

Série 2 Mathématiques

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $f(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par : $g(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $h(x, y) = (x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $k(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 2

1- Sur \mathbb{R}^2 , on définit la relation \mathcal{R} par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mathcal{R} (x, y) \Leftrightarrow x = x'$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2- Sur \mathbb{N} , on définit la relation \mathcal{R} par : $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \mathcal{R} q \Leftrightarrow 2 \text{ divise } q$. \mathcal{R} est-elle une relation d'équivalence ou d'ordre.

Exercice 3

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur \mathbb{R} et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E . Montrer que $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$ sont deux sous espaces vectoriels de E

Exercice 4

Montrer si le sous ensemble F suivant est un sous espace vectoriel de E

a- $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : D^n P < n, n \in \mathbb{N}\}$

b- $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $F = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f \text{ est croissante sur } I\}$

c- $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x + y + z, x - y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 5

Montrer que la famille $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2

Exercice 6

On considère dans \mathbb{R}^3 , le sous ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$

- 1- Montrer que F est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3
- 2- Donner une base de F et calculer la dimension de F
- 3- F est il égale à \mathbb{R}^3 ?