'atelier de vérification est complètement utilisé.
Donc si nous voulons fabriquer une certaine quantité du modèle Elec-100 (x_1), il faut sacrifier une partie de la fabrication du modèle Elec-200 (x_2).

Détermination de la nouvelle solution : Programme de base N°2

Puisque l'atelier de vérification est actuellement utilisé à pleine capacité pour la fabrication du modèle Elec-200 et que les temps opératoires pour chaque appareil sont les suivants :

	Elec-100	Elec-200
Vérification	1	3

Nous constatons que pour fabriquer une unité de Elec-100, nous devons diminuer la fabrication du modèle Elec-200 de 1/3 unité, soit le coefficient de la variable x_1 dans l'équation (5).
En diminuant de 1/3 unité la fabrication du modèle Elec-200, nous réduisons le bénéfice de $120.1/3 = 40$ DH, mais nous obtenons un gain de $100 \times 1 = 100$DH, d'où un gain net de 60 DH ; cette valeur correspond justement au coefficient de la variable x_1 dans l'expression de la fonction économique. Nous introduirons donc x_1 lors de la prochaine étape.

Détermination du troisième programme de base

variables entrante : x_1

Déterminons la valeur de x_1 (quantité d'Elec-100) en utilisant les équations (4), (5) et (6) :

(4) $x_3 = 1000 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_4 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= \frac{1000}{5/3} = 600$ unités

(5) $x_2 = 800 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= \frac{800}{1/3} = 2400$ unités

(6) $x_5 = 1000 - \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4 \;\Rightarrow\;$ Quantité $= \frac{1000}{4/3} = 750$ unités

Ainsi x_1 devant respecter les différentes contraintes, nous choisirons $x_1 = 600$ unités qui se réalise dans la première équation et qui impose que x_3 devienne nulle, ainsi :

variables sortante : x_3

Détermination du troisième programme de base

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_1 = 600$ et $x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 1000 - 5/3.600 + 4/3.0 = 0 \text{ heure} \\ x_2 = 800 - 1/3.600 - 1/3.0 = 600 \text{ unités} \\ x_5 = 1000 - 4/3.600 + 2/3.0 = 200 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique peut se calculer de 2 manières différentes :

- $f(x_1; x_2) = 100x_1 + 120x_2 \;\Rightarrow\; f(600; 600) = 132000$
- $f_3(x_1; x_4) = 96000 + 60.x_1 - 40.x_4$
  $\Rightarrow\; f_3(600; 0) = 96000 + 60.600 - 40.0 = 132000$

Détermination du troisième programme de base

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base N°3
$x_1 = 600$ unités
$x_2 = 600$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 0$ heure
$x_5 = 200$ heures
fonction économique = 132000 DH

Il correspond au point-sommet 3 de la résolution graphique.

Détermination du troisième programme de base

Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2 et x_5.
- Variables hors programme (les nulles) : x_3 et x_4

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\begin{cases} x_3 = 1000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 800 - 1/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) - 1/3x_4 \\ x_5 = 1000 - 4/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) + 2/3x_4 \end{cases}$$

Détermination du troisième programme de base

On obtient finalement :

$$\begin{cases} x_1 = 600 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 & (7) \\ x_2 = 600 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 & (8) \\ x_5 = 200 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 & (9) \end{cases}$$

Les variables dans le programme : x_1, x_2 et x_5. Les variables hors programme : x_3 et x_4.
La fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct-éco} = 96000 + 60x_1 - 40x_4 \\ x_1 = 600 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow \text{fct-éco} = 132000 - 36x_3 + 8x_4$$

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4 est positif. On peut donc améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant la variable x_4 dans le programme.

Détermination du quatrième programme de base

Variable entrante : x_4

Déterminons la valeur de x_4 (temps mort à l'atelier de vérification) en utilisant les équations (7), (8) et (9) :

(7) $x_1 = 600 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \;\Rightarrow\;$ Valeur $= \frac{600}{-4/5} = -750$ heures

(8) $x_2 = 600 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{9}{15}x_4 \;\Rightarrow\;$ Valeur $= \frac{600}{3/5} = 1000$ heures

(9) $x_5 = 200 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{6}{15}x_4 \;\Rightarrow\;$ Valeur $= \frac{200}{2/5} = 500$ unités

x_4 doit vérifier la condition d'être une variable d'écart donc d'être positive. De plus, elle doit correspondre au minimum des deux autres valeurs obtenues. On choisira donc $x_4 = 500$ dans l'équation (9) ce qui impose que x_5 devienne nulle.

Variable sortante : x_5

Détermination du quatrième programme de base

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_4 = 500$ et $x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5.0 + 4/5.500 = 1000 \text{ unités} \\ x_2 = 600 + 1/5.0 - 3/5.500 = 300 \text{ unités} \\ x_5 = 200 - 4/5.0 - 2/5.500 = 0 \text{ heure} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_4(0;500) = 132000 - 36.0 + 8.500 = 136000$$

Détermination du quatrième programme de base

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base N°4
$x_1 = 1000$ unités
$x_2 = 300$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 500$ heures
$x_5 = 0$ heure
fonction économique $= 136000$ DH

Il correspond au point-sommet 4 de la résolution graphique.

Détermination du quatrième programme de base

Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2 et x_4
- Variables hors programme (les nulles) : x_3 et x_5

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_5 = 200 - 4/5x_3 - 2/5x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

Détermination du quatrième programme de base

On obtient finalement :

$$\begin{cases} x_1 = 1000 + x_3 - 2x_5 \ (10) \\ x_2 = 300 - x_3 + 3/2x_5 \ (11) \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \ (12) \end{cases}$$

Les variables dans le programme : x_1, x_2 et x_4. Les variables hors programme : x_3 et x_5.
La fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_5 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct-éco} = 132 - 36x_3 + 8x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases} \Rightarrow \text{fct-éco} = 136000 - 20x_3 - 20x_5$$

Détermination du quatrième programme de base

Pouvons-nous améliorer encore la valeur de la fonction économique ?
La réponse est **non** puisque les coefficients des variables hors programme (x_3 et x_5) sont négatifs.

> Un programme de base est optimal si tous les coefficients des variables hors programme, dans l'expression de la fonction économique, sont ≤ 0.

On constate qu'elle correspond bien à la solution optimale obtenue lors de la résolution graphique. Le programme optimal de fabrication de l'entreprise Simco est donc :

> 1000 unités de Elec-100 ; 300 unités de Elec-200 pour un bénéfice maximum de 136000 DH.
> De plus, il n'y a aucun temps mort aux ateliers d'assemblage et d'empaquetage et il y a 500 heures de temps mort à l'atelier de vérification.

Outline

Résolution du problème Fil rouge par la méthode du simplexe

Le problème de fabrication de l'entreprise Simco après l'introduction des variables d'écarts, était le suivant :
maximiser $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$
sous contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2600 \\ \text{où } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1;2;3;4;5 \end{cases}$$

Résolution du problème Fil rouge par la méthode du simplexe

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2400 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2600 \\ \text{où } x_i \geq 0 \text{ pour } i = 1;2;3;4;5 \end{cases}$$

Etape N°1 : Matrice du programme de base N°1

		Variables hors base		Variables de base			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Variables de base	x_3	3	4	1	0	0	4200
	x_4	1	3	0	1	0	2400
	x_5	2	2	0	0	1	2600
		100	120	0	0	0	0

Etape N°2 : Matrice du programme de base N°2

Pour accroître le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique, il faut donner une valeur positive à x_2 puisque c'est x_2 qui a le plus grand coefficient positif sur la dernière ligne de la matrice. Quelle est la plus grande valeur que l'on peut attribuer à x_2 ?

Pour la déterminer, on prend les rapports des éléments de la colonne de droite sur les éléments de la colonne des x_2. On trouve alors :

		Variables hors base		Variables de base				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Variables de base	x_3	3	4	1	0	0	4200	$4200/4 = 1050$
	x_4	1	3	0	1	0	2400	$2400/3 = 800$
	x_5	2	2	0	0	1	2600	$2600/2 = 1300$
		100	120	0	0	0	0	

Le plus petit de ces rapports est 800 et c'est la plus grande valeur qu'on peut attribuer à x_2. Nous utiliserons donc l'élément de la deuxième ligne deuxième colonne ; encerclons-le pour le mettre en évidence. Nous l'appellerons **pivot de la 1re étape**.

		Variables hors base		Variables de base			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Variables de base	x_3	3	4	1	0	0	4200
	x_4	1	3	0	1	0	2400
	x_5	2	2	0	0	1	2600
		100	120	0	0	0	0

Nous devons maintenant annuler les autres éléments de la deuxième colonne. Pour ce faire, nous effectuons des opérations sur les lignes. En premier lieu, nous allons rendre le pivot unitaire en divisant les termes de la deuxième ligne par 3 :

		Variables hors base		Variables de base				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Variables de base	x_3	3	4	1	0	0	4200	
	x_4	$1/3$	1	0	$1/3$	0	800	$L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$
	x_5	2	2	0	0	1	2600	
		100	120	0	0	0	0	

En deuxième lieu, on soustrait 4 fois la deuxième ligne à la première, 2 fois la deuxième à la troisième et finalement 120 fois la deuxième à la dernière :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$5/3$	0	1	$-4/3$	0	1000	$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$
$1/3$	1	0	$1/3$	0	800	
$4/3$	0	0	$-2/3$	1	1000	$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$
60	0	0	-40	0	-96000	$L_4 \leftarrow L_4 - 120L_2$

Avec fonction économique$= 96000 + 60x_1 - 40x_4$

Etape N°3 : Matrice du programme de base N°3

On constate que l'on peut encore accroître la valeur à optimiser en introduisant une valeur pour x_1.

A nouveau, effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_1 :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$5/3$	0	1	$-4/3$	0	1000	$1000/(5/3) = 600$
$1/3$	1	0	$1/3$	0	800	$800/(1/3) = 2400$
$4/3$	0	0	$-2/3$	1	1000	$1000/(4/3) = 750$
60	0	0	-40	0	-96000	

Le plus petit rapport étant sur la première ligne, notre pivot sera l'élément de la première ligne, première colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par $3/5$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	$3/5$	$-4/5$	0	600	$L_1 \leftarrow \frac{3}{5} L_1$
$1/3$	1	0	$1/3$	0	800	
$4/3$	0	0	$-2/3$	1	1000	
60	0	0	-40	0	-96000	

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 1ère colonne :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	$3/5$	$-4/5$	0	600	
0	1	$-1/5$	$3/5$	0	600	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$
0	0	$-4/5$	$2/5$	1	200	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3} L_1$
0	0	-36	8	0	-132000	$L_4 \leftarrow L_4 - 60 L_1$

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4, dans la fonction économique, est positif. Effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_4.

Etape N°4 : Matrice du programme de base N°4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	$3/5$	$-4/5$	0	600	$600/(-4/5) = -750$
0	1	$-1/5$	$3/5$	0	600	$600/(3/5) = 1000$
0	0	$-4/5$	$2/5$	1	200	$200/(2/5) = 500$
0	0	-36	8	0	-132000	

Le pivot se situe en 3ème ligne, 4ème colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par $5/2$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	$3/5$	$-4/5$	0	600	
0	1	$-1/5$	$3/5$	0	600	
0	0	-2	1	$5/2$	500	$L_3 \leftarrow \frac{5}{2} L_3$
0	0	-36	8	0	-132000	

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 4ème colonne :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	-1	0	2	1000	$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{5} L_3$
0	1	1	0	$-3/2$	300	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{5} L_3$
0	0	-2	1	$5/2$	500	
0	0	-20	0	-20	-136000	$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3$

Il n'y a plus de coefficients positifs sur la dernière ligne de la matrice et il n'est donc plus possible d'accroître la valeur de la fonction économique. La solution optimale est donc le quintuplet :

$$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (1000; 300; 0; 500; 0)$$

qui correspond à un bénéfice maximum de 136000 dh en produisant 1000 unités de Elec-100, 300 unités de Elec-200 avec un temps mort de 500 heures à l'atelier de vérification.

Merci pour votre attention