



UNIVERSITE MOHAMMED VI

POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT CSEHS

PROJET DE FIN D'ANNÉE

Fonctions radiales de base pour la résolution des EDP.

Réalisé par :

ESSOUSY YOUSSEF

RIFQUI ABDESSADEK

Sous la direction des professeurs :

A. TAIK I. ELMAHI A. EL-KACIMI L. MANIAR

02 Juillet 2020

Contents

0.1	Les fonctions à base radiale	4
0.1.1	Définitions	4
0.1.2	Quelques exemples des fonctions RBF définies positives	4
0.1.3	Principe de la méthode des collocation :	5
0.2	Résolution de quelques équations elliptiques et paraboliques par la méthode multiquadrature	6
0.2.1	Problème de laplace 1D	7
0.2.2	Équation de Laplace en 2D	9
0.3	Résolution de l'équation de la chaleur 1D	12
0.4	Résolution du problème de Transport 1D	14
0.4.1	Équation de transport 1D	14
0.4.2	La méthode RBF multiquadrature	15
0.4.3	La méthode des CSRBF	18
0.5	L'équation d'advection-diffusion	21
0.5.1	Résolution d'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle	21
0.5.2	Résolution d'équation d'advection-diffusion bidimensionnelle	26
0.5.3	Résolution d'équation d'advection-diffusion tridimensionnelle	29
0.6	Résolution d'équation de Burger unidimensionnelle	31
0.6.1	L'équation de Burger non linéaire 1D	31
0.6.2	Problème à condition initiale continue	31
0.6.3	Problème à condition discontinue (problème de Riemann)	33
0.7	Equation de Burgers 2D	41
0.8	Système de Saint-Venant 2D	44

♣ Remerciements ♣

Au terme de ce travail, Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à nos chers professeurs Ahmed TAIK, Imad ELMAHI, Abdellah EL-KACIMI et Lahcen MANIAR qui sont à l'origine de ce travail. Nous voudrions aussi les remercier pour leurs efforts et leur engagement dans toute cette période de réalisation de ce projet. C'est un honneur pour nous d'avoir travailler avec eux.

Un merci spécial au professeur Ahmed TAIK pour nous avoir appris la méthode numérique *RBF* qui est le sujet de ce projet et pour nous partager ses connaissances et ses conseils. Nous lui sommes infiniment reconnaissants parce qu'il a dédié beaucoup de temps à notre travail en étant toujours très disponible pour que l'on discute, ce qui nous a énormément encouragés.

♣ Introduction ♣

Les méthodes classiques (méthodes liées à un maillage) comme la Méthode des Eléments Finis (MEF) et la Méthode des Volumes Finis (MVF) sont les méthodes les plus utilisées pour résoudre des systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) dans les problèmes de modélisation physique, en particulier, ceux de la mécanique des matériaux et la mécanique des fluides. Mais ces méthodes, théoriquement sont très solide et de nombreuses techniques sont venues les améliorer au fil des ans. Cependant, leur mise en oeuvre reste difficile et couteuse dans certains cas, notamment dans le domaine de la modélisation de grandes déformations en formulation lagrangienne. Ces méthodes se basent sur un maillage du domaine dans lequel le problème doit être discréteisé. Dans ce projet, on s'intéresse aux modélisation des EDP par les méthodes sans maillage utilisant les fonctions à base radiale qui ont été développées à partir des années 1970 pour se libérer des problèmes dus au maillage. Ces méthodes, dont le succès est croissant, étaient pour les premières fondées des méthodes d'interpolation purement nodales.

L'idée est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points du domaine.

Dans ce projet, on s'intéressera aux deux types de fonctions à base radiale, la multi-quadrique de Hardy et la fonction de Wendland à support compact. En utilisant ces deux fonctions, on va résoudre quelques équations aux dérivées partielles paraboliques stationnaire et non stationnaire. Puis on va modéliser quelques équations hyperboliques : l'équation de transport avec condition initiale discontinue et l'équation d'advection-diffusion en 2D et 3D. Après, on va traiter l'équation de Burger unidimensionnelle pour les problèmes de Riemann à deux états et à 3 trois états, puis une équation de Burger bidimensionnelle. Finalement, on traitera l'équation de Saint-Venant en 2D.

0.1 Les fonctions à base radiale

0.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle fonction à base radiale toute fonction ϕ définie sur un espace euclidien \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , telle que l'image de chaque point ne dépend que de la distance euclidienne entre ce point et un centre donné. Autrement dit, pour un point $c \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - c\| = \|y - c\| \implies \phi(x) = \phi(y).$$

Définition 2

Une fonction complexe $\phi(x)$ définie est continue sur \mathbb{R}^n est dite définie positive si, quels que soient m nombres réels x_1, x_2, \dots, x_m et quels que soient m nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on a toujours l'égalité :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\alpha}_j \phi(x_i - x_j) \geq 0$$

et cela pour tout $m \geq 2$.

0.1.2 Quelques exemples des fonctions RBF définies positives

⊕ Fonctions globalement compactes

Il existe plusieurs fonctions radiales de base, si on pose $c \in \mathbb{R}^n$ et $r = \|x - c\|$, alors quelques fameux types des RBF sont :

- 1 - La multiquadrique de Hardy : $\phi(r) = \sqrt{r^2 + \epsilon^2}$.
- 2 - L'inverse multiquadrique : $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$.
- 3 - La fonction Gaussienne : $\phi(r) = e^{-\frac{r^2}{\epsilon^2}}$.
- 4 - La fonction linéaire : $\phi(r) = r$.

Le paramètre ϵ est appelé "shape parameter".

⊕ Fonctions à support compacte

On va voir que la méthode Multiquadrique requiert à résoudre un système linéaire avec une matrice pleine, ce qui pourrait rendre la méthode lourde et très coûteuse une fois qu'on a des centaines de points de collocation. Alors pour éviter ce genre de problèmes, on introduit les Fonctions Radiales de Base à Support Compact que nous noterons CSRBF (Compactly Supported Radial Basis Functions).

Une famille des CSRBFS $\varphi_{l,k}$ a été introduite premièrement par Wu et a été améliorée par Wendland, sont définies par:

$$\varphi_{l,k}(r) = (1 - r)_+^n p(r),$$

avec $(1 - r)_+^n = \begin{cases} (1 - r)^n & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et $p(r)$ est une polynôme, $\|X - X_j\|$, $j = 1, 2, \dots, N$ et $X, X_j \in \mathbb{R}^n$, l l'indice de dimension et $2k$ est le degré de continuité de la fonction φ

Voici quelques fonctions définies positives de Wendland :

$\varphi_{3,0}(r) := (1 - r)_+^3$	$C^0 \cap PD_5$
$\varphi_{3,1}(r) := (1 - r)_+^4(1 + 4r)$	$C^2 \cap PD_3$
$\varphi_{4,2}(r) := (1 - r)_+^6(3 + 18r + 35r^2)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{5,3}(r) := (1 - r)_+^8(1 + 8r + 25r^2 + 32r^3)$	$C^6 \cap PD_3$

0.1.3 Principe de la méthode des collocation :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soient x_1, x_n, \dots, x_N des points arbitraires de Ω . On veut résoudre un problème de la forme :

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

avec \mathcal{L} est un opérateur linéaire de dérivation.

On suppose que la solution de (1) s'écrit sous la forme :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x), \quad (2)$$

avec $\phi_j(x) = \phi(\|x - x_j\|_2)$ et ϕ est une fonction à base radiale.

Notons que si ϕ est une fonction radiale de base à support compact, on écrit \hat{u} sous la forme :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

où σ est un réel utilisé pour contrôler le support compact de ϕ_j sur $[0, \sigma]$.

En remplaçant u par \hat{u} dans (1), on obtient :

$$\mathcal{L}\hat{u}(x_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Cela nous ramène au problème matriciel linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{L}}(\|x_1 - x_1\|_2) & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_1 - x_2\|_2) & \cdots & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_1 - x_N\|_2) \\ \phi_{\mathcal{L}}(\|x_2 - x_1\|_2) & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_2 - x_2\|_2) & \cdots & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_2 - x_N\|_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{\mathcal{L}}(\|x_N - x_1\|_2) & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_N - x_2\|_2) & \cdots & \phi_{\mathcal{L}}(\|x_N - x_N\|_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Pour simplifier l'écriture de (1.3) on écrit tout simplement,

$$A\alpha = B,$$

où $A = \{\mathcal{L}\phi_j(x_i)\}_{i,j=1,\dots,N}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ et $B = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T$.

Donc pour que ce système admet une solution unique (existence et unicité), il faut et il suffit que A soit inversible.

Tout d'abord, on sait que si la matrice A est définie positive, alors elle est inversible.

C'est pour ça on étudie les fonctions à base radiales définie positive. En effet, si φ est une fonction radiale de base définie positive, alors sa forme quadratique est positive et par suite la matrice $A = \{\mathcal{L}\phi_j(x_i)\}_{i,j=1,\dots,N}$ est aussi définie positive. Donc elle est inversible et :

$$\alpha = A^{-1}B$$

Après avoir calculé les coefficient α_j , la solution approchée par cette méthode est donnée par :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x).$$

Remarque

Pour quelques problèmes linéaire non stationnaires par rapport au temps, on peut considérer le temps "t" comme une autre variable d'espace, c'est à dire au lieu de prendre $\phi_t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $t \in [0, +\infty[$, on prend $\Phi(x, t)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$.

Pour mesurer la précision de la solution approchée, On considère :

• L'erreur absolue maximale : $MAE = \max_{1 \leq j \leq N} |\hat{u}(x_j) - u(x_j)|$,

• L'erreur quadratique moyenne : $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{u}(x_j) - u(x_j))^2}$,

avec $\{x_j\}_{j=1}^N$ sont les points de collocation, u et \hat{u} sont les solutions exacte et approximée respectivement.

0.2 Résolution de quelques équations elliptiques et paraboliques par la méthode multiquadrature

0.2.1 Problème de laplace 1D

On considère l'équation de Laplace unidimensionnelle suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

avec $f(x) = -2$.

La solution exacte de (4) est donnée par $u(x) = x(x - 1)$.

Pour un pas $\Delta x > 0$, on prend N points x_j dans $[0, 1]$ telles que :

$$\Delta x = \frac{1}{N-1} \quad \text{et} \quad x_j = (j-1)\Delta x, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Soit \hat{u} la solution approchée de u tel que :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x),$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ à déterminer, $\phi_j(x) = \sqrt{(x - x_j)^2 + \varepsilon^2}$ pour $j = 1, 2, \dots, N$ et $\varepsilon > 0$ est le shape parameter.

En remplaçant u par \hat{u} dans (4), on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(x) = f(x) & \text{pour } x \in]0, 1[\\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(0) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(1) = 0. \end{cases}$$

Après avoir calculé la dirévée seconde de ϕ_j^2 , on a:

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(x) = \frac{\varepsilon^2}{((x - x_j)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\varepsilon^2}{((x - x_j)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 & \text{si } x \in]0, 1[\\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x - x_j)^2 + \varepsilon^2} = 0 & \text{si } x \in \{0, 1\}. \end{cases} \quad (5)$$

Le système matriciel obtenue après la discréétisation de l'équation (5) s'écrit sous la forme :

$$A\alpha = B,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ est le vecteur inconnu, $B = (0, f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{N-1}), 0)$ et

$A = (a_{ij})$ avec :

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon^2} = 0 & \text{si } x_i \in \{0, 1\} \\ \frac{\varepsilon^2}{((x_i - x_j)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x_i \in]0, 1[. \end{cases}$$

La résolution numérique de ce système nous a donné les courbes suivantes pour des différentes valeurs de ε et N :

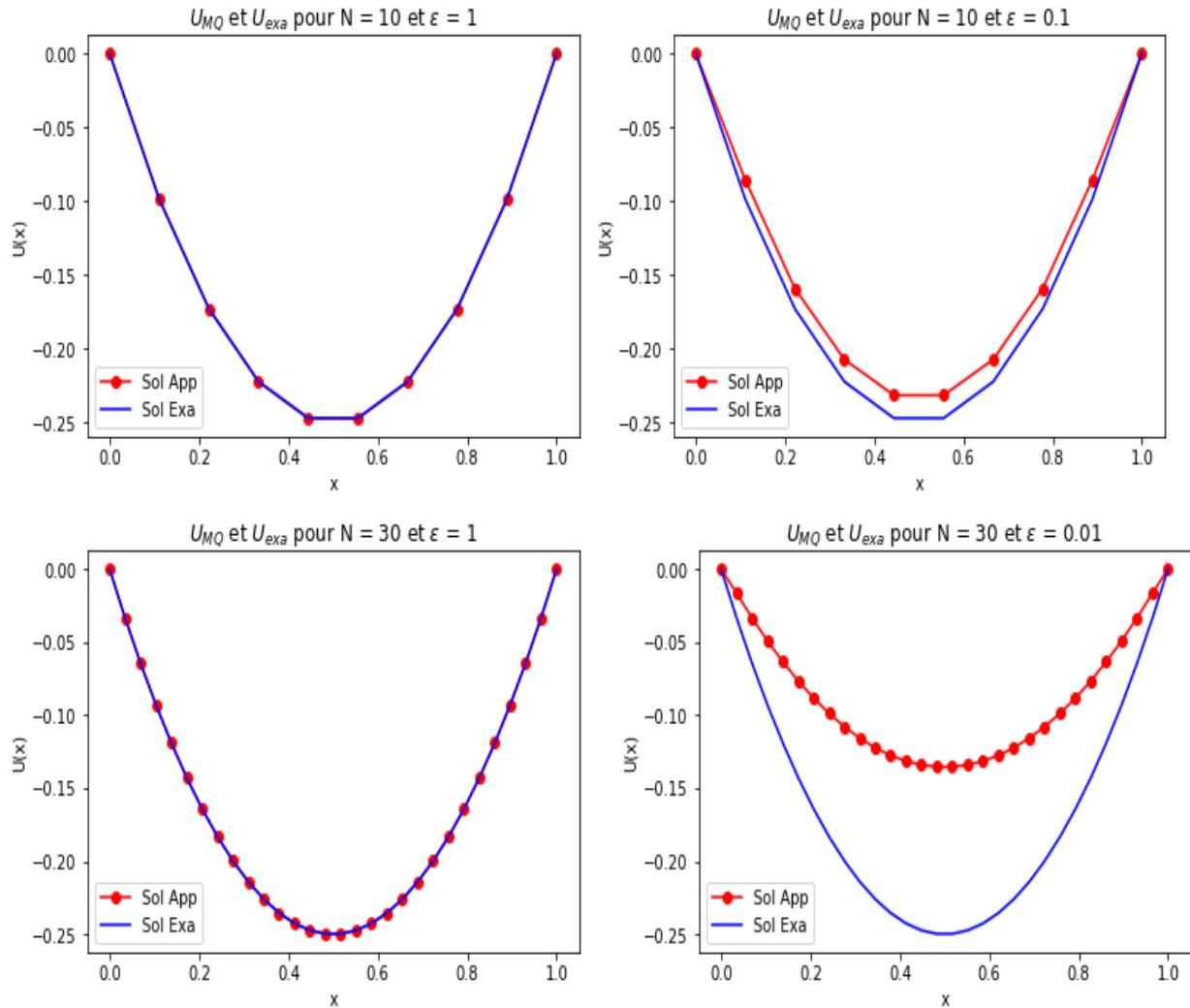


Figure 1 : La solution exacte et la solution multiquadratique pour des différentes valeurs de N et ε .

Remarque

Les figures ci-dessus montrent qu'il existe une relation entre le paramètre ε et le nombre de points de collocation N . C'est à dire, même si on trouve la valeur parfaite de ε pour laquelle la solution approchée est bon (identique à la solution exacte), un petit changement de N peut introduire des problèmes locaux ou même une courbe qui n'a rien avoir avec la solution exacte.

La figure suivante montre la variation des erreurs MAE et $RMSE$ en fonction de shape parameter ε :

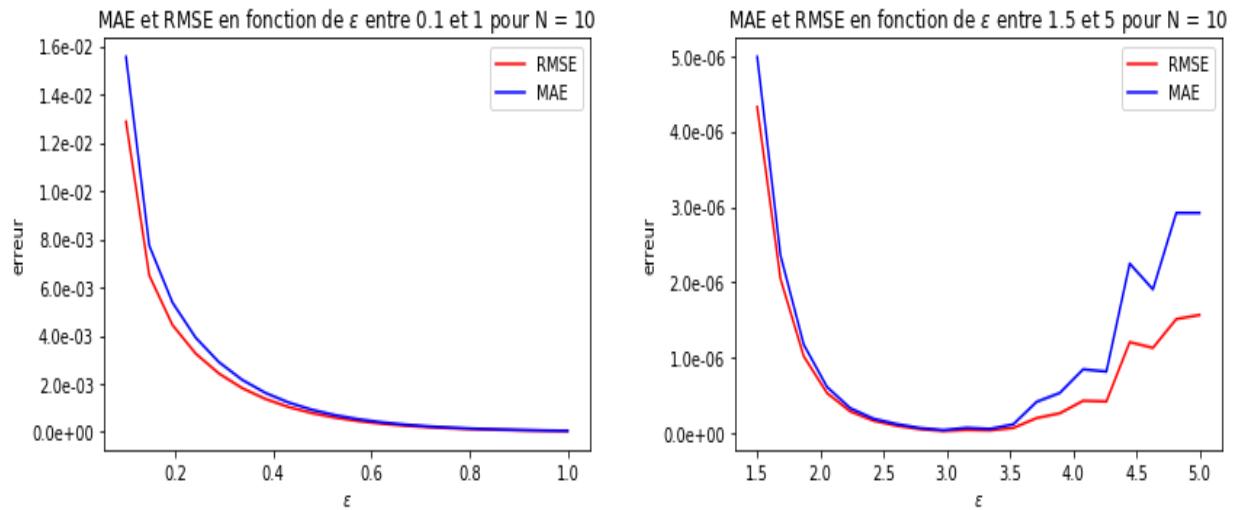


Figure 2 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour ε dans $]0.1, 1]$ (à gauche) et pour ε dans $]1.5, 5]$ (à droite).

Dans le tableau qui suit, nous avons trouvé pour quelques nombres N , la valeur de ε compris entre 0.1 et 5.1 qui minimise l'erreur MAE . Ce qu'on a fait exactement c'est de calculer MAE pour 501 valeurs différentes de shape parameter ε compris uniformément entre 0.1 et 5.1 et prendre le ε qui correspond à l'erreur MAE minimal.

N	ε	MAE	$RMSE$
10	3.19	$2.9802e-08$	$1.5364e-08$
20	0.89	$6.9367e-08$	$2.4415e-08$
40	0.40	$4.7545e-08$	$3.2444e-08$
70	0.23	$4.2408e-08$	$1.8901e-08$
100	0.13	$6.7087e-08$	$5.9375e-08$

Tableau 1 : Le meilleur ε pour des différentes valeurs de N avec les erreurs MSA et $RMSE$.

0.2.2 Équation de Laplace en 2D

Soit l'EDP de Laplace bidimensionnelle suivante:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{si } (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\\ u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = y^2 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1] \\ u(x, 1) = x^2 + 1, \quad u(1, y) = y^2 + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1], \end{cases} \quad (6)$$

avec $f(x, y) = -4$.

Il est clair que la solution exacte de (6) est donnée par $u(x, y) = x^2 + y^2$.

La programmation de cette solution exacte donne la courbe suivante :

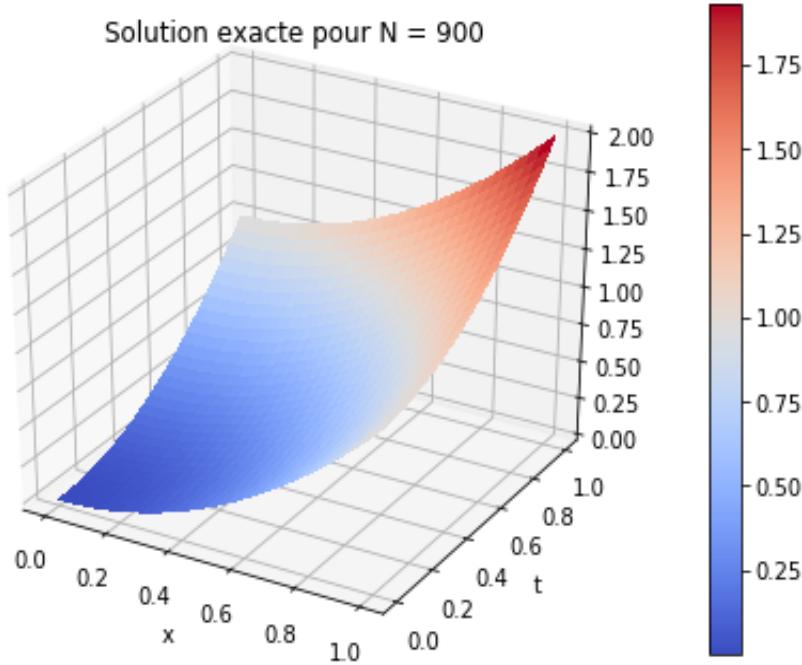


Figure 3 : La solution exacte U_{exa} .

Soit \hat{u} la solution approchée (RBF-MQ) de u . On note $\Omega =]0, 1[^2$ et posons $X = (x, y)$, alors pour tout $X \in \Omega$, \hat{u} s'écrit sous la forme:

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(X) \quad (7)$$

avec N est le nombre des points de collocation, α_j sont des scalaires à déterminer et ϕ_j est la fonction multiquadratique de Hardy définie par :

$$\phi_j(X) = \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2}.$$

En remplaçant l'expression (7) dans l'équation (6), on trouve, pour tout $X \in \overset{\circ}{\Omega}$:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(X) + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2}(X) \right) = 0. \quad (8)$$

Or on a :

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(X) = \frac{(y - y_j)^2 + \varepsilon^2}{(\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2}(X) = \frac{(x - x_j)^2 + \varepsilon^2}{(\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}},$$

l'égalité (8) devient :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + 2\varepsilon^2}{(\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 4. \quad (9)$$

Pour $X \in \partial\Omega$, on a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2} = x^2 & \text{si } y = 0 \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2} = y^2 & \text{si } x = 0 \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2} = x^2 + 1 & \text{si } y = 1 \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2} = y^2 + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Soient X_1, X_2, \dots, X_N les N points de Ω tels que $N = n^2$ avec $n = \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y}$.

En remplaçant les X_i dans les équations (9) et (10), on trouve alors le système linéaire suivante:

$$A\alpha = B$$

Voici quelques courbes de la solution numérique pour des différences valeurs de N et ε :

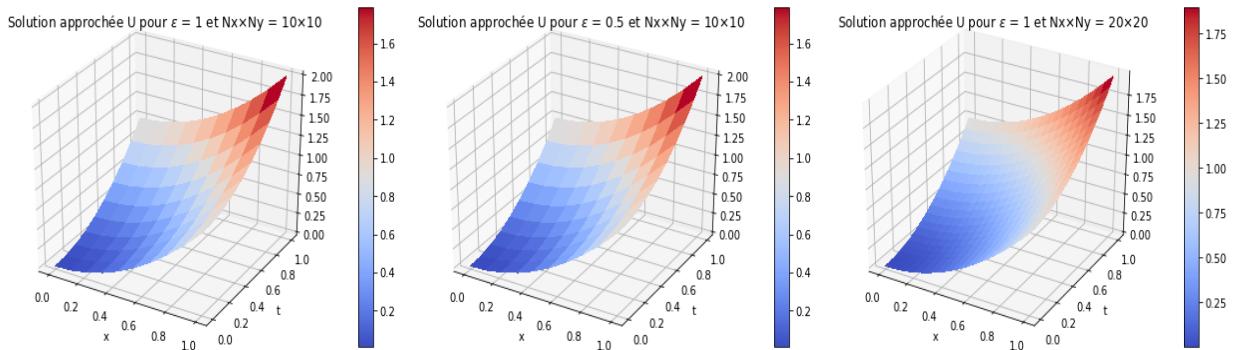


Figure 4 : La solution approchée U_{MQ} pour des différentes valeurs de N et ε .

N	ε	MAE	$RMSE$
10×10	1	$1.6966e-05$	$8.7373e-06$
10×10	0.5	$3.8861e-04$	$1.4242e-04$
20×20	1	$1.6650e-06$	$5.1405e-07$

Tableau 2 : Les erreurs MSA et $RMSE$ pour des différentes valeurs de N et ε .

0.3 Résolution de l'équation de la chaleur 1D

Considérons l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{si } x \in]0, 1[\text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ u(0, t) = u_1(t) & \forall t > 0 \\ u(1, t) = u_2(t) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (11)$$

avec u_0 , u_1 et u_2 sont des fonctions telles que la solution analytique de l'équation (11) est égale à :

$$u(x, t) = e^{-\beta x} \cos(t - \beta x), \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{1}{2r}}.$$

Soit $T > 0$ et Soit $X = (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. La solution approchée \hat{u} de u est définie par :

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(X)$$

où $\phi_j(X) = \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2}$ et $\{X_j = (x_j, t_j)\}_{j=1}^N$ forment les points de collocation dans $[0, 1] \times [0, T]$.

On remplace u par \hat{u} dans (11):

⊕ Pour $X \in]0, 1[\times]0, T]$, On a :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(X) - r \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(X) = 0,$$

Ce qui donne

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t}(X) - r \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}(X) \right) = 0.$$

Par suite,

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{1}{\sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2}} \left((t - t_j) - r \frac{(t - t_j)^2 + \varepsilon^2}{(\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2)} \right) = 0. \quad (12)$$

⊕ Pour $X \in [0, 1] \times \{0\}$, On a :

$$\hat{u}(x, 0) = u_0(x).$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x - x_j)^2 + t_j^2 + \varepsilon^2} = e^{-\beta x} \cos(-\beta x). \quad (13)$$

⊕ Pour $X \in \{0\} \times]0, T]$, On a :

$$\hat{u}(x, t) = u_1(x),$$

donc

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x - x_j)^2 + (t - t_j)^2 + \varepsilon^2} = \cos(t). \quad (14)$$

• Pour $X \in \{1\} \times]0, T]$, On a :

$$\hat{u}(x, t) = u_2(x).$$

Par suite

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x - x_j)^2 + (t - t_j)^2 + \varepsilon^2} = e^{-\beta} \cos(t - \beta). \quad (15)$$

On peut réécrire les égalités (12), (13), (14) et (15) sous la forme matricielle suivante :

$$A\alpha = B,$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ est le vecteur inconnu et A est la matrice dont les coefficients sont:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left((t_i - t_j) - r \times \frac{(t_i - t_j)^2 + \varepsilon^2}{\lambda_{ij}^2} \right) & \text{si } (x_i, t_i) \in]0, 1[\times]0, T] \\ \lambda_{ij} & \text{sinon,.} \end{cases}$$

où $\lambda_{ij} = \sqrt{\|X_i - X_j\|^2 + \varepsilon^2}$

Voici des tests numériques pour $r = 1$, $T = 1$ et $\varepsilon = 1$ pour des différentes valeurs de $N_x \times N_t$:

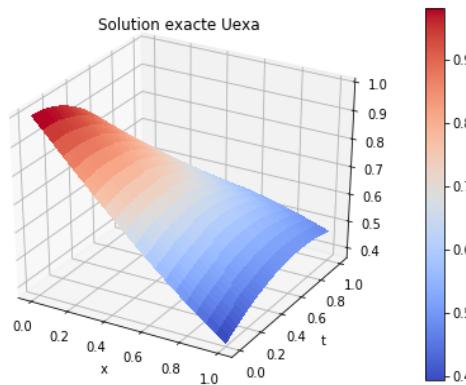


Figure 5 : La solution exacte U_{exa} .

$N_x \times N_t$	MAE	$RMSE$
60×20	$6.4560e-06$	$2.1167e-06$
40×40	$5.8340e-06$	$1.4361e-06$
20×60	$2.7606e-05$	$6.8489e-06$

Tableau 3 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour des différentes valeurs de $N_x \times N_t$.

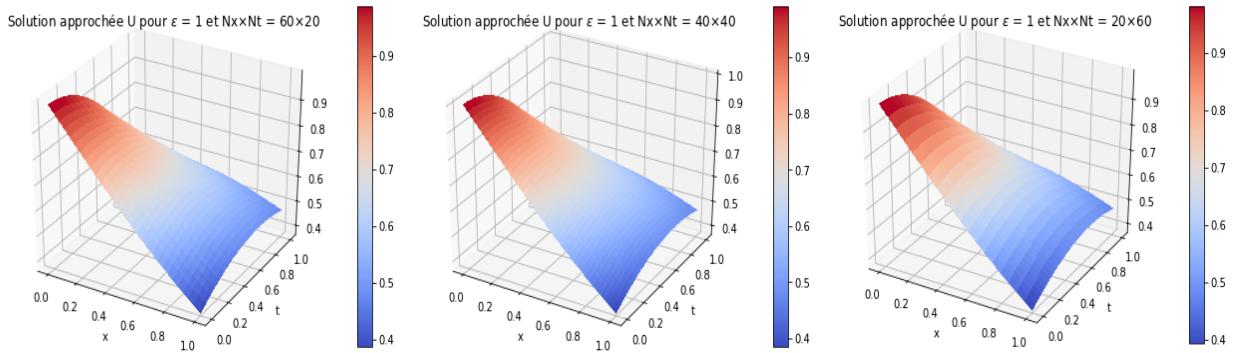


Figure 6 : La solution approchée U_{MQ} pour des différentes valeurs de $N_x \times N_t$.

Les figures ci-dessous représentent des courbes de la solution approchée $\hat{u}(x, t)$ et la solution exacte $u(x, t)$, respectivement, en fonction de x dans des différentes instances pour $\varepsilon = 1$ et $Nx \times Nt = 30 \times 30$.

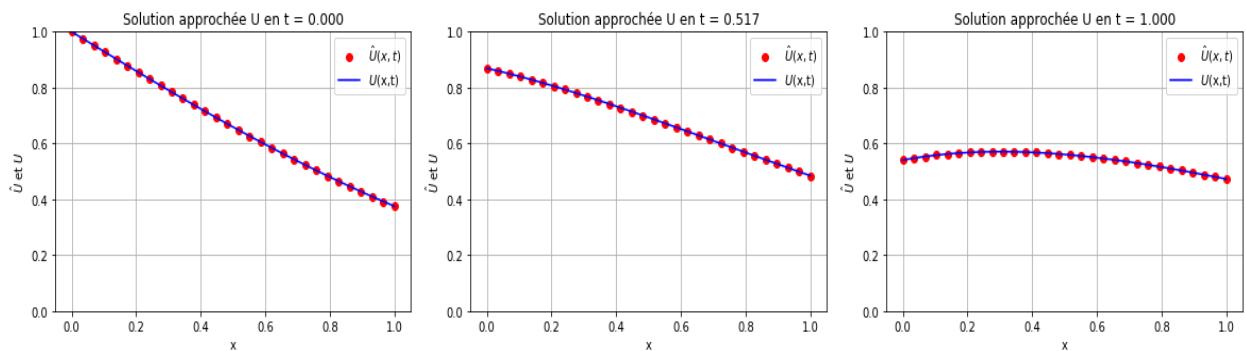


Figure 7 : Les deux solutions exacte et approchée pour des différentes instances $t = 0$, $t = 0.517$ et $t = 1$.

0.4 Résolution du problème de Transport 1D

0.4.1 Équation de transport 1D

On considère l'équation de transport scalaire unidimensionnelle suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & \text{si } (x, t) \in]a, b[\times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [a, b] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(b, t) = 0 & \forall t > 0, \end{cases} \quad (16)$$

avec $a = -10$, $b = 10$ et $u_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Notons que la solution exacte da l'équation de transport est donnée par:

$$u(x, t) = u_0(x - ct).$$

0.4.2 La méthode RBF multiquadrique

On pose $\Omega = [a, b] \times [0, T_{max}]$, où T_{max} est réel qu'on choisit. Soient N_x et N_t deux entiers tels que $N_x, N_t > 2$.

Soient $\Delta x = \frac{b-a}{N_x-1}$ et $\Delta t = \frac{T_{max}}{N_t-1}$ tels que :

$$x_i = a + (i-1)\Delta x \quad \text{et} \quad t_i = (i-1)\Delta t.$$

On pose $X_k = (x_i, t_j)$, avec $k = (j-1)N_x + i$, alors Ω contient N point où $N = N_x \cdot N_t$. On note la solution approchée de u par \hat{u} et on le pose sous la forme multiquadrique suivante :

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(X)$$

avec $\phi_j(X) = \sqrt{\|X - X_j\|^2 + \varepsilon^2}$.

Alors en remplaçant u par \hat{u} dans l'équation (16), on a ceci :

• Si $X = (x, t) \in]a, b[\times]0, T_{max}]$ on a:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, t) = 0,$$

$$\text{càd, } \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(x, t) + c \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Ce qui donne

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{1}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (t - t_j)^2 + \varepsilon^2}} [(t - t_j) + c(x - x_j)] = 0. \quad (17)$$

• pour $X = (x, 0)$ avec $x \in [a, b]$, on a d'après (16) :

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Alors en remplaçant u par \hat{u} on obtient:

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(\|X - X_j\|_2) = u_0(x). \quad (18)$$

• Pour les points qui sont aux bords $x = a$ et $x = b$, puisque c'est une équation aux

dérivées partielles du première ordre, on aura seulement besoin d'un condition aux limites. On prend par exemple $x = a$, alors on a pour tout $t > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \iff \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{a - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (t - t_j)^2 + \varepsilon^2}} = 0. \quad (19)$$

Les trois expressions (17), (18) et (19) nous conduisent au système linéaire suivant :

$$A\alpha = B,$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ et $A = (a_{ij})$ tel que :

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{(t_i - t_j) + c(x - x_j)}{\lambda_{ij}} & \text{si } (x_i, t_i) \in]a, b[\times]0, T_{max}] \\ \frac{a - x_j}{\lambda_{ij}} & \text{si } t_i \in]0, T_{max}] \\ \lambda_{ij} & \text{si } (x_i, t_i) \in [a, b] \times \{0\}, \end{cases}$$

avec $\lambda_{ij} = \sqrt{r_{ij}^2 + \epsilon^2}$ et $r_{ij} = \|X_i - X_j\|$.

Maintenant, voici quelques tests numériques pour $c = 1$, $T_{max} = 5$, $Nx \times Nt = 30 \times 30$ et aussi pour $Nx \times Nt = 60 \times 20$.

La programmation de la solution exacte pour $c = 1$ nous a donné :

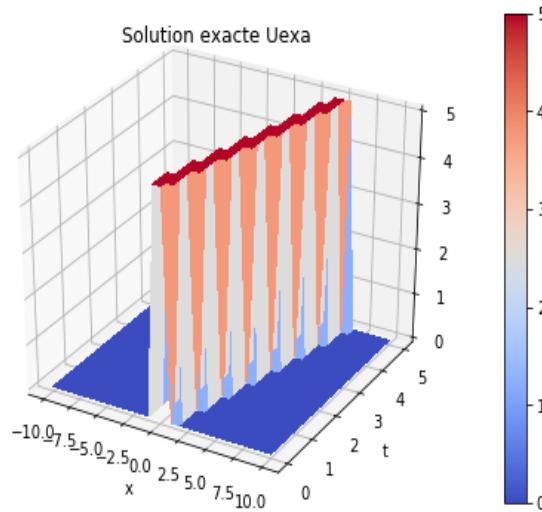


Figure 8 : Solution exacte U_{exa} .

Pour la solution approchée \hat{u} , Nous avons cherché le shape parameter qui donne le bon résultat (le minimum erreur MAE) dans $\{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.0, 2.1\}$, et nous avons trouvé ceci :

$N_x \times N_t$	ε	MAE	$RMSE$
30×30	1	$4.1102e+00$	$7.0334e-01$
60×20	1.2	$3.2933e+00$	$6.4188e-01$

Tableau 4 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour quelques valeurs de $Nx \times Nt = 30 \times 30$ et ε .

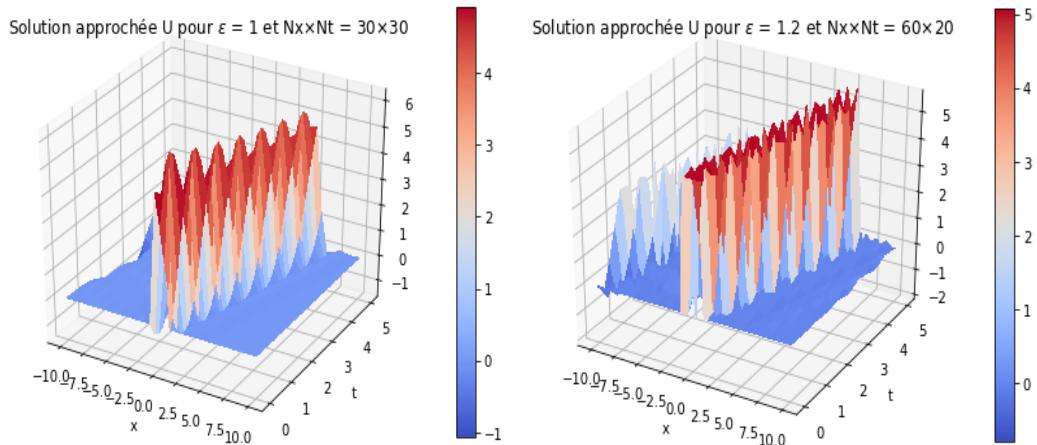


Figure 9 : La solution approchée U_{MQ} pour $Nx \times Nt = 30 \times 30$ (à gauche) et pour $Nx \times Nt = 60 \times 20$ (à droite).

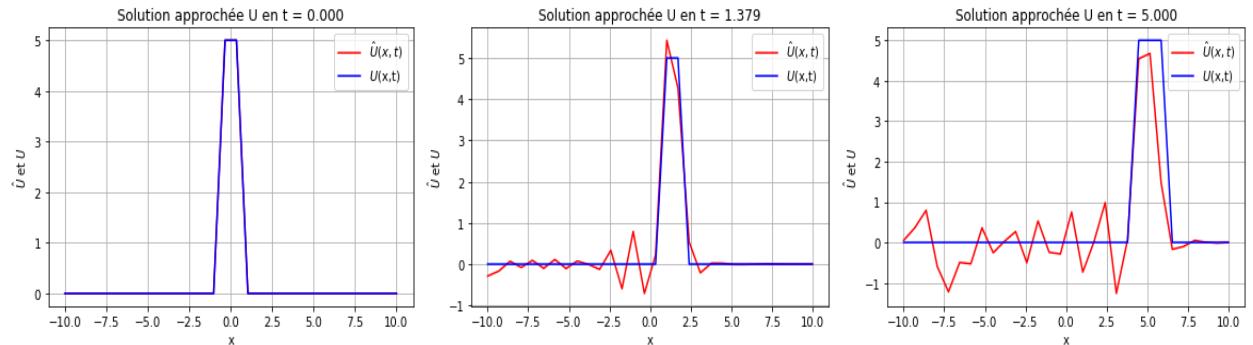


Figure 10 : La solution exacte et approchée dans des différentes instantes $t = 0$, $t = 1.379$ et $t = 5$ pour $\varepsilon = 1$ et $Nx \times Nt = 30 \times 30$.

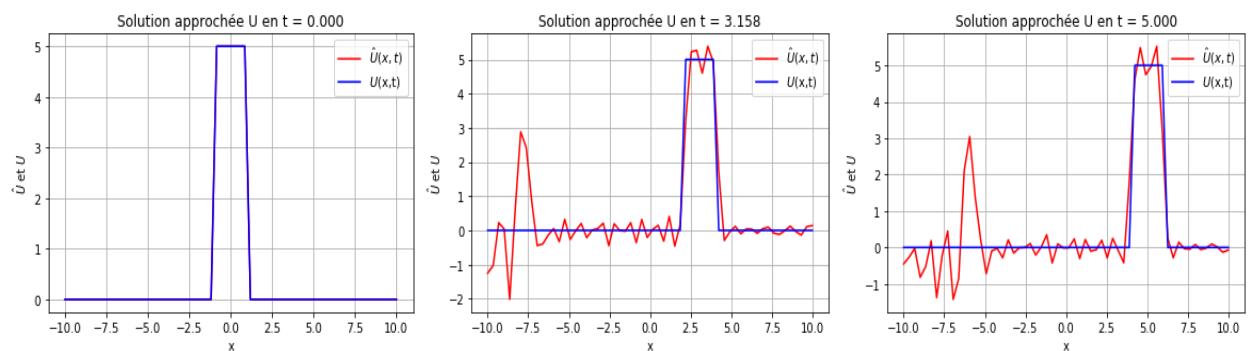


Figure 11 : La solution exacte et approchée dans des différentes instantes $t = 0$, $t = 3.158$ et $t = 5$ pour $\varepsilon = 1.2$ et $Nx \times Nt = 60 \times 20$.

0.4.3 La méthode des CSRB

De la même manière utilisé pour la fonction multiquadratique, considérons l'équation (16) et posons :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j^\sigma(x, t) = u_0(x),$$

avec ϕ_j^σ la fonction de Wendland définie par :

$$\phi_j^\sigma = \phi_{4,2}^\sigma = (1 - \frac{r}{\sigma})_+^6 (3 + 18\frac{r}{\sigma} + 35(\frac{r}{\sigma})^2),$$

où $r = \|(x, t) - (x_j, t_j)\|_2$.

En remplaçant u par \hat{u} dans (16), on obtient:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial t}(x, t) + c \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial x}(x, t) = 0,$$

Ce qui donne

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left[\frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial t}(x, t) + c \cdot \frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial x}(x, t) \right] = 0. \quad (20)$$

Le calcul des dérivées donne :

$$\frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial x}(x, t) = -\frac{56}{\sigma^2} (x - x_j) (1 - \frac{r}{\sigma})_+^5 (1 + 5\frac{r}{\sigma})$$

et

$$\frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial t}(x, t) = -\frac{56}{\sigma^2} (t - t_j) (1 - \frac{r}{\sigma})_+^5 (1 + 5\frac{r}{\sigma}).$$

Alors (20) devient:

$$\sum_{j=1}^N -\alpha_j \frac{56}{\sigma^2} (1 - \frac{r}{\sigma})_+^5 (1 + 5\frac{r}{\sigma}) [(t - t_j) + c(x - x_j)] = 0.$$

Ceci est pour tout $(x, t) \in]a, b[\times]0, T_{max}]$.

• Sur le bord, on a pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 &\iff \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \phi_j^\sigma}{\partial x}(a, t) = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^N -\alpha_j \frac{56}{\sigma^2} (1 - \frac{r}{\sigma})_+^5 (1 + 5\frac{r}{\sigma}) (a - x_j) = 0, \end{aligned}$$

avec $r = \|(a, t) - (x_j, t_j)\|_2$.

- Pour $t = 0$ on a $u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$, ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left(1 - \frac{r}{\sigma}\right)_+^6 \left(3 + 18\frac{r}{\sigma} + 35\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right) = u_0(x),$$

avec $r = \|(x, 0) - (x_j, t_j)\|_2$.

Alors l'équation (16) peut s'écrire après la discréétisation sous la forme matricielle linéaire suivante:

$$A\alpha = B,$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ et $A = a_{ij}$ tel que :

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{56}{\sigma^2} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sigma}\right)_+^5 \left(1 + 5\frac{r_{ij}}{\sigma}\right) [(t_i - t_j) + c.(x_i - x_j)] & \text{si } (x_i, t_i) \in]a, b[\times]0, T_{max}] \\ -\frac{56}{\sigma^2} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sigma}\right)_+^5 \left(1 + 5\frac{r_{ij}}{\sigma}\right) (a - x_j) & \text{si } t_i \in]0, T_{max}] \\ \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sigma}\right)_+^6 \left(3 + 18\frac{r_{ij}}{\sigma} + 35\left(\frac{r_{ij}}{\sigma}\right)^2\right) & \text{si } (x_i, t_i) \in [a, b] \times \{0\} \end{cases}$$

La figure suivante est obtenue pour $c = 1$, $Nx \times Nt = 50 \times 20$ et $\sigma = 2$:

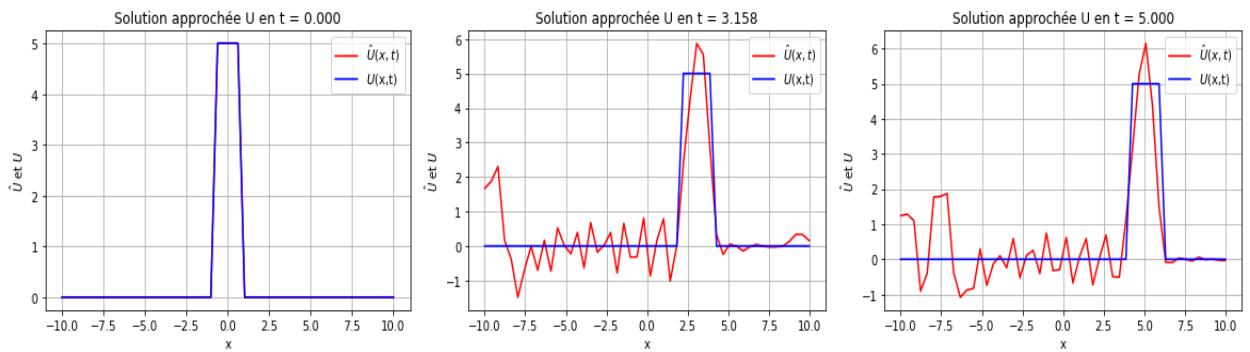


Figure 12 : La solution exacte et approchée dans des différentes instances $t = 0$, $t = 3.158$ et $t = 5$.

Il est clair que les résultats trouvés par ces deux méthodes ne sont pas suffisamment proches, on justifie ceci par la discontinuité de la condition initiale u_0 . Pour montrer ça, nous avons remplacé la condition initiale par celle-là qui est continue :

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La solution exacte du problème (16) associée à cette condition initiale u_1 est donnée par :

$$u(x, t) = u_1(x - ct).$$

Les figures suivantes sont obtenues pour $T_{max} = 5$, $c = 1$, $\varepsilon = 3$ et $\sigma = 6$.

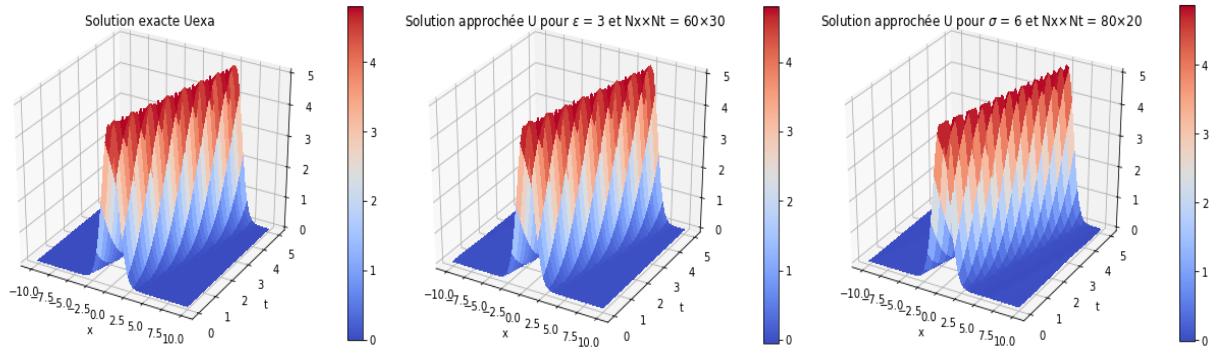


Figure 13 : Les trois solutions : solution exacte (à gauche), la solution U_{MQ} pour $Nx \times Nt = 60 \times 30$ (au milieu) et la solution U_{CS} pour $Nx \times Nt = 80 \times 20$.

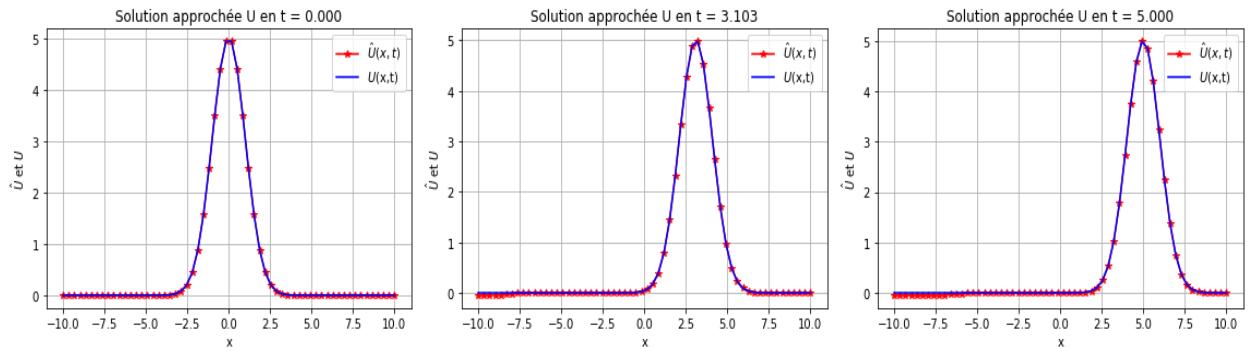


Figure 14 : La solution approchée U_{MQ} dans les instantes $t = 0$, $t = 3.103$ et $t = 5$ pour $Nx \times Nt = 60 \times 30$.

Dans la figure ci-dessus, $MSA = 4.9104e - 02$ et $RMSE = 1.2543e - 02$.

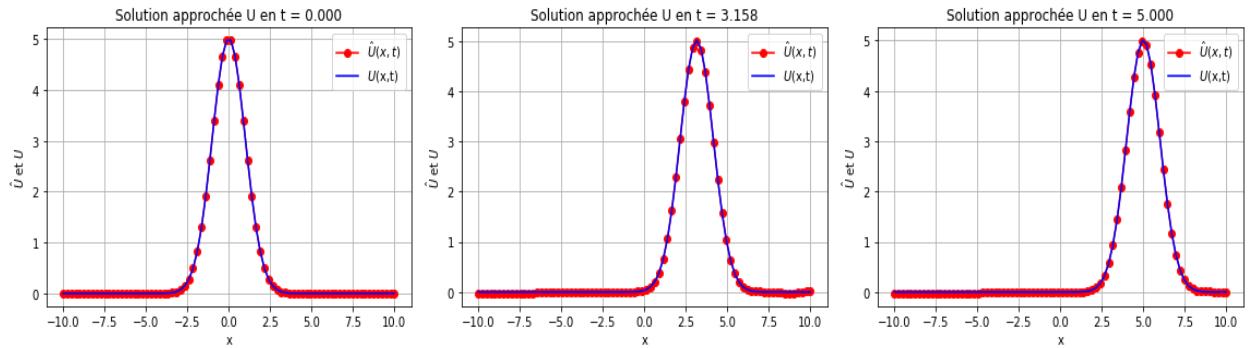


Figure 15 : La solution approchée U_{MQ} dans les instantes $t = 0$, $t = 3.158$ et $t = 5$ pour $Nx \times Nt = 80 \times 20$.

Dans cette figure, $MAE = 3.1281e - 02$ et $RMSE = 1.2250e - 02$.

Alors, cela montre que les mauvaises résultats qu'on a trouvé pour le problème (16) par les deux méthodes (MQRBF et CSRBF) sont due à la discontinuité de la condition initiale u_0 .

0.5 L'équation d'advection-diffusion

0.5.1 Résolution d'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle

On considère l'équation d'advection-diffusion définie par:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{si } x \in]a, b[\text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in [a, b] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) & \text{pour } t > 0, \end{cases} \quad (21)$$

avec $a = -10$ et $b = 10$ et $u_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans cette section, on négligé la terme de diffusion ν dans (21) et on compare les solutions numériques obtenues par les deux méthodes (MQRBF et CSRBF) avec la solution analytique de l'équation d'advection que nous avons vu précédemment.

Alors, on pose u sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j(x),$$

avec φ_j est une fonction à base radial (MQRBF ou CSRBF).

Pour un nombre finis de points $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans $[a, b]$, tel que $a = x_1, x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, on a:

$$U = \Phi \cdot \alpha, \quad (22)$$

avec $U = (u(x_1, t), \dots, u(x_N, t))^T$, $\alpha = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_N(t))^T$ et $\Phi = (\varphi_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq N}$.

En générale, pour tout opérateur différentiel \mathcal{L} , on a:

$$\mathcal{L}U = \Phi_{\mathcal{L}} \cdot \alpha, \quad (23)$$

où $\mathcal{L}U = (\mathcal{L}u(x_1, t), \dots, \mathcal{L}u(x_N, t))^T$ et $\Phi_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}\varphi_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq N}$.

D'après (22) et (24), on a :

$$\mathcal{L}U = \Phi_{\mathcal{L}} \cdot \Phi^{-1} \cdot U. \quad (24)$$

Maintenant, d'après l'équation (21), on a pour $x_2, x_3 \dots x_{N-1}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (25)$$

La relation (24) entraîne :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c\Phi_x\Phi^{-1}U + \nu\Phi_{xx}\Phi^{-1}, \quad (26)$$

avec $\Phi_x = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x_i) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ et $\Phi_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}(x_i) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$.

En posant $A_x = \Phi_x\Phi^{-1}$ et $A_{xx} = \Phi_{xx}\Phi^{-1}$, l'équation (26) devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (-cA_x + \nu A_{xx})U = \mathcal{L}U. \quad (27)$$

avec $\mathcal{L} = -cA_x + \nu A_{xx}$.

Nous avons alors transformé l'équation aux dérivées partielles (21) en une simple équation différentielle ordinaire (27).

Maintenant, on peut facilement calculer u à l'instante $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ en utilisant la solution connue à l'instante $t_n = n\Delta t$ par une méthode numérique choisie. Si par exemple nous choisissons la méthode de Range-Kutta d'ordre 4, on aura:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &= F(u^n, t_n) \\ K_2 &= F\left(u^n + \frac{1}{2}K_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ K_3 &= F\left(u^n + \frac{1}{2}K_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ K_4 &= F(u^n + K_3, t_n + \Delta t), \end{aligned}$$

où $F(u, t) = \mathcal{L}u$.

L'avantage de la formulation (27) est que l'inversion de la matrice RBF se fait une seule fois avant d'entre dans la boucle du temps, vu que les matrices des fonctions à base radiale ne dépendent pas du temps. Cette formulation sera pris pour la suite de ce projet.

Pour les conditions aux limites, on a d'après (21) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0.$$

Donc $u(x_1, t) = u(x_2, t)$ et $u(x_{N-1}, t) = u(x_N, t)$.

Pour la stabilité de ce schéma numérique, nous choisissons Δt sous la condition *CFL* suivante :

$$\Delta t \leq CFL \cdot \min\left(\frac{\Delta x}{c}, \frac{\Delta x^2}{2\nu}\right).$$

La fonction multiquadratique choisie dans la suite est de la forme :

$$\varphi_j(x) = \sqrt{1 + \varepsilon^2(x - x_j)^2},$$

et pour la fonction à support compact, on choisit celle de Wendland :

$$\phi_j^\sigma(r) = \phi_{4,2}^\sigma(r) = \left(1 - \frac{r}{\sigma}\right)_+^6 \left(3 + 18\frac{r}{\sigma} + 35\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right).$$

○ Teste numérique :

Dans cette section, on donne des résultats numériques obtenues par les méthodes *MQRBF* et *CSRBF* avec les trois schémas de Rung-Kutta.

Pour la suite de cette section, on fixe : $c = 1$, $\nu = 0.001$, $N = 300$ et le temps finale $T = 5$.

★ Schéma de Rang-Kutta d'ordre 4 : On pose $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10$ et $CFL = 0.95$.

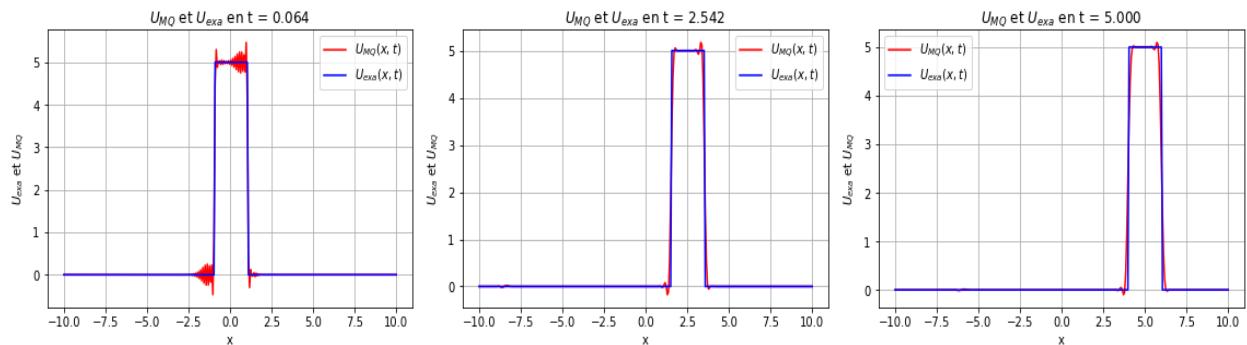


Figure 16 : La solution exacte U_{exa} et la solution multiquadratique U_{MQ} dans les instantes $t = 0.064$, $t = 2.542$ et $t = 5$.

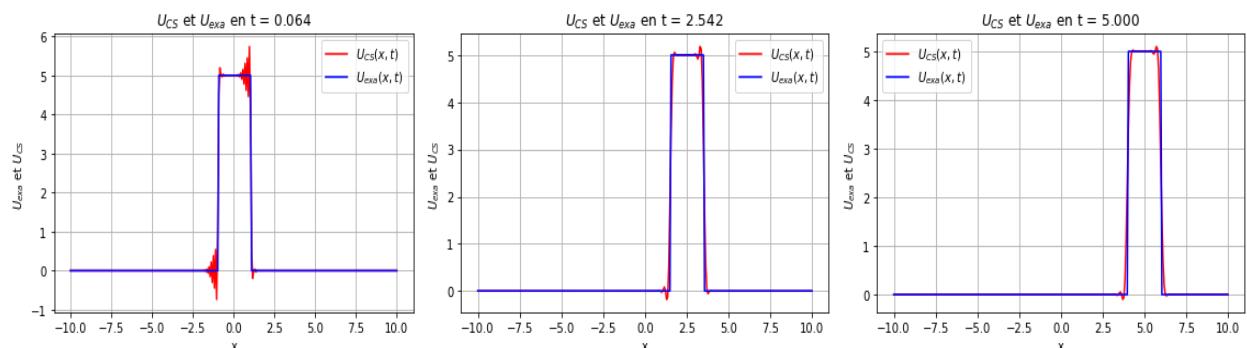


Figure 17 : La solution exacte U_{exa} et la solution CS U_{CS} dans les instantes $t = 0.064$, $t = 2.542$ et $t = 5$.

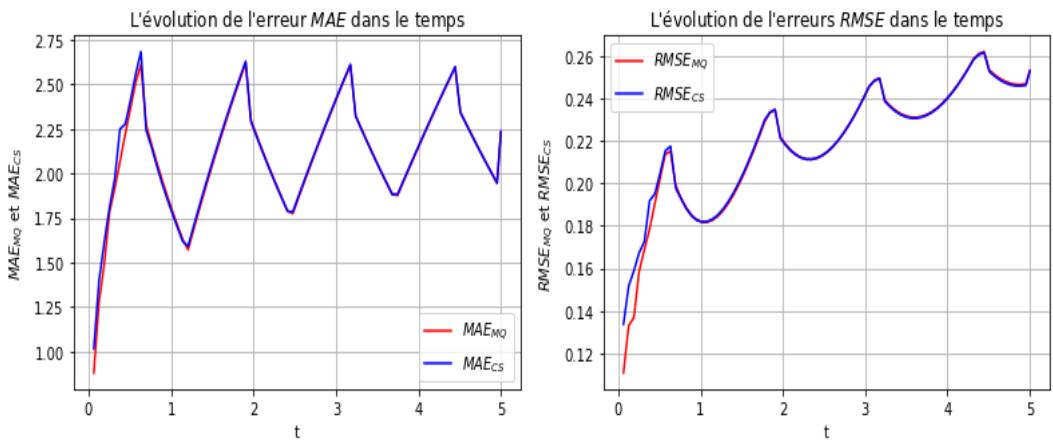


Figure 18 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

* Schéma de Rang-Kutta d'ordre 3 : On pose $\varepsilon = 9$, $\sigma = 10$ et $CFL = 0.5$.

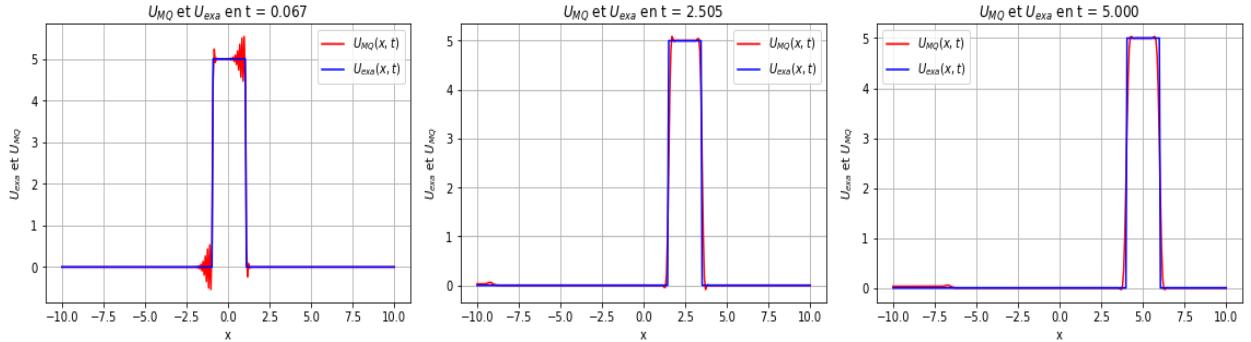


Figure 19 : La solution exacte U_{exa} et la solution multiquadratique U_{MQ} dans les instants $t = 0.067$, $t = 2.505$ et $t = 5$.

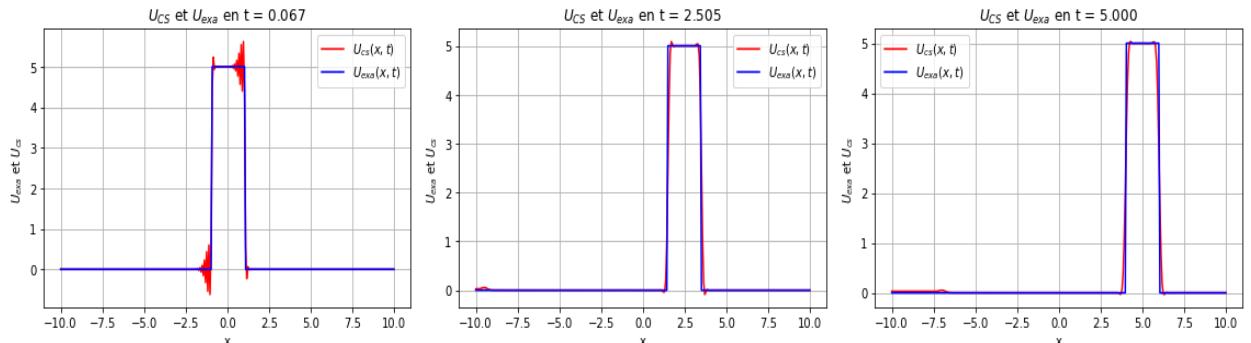


Figure 20 : La solution exacte U_{exa} et la solution CS U_{CS} dans les instants $t = 0.067$, $t = 2.505$ et $t = 5$.

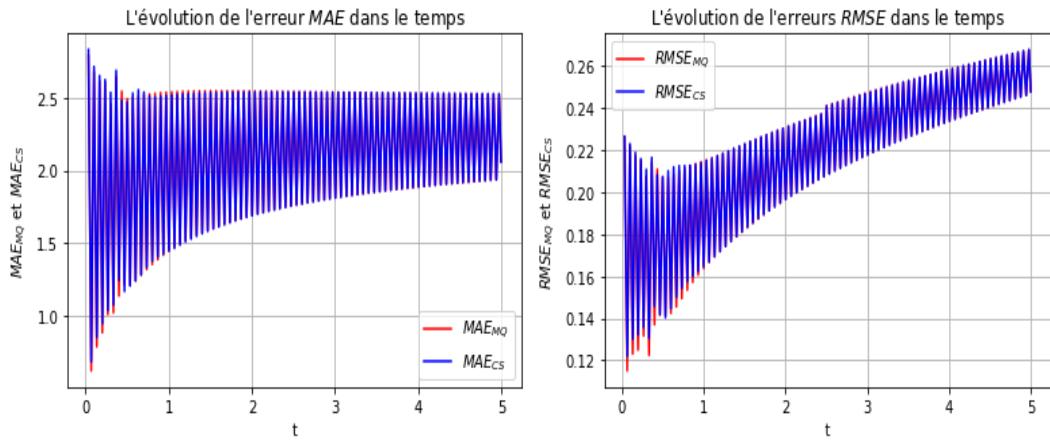


Figure 21 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

* Schéma de Rang-Kutta d'ordre 2 : On pose $\varepsilon = 9$, $\sigma = 10$ et $CFL = 0.35$.

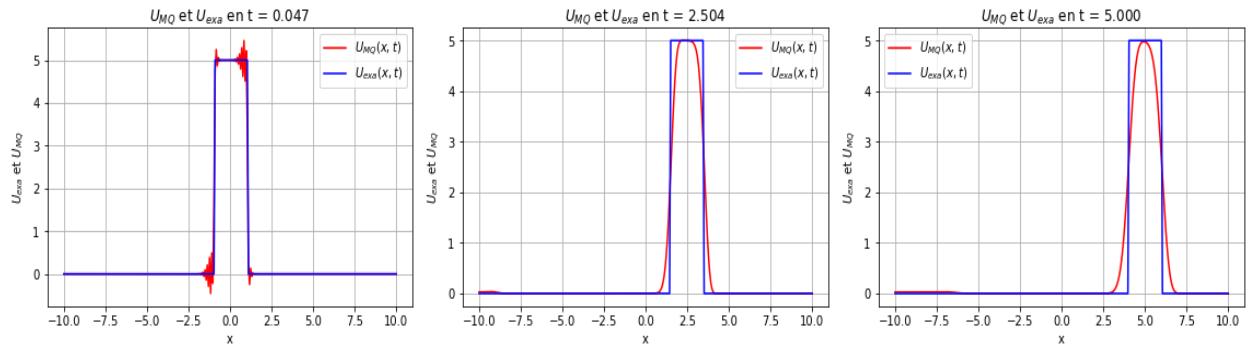


Figure 22 : La solution exacte U_{exa} et la solution multiquadratique U_{MQ} dans les instants $t = 0.067$, $t = 2.505$ et $t = 5$.

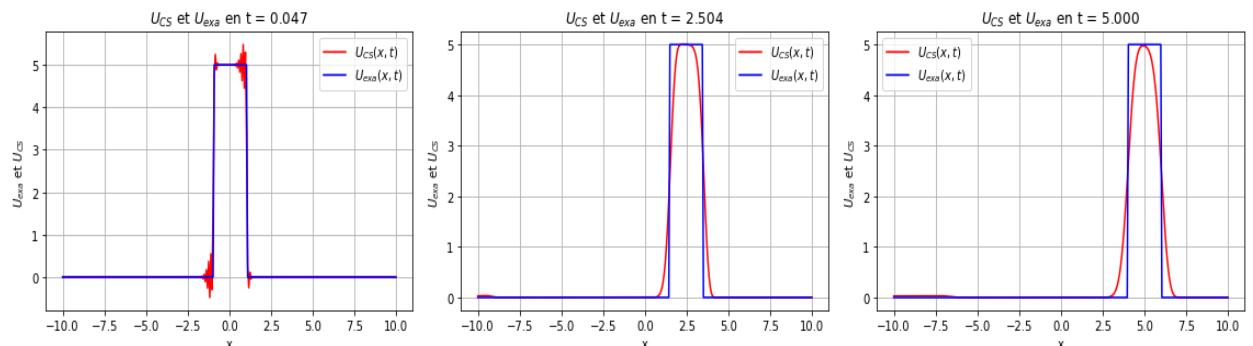


Figure 23 : La solution exacte U_{exa} et la solution CS U_{CS} dans les instants $t = 0.067$, $t = 2.505$ et $t = 5$.

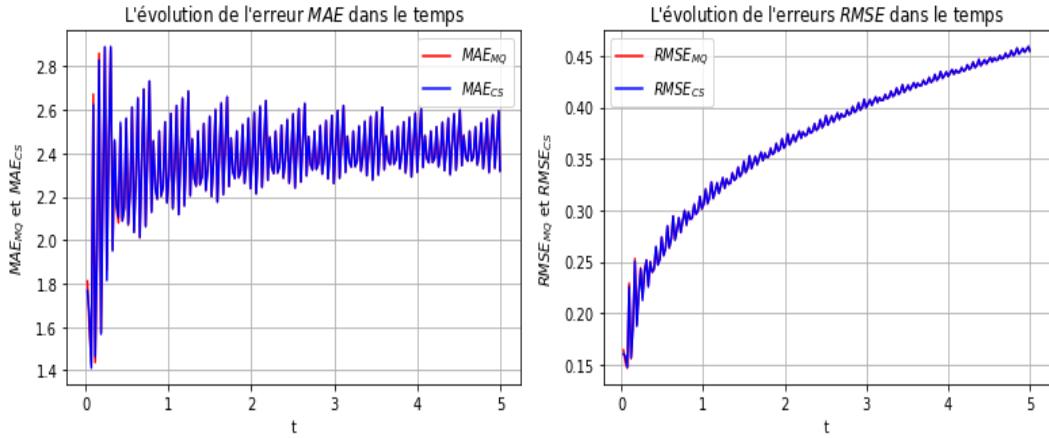


Figure 24 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

0.5.2 Résolution d'équation d'advection-diffusion bidimensionnelle

On considère l'équation d'advection-diffusion bidimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right], \quad (28)$$

avec $(x, y, t) \in [a, b] \times [c, d] \times [0, T]$, dont la condition initiale et les conditions aux limites sont de types de Dirichlet, obtenus selon la solution exacte définie par:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + 4t} \exp \left\{ -\frac{(x - \beta_x t - 0.5)^2}{\nu(1 + 4t)} - \frac{(y - \beta_y t - 0.5)^2}{\nu(1 + 4t)} \right\}. \quad (29)$$

Maintenant, on considère A_x , A_y et A_{xy} les matrices de différentiation correspondantes à $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ respectivement. Nous pourrons alors écrire l'équation (28) sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\nu A_{xy} - \beta_x A_x - \beta_y A_y]U = \mathcal{L}U, \quad (30)$$

avec $\mathcal{L} = \nu A_{xy} - \beta_x A_x - \beta_y A_y$.

Comme nous avons vu précédemment, on peut calculer u_{n+1} en utilisant seulement u_n par une méthode numérique bien choisie. Pour nous, la méthode numérique qu'on utilise pour la suite est Range-Kutta d'ordre 4.

Notons que l'équation discrète (30) est vérifiée pour les points intérieures. Les point du bord sont obtenues à partir de la solution analytique (29).

⊕ Teste numérique :

Nous avons étudié l'équation (1.24) sur $[-1, 1]^2 \times [0, 1]$ en utilisant les mêmes fonctions (MQRBF et CSRBF de Wendland).

Pour cela, on génère une collocation formé par 900 ($N_x \times N_y = 30 \times 30$) points: 784 points à l'intérieur et 116 points aux bords.

Le teste numérique de ce problème est fait pour $\varepsilon = 3$, $\sigma = 1$, $\beta_x = \beta_y = 1$, $\nu = 0.01$ et $dt = 0.01$.

Les figures qui suivent montrent les résultats numériques obtenues dans des différentes instances par les deux méthodes MQRBF et CSRBF en utilisant le schéma de RK4 pour la discréétisation du temps.

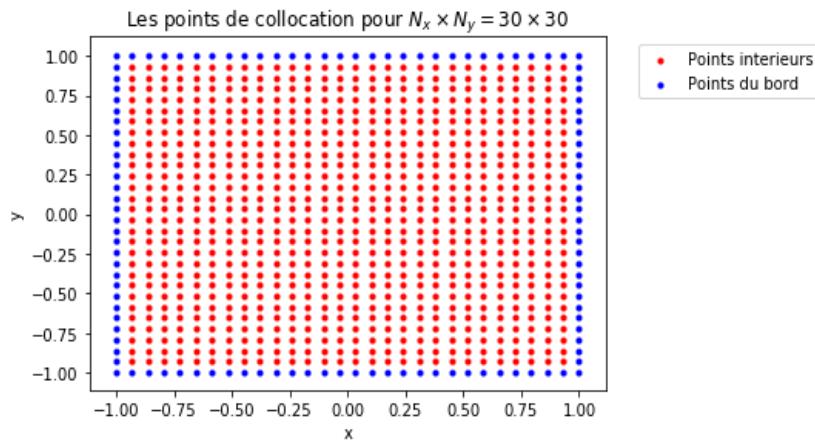


Figure 25 : Les points de collocation choisies uniformément $N = 30 \times 30 = 900$.

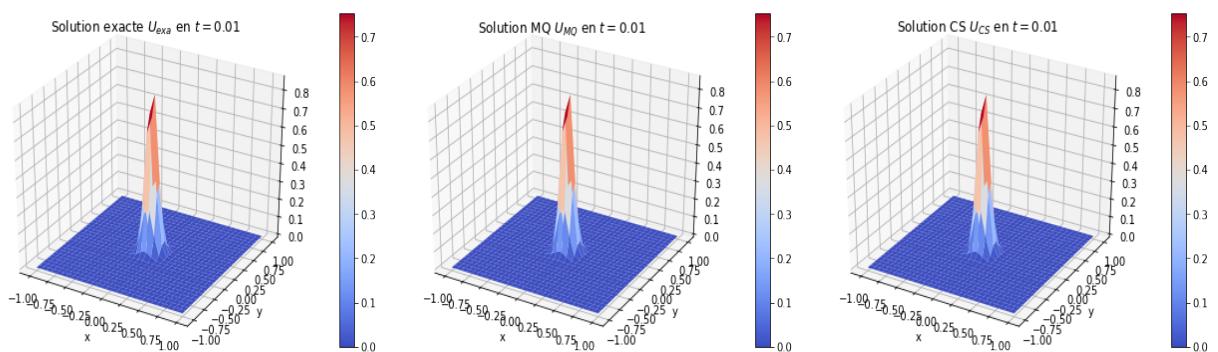


Figure 26 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instance $t = 0.01$.

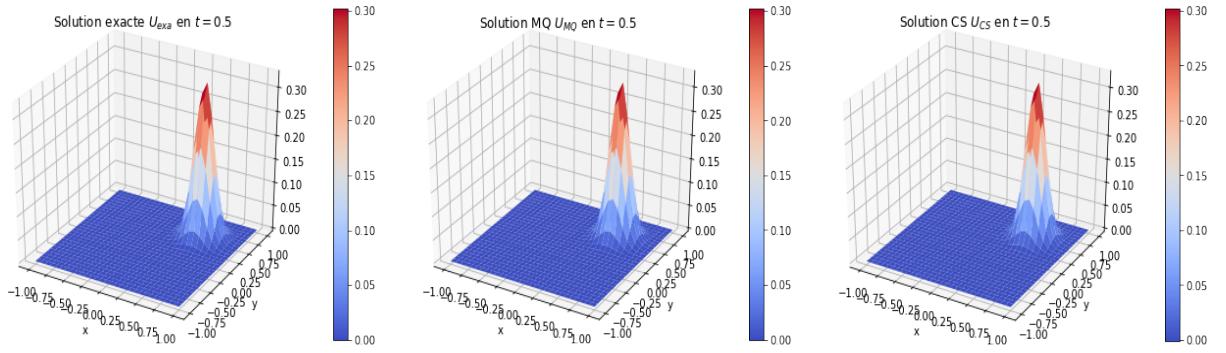


Figure 27 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instante $t = 0.05$.

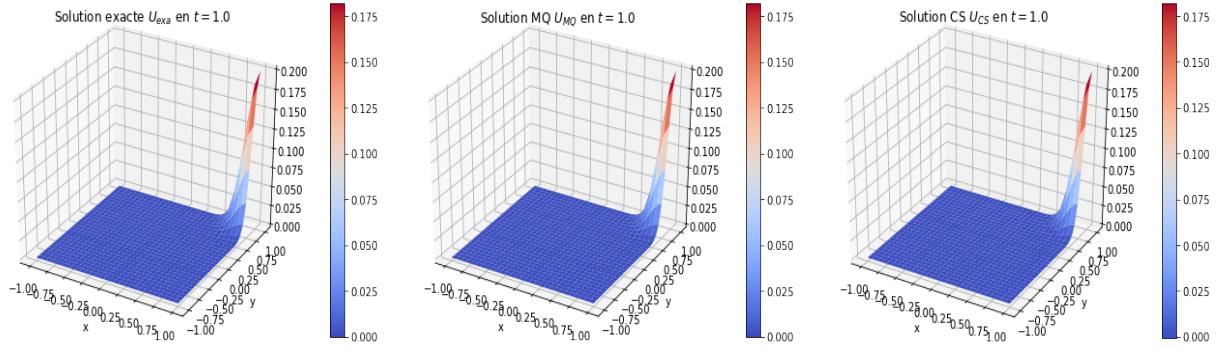


Figure 28 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instante $t = 1$.

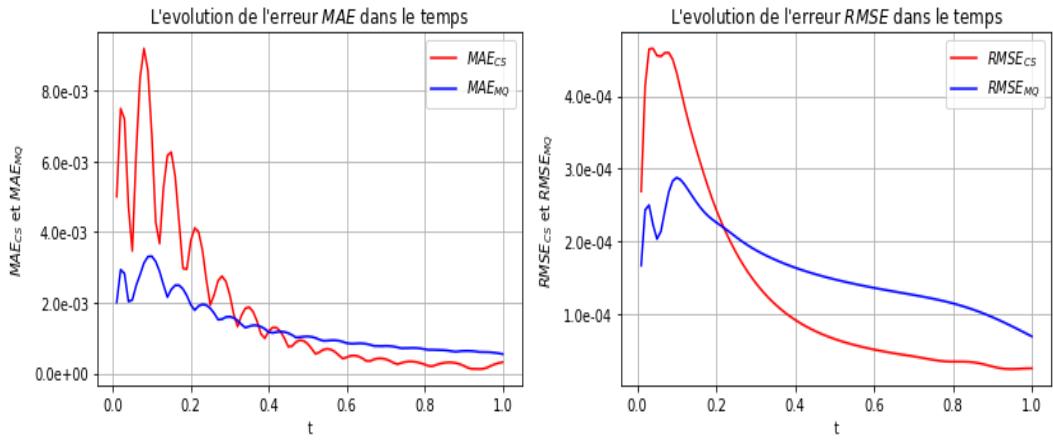


Figure 29 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

$N_x \times N_y$	$MAE-MQ$	$MAE-CS$	$RMSE-MQ$	$RMSE-CS$
20×20	$8.529e-02$	$9.904e-02$	$1.937e-02$	$2.444e-02$
30×30	$3.315e-03$	$9.192e-03$	$1.700e-03$	$1.891e-03$
40×40	$1.611e-04$	$1.364e-04$	$1.320e-04$	$2.501e-04$

Tableau 5 : Les erreurs MAE et $RMSE$ correspondantes aux méthodes $MQRBF$ et $CSRBF$ pour des différentes valeurs de $N_x \times N_y$.

0.5.3 Résolution d'équation d'advection-diffusion tridimensionnelle

Dans cette section, on considère l'équation d'advection-diffusion tridimensionnelle sur $[0, 1]^3$ et $t \in [0, T]$ suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (31)$$

dont la condition initiale et les conditions aux limites sont obtenues selon la solution analytique définie sur $[0, 1]^3$ et $t \in [0, T]$ comme suit :

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(1 + 4t)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(x - \beta_x t - 0.5)^2}{\nu(1 + 4t)} - \frac{(y - \beta_y t - 0.5)^2}{\nu(1 + 4t)} - \frac{(z - \beta_z t - 0.5)^2}{\nu(1 + 4t)} \right\}, \quad (32)$$

En suivant le même procédé des exemples précédentes, la solution approchée peut s'écrire sous la formulation suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\nu A_{xyz} - \beta_x A_x - \beta_y A_y - \beta_z A_z]U = \mathcal{L}U, \quad (33)$$

avec $\mathcal{L} = \nu A_{xyz} - \beta_x A_x - \beta_y A_y - \beta_z A_z$, où A_x , A_y , A_z et A_{xyz} sont les matrices de différentiations correspondantes à $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ respectivement.

• Teste numérique :

On teste les deux solutions MQRBF et CSRBF obtenus suivant le schéma décrit par la méthode précédente en utilisant le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) pour la discrétisation temporelle.

Dans notre domaine spatiale $[0, 1]^3$, on génère une collocation formé par 3375 points ($15 \times 15 \times 15$) : 2197 points intérieurs et 1178 points au bord. Cette collocation est affiché dans la figure 30.

Posons $\beta_x = \beta_y = \beta_z = 0.8$ et $\nu = 0.01$, $\varepsilon = 4.5$, $\sigma = 1$, $T = 0.3$ et $dt = 0.005$. Les résultats obtenus par ce teste sont affichés ci-dessous.

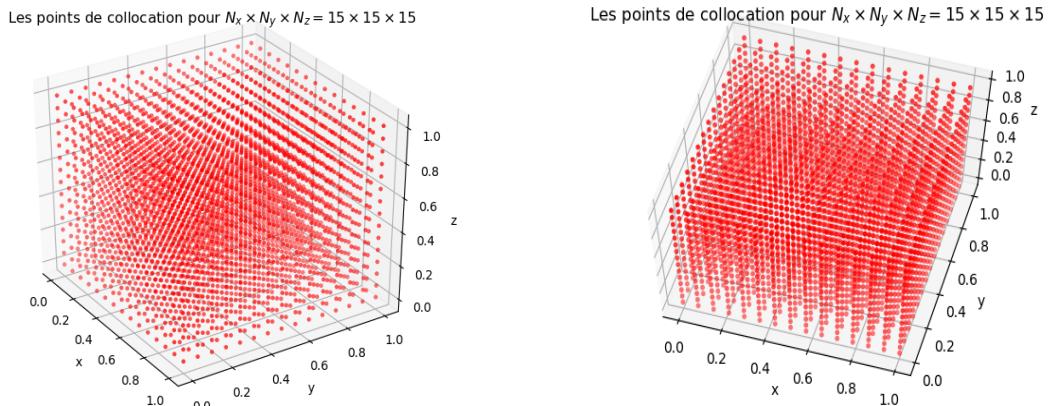


Figure 30 : Les points de collocation choisies uniformément pour $N = 15 \times 15 \times 15$.

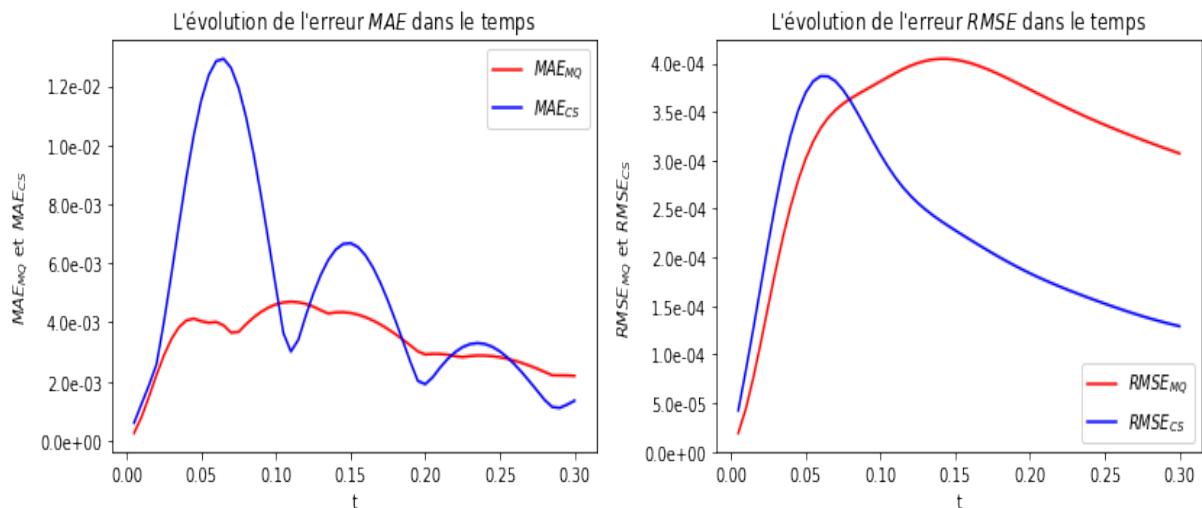


Figure 31 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

N	$MAE - MQ$	$MAE - CS$	$RMSE - MQ$	$RMSE - CS$
$10 \times 10 \times 10$	$1.389e-01$	$1.502e-01$	$2.548e-02$	$2.849e-02$
$15 \times 15 \times 15$	$4.696e-03$	$1.292e-02$	$2.646e-03$	$1.856e-03$
$20 \times 20 \times 20$	$1.307e-04$	$1.364e-03$	$5.360e-05$	$1.482e-04$

Tableau 6 : Les erreurs MAE et $RMSE$ correspondantes aux méthodes $MQRBF$ et $CSRBF$ pour des différentes valeurs de $N_x \times N_y \times N_z$.

0.6 Résolution d'équation de Burger unidimensionnelle

0.6.1 L'équation de Burger non linéaire 1D

L'équation de Burger est l'équation aux dérivées partielles donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall (x, t) \in]0, T] \times]a, b[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a, t) = f(t) & \forall t \in]0, T] \\ u(b, t) = g(t) & \forall t \in]0, T], \end{cases} \quad (34)$$

où $\nu > 0$ et u_0 , f et g sont des fonctions données.

Nous intéressons à résoudre cette équation avec des termes de viscosité négligeables ($\nu \simeq 0$) puisque la solution est simple à trouver lorsque $\nu = 0$ pour quelques fonctions u_0 données.

Pour des termes négligeable de ν , l'équation (34) peut être équivalent à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall (x, t) \in]0, T] \times]a, b[\\ u(x, 0) = x & \forall x \in [a, b] \\ u(a, t) = f(t) & \forall t \in]0, T] \\ u(b, t) = g(t) & \forall t \in]0, T]. \end{cases} \quad (35)$$

Par suite, on peut comparer les solutions numériques de (34) avec la solution exacte de (35).

Soit donc U la solution numérique MQRBF ou CSRBF de l'équation (34). Alors U peut s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{2} A_x U^2 + \nu A_{xx} U = \mathcal{L}_1 U^2 + \mathcal{L}_2 U, \quad (36)$$

avec

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} A_x \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2 = \nu A_{xx},$$

où $A_x = \Phi_x \Phi^{-1}$, $A_{xx} = \Phi_{xx} \Phi^{-1}$ et Φ , Φ_x et Φ_{xx} sont des matrices de différentiation respectivement.

Les conditions aux limites sont obtenues selon la solution analytique et le schéma du temps utilisé par la suite est celle de Range-Kutta d'ordre 4.

0.6.2 Problème à condition initiale continue

On considère l'équation (34) dans $[-2, 2]$ avec $u_0(x) = x$ et f et g des fonctions telles que la solution exacte du problème (en négligeant ν) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x}{t + 1}.$$

⊕ Teste numérique :

Les résultats numériques ci-dessous sont obtenus pour les paramètres données dans le tableau suivant :

N	ε	σ	ν	T	dt
400	20	1.88	0.0025	4	0.005

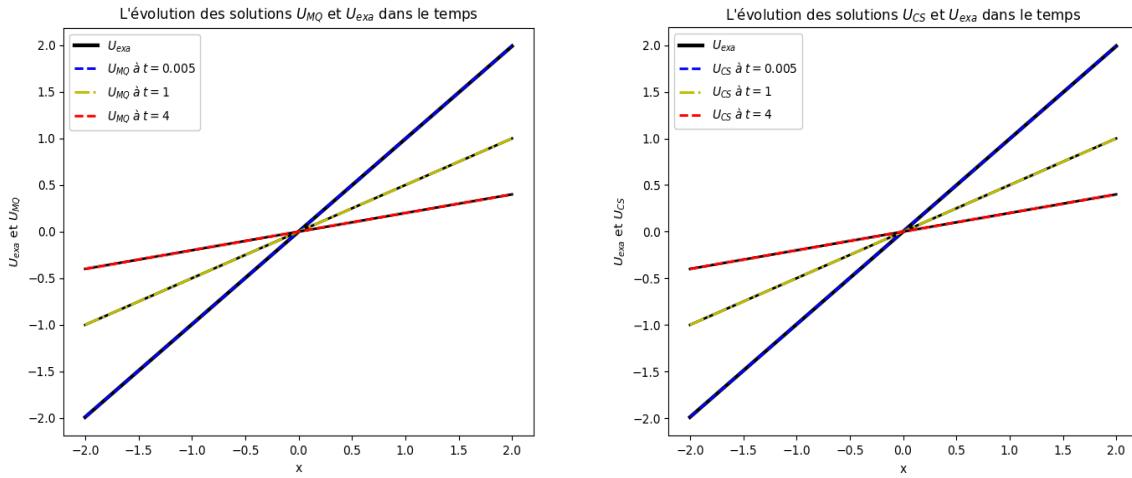


Figure 32 : Les solution U_{exa} et U_{MQ} (à gauche) et les solution U_{exa} et U_{CS} (à droite) aux instants $t = 0.005$, $t = 1$ et $t = 4$.

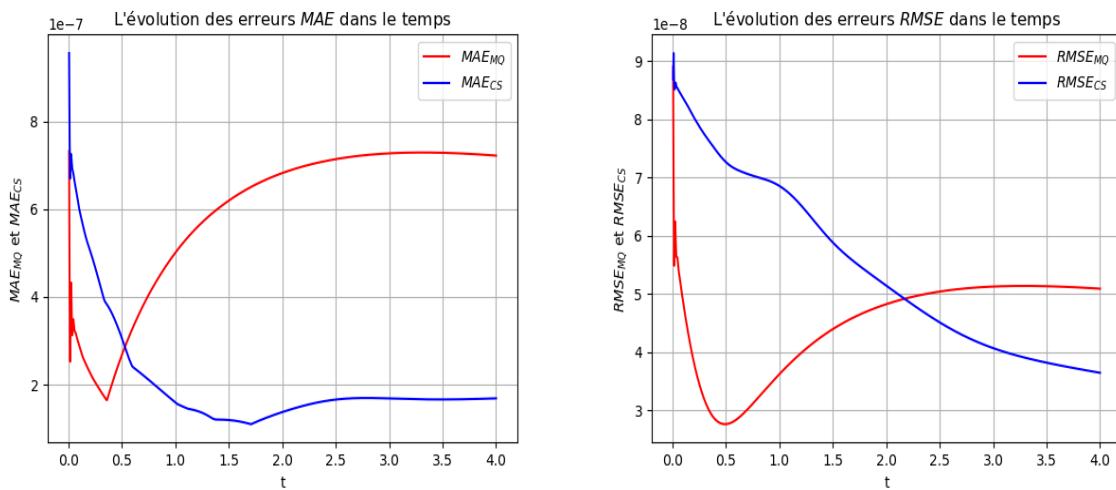


Figure 33 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

0.6.3 Problème à condition discontinue (problème de Riemann)

Dans cette partie, nous allons traiter les problèmes de Riemann 1D de la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 & \forall x \in [a, b], \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_g & x \leq 0 \\ u_d & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (37)$$

où u_g et u_d sont des constantes données.

Problème de Riemann à deux états:

On prend $[a, b] = [-2, 2]$ pour la suite.

* **Donnée initiale croissante : (Détente) ($u_g < u_d$):**

Considérons la condition initiale suivante:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0. \end{cases} \quad (38)$$

La solution exacte dans ce cas donné par :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases} \quad (39)$$

⊕ Teste numérique :

On prend $\varepsilon = 10$, $\sigma = 9$, $\nu = 0.0025$, $T = 3$, $N = 200$ et $dt = 0.01$. Les solutions obtenus sont présentées dans les figures ci-dessous.

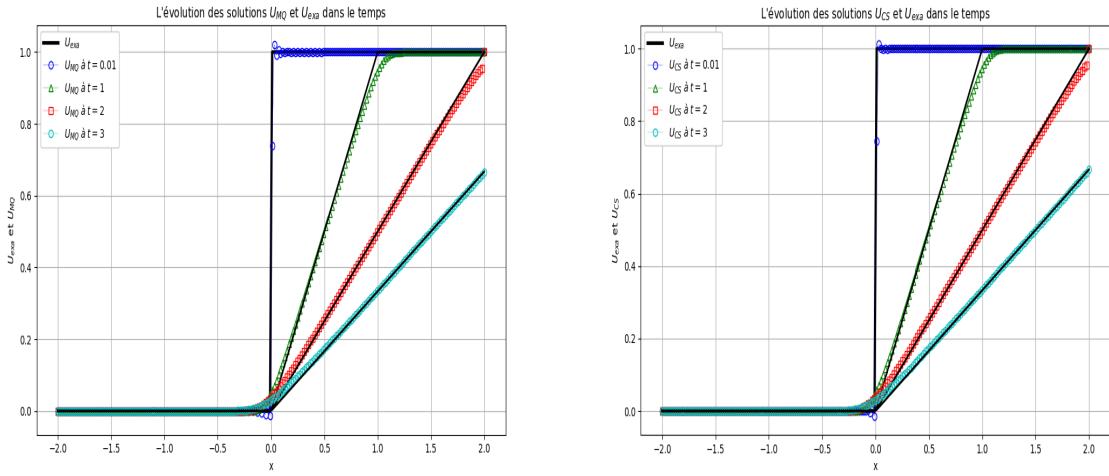


Figure 34 : Les solution U_{exa} et U_{MQ} (à gauche) et les solution U_{exa} et U_{CS} (à droite) aux instantes $t = 0.01$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$.

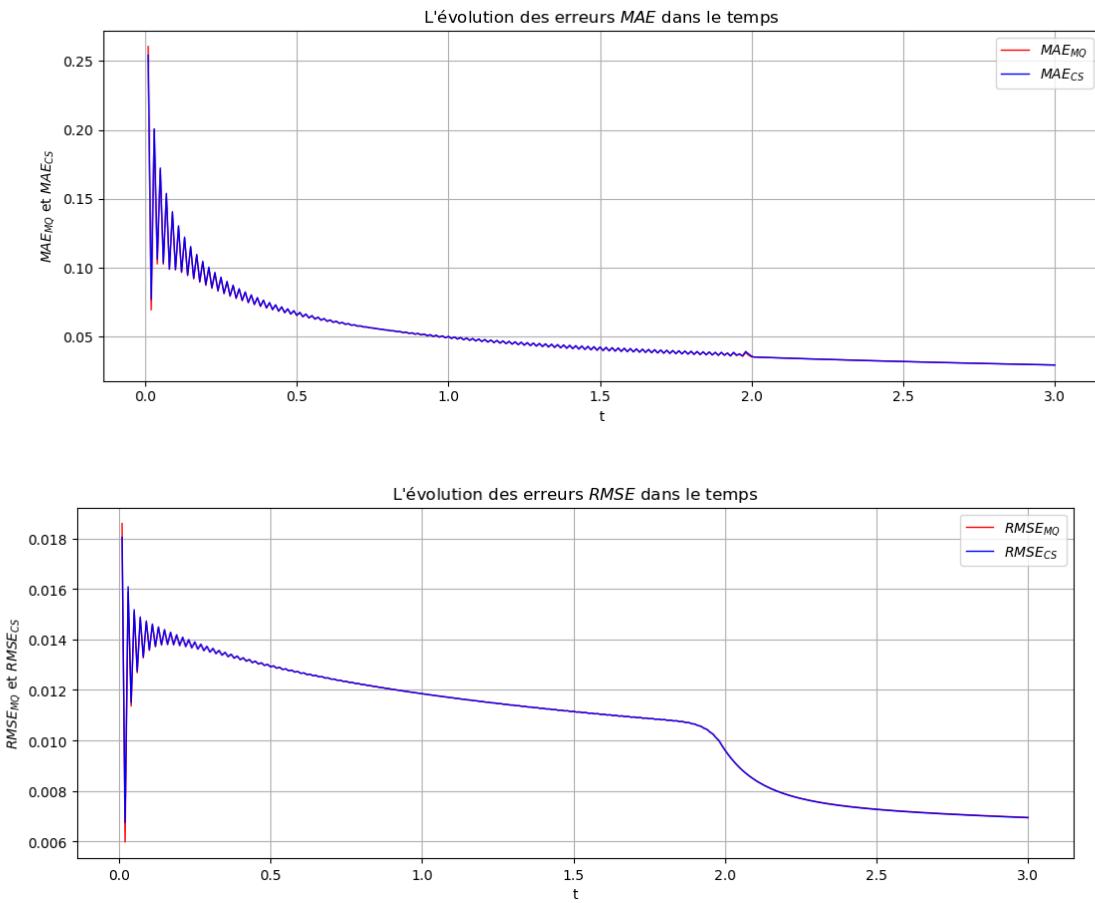


Figure 35 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

* **Donnée initiale décroissante: choc** ($u_g > u_d$) :

Considérons la solution initiale définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (40)$$

dont la solution exacte est de la forme:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (41)$$

• Teste numérique :

Fixons $\varepsilon = 10$, $\sigma = 9$, $\nu = 0.0025$, $T = 3$, $N = 200$ et $dt = 0.01$. Les résultats obtenus sont affichées ci-dessous.

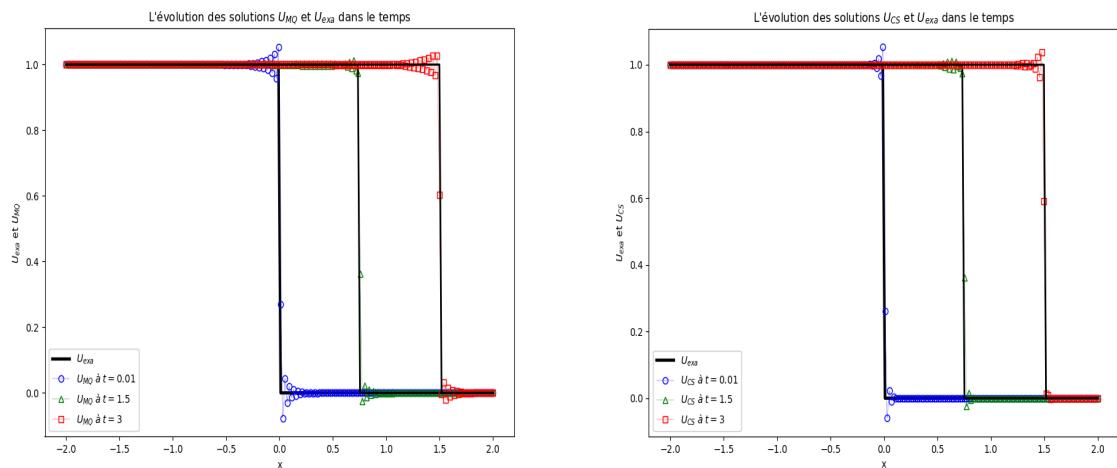
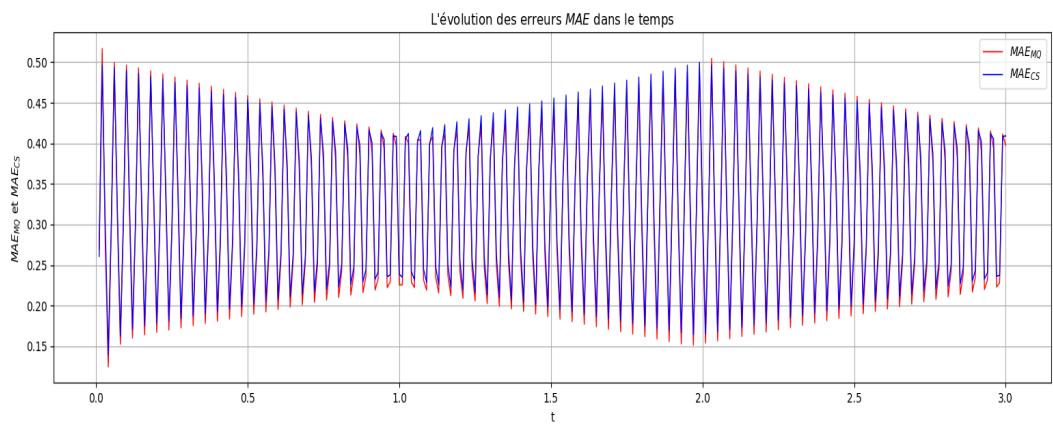


Figure 36 : Les solution U_{exa} et U_{MQ} (à gauche) et les solution U_{exa} et U_{CS} (à droite) aux instants $t = 0.01$, $t = 1.5$ et $t = 3$.



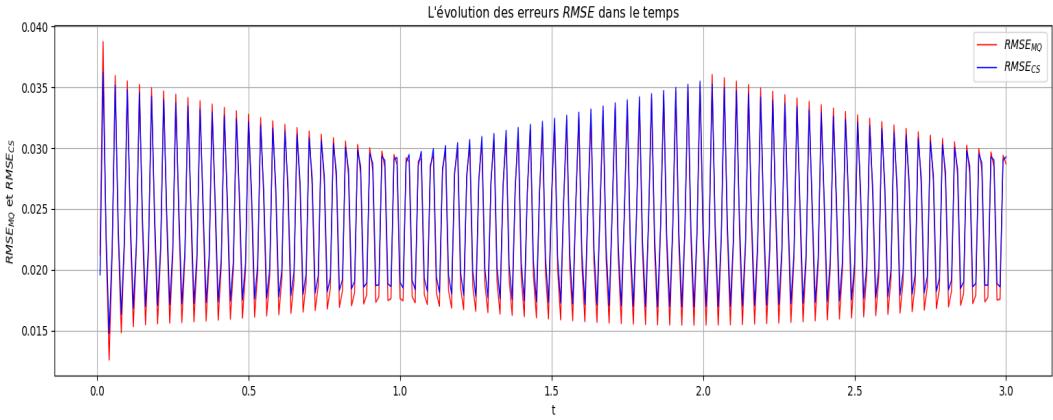


Figure 37 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

Problème de Riemann à trois états:

Un problème de Riemann à trois états de Burger est analogue au problème à deux états, sauf que pour le premier, la condition initiale est donnée sous la forme suivante:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (42)$$

avec u_1 , u_2 et u_3 sont des constantes données.

* Donné initiale croissante:

Supposons que $u_1 < u_2 < u_3$, alors dans ce cas on ait en présence de deux détentes (en $x = 0$ et $x = 1$).

On prend la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (43)$$

La solution exacte correspondante à cet condition est continue pour tout $t > 0$ donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -t \\ \frac{x}{t} & \text{si } -t < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{t} & \text{si } 1 < x \leq 2t+1 \\ 2 & \text{si } x > 2t+1. \end{cases} \quad (44)$$

⊕ Teste numérique :

Les figures ci-dessous sont obtenues pour $\varepsilon = 10$, $\sigma = 9$, $\nu = 0.0025$, $T = 4$, $N = 200$ et $dt = 0.01$.

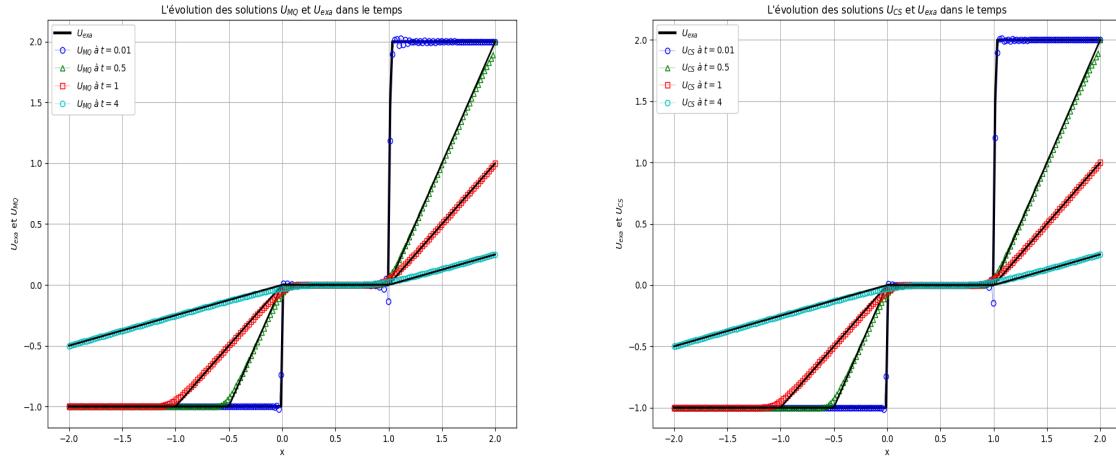


Figure 38 : Les solution U_{exa} et U_{MQ} (à gauche) et les solution U_{exa} et U_{CS} (à droite) aux instants $t = 0.01$, $t = 0.5$, $t = 1$ et $t = 4$.

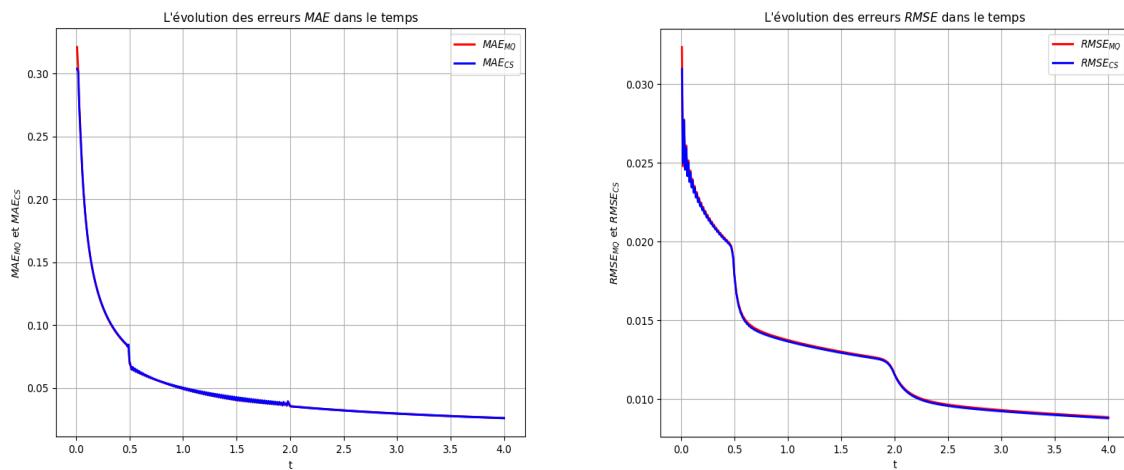


Figure 39 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

* Donné initiale décroissante:

On considère la condition initiale suivante:

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (45)$$

dont la solution exacte est donnée par :

* pour tout $t \leq t^* = \frac{2}{3}$:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \alpha t \\ u_2 & \text{si } \alpha t < x \leq \beta t + 1 \\ u_3 & \text{si } x > \beta t + 1, \end{cases} \quad (46)$$

avec $\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}$ et $\beta = \frac{u_2 + u_3}{2}$.

* pour tout $t > t^* = \frac{2}{3}$, la solution est :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \gamma t + \lambda \\ u_3 & \text{si } x > \gamma t + \lambda, \end{cases} \quad (47)$$

où $\gamma = \frac{u_1 + u_3}{2}$ et $\lambda = \frac{u_2 - u_3}{u_1 + u_3}$.

t^* est le temps dans lequel les deux chocs vont se rencontrer.

• Teste numérique :

Les figures ci-dessous sont obtenues pour $\varepsilon = 30$, $\sigma = 9$, $\nu = 0.0025$, $T = 3$, $N = 400$ et $dt = 0.005$.

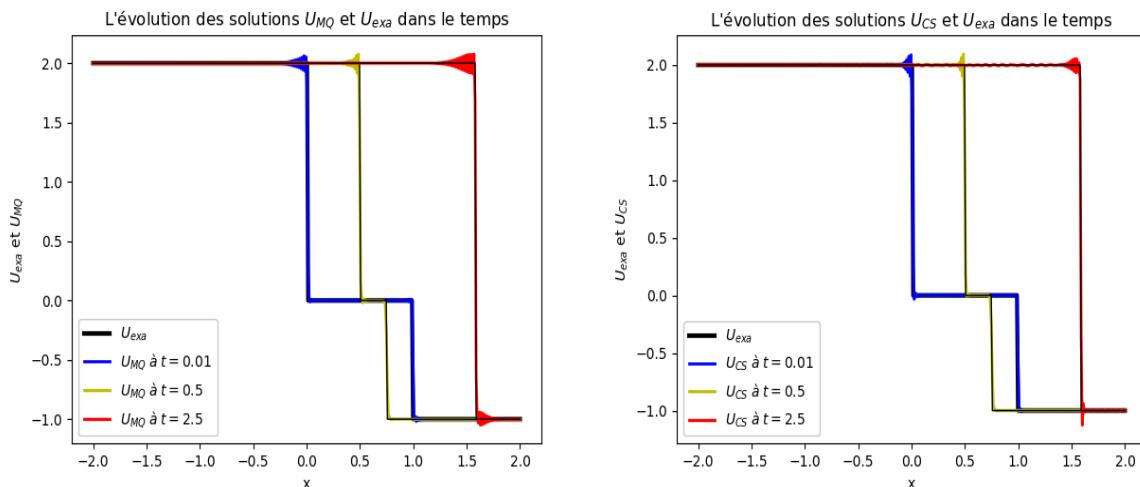


Figure 40 : Les solution U_{exa} et U_{MQ} (à gauche) et les solution U_{exa} et U_{CS} (à droite) aux instants $t = 0.01$, $t = 0.5$ et $t = 2.5$.

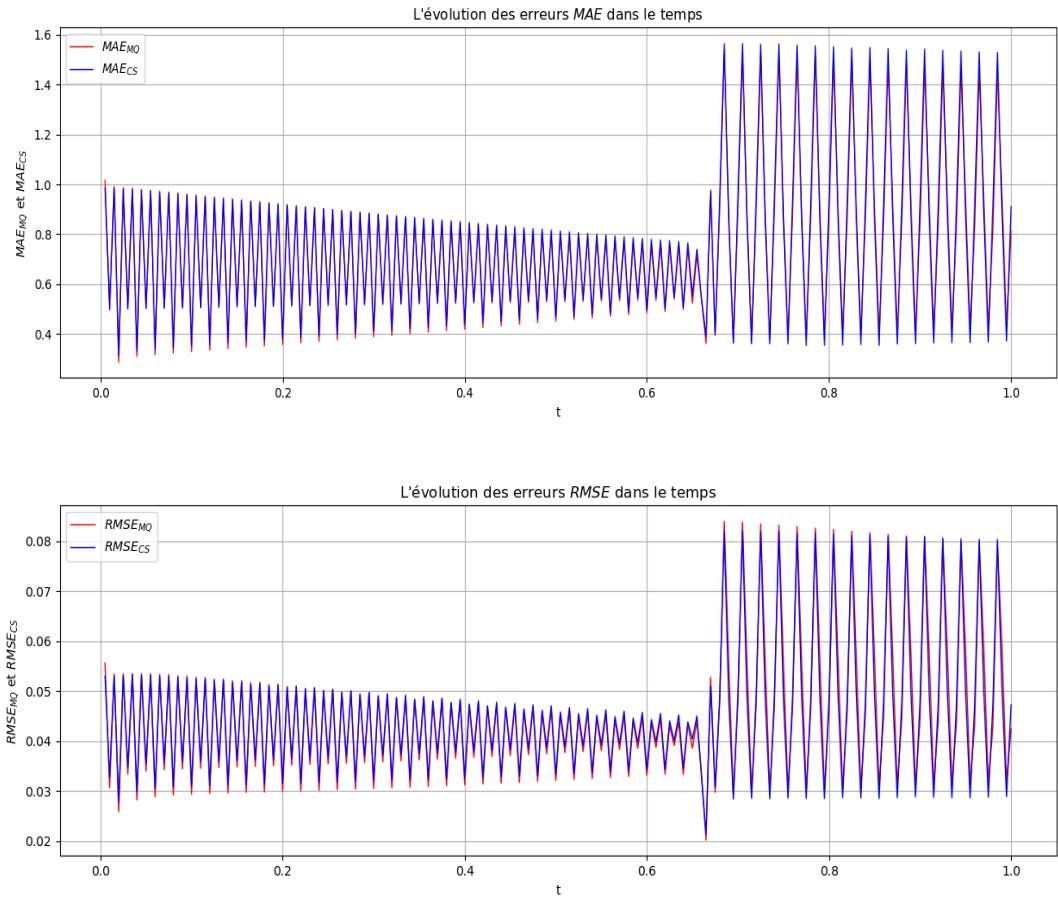


Figure 41 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

* **Donnée initiale non monotone ($u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$):**

Dans ce cas, on ait en présence d'une détente en $x = 0$ et un choc en $x = 1$. On prend comme condition initiale:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (48)$$

La solution exacte correspondante à cet condition est donnée par :

* Pour $t \leq t^* = 1$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x \leq t \\ 1 & \text{si } t < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (49)$$

* Pour $t^* < t \leq t^\sim$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x \leq 2\sqrt{t} - t \\ -1 & \text{si } x > 2\sqrt{t} - t, \end{cases} \quad (50)$$

* Pour $t > t^\sim$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{t}{2} + 2 \\ -1 & \text{si } x > -\frac{t}{2} + 2. \end{cases} \quad (51)$$

⊕ Teste numérique :

On prend $\varepsilon = 30$, $\sigma = 9$, $\nu = 0.0025$, $T = 5$, $N = 400$ et $dt = 0.005$. Les figures suivantes montrent les résultats numériques pour ce cas.

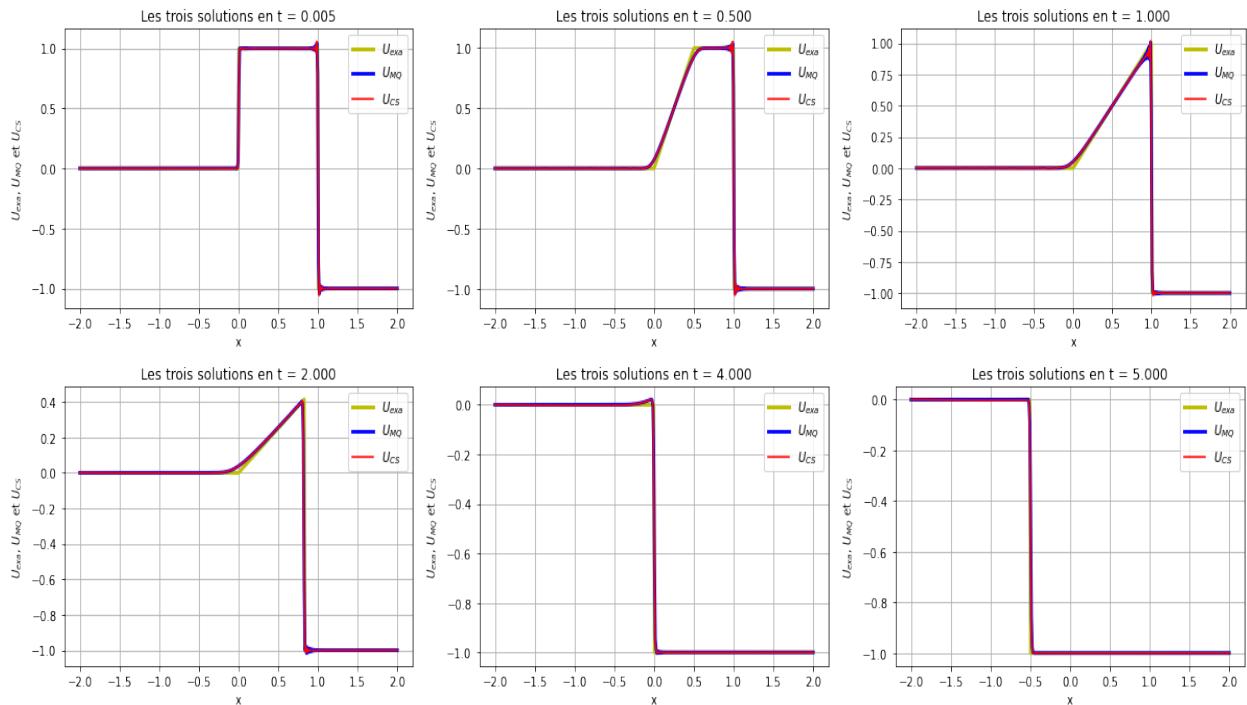


Figure 42 : Les trois solutions U_{exa} , U_{MQ} et U_{CS} aux instants différentes.

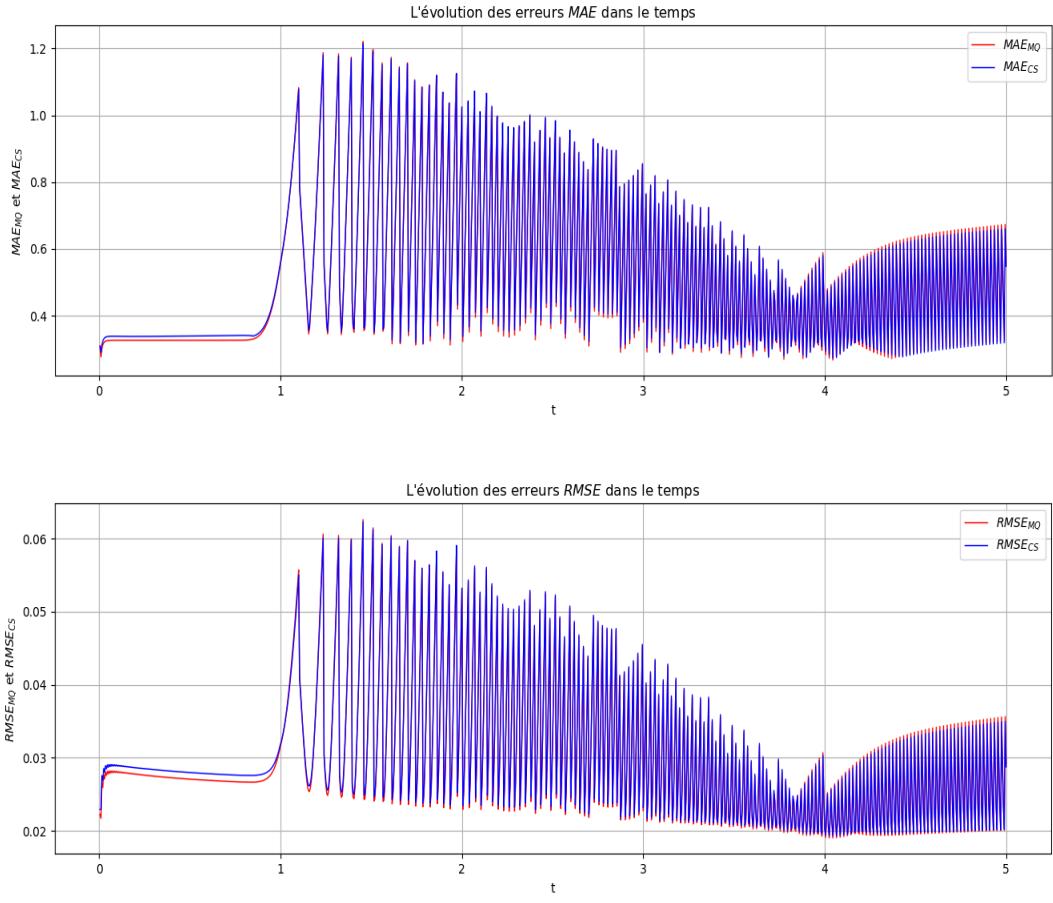


Figure 43 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

0.7 Equation de Burgers 2D

On considère l'équation de Burger bidimensionnel sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (dans notre cas $\Omega = [0, 1]^2$) définie par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) & \text{sur } \Omega, 0 \leq t \leq T \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) = h(x, y, 0) & \forall (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (52)$$

avec Δ est l'opérateur laplacien donné par $\Delta \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2}$ et les fonctions g et h tel que la solution exacte de (52) est donnée par :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y-t}{2\nu}\right)}. \quad (53)$$

Soit U la solution approchée de (52) par l'un des méthodes (MQRBF ou CSRBF). On a la formulation discrète suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu A_{xy} U - \frac{1}{2}(A_x + A_y)U^2 = \mathcal{L}_1 U + \mathcal{L}_2 U^2, \quad (54)$$

avec $\mathcal{L}_1 = \nu A_{xy}$ et $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(A_x + A_y)$.

Rappelons que $A_x = \Phi_x \Phi^{-1}$, $A_y = \Phi_y \Phi^{-1}$ et $A_{xy} = \Phi_{xy} \Phi^{-1}$ où Φ , Φ_x , Φ_y et Φ_{xy} sont les matrices RBF associées aux opérateurs linéaires $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ respectivement.

⊕ Teste numérique :

Pour le teste numérique, on considère une collocation de $400 = 20 \times 20$: 324 points intérieurs et 76 points au bord comme le montre la figure 44. On prend $\varepsilon = 4.5$, $\sigma = 5$, $\nu = 0.05$, $T = 1$ et $dt = 0.005$. Les résultats obtenus sont affichées dans les figures ci-dessous.

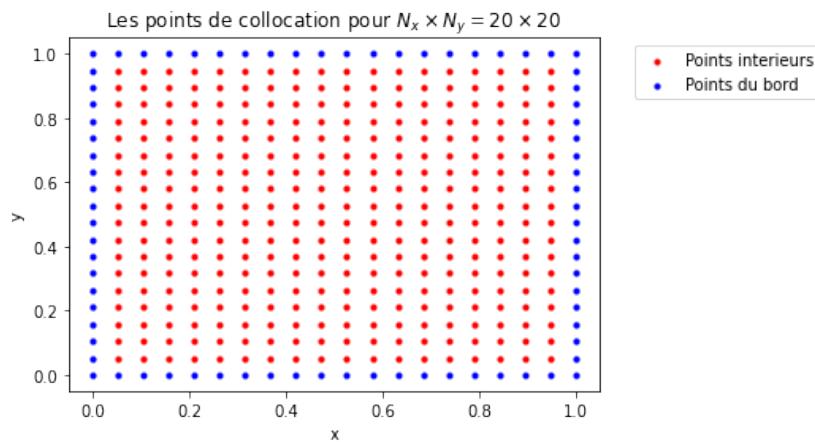


Figure 44 : Les points de collocation choisies uniformément $N = 20 \times 20 = 400$.

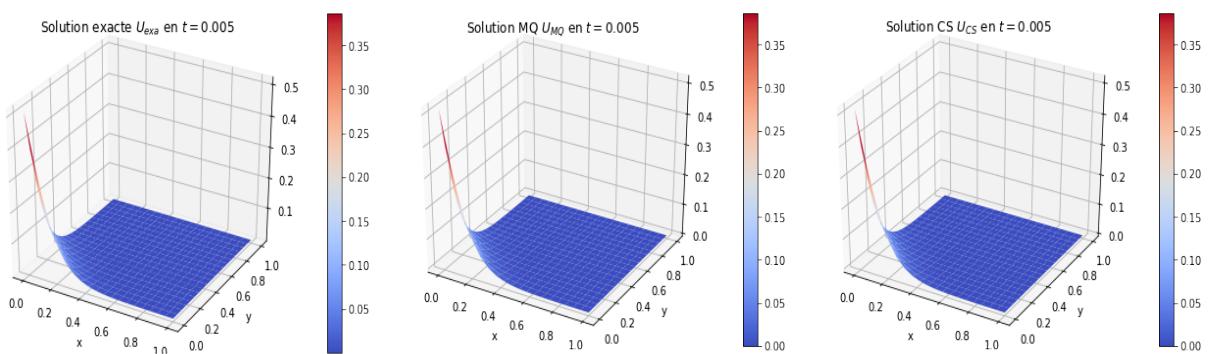


Figure 45 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instante $t = 0.005$.

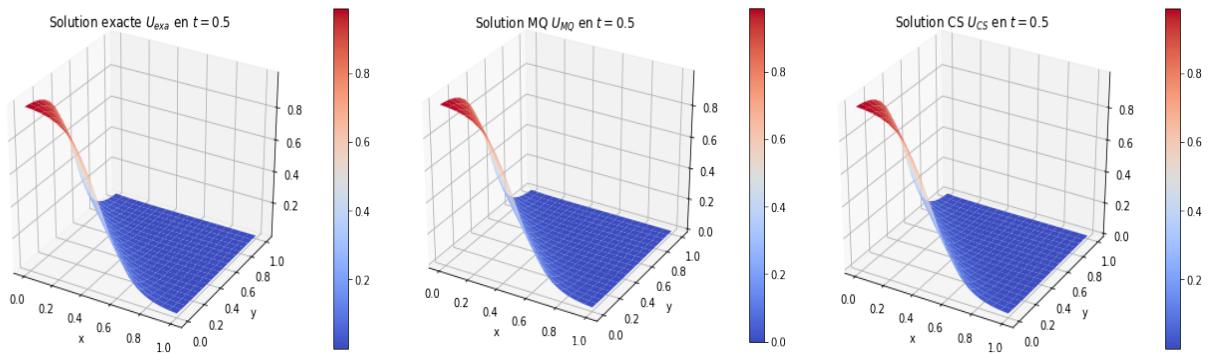


Figure 46 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instante $t = 0.5$.

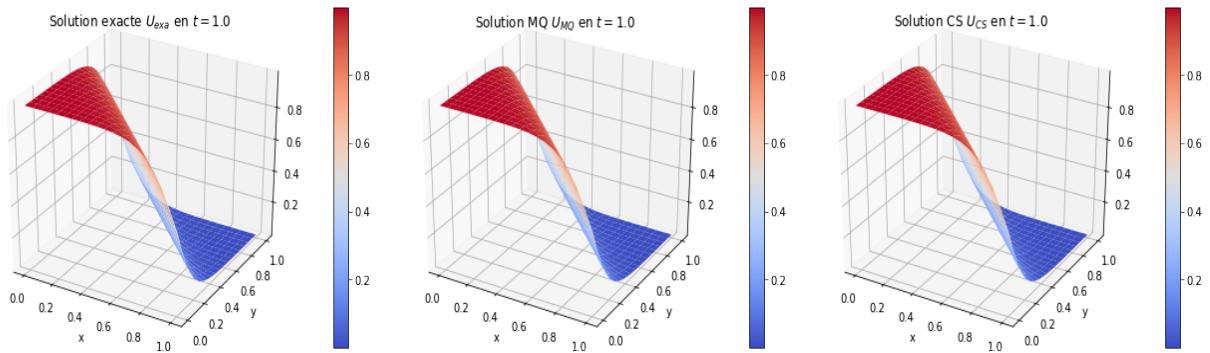


Figure 47 : La solution exacte U_{exa} (à gauche), la solution MQ U_{MQ} (au milieu) et la solution CS U_{CS} (à droite) à l'instante $t = 1$.

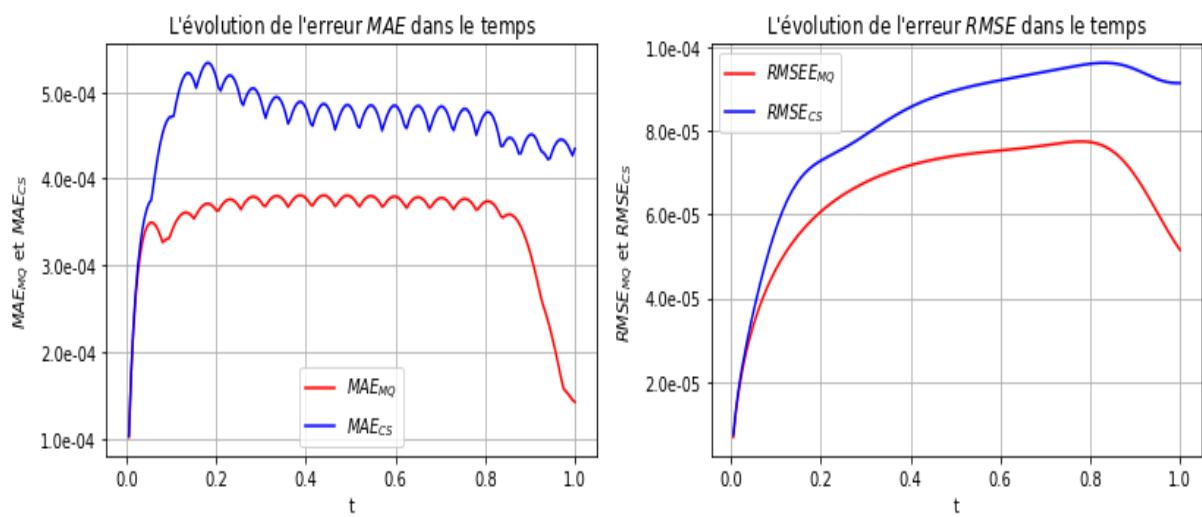


Figure 48 : Les erreurs MAE et $RMSE$ en fonction du temps.

Prenons maintenant $\nu = 0.005$, $\varepsilon = 10$, le tableau suivant nous donne les erreurs MSA et $RMSE$ des deux méthodes (MQRBF et CSRBF) pour des différentes valeurs de N.

$N_x \times N_y$	$MAE-MQ$	$MAE-CS$	$RMSE-MQ$	$RMSE-CS$
20×20	$4.616e-01$	$5.556e-01$	$7.781e-01$	$9.162e-01$
40×40	$7.666e-02$	$5.772e-02$	$5.341e-02$	$8.150e-02$
60×60	$1.299e-01$	$1.058e-03$	$2.231e-02$	$9.609e-02$

Tableau 7 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour des valeurs différentes de $N_x \times N_y$.

0.8 Système de Saint-Venant 2D

On considère le système linéaire de Saint-Venant donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (55)$$

avec $\eta(x, y, t)$ est la surface libre de l'eau au point (x, y) à l'instant t , h est la hauteur moyenne de l'eau, $H(x, y, t) = h + \eta(x, y, t)$ c'est le profondeur totale à l'instant t , u la vitesse de l'eau suivant la direction x , v la vitesse de l'eau suivant la direction y et g est une unité d'accélération de la pesanteur.

Ces équations sont obtenues en négligeant la contrainte de Vent, le frottement du fond, la diffusion et la force de Coriolis.

La solution analytique de (55) est donnée par :

$$\eta(x, y, t) = \eta_0 \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}}(L - x)\right) \frac{\cos(\omega t)}{\cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}}L\right)}, \quad (56)$$

$$u(x, y, t) = -\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}}(L - x)\right) \frac{\sin(\omega t)}{\cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}}L\right)}, \quad (57)$$

$$v(x, y, t) = 0, \quad (58)$$

pour $(x, y) \in [0, L] \times [0, l]$ et $0 \leq t \leq T$.

Soit $U = (\eta, u, v)^T$ une solution approchée de (55) par l'une des méthode MQRBF ou CSRBF. l'équation (55) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U), \quad (59)$$

avec, $F(U) = - \left(H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), g\frac{\partial \eta}{\partial x}, g\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^T$.

En utilisant un schéma numérique de Range-Kutta d'ordre 3 pour le temps, l'équation (59) peut s'écrire sous la forme :

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}K_2 + \frac{2}{3}\Delta t F(K_2) \quad (60)$$

avec,

$$\begin{aligned} K_1 &= U^n + \Delta t F(U_n), \\ K_2 &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}K_1 + \frac{1}{4}\Delta t F(K_1), \end{aligned}$$

Donc, la formule (60) nous permet de calculer la solution approchée à l'instante $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$ en utilisant seulement la solution connue à l'instante $t_n = n\Delta t$. La condition initiale et les conditions aux limites sont obtenues des solutions exactes (56), (57) et (58).

⊕ Teste numérique :

On utilise 600 points de collocation.

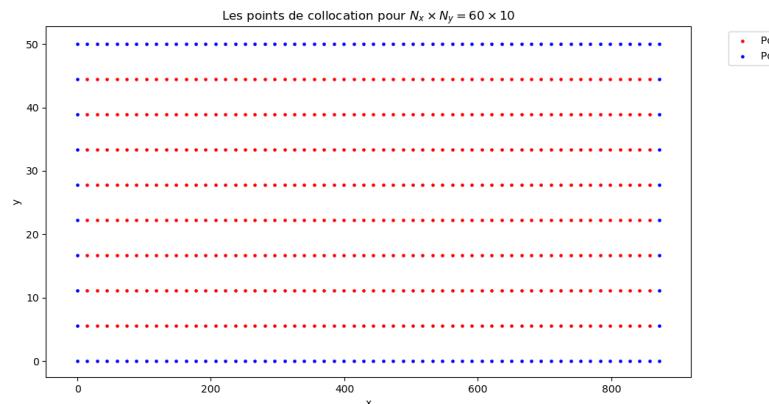


Figure 49 : Les points de collocation choisies uniformément $N = 60 \times 10 = 600$.

La condition de stabilité $\Delta t \leq CFL \frac{d_{min}}{\max(\sqrt{U} \pm gh, \sqrt{V} \pm gh)}$, avec d_{min} est la distance minimale entre deux points de collocation adjacents.

Le paramètre de forme $\varepsilon = 0.8 \frac{\sqrt{N}}{d_{min}}$ et $\sigma = 120$.

CFL le nombre de Courant est fixé à =0.8.

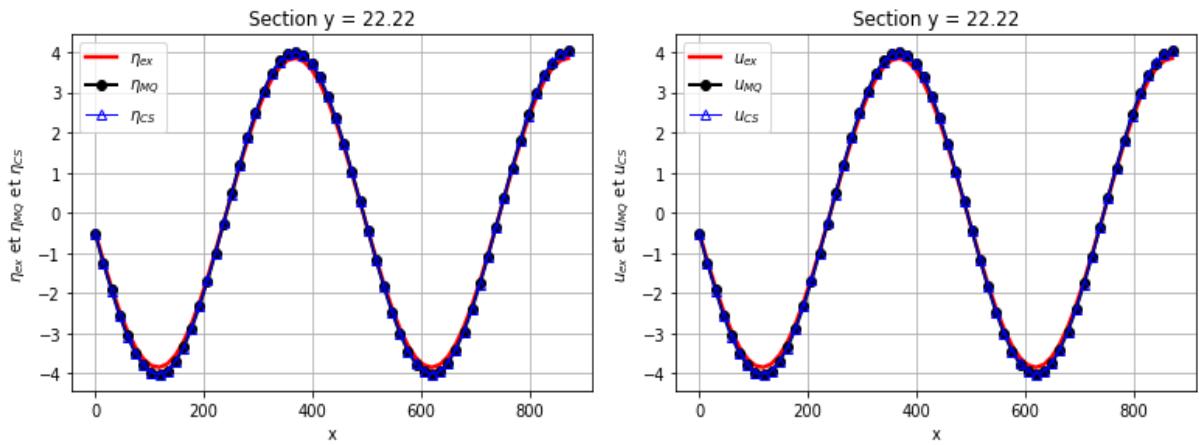


Figure 50 : Les deux solution η et u pour $y = 22.22$.

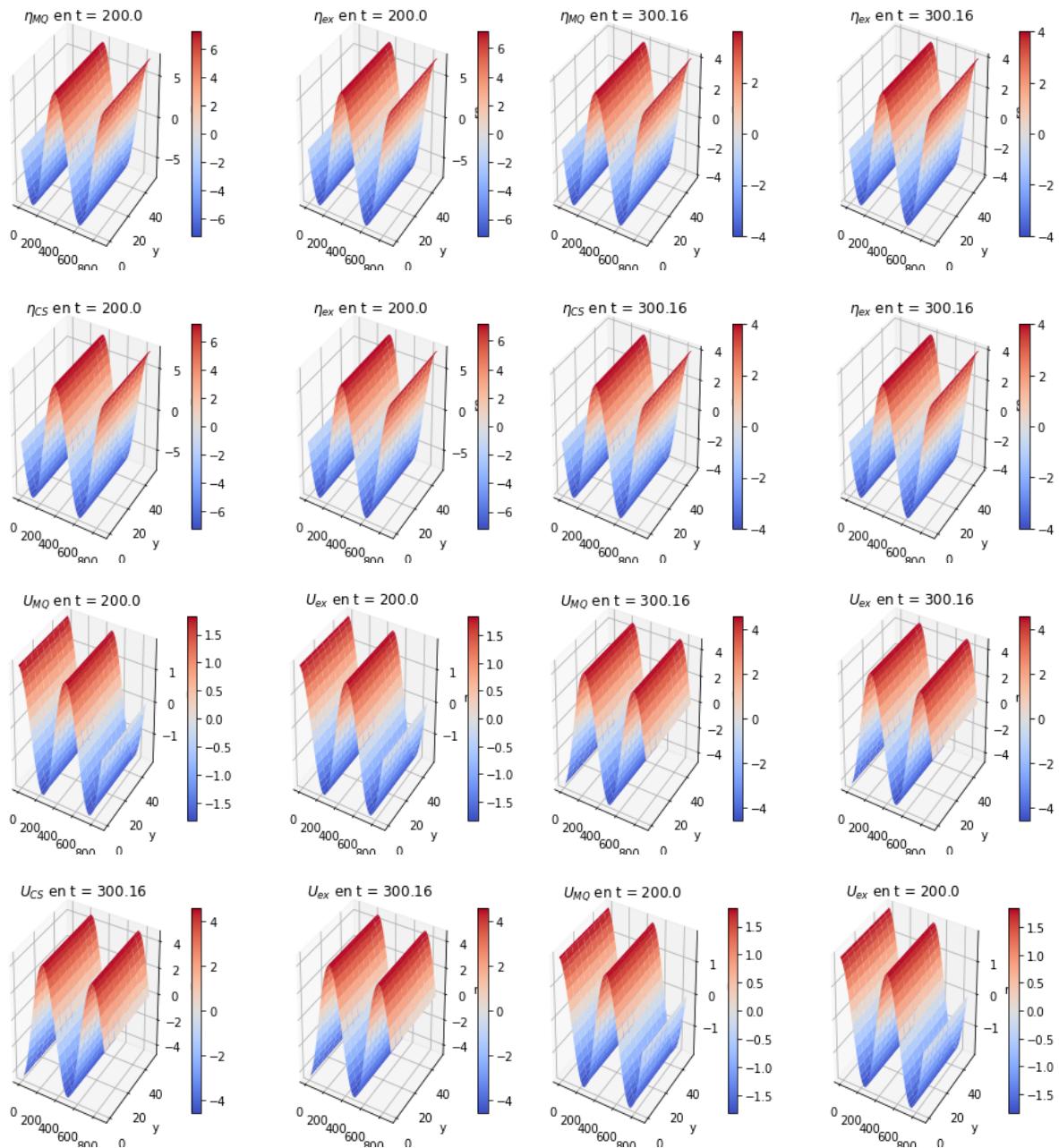


Figure 51 : Les solution approchées et exactes η et u en $t = 200s$ et $t = 300s$.

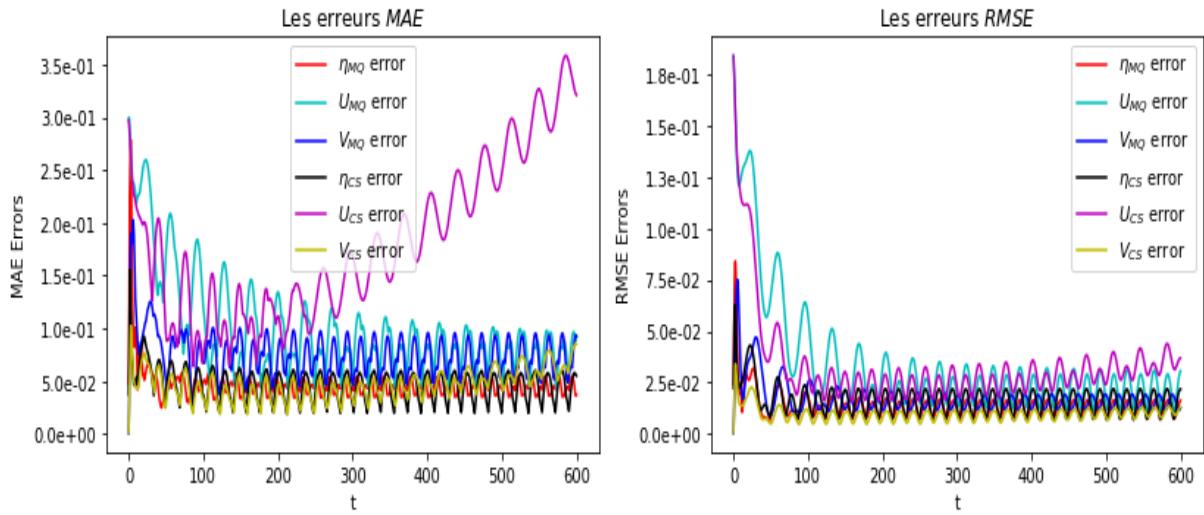


Figure 52 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour ν et u en fonction du temps t .

	N	$MAE-MQ$	$RMSE-MQ$	$MAE-CS$	$RMSE-CS$
η	40×10	$2.136e-01$	$1.645e-02$	$2.548e-01$	$1.088e-01$
	60×10	$2.793e-01$	$1.515e-02$	$1.553e-01$	$1.792e-02$
	100×10	$3.169e-01$	$1.487e-02$	$2.162e-01$	$1.574e-02$
u	40×10	$3.154e-01$	$5.022e-02$	$5.212e+00$	$2.632e-01$
	60×10	$2.998e-01$	$4.013e-02$	$3.585e-01$	$3.937e-02$
	100×10	$2.994e-01$	$4.029e-02$	$2.976e-01$	$3.447e-02$
v	40×10	$2.217e-01$	$2.130e-02$	$7.263e-01$	$6.683e-02$
	60×10	$2.028e-01$	$1.9082e-02$	$1.025e-01$	$1.012e-02$
	100×10	$2.356e-01$	$1.695e-02$	$1.109e-01$	$8.0339e-03$

Tableau 8 : Les erreurs MAE et $RMSE$ pour des différentes valeurs de $N_x \times N_y$.

Bibliography

1. Alhuri Y, Benkhaldoun F, Ouazar D, Seaid M, Taik A. A meshless method for numerical simulation of depth-averaged turbulence flows using a $k - \epsilon$ model: A MESHLESS METHOD FOR DEPTH-AVERAGED TURBULENCE FLOWS. *Int J Numer Meth Fluids.* 2016 Jan;80(1):3–22.
2. Hussain I, Mukhtar S, Ali A. A Numerical Meshless Technique for the Solution of the two Dimensional Burger's Equation Using Collocation Method. 2013;12.
3. Abdoul-These.pdf.
4. Chaabelasri E, Jeyar M, Borthwick AGL. Explicit radial basis function collocation method for computing shallow water flows. *Procedia Computer Science.* 2019;148:361–70.
5. Chaabelasri et al. - 2019 - Explicit radial basis function collocation method .pdf.
6. Dehghan M, Mohebbi A. High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection–diffusion problems. *Mathematics and Computers in Simulation.* 2008 Dec;79(3):683–99.
7. Dehghan M, Mohebbi A. High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection–diffusion problems. *Mathematics and Computers in Simulation.* 2008 Dec;79(3):683–99.
8. Taik A. Introduction des fonctions radiales de base pour la résolution des EDP. :68.
9. Chaabelasri E. Numerical Simulation of Dam Break Flows Using a Radial Basis Function Meshless Method with Artificial Viscosity. *Modelling and Simulation in Engineering* 2018;2018:1–11.
10. Chaabelasri - 2018 - Numerical Simulation of Dam Break Flows Using a Ra.pdf.
11. Dehghan M. Numerical solution of the three-dimensional advection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation.* 2004 Feb;150(1):5–19.

-
12. Dehghan M. Numerical solution of the three-dimensional advection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2004 Feb;150(1):5–19.
 13. Alhuri Y, Ouazar D, Taik A. Radial Basis Functions Alternative Solutions to Shallow Water Equations. :19.
 14. Hamaidi M, Naji A, Charafi A. Space–time localized radial basis function collocation method for solving parabolic and hyperbolic equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016 Jun;67:152–63.