Chapitre II

Etude des circuits logiques de base « Portes logiques »

Introduction

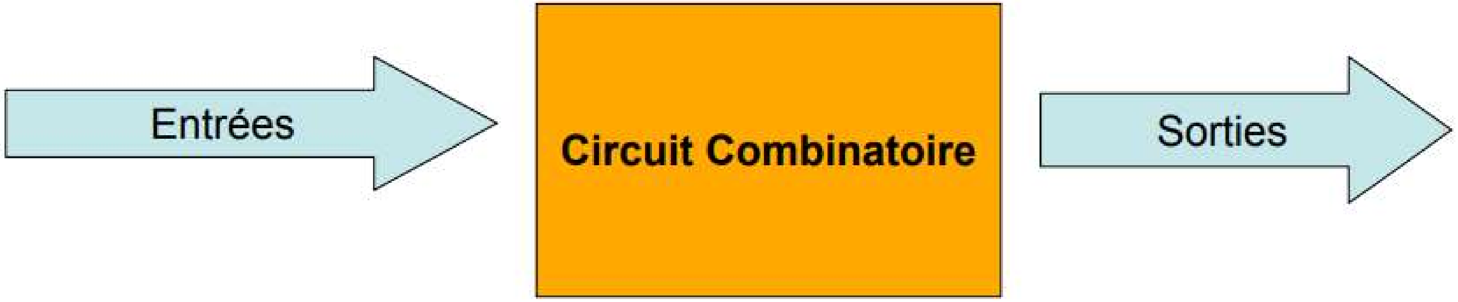
- Tout ordinateur est conçu à partir de circuits intégrés qui ont tous une fonction spécialisée (ALU, mémoire, circuit décodant les instructions etc.)
- Ces circuits sont fait à partir de circuits logiques dont le but est d’exécuter des opérations sur des variables logiques (binaires)

Introduction

- Les circuits logiques sont élaborés à partir de composants électroniques – transistors
- Types de circuits logiques:
  - Combinatoires
  - Séquentiels

Circuits combinatoires

- Support théorique – algèbre de Boole
- Les fonctions de sortie s'expriment selon des expressions logiques des seules variables d'entrée
  - Un circuit combinatoire est défini par une ou plusieurs fonctions logiques



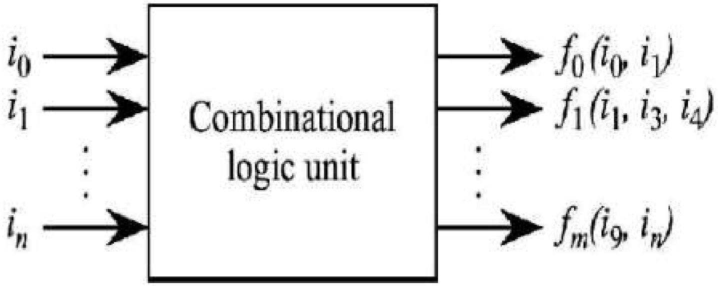
Variables booléennes

- Un système binaire est un système qui ne peut exister que dans deux états autorisés.
- Diverses notations peuvent être utilisées pour représenter ces deux états :
  - numérique : 1 et 0
  - logique : vrai et faux
  - électronique : ON et OFF, haut et bas
- Une variable logique est une variable qui peut prendre deux états ou valeurs: vrai (V) ou faux (F)
- En faisant correspondre V avec le chiffre binaire 1 et F – 0, ce type de variable devient une variable booléenne ou binaire

Circuits combinatoires

- Le circuit combinatoire est défini lorsque son nombre d'entrées, sont nombre de sorties ainsi que l'état de chaque sortie en fonction des entrées ont été précisés
- Ces informations sont fournies grâce à une table de vérité
- La table de vérité d'une fonction de n variables a 2^n lignes - états d'entrée
- Algèbre de Boole et les fonctions logiques sont le support théorique des circuits combinatoires

Table de vérité



i_0	i_1	$F_0(i_0, i_1)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

i_1	i_3	i_4	$F_1(i_1, i_3, i_4)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
.	.	.	
1	1	1	

i_0 i_1 i_2 . . . i_n	$F_0(i_0, i_1)$	$F_1(i_1, i_3, i_4)$	. . .	$F_m(i_9, i_n)$
0 0 0… 0				
0 0 0… 1				
. . .				
. . .				
1 1 1… 1				

Portes logiques

- En électronique les deux états d'une variable booléenne sont associés à deux niveaux de tension : V(0) et V(1) pour les états 0 et 1 respectivement.
- On distingue les logiques positive et négative selon que V(1) > V(0) ou V(1) < V(0)

Niveau	Logique positive	Logique négative
Haut	1	0
Bas	0	1

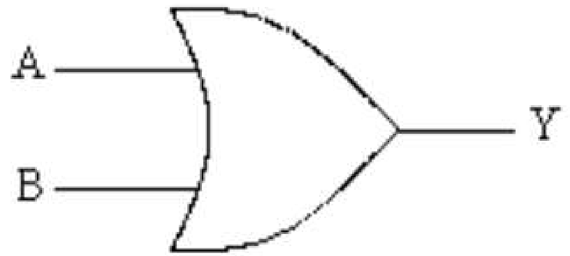
Toute fonction logique peut être réalisée à l’aide d’un nombre de fonctions logiques de base appelées portes

- Un circuit se représente par un logigramme

Porte OU

- Au moins deux entrées
- La sortie d'une fonction OU est dans l'état 1 si au moins une de ses entrées est dans l'état 1

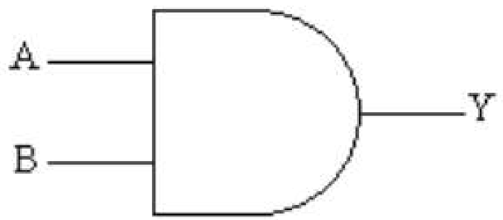
A	B	Y = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Porte ET

- Au moins deux entrées
- La sortie d'une fonction AND est dans l'état 1 si et seulement si toutes ses entrées sont dans l'état 1

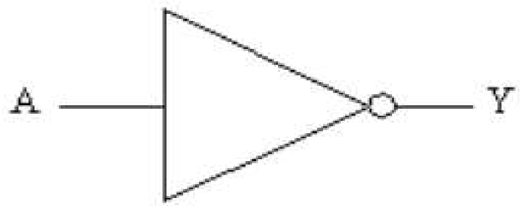
A	B	Y = A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Inverseur : porte NON

- Une seule entrée et une seule sortie
- La sortie d'une fonction NON prend l'état 1 si et seulement si son entrée est dans l'état 0

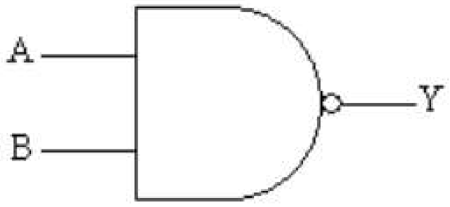
A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0



Porte NON ET

- Est constituée par un inverseur à la sortie d'une porte ET

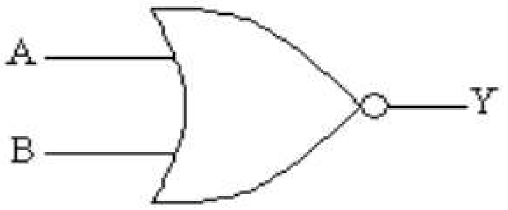
A	B	$Y = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Portes NON OU

- Une négation à la sortie d'une porte OU constitue une fonction NON OU (NOR : NOT OR)

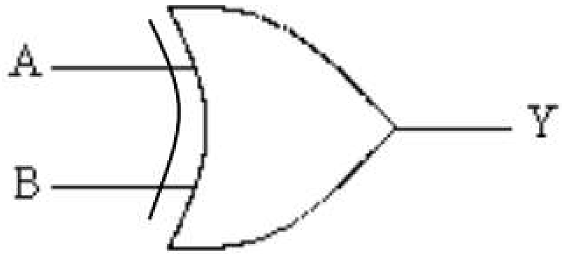
A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Porte OU-EXCLUSIF (XOR)

- Au moins deux entrées
- La sortie d'une fonction XOR est dans l'état 1 si le nombre de ses entrées à 1 est un nombre impair

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Réalisation des fonctions booléennes

- Toute fonction logique peut être réalisée à l'aide des portes
- Réalisation d'une fonction booléenne
  - Écrire l'équation de la fonction à partir de sa table de vérité
  - Simplifier l'équation
  - Réaliser l'équation à l'aide des portes disponibles

Comment rendre une table de vérité en une fonction booléenne

- À partir de la table de vérité, nous pouvons avoir deux formes analytiques, dénommées formes canoniques
  - **somme canonique de produits (SOP)**
  - **produit canonique de sommes (POS)**

Écritures canoniques (SOP)

- 3 variables, terme produit, qu'on appelle minterme, égal au **ET** des variables qui composent cette combinaison

				P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
	x	y	z	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,z$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,z$	$x\,y\,\bar{z}$	$x\,y\,z$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Écritures canoniques, SOP

A	B	C	F	$P_3 + P_5 + P_6 + P_7$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Cette façon, très générale, d'écrire une fonction booléenne est appelée <u>somme canonique de produits</u> (SOP)

$$F(A, B, C) = P_3 + P_5 + P_6 + P_7$$

$$F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = \sum(3,5,6,7)$$

Écritures canoniques (POS)

- **3 variables,** terme somme, qu'on appelle maxterme, égal au **OU** des variables qui composent cette combinaison

				S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
	X	**Y**	**Z**	$X+Y+Z$	$X+Y+\overline{Z}$	$X+\overline{Y}+Z$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	$\overline{X}+Y+Z$	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Écritures canoniques, POS

X	Y	Z	F	$S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$F(X, Y, Z) = S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4$$

$$\Downarrow$$

- $F(X,Y,Z)= (X+Y+Z)\ (X+Y+\bar{Z})\ (X+\bar{Y}+Z)\ (\bar{X}+Y+Z)$

Cette écriture est appelée <u>produit canonique de sommes</u> (POS)

Écritures canoniques

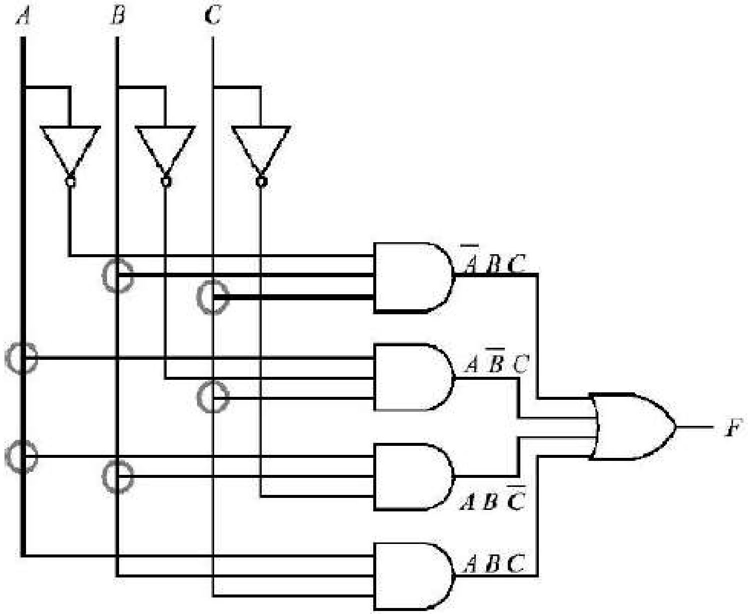
- Écritures canoniques expriment une fonction booléenne à l’aide des opérateurs logiques ET, OU, NON

On peut réaliser une fonction à l’aide des portes
ET, OU, NON

Écritures canoniques d'une fonction logique

$\overline{A}BC$

A	B	C	F	$P_3 + P_5 + P_6 + P_7$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



Relation d’équivalence des circuits

- Soucis majeurs des concepteurs
  - Réduire le nombre de portes nécessaires à la réalisation des systèmes
    - Minimiser le coût en nombre de boîtiers
    - La consommation électrique
  - Minimiser la complexité
    - Créer un système équivalent avec certains paramètres optimisés
  - Recherche d’équivalence
    - Utiliser les lois et théorèmes de l’algèbre de Boole

Toutes les relations de l'algèbre de Boole

George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864

- ## Les propriétés de l'algèbre de Boole

  - La commutativité : $A.B = B.A$
    $A+B = B+A$
  - L'associativité : $(A.B).C = A.(B.C)$
    $(A+B)+C = A+(B+C)$
  - La priorité : $A+B.C = A+(B.C)$
    Le ET est prioritaire devant le OU (comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition)
  - La distributivité : $A.(B+C) = (A.B) + (A.C) = A.B+A.C$
    Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

    $$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$

    En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)
  - Les éléments neutres : $A.1 = A$
    $A+0 = A$
  - Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
    $A+1 = 1$
  - La complémentarité : $A.\overline{A}=0$
    $A+\overline{A}=1$
  - L'idempotence : $A.A=A$
    $A+A=A$

Penser que A peut être une expression logique

Les théorèmes de l’algèbre de Boole

- Théorème d’involution : $\overline{\overline{A}} = A$
  $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
- Théorème d’inclusion : $A.B + A.\overline{B} = A$
  $(A+B).(A+\overline{B}) = A$

  Démonstration : mettre A en facteur (distributivité « à l'envers ») :
  $A.B + A.\overline{B} = A.(B+\overline{B}) = A$
  $(A+B).(A+\overline{B}) = A + B.\overline{B} = A$

- **Théorème d’allégement** : $\mathbf{A.(\overline{A} + B) = A.B}$
  $\mathbf{A + \overline{A}.B = A + B}$

  Démonstration : utiliser la distributivité (du ET et du OU) :
  $A.(\overline{A}+B) = A.\overline{A} + A.B = A.B$
  $A + \overline{A}.B = (A+\overline{A}).(A+B) = A + B$

- **Théorème d’absorption** : $\mathbf{A.(A+B) = A}$
  $\mathbf{A+(A.B) = A}$

  Démonstration par la distributivité du ET (*utilisée dans les 2 sens*) :
  $A.(A+B) = A.A + A.B$ (distributivité du ET)
  $= A + A.B$ (2ème forme du théorème d'absorption)
  $= A.(B+1)$ (mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »)
  $= A.1$
  $= A$

  Démonstration par la distributivité du OU (*utilisée dans les 2 sens*) :
  $A + A.B = (A+A).(A+B)$ (distributivité du OU)
  $= A.(A+B)$ (1ère forme du théorème d'absorption)
  $= (A+0).(A+B)$ (pour y voir plus clair dans ce qui va suivre ...)
  $= A + (B.0)$ (distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »)
  $= A + 0$
  $= A$

- **Théorème de De Morgan** : $\mathbf{\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}}$ ➡ porte ET-NON
  $\mathbf{\overline{A+B} = \overline{A} . \overline{B}}$ ➡ porte OU-NON

Résumé des identités booléennes de base

OU (Dualité)	$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ $A + B = B + A$ $A + A = A$ $A + 0 = A$ $A + 1 = 1$
ET (Dualité)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ $A \cdot B = B \cdot A$ $A \cdot A = A$ $A \cdot 1 = A$ $A \cdot 0 = 0$
Distributivité	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Résumé des identités booléennes

NON	$\overline{\overline{A}} = A$ $\overline{A} + A = 1$ $\overline{A} \bullet A = 0$
Loi d'absorption	A + (A • B) = A A • (A + B) = A
De Morgan	$\overline{A \bullet B \bullet C \bullet \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$ $\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \ldots$
OU exclusif	$A \oplus B = (A + B) \bullet \overline{(A \bullet B)}$ $A \oplus B = (A \bullet \overline{B}) + (B \bullet \overline{A})$ $A \oplus B = \overline{(A \bullet B) + (\overline{A} \bullet \overline{B})}$ $A \oplus B = (A + B) \bullet (\overline{A} + \overline{B})$ $A \oplus B = \overline{A} \bullet B + A \bullet \overline{B}$

Relation d’équivalence des circuits

- La manipulation algébrique

$$F(A,B,C) = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + A \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} + A \bullet B \bullet C =$$

$$= C \bullet (\overline{A} \bullet \overline{B} + A \bullet B) + \overline{C} \bullet (A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B) =$$

$$= C \bullet (\overline{A \oplus B}) + \overline{C} \bullet (A \oplus B) = A \oplus B \oplus C$$

Relation d’équivalence des circuits

- Deux fonctions logiques sont équivalentes si, et seulement si, les valeurs de leurs sorties sont les mêmes pour toutes les configurations identiques de leurs variables d’entrée

Tableaux de Karnaugh

Soit un système combinatoire de 4 entrées 1 sortie

L'analyse de son fonctionnement nous mène à construire une table de vérité à 2^4 = 16 lignes

D	C	B	A	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Le tableau se remplit par l'état de S pour chacune des combinaisons d'entrée

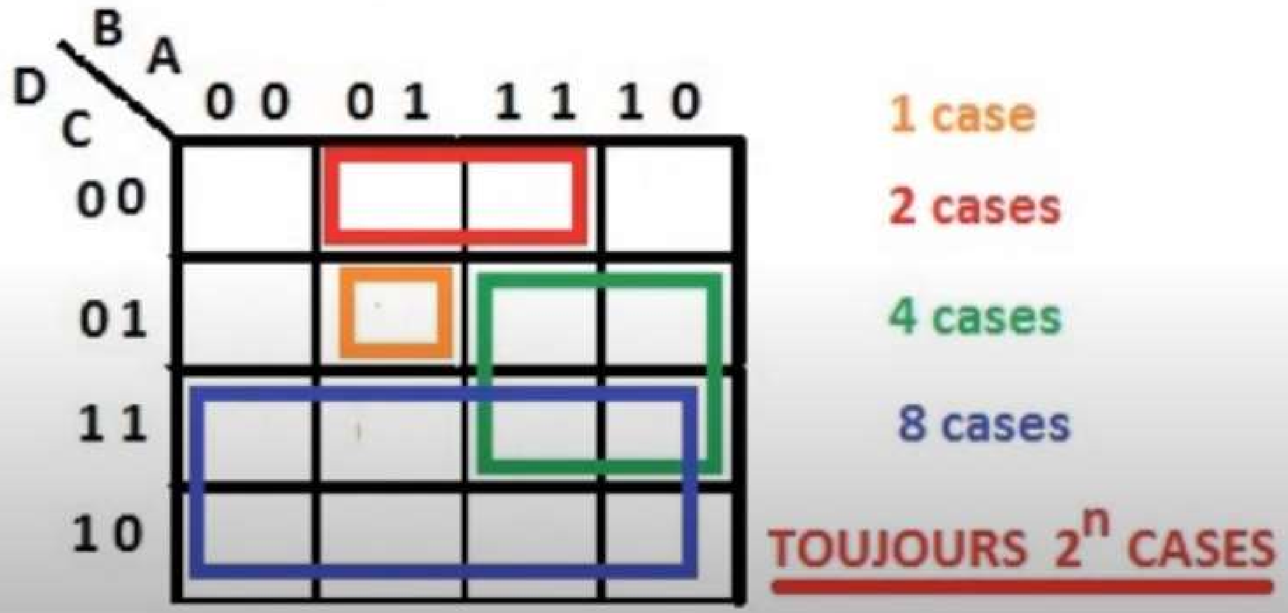
DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

D	C	B	A	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

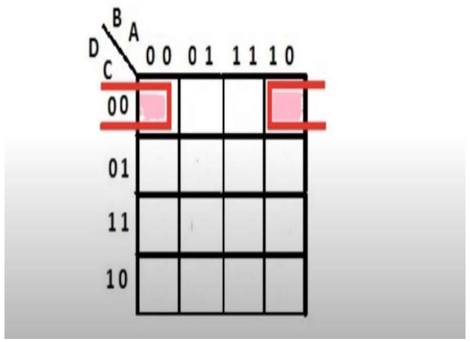
Il reste maintenant à regrouper les '1' par le minimum de paquets de 2^n cases les plus grands possibles

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

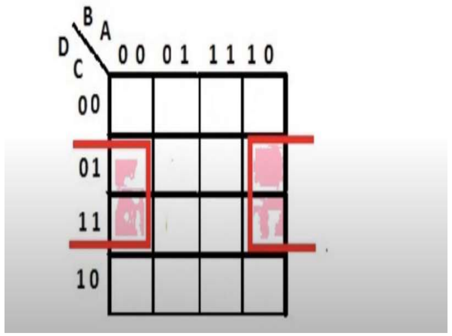
Les cases regroupées doivent être adjacentes c'est à dire qu'une seule variable change d'une case à l'autre .
Grâce au binaire réfléchi c'est le cas pour les cases voisines !
... mais pas seulement !!!!



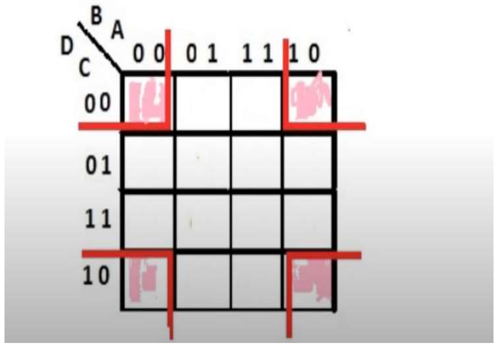
Ces 2 cases sont adjacentes car seule la variable B a changé



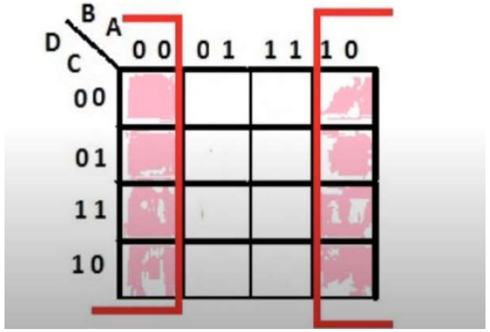
Celles - ci aussi !!!



Celles - ci aussi !!!



Celles - ci aussi !!!!



D	C	B	A	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Celui-ci serait possible mais inutile car les '1' sont déjà pris : on dit qu'il est "redondant"

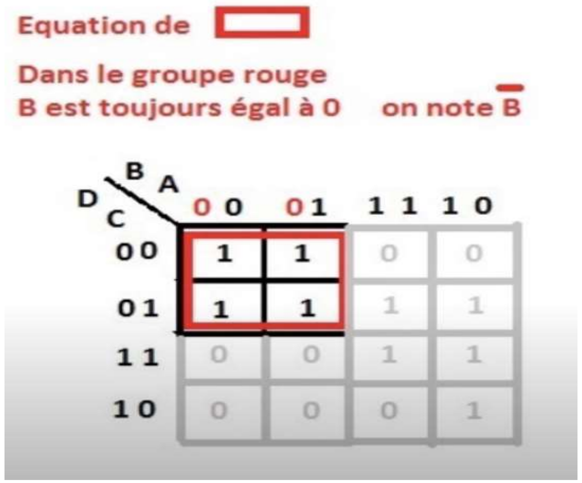
DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

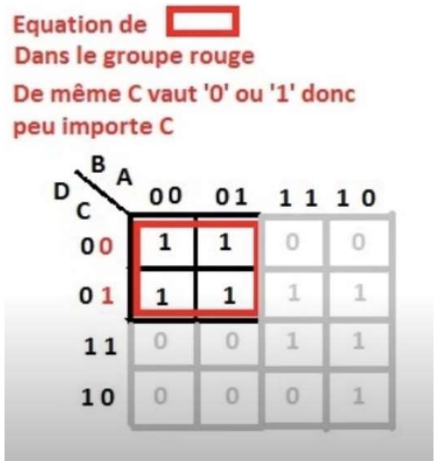
D	C	B	A	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

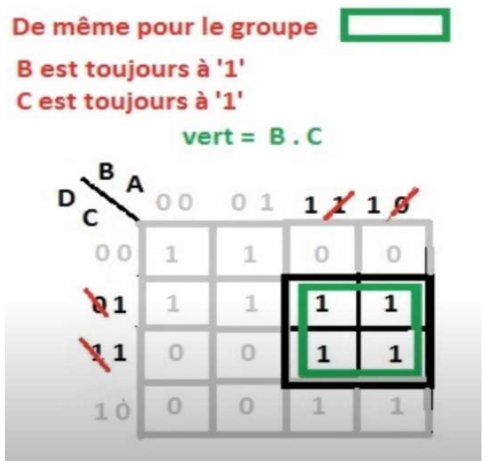
Quelle équation résulte de ces groupes ?

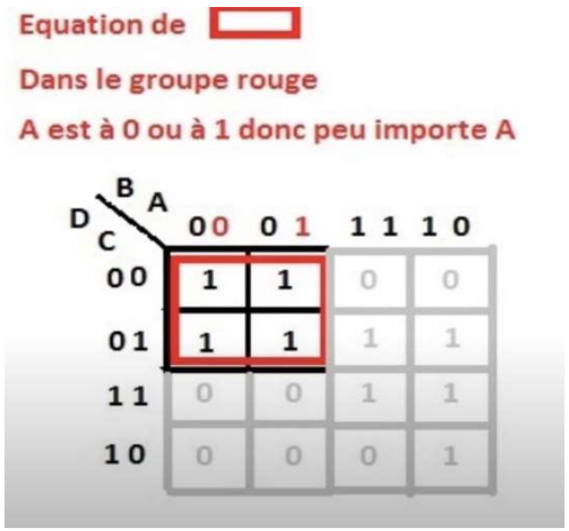
C'est la somme des équations de chaque groupe S = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ + $\boxed{}$

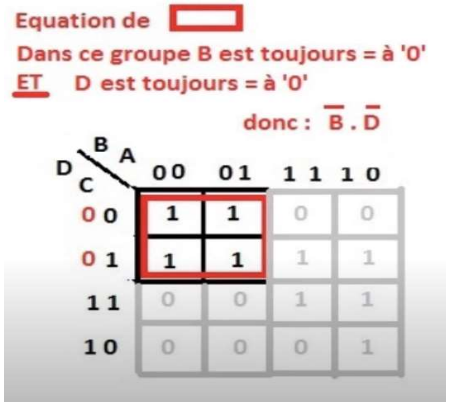
DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

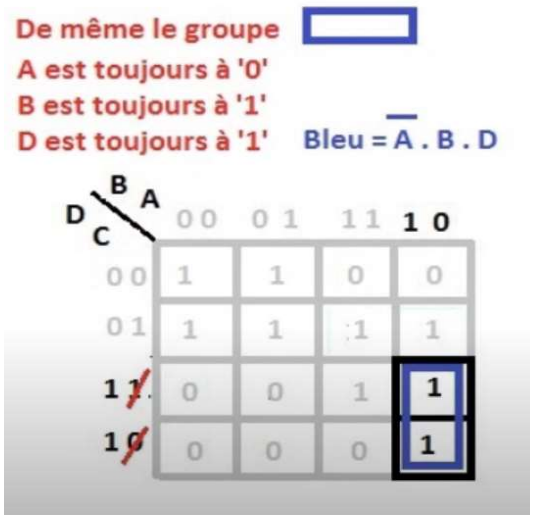

Equation de
Dans le groupe rouge
B est toujours égal à 0 on note $\overline{B}$


Equation de
Dans le groupe rouge
De même C vaut '0' ou '1' donc
peu importe C


De même pour le groupe
B est toujours à '1'
C est toujours à '1'
vert = B . C

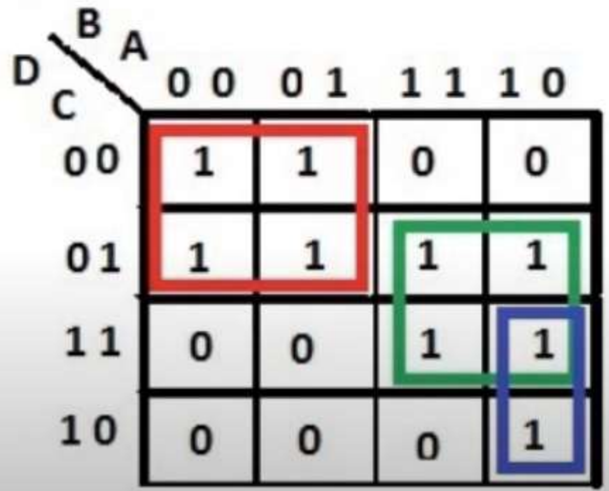

Equation de
Dans le groupe rouge
A est à 0 ou à 1 donc peu importe A


Equation de
Dans ce groupe B est toujours = à '0'
ET D est toujours = à '0'
donc : $\overline{B} . \overline{D}$


De même le groupe
A est toujours à '0'
B est toujours à '1'
D est toujours à '1'
Bleu = $\overline{A} . B . D$

Au final

$$S = \overline{B} \cdot \overline{D} + B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot D$$



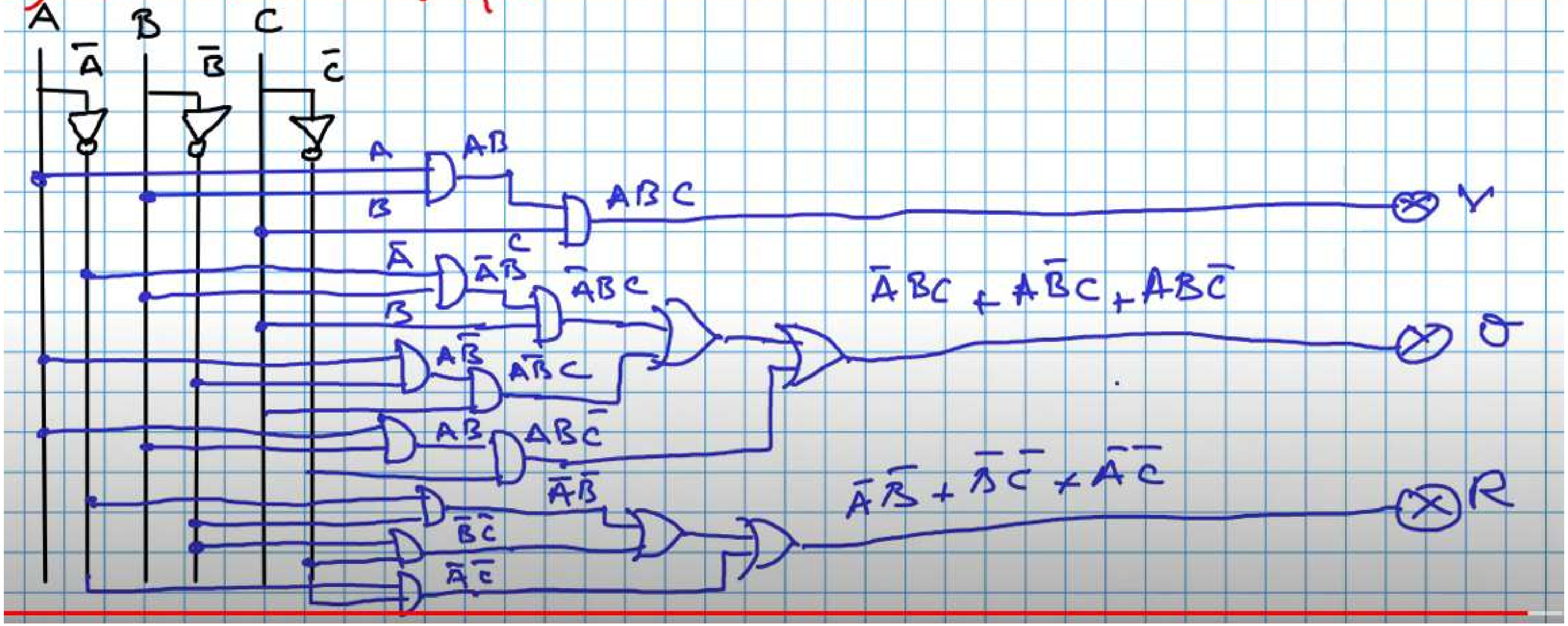
Exercice

Cahier de charge :
Un magasin possède 3 portes dont la fermeture est contrôlée par des fin de courses A, B, et C .
suite à l'état des portes (ouvert=0, fermé=1) on a un système de signalisation constitué de 3 lampes verte, orange et rouge (V,O,R)
La lampe verte s'allume lorsque les 3 portes sont fermées
La lampe orange s'allume si seulement 2 portes sont fermées
La lampe rouge s'allume si les 3 portes sont ouvertes ou seulement une porte fermée.

1. Etablir la table de vérité (V,O, et R en fonction de A,B et C).
2. Trouver les équations minimales des sorties.
3. Donner le schéma électrique de câblage pour réaliser la fonction logique simplifier en utilisant les circuits logiques (7404, 7408, 7432).

NON ET OU

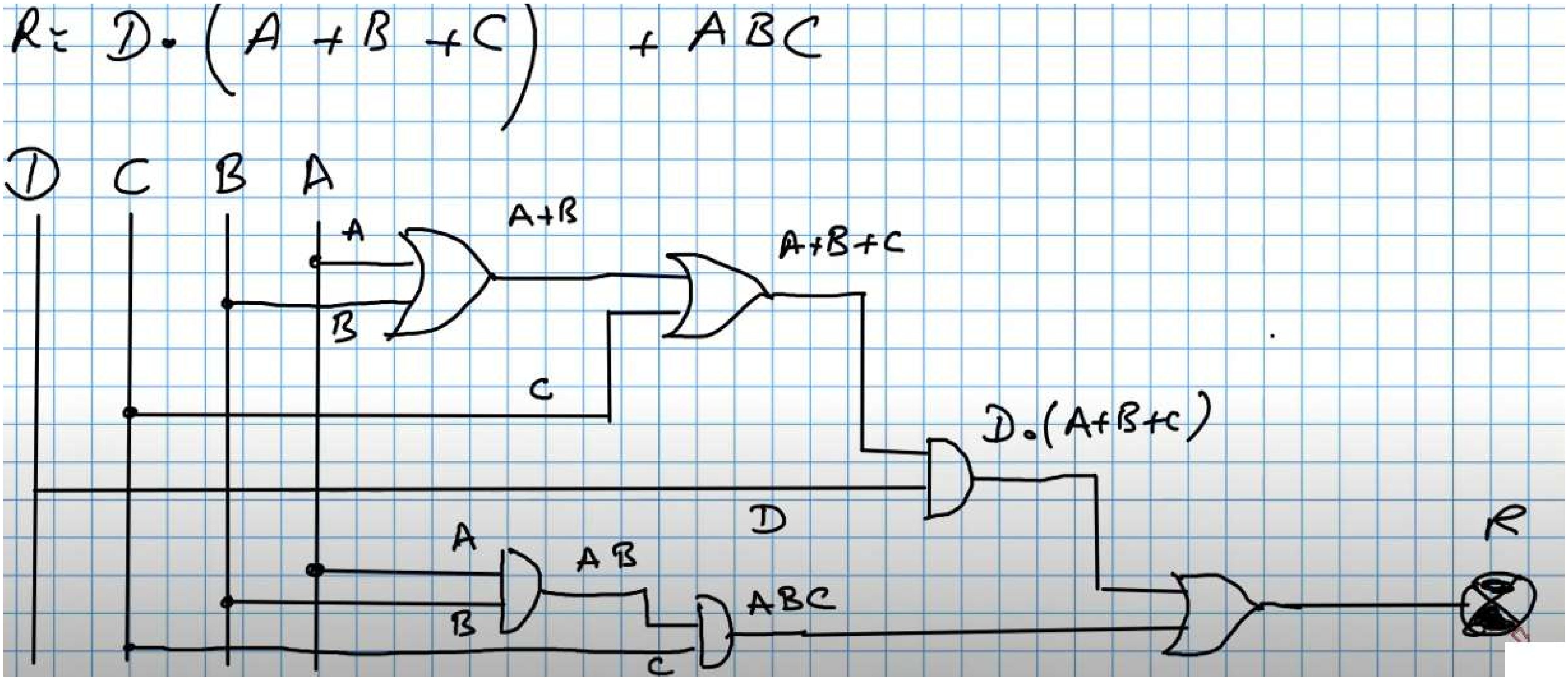
3) Schéma logique.

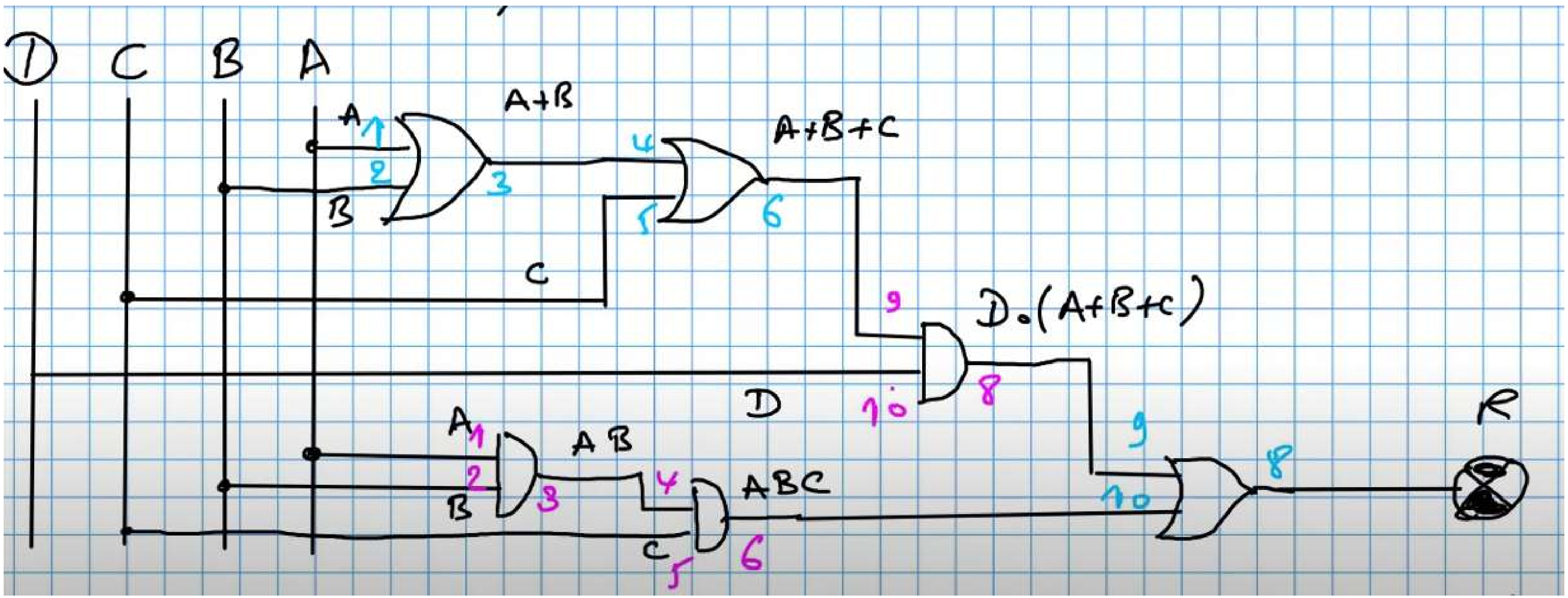


Le comité directeur d'une entreprise est constitué de quatre membres :
- le directeur D.
- ses trois adjoints A, B, C.

Lors des réunions, les décisions sont prises à la majorité.
Chaque personne dispose d'un interrupteur pour voter sur lequel elle appuie en cas d'accord avec le projet soumis au vote.
En cas d égalité du nombre de voix, celle du directeur compte double.
On vous demande de réaliser un dispositif logique permettant l'affichage du résultat du vote sur lampe R.

a. Donner l'équation logique de R
b. Réaliser le schéma logique de la sortie R avec portes Non, ET, OU
c. Réaliser le branchement du schéma sur feuille annexe


R= D.(A+B+C) + ABC
D C B A
A
B
A+B
A+B+C
C
D.(A+B+C)
D
A
B
AB
ABC
C
R


D C B A
A+B
A+B+C
C
D.(A+B+C)
D
AB
ABC
R