Espaces vectoriels

On traite dans ce qui suit le cas réel, le cas complexe se traitant de manière similaire.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1 *Un* **espace vectoriel** *sur* $\mathbb{R}$ *est un triplet* $(E, +, .)$ *où*

- *E est un ensemble,*
- *"+" une loi de composition interne : $E \times E \to E$ telle que*
  - *(élément neutre)* $\exists 0_E \in E$ *avec* $\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$
  - *(opposé)* $\forall x \in E,\ \exists(-x) \in E$ avec $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
  - *(associativité)* $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z$
  - *(commutativité)* $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$
- *"." est une loi externe : $\mathbb{R} \times E \to E$ telle que : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x, y) \in E^2$,*
  - *i)* $1.x = x$
  - *ii)* $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - *iii)* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
  - *iv)* $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

Les espaces vectoriels complexes, ou $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, sont définis de façon analogue, en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Il faut connaître les exemples suivants

1. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels réels.
2. Soit A un ensemble et $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; l'ensemble des applications de A dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. Si E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{R}$- espaces vectoriels, $E_1 \times E_2$ muni des lois "produit" est encore un espace vectoriel.

4. $(\mathbb{R}[X], +, .)$ est un espace vectoriel réel et $(\mathbb{C}[X], +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2 *Sous-espace Vectoriel S.E.V.*

$$F \text{ est un S.E.V de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \in F \\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Remarque :
- pour la seconde propriété, on peut se contenter de vérifier que

$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

ou encore que

$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ x + \mu y \in F\ .$$

Remarquons qu'une intersection de s.e.v. est encore un s.e.v. (évidemment une telle intersection est non vide puisqu'elle contient le vecteur nul).

Définition 1.3 *On appelle* **sous-espace vectoriel engendré par une partie** *A non vide de E le plus petit S.E.V. de E contenant A. On le note $Vect(A)$. On montre que*

$$Vect(A) = \{x \in E \mid x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ a_i \in A\}$$

Tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient également $Vect(A)$.

1.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1.4 *On dit que G, famille non vide de E, est une* **famille génératrice** *de E si et seulement si $E = Vect(G)$, c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire (finie) d'éléments de G.*

$$G \text{ famille génératrice de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists (g_1, \dots, g_p) \in G^p \\ \qquad \text{avec } x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i\ . \end{cases}$$

Définition 1.5 – *On dit que L, famille non vide de E, est* **une famille libre** *de E si et seulement si*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall(x_1,\dots,x_p) \in L^p,\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts } \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p,$$
$$\text{si } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0,\ \text{alors } \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0\ .$$

- *Si L, famille non vide de E, n'est pas libre, on dit que L est* **liée**.
- *On dit que B, famille non vide de E, est* **une base** *de E si et seulement si B est libre et génératrice.*

Propriété 1.1 *1. Toute partie contenant une partie génératrice de E est encore une partie génératrice.*

2. Toute partie contenue dans une partie libre est libre.

3. Toute partie de E contenant le vecteur nul de E est liée.

4. Toute partie réduite à un vecteur non nul est une partie libre.

On a la caractérisation suivante des bases :

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel et L une famille non vide de E, on a les équivalences :*
- *L est une base de E,*
- *L est une famille libre maximale,*
- *L est une famille génératrice minimale.*

Définition 1.6 *On dit que E est un* **espace vectoriel de dimension finie** *si et seulement si E admet une partie génératrice de cardinal fini (c'est-à-dire contenant un nombre fini d'éléments).*

L'important résultat suivant implique en particulier l'existence de bases (en dimension quelconque).

Théorème 1.1 Théorème de la base incomplète : *Tout espace vectoriel E admet une base. Plus précisément, si G est une partie génératrice de E et L une partie libre de E (ou si $L = \emptyset$), il existe alors une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et B une base de E de cardinal n.

Propriété 1.2 *1. Toute autre base de E contient exactement n éléments. On dit que E est de* **dimension** *n et on note : $dimE = n$. Par convention, on pose $dim(\{0\}) = 0$.*

2. Toute partie libre contient au plus n éléments.

3. Toute partie génératrice contient au moins n éléments.

4. Toute partie libre (respectivement génératrice) de n éléments est une base.

Bien noter que le point 4) donne une caractérisation utile en pratique des bases en dimension finie.

Propriété 1.3 Propriété fondamentale : *Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Tout élément x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \, .$$

Les scalaires λ_i s'appellent **coordonnées** *de x dans la base B.*

Proposition 1.2 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et F un S.E.V. de E , alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$.*

Si de plus $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

Définition 1.7 *Soit $S = \{u_1, \ldots, u_p\}$ un système de p vecteurs de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle* **rang de** *S la dimension du sous-espace vectoriel engendré par S :*

$$rang(S) = dimVect(S)$$

Propriété 1.4 *1. $rang(S) \leq p$.*

2. $rang(S) = p$ si et seulement si S est libre.

3. Le rang de S est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de S.

4. si E est de dimension finie n, alors $rang(S) \leq n$.

5. si E est de dimension finie n, alors $rang(S) = n \Leftrightarrow S$ est une famille génératrice.

1.4 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 1.8 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de E_1 et E_2 le sous-espace vectoriel F de E défini par*

$$F = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$$

On note cette somme $F = E_1 + E_2$.

Remarques :

- $E_1 + \{0_E\} = E_1$ et $\{0_E\} + E_2 = E_2$.
- $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$.

Attention ! Ne pas confondre somme et union de sous-espaces vectoriels. Si un vecteur x appartient à $E_1 + E_2$, cela n'entraîne pas que x appartient à E_1 ou à E_2.

Proposition 1.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $E_1 + E_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $E_1 \cup E_2$:*

$$E_1 + E_2 \; = \; Vect(E_1 \cup E_2)\ .$$

Lemme 1.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0_E\}$. Si B_1 est une base de E_1 et B_2 une base de E_2, alors l'union $B_1 \cup B_2$ est une famille génératrice de $E_1 + E_2$.*

Attention ! En général, $B_1 \cup B_2$ n'est pas une base.

Théorème 1.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\boxed{dim(E_1 + E_2) \; = \; dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)\ .}$$

Définition 1.9 *Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de E_1 et E_2 est directe si

$$E_1 \cap E_2 \; = \; \{0\}$$

On note alors la somme de E_1 et E_2 : $E_1 \oplus E_2$.

La notion de somme directe est justifiée par les équivalences suivantes :

Proposition 1.4 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soient B_1 et B_2 deux bases fixées de E_1 et de E_2. Il y a équivalence entre*

1. *La somme $E_1 + E_2$ est directe.*
2. *Si $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ sont tels que $x_1 + x_2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$.*
3. *$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $B_1 \cup B_2$ est une base de $E_1 + E_2$.*
4. *$dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E_1 + E_2)$.*

Définition 1.10 *Sous-espaces vectoriels supplémentaires.*

On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont supplémentaires dans E si

$$E_1 \oplus E_2 = E \ .$$

Remarques :

- Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, si et seulement si,

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \text{ et } E_1 + E_2 = E \ .$$

- Si deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, alors

$$dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E) \ .$$

  Si, de plus, B_1 est une base de E_1 et B_2 une base de E_2, alors $B_1 \cup B_2$ est une base de E.

Le théorème suivant qui résulte du théorème de la base incomplète assure l'existence de sous-espaces supplémentaires (attention : on n'a pas unicité).

Théorème 1.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 un s.e.v. de E alors il existe E_2 s.e.v. de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$.*

Notons pour finir la caractérisation :

Proposition 1.5 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux s.e.v. de E, alors $E = E_1 \oplus E_2$ ssi pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

1.5 Somme directe de k sous-espaces vectoriels

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur K de dimension finie.

Définition 1.11 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. La somme des k sous-espaces vectoriels E_1, ... ,E_k est l'ensemble, noté $E_1 + \cdots + E_k$:*

$$E_1 + \cdots + E_k = \{x_1 + \cdots + x_k \text{ où } \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ x_i \in E_i\}$$

Lemme 1.2 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E, B_1,..., B_k des bases de $E_1, \ldots, E_k$. Alors $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ est une famille génératrice de $E_1 + \cdots + E_k$.*

Corollaire 1.1 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq dim(E_1) + \cdots + dim(E_k)\ .$$

Remarque : Il n'y a pas égalité en général. Notons que $E_1 + \cdots + E_k = Vect(E_1 \cup \cdots \cup E_k)$.

Définition 1.12 *Somme directe.*Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe si pour tout $x_1 \in E_1$, ... , $x_k \in E_k$, tels que $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$, on a $x_1 = \cdots = x_k = 0_E$.

Remarques :

- Les deux définitions de somme directe coïncident lorsque $k = 2$.
- Bien noter également que, si les k espaces vectoriels E_1, ... ,E_k sont en somme directe, alors, pour $i \neq j$, la somme $E_i + E_j$ est directe. La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que tout couple $E_i + E_j$ soit en somme directe pour que la somme totale $E_1 + \cdots + E_k$ le soit.

Proposition 1.6 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E et $B_1, \ldots, B_k$ des bases de $E_1, \ldots, E_k$ respectivement. Il y a équivalence entre*

1. *La somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe.*
2. *$dim(E_1) + \cdots + dim(E_k) = dim(E_1 + \cdots + E_k)$.*
3. *Pour tout $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ et $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ est une base de $E_1 + \cdots + E_k$.*

Remarque : Bien noter que les bases $B_1, \ldots, B_k$ sont fixées au départ, de sorte qu'il suffit que l'assertion (3) soit vérifiée pour un seul k-uplet de bases pour que la somme $E_1 + \cdots + E_k$ soit directe.

Proposition 1.7 *Si la somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe, alors, pour tout $x_1, \ldots, x_k$ éléments non nuls de $E_1, \ldots, E_k$, la famille $\{x_1, \ldots, x_k\}$ est libre.*