



Université Paris Saclay

Compte rendu TP1

Quantification des incertitudes d'un
écoulement incompressible dans un canal
plan muni d'un obstacle

Realisé par :

Youssef BEN MAHMOUD

Classe : ModSim - AMS

Professeur :

M.Didier LUCOR

2017/2018

Contents

1	Introduction	1
2	Présentation de la méthode	3
2.1	Introduction	3
2.2	Principe	3
2.3	Algorithme	5
3	Résultats du code	6
3.1	Simulation de Monte-Carlo	6
3.2	Méthodes spectrales	7
3.2.1	Approche par projection	7
3.2.2	Approche par regression	8
4	Analyse des résultats et discussion	9
5	Conclusion	10

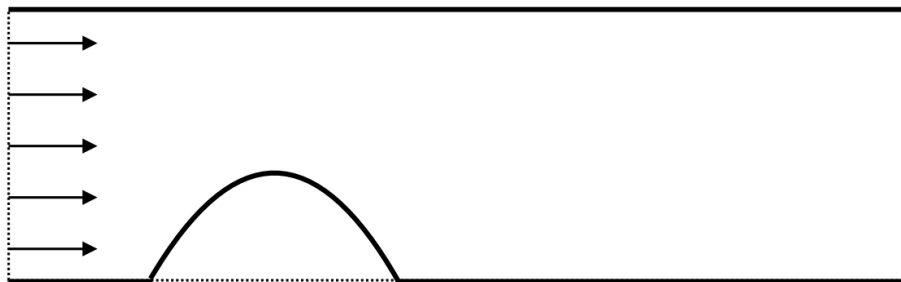
Chapter 1

Introduction

On considère le problème d'un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux et incompressible dans un canal plan muni d'une bosse.

L'objectif de ce TP est de réaliser une quantification de l'effet de l'incertitude de la hauteur de l'obstacle et de la viscosité du fluide sur l'écoulement.

Notre problème est représenté de cette manière:



Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est fixée et ne dépend pas de la pression. D'après l'équation de conservation de la masse on a:

$$\rho = cte \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Pour bien expliquer notre problématique du départ, il faut mettre le point sur le fait qu'on a quelques variables du problème qui sont flous tel que la hauteur de l'obstacle b_H

et le nombre de Reynolds du fluide \mathbf{Re} .

On a ainsi un problème stochastique qu'on essaye de le résoudre. Dans ce cadre là (suite au manque d'information), on suppose que \mathbf{Re} et b_H ayant des distributions de probabilités uniformes iid et on cherche par la suite à calculer numériquement le profil du vitesse du fluide, ce qui a été impossible de le déterminer avant.

On passe tout d'abord par les méthodes non-intrusives qui se présente sous la forme d'un code déterministe en "boite noire" et qui permet de résoudre les champs de vitesse et de pression (Output) tout en variant les paramètres d'entrées (Input) afin d'obtenir à la fin la statistique de la solution.

On a alors 2 options:

- **Méthode de simulation de *Monte-Carlo*** on n'a pas utilisé cette approche vu qu'elle est très couteuse en temps de calcul malgré le fait qu'elle est simple à implémenter. En effet, elle permet de calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires.

——— Méthodes spectrales ———

- **Approche par projection** c'est la méthode qu'on va la détailler dans le chapitre suivant durant l'explication de la méthode utilisée. En fait, en ce qui concerne l'approche par projection et suite à plusieurs simulations en utilisant le code déterministe fourni, on décompose les variables aléatoires de notre étude dans la base **gPC** (les polynomes du Chaos).
- **Approche par régression de type moindres carrés** c'est la méthode qu'on va la détailler aussi dans le chapitre suivant durant l'explication de la méthode utilisée. En fait, elle est construite sur un échantillon de paramètres aléatoirement tirés.

Chapter 2

Présentation de la méthode

2.1 Introduction

La méthode du chaos polynomial est utilisée pour modéliser l'incertitude des paramètres liés à notre écoulement du fluide.

Les solutions stochastiques sont projetées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes orthonormales. Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations pour faire la projection. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomiale, qu'on peut utiliser pour trouver numériquement la distribution ou la statistique de la solution aléatoire du problème.

On s'intéresse durant cette étude au champs de vitesse $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Puisque on traite le cas d'un écoulement bidimensionnel (sur le plan (x,y)), u est le champs des vitesses sur l'axe x et v sur l'axe y.

2.2 Principe

Dans la pratique, il existe plusieurs familles de polynômes orthogonaux (Hermite, Legendre, Laguerre, Jacobi, etc). Tous ces polynômes et d'autres sont regroupés dans le schéma d'Askey.

Pour le cas de la première composante u , elle s'écrit de cette manière:

$$u(\vec{x}, t, X) \cong u^{gPC} = \sum_{k=0}^{M-1} u_k(\vec{x}, t) L_k(X)$$

Avec:

- M le nombre total de termes dans la sommation.
- X la VA composé par les paramètres aléatoires d'entrés.
- L_k polynomes de Legendre.
- u_k les coefficients deterministes liés à la base de projection.

Remarque: Dans la théorie, il s'agit d'une somme infinie mais dans la pratique, on tronque la représentation à un certain ordre polynomial fini.

Sources d'incertitudes bruitées

On sait que X représente les sources d'incertitudes du problème et qui s'écrit de cette manière: $X = \begin{pmatrix} Re \\ b_h \end{pmatrix}$

Il faut noter que les données observées contiennent presque toujours une certaine quantité de bruit.

Les sources d'incertitudes deviennent alors:

$$\begin{cases} Re = \overline{Re} + Re_{std} * \epsilon_1 \\ b_H = \overline{b}_H + b_{H||std} * \epsilon_2 \end{cases}$$

Avec ϵ_1 et ϵ_2 sont des bruits blancs (donc de loi uniforme) qui disparaissent en sommant après plusieurs simulations.

Calcul des coefficients u_k

Après le fait d'approcher le champs de vitesse u par une somme de polynomes gPC, on doit calculer les coefficients u_k .

Les coefficients déterministes u_k sont définis par:

$$u_k = \frac{1}{E[L_k(X)^2]} E[u(\vec{x}, t, X), L_k(X)]$$

2.3 Algorithme

Dans le fichier Matlab intitulé **main_to_complete.m**, on réalise les 3 méthodes d'approximation dont on a présenté précédemment. On commence tout d'abord par définir les paramètres physiques Re et b_H .

Ensuite le code deterministe lance des simulations numériques successives et on affiche pour chaque méthode la statistique des solutions qui est définie par le champ moyen de u et v , l'écartype (std=standard deviation en Anglais) et la covariance, on affiche aussi un aperçu sur les coefficients gPC lors de la résolution par les méthodes spectrales.

Chapter 3

Résultats du code

3.1 Simulation de Monte-Carlo

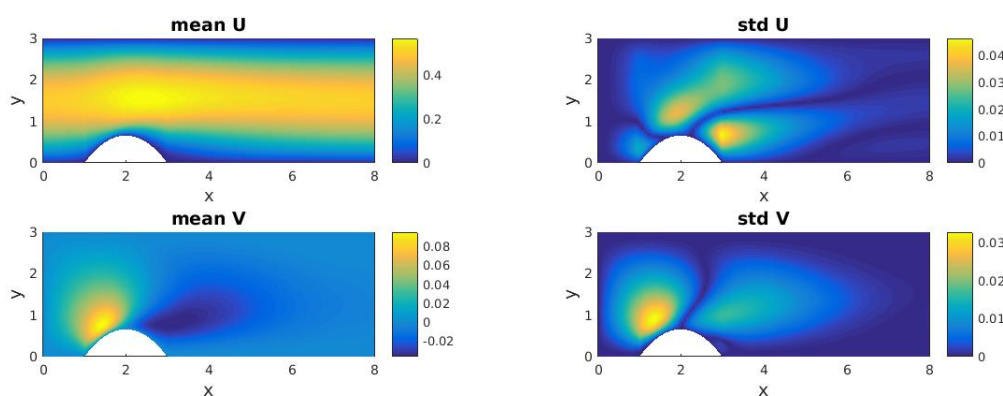


Figure 3.1: Moyenne et std des champs U et V

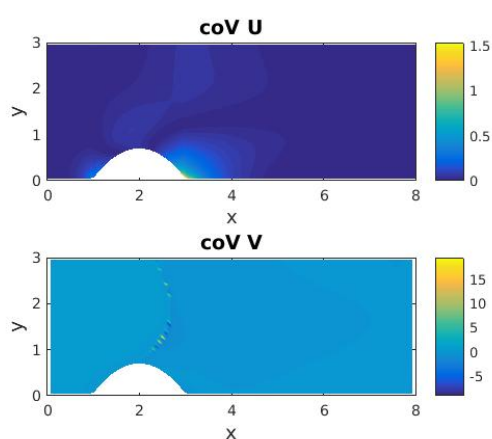


Figure 3.2: Représentation coefficients de variation de U et V

3.2 Méthodes spectrales

3.2.1 Approche par projection

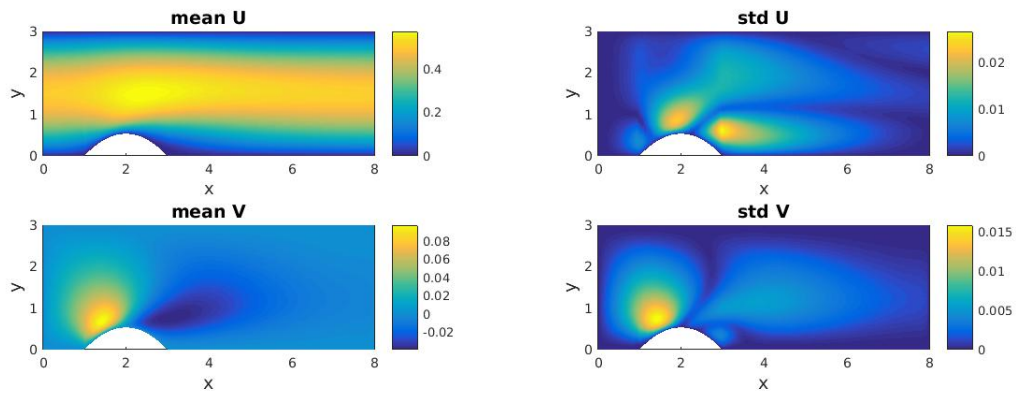


Figure 3.3: Moyenne et std des champs U et V

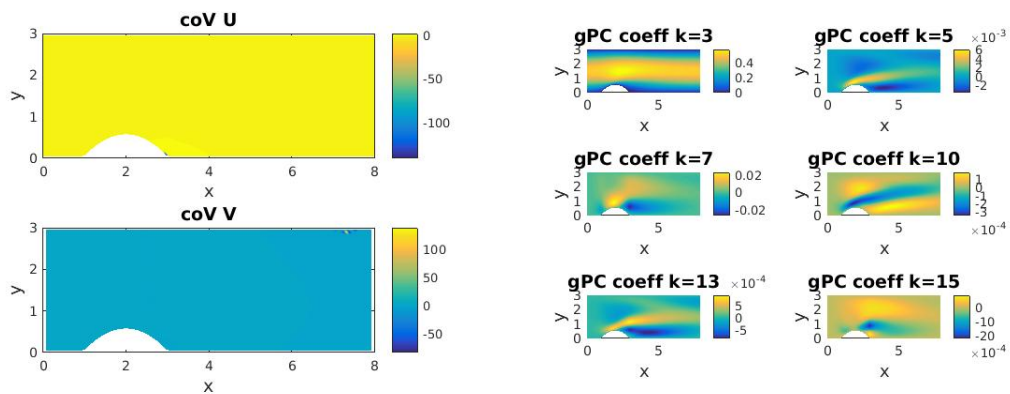


Figure 3.4: Représentation coefficients de variation de U et V (à gauche) et Représentation coefficients gPC (à droite)

3.2.2 Approche par regression

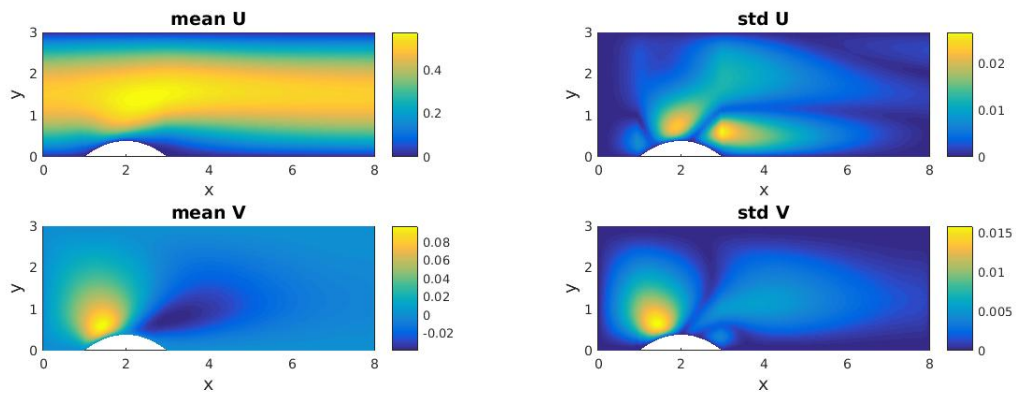


Figure 3.5: Moyenne et std des champs U et V

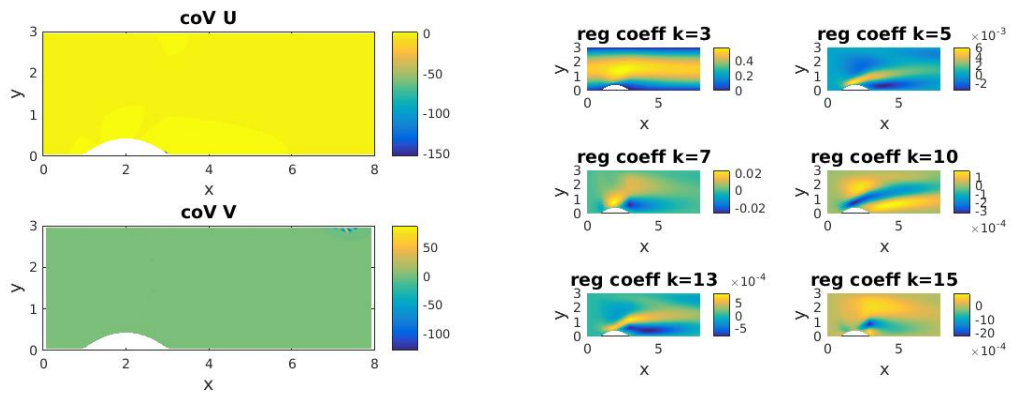


Figure 3.6: Représentation coefficients de variation de U et V (à gauche) et Représentation coefficients gPC (à droite)

Chapter 4

Analyse des résultats et discussion

Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode de référence de Monte-Carlo. Nous présentons quelques simulations numériques pour démontrer l'efficacité et l'applicabilité de l'approche proposée.

On a choisit les polynomes de Legendre pour représenter la solution de notre modèle stochastique.

Contrairement à Monte-Carlo, les méthodes spectrales convergent en un nombre réduit d'itérations (optimisation du temps de calcul). En plus, elle fournit facilement la moyenne et l'écartype de la solution.

Dans le cas où on dispose d'un très grand nombre de paramètres incertains, ce modèle n'est plus adéquat.

Chapter 5

Conclusion

Ce TP a présenté la méthode stochastique basée sur le concept de la projection sur un chaos polynomial pour l'analyse de l'écoulement du fluide visqueux incompressible en présence d'un obstacle. La présente méthode permet une réduction importante du temps de calcul relativement à la méthode de référence de Monte-Carlo. L'ordre du chaos joue un rôle important, plus il est élevé, meilleure est la solution trouvée, surtout pour des variations importantes des paramètres incertaines du système.