Suite de la Correction de la série 2

Ex5 : la famille $\{(1,2),(-1,1)\}$ est libre car

$\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1(1,2)+\lambda_2(-1,1)=(0,0) \Rightarrow$

$(\lambda_1-\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

Comme $\text{Card}\{(1,2),(-1,1)\}=2=\dim \mathbb{R}^2$

alors $\{(1,2),(-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Ex6 : $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$

1°) F est un sous espace vectoriel de E car

$F\neq\emptyset$ puisque $(0,0,0)\in F$ car $2\times0+0-0=0$

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(x,y,z),(x',y',z')\in F$

Montrons que $\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\in F$.

on a : $\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')=(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$

posons $x''=\alpha x+\beta x'$, $y''=\alpha y+\beta y'$, $z''=\alpha z+\beta z'$

$2x''+y''-z''=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'$

$=\alpha(2x+y-z)+\beta(2x'+y'-z')$

$=\alpha\times0+\beta\times0$ car $(x,y,z),(x',y',z')\in F$

2°) Déterminons une base de F.

soit $(x,y,z)\in F \Rightarrow 2x+y-z=0 \Rightarrow z=2x+y$

donc: $(x,y,z) = (x,y,2x+y)$

$= (x,0,2x) + (0,y,y)$

$= x(1,0,2) + y(0,1,1)$

donc: la famille $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de E

D'autre part la famille $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est libre car $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq:

$\lambda_1(1,0,2) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_2) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

par suite $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est une base de F $\Rightarrow \dim F = 2$.

3) $F \neq \mathbb{R}^3$, car $\dim F = 2$ mais $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.