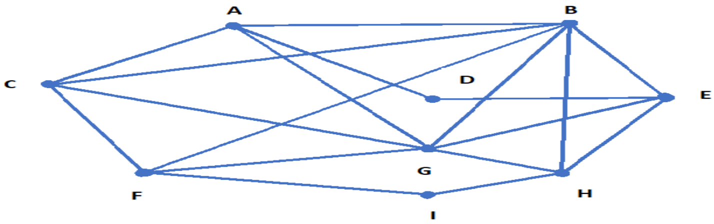
TD de théorie des graphes

– Pr.Abdelaziz QAFFOU –

Exercice 1

Déterminer le degré de chacun des sommets du graphe ci-dessous :



Correction 1

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

Exercice 2

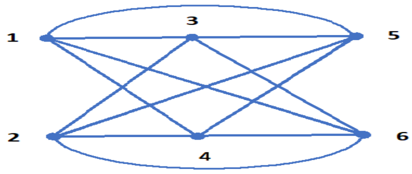
Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue !).

1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que i espionne j que et j espionne i.
2. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?
3. Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

Correction 2

Les espions d'un même pays sont notés : 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6.

1. Graphe



2. Ce graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne s'espionnent pas, donc les sommets correspondants ne sont pas adjacents.
   En revanche ce graphe est connexe car entre tout couple de points, il existe au moins une chaîne.
3. Les sommets sont tous de degré 4 car chaque espion en espionne quatre autres. Autrement dit :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	4	4	4	4	4	4

La somme des degrés étant égale au double du nombre d'arêtes, celui-ci vaut 12.

Exercice 3

Peut-on construire un graphe simple (aucune arête n'est une boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets) ayant :

1. 4 sommets et 7 arêtes
2. 5 sommets et 11 arêtes
3. 10 sommets et 46 arêtes.

Correction 3

1. Si le graphe simple contient 4 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 3, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 12. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 6, donc ne peut pas être égal à 7.
2. Si le graphe simple contient 5 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 4, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 20. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 10, donc ne peut pas être égal à 11.
3. Si le graphe simple contient 10 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 9, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 90. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ≤ 45, donc ne peut pas être égal à 46.

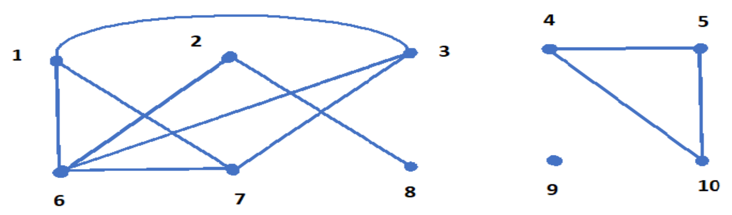
Exercice 4

Etant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.
2. Ce graphe est-il complet ? Connexe ?
3. Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

Correction 4

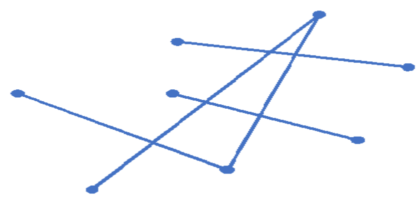


1.
2. Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, 1 et 2 ne sont pas adjacents. Il n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant 3 et 4. En revanche, il admet deux sous graphes connexes (1,2,3,6,7,8) (4,5,10) et un point isolé 9.

3. Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié la composante connexe (1, 2 , 3 , 6 ,7, 8) serait complète.

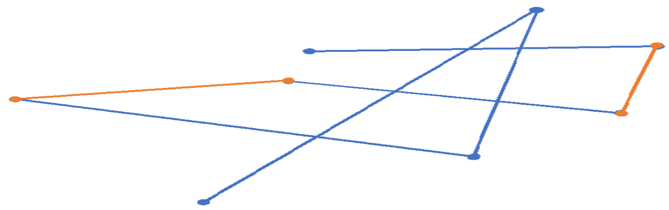
Exercice 5

Transformer le graphe ci-dessous en lui rajoutant un nombre minimal d'arêtes pour qu'il soit connexe.



Correction 5

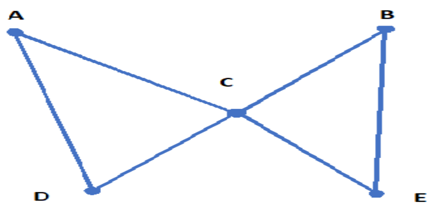
En rajoutant deux arêtes (en Orange), on peut rendre ce graphe connexe.



Exercice 6

Le chasse neige doit déblayer les 6 routes qui relient 5 villages A, B, C, D et E Peut-on trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une et une seule fois chaque route ?

1. en partant de E et en terminant par E
2. en partant de C et en terminant à D
3. en partant de A et en terminant à A



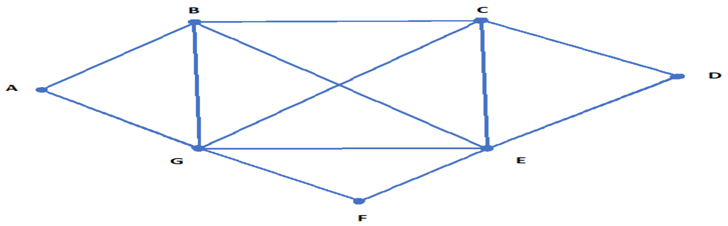
Correction 6

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voire un cycle) associée à ce graphe.
Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler assurer l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

1. E-C-D-A-C-B-E est un exemple.
2. il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D
3. A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

Exercice 7

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments



d'une entreprise importante. Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes ; AG = 12 minutes ; BC = 8 minutes ; BE : 12 minutes ; BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes ; CE = 4 minutes ; CG : 10 minutes ; DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens du parcours.

1. Montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.

Correction 7

1. Puisque seuls les sommets E et G sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne. Il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est EGCBECDEFGBAG
2. L'agent de sécurité ne peut pas revenir à son point de départ car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

Exercice 8

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins).

1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières.
2. — a) Ce graphe est-il complet ? Connexe ?
   — b) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes ?
3. — a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
   — b) Quel est le diamètre du graphe ?
4. — a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
   — b) est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?
5. Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Précisez de quels pays il s'agit.
6. Colorez les huit pays avec un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays adjacents portent deux couleurs différentes.

Correction 8

1. Une représentation est possible.
2. — a) Ce graphe n'est pas complet (2 et 6 ne sont pas adjacents) mais est connexe.

— b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés vaut 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 3 + 2 + 3 = 26. Il y a donc 13 arêtes.

3. — a) La distance entre les sommets 1 et 5 vaut 3.
   — b) Ce graphe a pour diamètre 3.
4. — a) Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien, donc il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.
   — b) Puisque deux sommets exactement sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne, donc il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays.
5. On doit construire un nouveau graphe ou deux pays seront adjacents s'ils n'ont pas de frontière commune Le plus grand sous-graphe complet de ce graphe a pour ordre 3. Le nombre maximum de pays sans frontière commune est donc égal à 3.
6. Le degré maximum étant égal à 4, et le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 4 (1,2,3,8), le nombre chromatique n du graphe vérifie $4 \leq n \leq 5$.
   On applique l'algorithme de coloration.

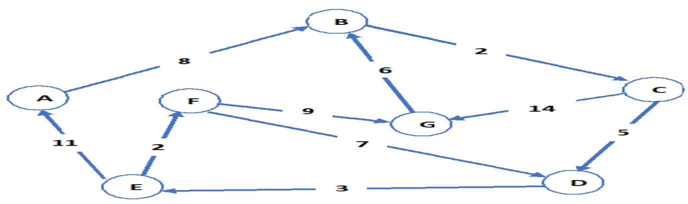
Sommet	Degré	Couleur
1	4	Couleur 1
2	4	Couleur 2
3	4	Couleur 3
4	4	Couleur 4
6	3	Couleur 1
8	3	Couleur 4
5	2	Couleur 2
7	2	Couleur 2

On déduit de cette coloration que $n = 4$.

Exercice 9

Remplir le tableau suivant qui, pour le graphe valué ci-dessous, donne la valeur du plus court chemin d'un sommet à un autre.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							



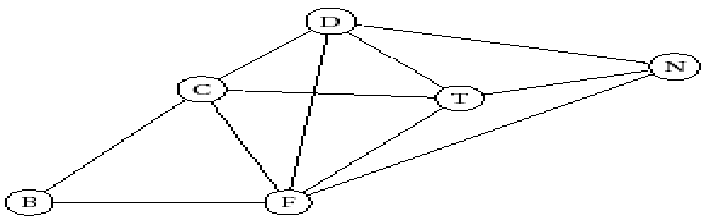
Correction 9

Le calcul peut se faire directement... On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	8	10	15	18	20	24
B	21	0	2	7	10	12	16
C	19	20	0	5	8	10	14
D	14	20	22	0	3	5	14
E	11	17	19	9	0	2	11
F	21	15	17	7	10	0	9
G	27	6	8	13	16	18	0

Exercice 10

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. — a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

   — b) Justifier que le graphe est connexe.

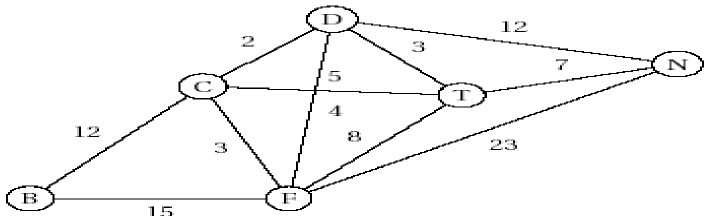
2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
   — a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$
   — b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe. Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.

Correction 10

1. — a) Recopier et compléter le tableau suivant :



Sommet	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	2	4	4	5	3	4

(Rappel : le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est l'extrêmité)

— b) Justifier que le graphe est connexe.
Ce graphe est connexe car tous les sommets peuvent être reliés entre eux par (au moins) une chaîne.
Par exemple, la chaîne BCDNTF contient tous les sommets.

2. L'existence d'un parcours permettant au groupe de passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin est liée à l'existence d'une chaîne eulérienne.
   Puisque deux sommets exactement sont de degré impair et que les autres sont de degré pair, le théorème d'Euler nous permet d'affirmer l'existence d'une telle chaîne eulérienne, donc d'un tel parcours.
   Par exemple, le trajet F-B-C-F-N-T-F-D-C-T-D-N répond au problème.
3. — a) Le sommet ayant le plus grand degré est le sommet F, de degré 5.
   Le cours nous affirme qu'alors $n \leq 5+1$, c'est-à-dire $n \leq 6$. De plus, le sous-graphe FCTD, d'ordre 4, étant complet, on aura $n \geq 4$ (il faudra au moins 4 couleurs pour le colorier).
   — b) On utilise l'algorithme de coloration dit "algorithme glouton" pour colorier le graphe :

Sommet	Degré	Couleur
F	5	Couleur 1
C	4	Couleur 2
D	4	Couleur 3
T	4	Couleur 4
N	3	Couleur 2
B	2	Couleur 4

Le nombre chromatique de ce graphe est donc égal à 4

4. On utilise l'algorithme du plus court chemin de Dijkstra pour déterminer une chaîne qui minimise la distance du trajet enter B et N :

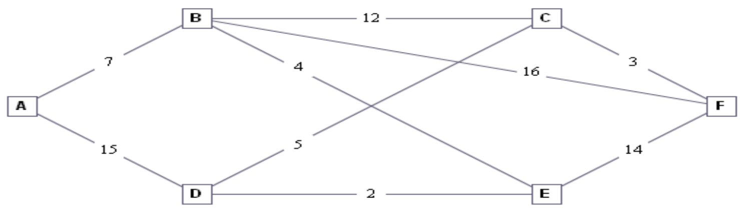
B	C	F	D	T	N	Sommet sélectioné
0	∞	∞	∞	∞	∞	B(0)
	0+12=12(B)	~~0+15=15(B)~~	∞	∞	∞	C(12)
		12+3=15(C)	12+2=14(C)	12+4=16(C)	∞	D(14)
		~~14+5=19(D)~~		~~14+3=17(D)~~	~~14+12=26(D)~~	~~T(17)~~ T(16)
		~~17+8=25(T)~~			16+7=23(T)	N(23)

La plus courte chaîne reliant le sommet B au sommet N est donc B-C-T-N, de longueur égale à 23 km.

Exercice 11

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.

Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
   — a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
   — b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.
3. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois. Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

Correction 11

1. Ce graphe est connexe car tous les sommets peuvent être reliés entre eux par (au moins) une chaine. Par exemple, la chaîne ABCDEF contient tous les sommets.
2. — a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F. On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F :

A	B	C	D	E	F	Sommet
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	0+7=7(A)	∞	~~0+15=15(A)~~	∞	∞	B(7)
		~~7+12=19(B)~~		7+4=11(B)	~~7+16=23(B)~~	E(11)
			11+2=13(E)		~~11+14=25(E)~~	D(13)
		13+5=18(D)				C(18)
		13+5=18(D)			18+3=21(C)	F(21)

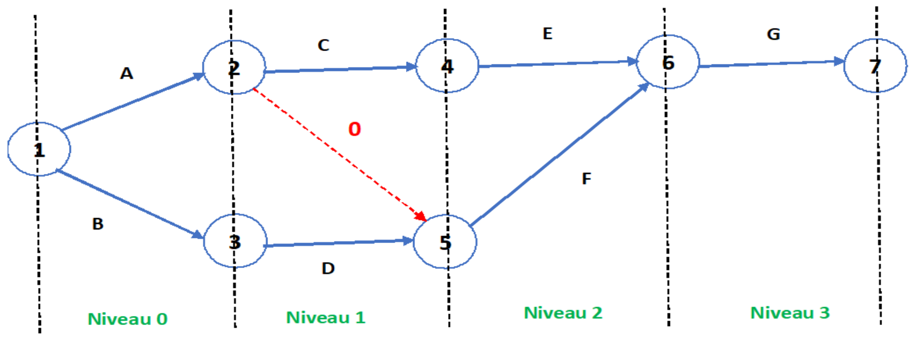
   La plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F est donc A-B-E-D-C-F
   — b) Le poids de la plus courte chaîne A-B-E-D-C-F reliant le sommet A au sommet F est 21. Le temps de transport minimal pour aller du site A au site F est donc de 21 heures.
3. Déterminer un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois revient à chercher une chaîne eulérienne dans ce graphe. Or ce graphe contient quatre sommets de degré impair, à savoir les sommets C, D, E et F qui sont de degré 3. D'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne issue de ce graphe. Il n'existe donc pas de parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.

Exercice 12

Soit le projet à analyser :

Tâches	Antérieur	durée
A	—	6
B	—	5
C	A	4
D	B	6
E	C	5
F	A,D	6
G	E,F	4

Niveau 0 : A et B (n'ont pas d'antérieur)
Niveau 1 : C et D
Niveau 2 : E et F
Niveau 3 : G
Graphe partiel : La tâche A est nécessaire pour C , mais on remarque que A aussi est nécessaire



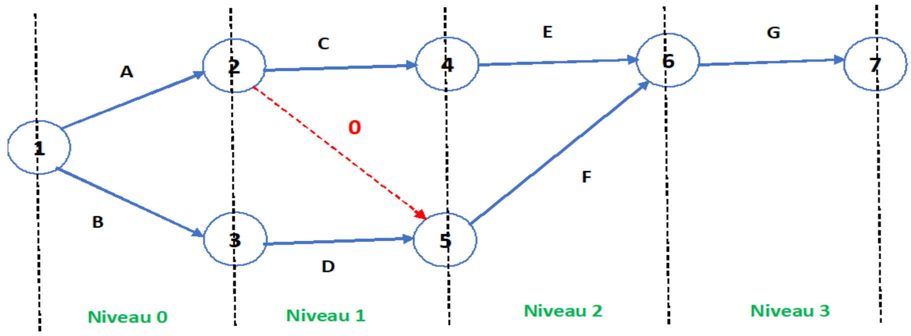
pour F, donc on doit relier A par F par une tâche fictive.
Calcul des dates :

Noeud	Dates au plus tôt (hâtives)	Noeud	Dates au plus tard (tardives)
1	$t_1 = 0$	7	$T_7 = t_7 = 21$
2	t_2 =Max(0+6)=6	6	T_6Min(21-4)=17
3	t_3 =Max(0+5)=5	5	T_5Min(17-6)=11
4	t_4 =Max(6+4)=10	4	T_4Min(17-5)=12
5	t_5 =Max(6+0 ;5+6)=11	3	T_3Min(11-6)=5
6	t_6 =Max(10+5 ;11+6)=17	2	T_2Min(12-4 ;11-0)=8
7	t_7 =Max(17+4)=21	1	T_1Min(8-6 ;5-5)=0

Graphe PERT Complet : Marges libres et Marges totales

Tâches	Marge libre (ML)	Tâches	Marge totale (MT)
A	ML(A)=6-0-6=0	A	MT(A)=8-0-6=2
B	ML(B)=5-0-5=0	B	MT(B)=5-0-5=0
C	ML(C)=10-6-4=0	C	MT(C)=12-6-4=2
D	ML(D)=11-5-6=0	D	MT(D)=11-5-6=0
E	ML(E)=17-10-5=2	E	MT(E)=17-10-5=2
F	ML(F)=17-11-6=0	F	MT(F)=17-11-6=0
G	ML(G)=21-17-4=0	G	MT(G)=21-17-4=0

Les tâches critiques sont les tâches dont la marge totale est nulle.
Dans ce cas : B , D , F et G sont des tâches critiques.



Alors le chemin critique (BDFG).

Remarques :

- La durée du projet est 21.
- Par exemple, si on augmente la durée de la tâche F de 3 , (la durée de F devient 9 au lieu de 6), alors la durée du projet devient 24. (21 + 3 = 24) , F est une tâche critique qui n'a pas de marge totale. [le retard de F = le retard du projet]
- Par exemple , si on augmente la durée de E de 7 (la durée de E devient 12 au lieu de 5) , on retarde E de 7 et comme E a une marge totale de 2 donc on va retarder le projet de (7 – 2 = 5) alors la durée du projet devient (21 + 5 = 26) .
  *****MT(E) = 2 c à d on a un retard acceptable de 2 sans retarder le projet*****