Correction de la série 3

Ex1 : un calcul simple montre que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

On remarque que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

donc : dans $M_n(K)$, si $AB = 0$ ceci n'entraîne pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Ex2 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calculer $(A + I_3)^3$

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse :

a) on vérifie facilement que $(A + I_3)^3 = 0$.

b). On sait que $(A + I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$.

donc : $A(A^2 + 3A + 3I_3) + I_3 = 0. \Rightarrow A(A^2 + 3A + 3I_3) = -I_3$

par suite $A(-A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$ ceci entraîne que A est inversible et l'inverse de A est :

$$A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3.$$

Ex3 : $\Delta_1 = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \end{array}$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ on sait que si on ajoute des colonnes à une colonne, le determinant ne change pas, donc

$$\Delta_1 = \begin{array}{cccc} c'_1=c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 6\times 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6\times 1 & 3 & 1 & 1 \\ 6\times 1 & 1 & 3 & 1 \\ 6\times 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{array}{cccc} c'_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{array}{cccc} c'_1 & c_2-c'_1 & c_3-c'_1 & c_4-c'_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

on développe suivant la 1ère ligne

$$= 6 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,(2\times2\times2) = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} c_1 & c_2-c_1 & c_3-c_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

on développe suivant la 1ère ligne

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Suite de l'ex 3 :

2- $A^p = 0 \Rightarrow \det(A^p) = \det 0 = 0$

$\Rightarrow (\det(A))^p = 0.$

$\Rightarrow \det A = 0.$

- $A^2 = A \Rightarrow \det A^2 = \det A.$

$\Rightarrow (\det(A))^2 = \det A$

$\Rightarrow \det(A) \cdot (\det(A) - 1) = 0.$

$\Rightarrow \det A = 0$ ou $\det A = 1.$

- $A^2 = I_n \Rightarrow \det A^2 = \det I_n = 1$

$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1$

$\Rightarrow \det A = \pm 1$

- $A \in M_n(K)$ avec n impair et A antisymétrique

c'est à dire ${}^tA = -A \Rightarrow \det {}^tA = \det(-A)$

$= (-1)^n \det A$

$= -\det A$

Car n est impair.

or : $\det {}^tA = \det A \Rightarrow \det A = -\det A.$

$\Rightarrow 2\det A = 0$

$\Rightarrow \det A = 0.$

Ex 4 : $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & a+c \\ b+c & a+2b+c \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$E \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$, il suffit de prendre (

$a = b = c = 0$.

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & a+c \\ b+c & a+2b+c \end{pmatrix}$

et $M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a'-c' & a'+c' \\ b'+c' & a'+2b'+c' \end{pmatrix} \in E$

$\alpha M(a,b,c) + \beta M(a',b',c') = \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha c & \alpha a + \alpha c \\ \alpha b + \alpha c & \alpha a + 2\alpha b + \alpha c \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} \beta a' - \beta c' & \beta a' + \beta c' \\ \beta b' + \beta c' & \beta a' + 2\beta b' + \beta c' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha c + \beta a' - \beta c' & \alpha a + \alpha c + \beta a' + \beta c' \\ \alpha b + \alpha c + \beta b' + \beta c' & \alpha a + 2\alpha b + \alpha c + \beta a' + 2\beta b' + \beta c' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') - (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') + (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') + 2(\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') \end{pmatrix}$

posons $a'' = \alpha a + \beta a'$, $b'' = \alpha b + \beta b'$, $c'' = \alpha c + \beta c'$

on a $\alpha M(a,b,c) + \beta M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a'' - c'' & a'' + c'' \\ b'' + c'' & a'' + 2b'' + c'' \end{pmatrix} \in E$

donc E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Pour calculer $\dim E$, il faut déterminer une base de E.

5

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & a+c \\ b+c & a+2b+c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & c \\ c & c \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

est une famille génératrice de E

de plus, elle est libre car $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

tq: $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E

puisque son cardinal est 3, alors

$\dim E = 3$.