RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

Équipe AN de l'UP-Mathématiques

Analyse Numérique - $3^{\text{ème}}$ année -

Cycle de vie d'une vague marine

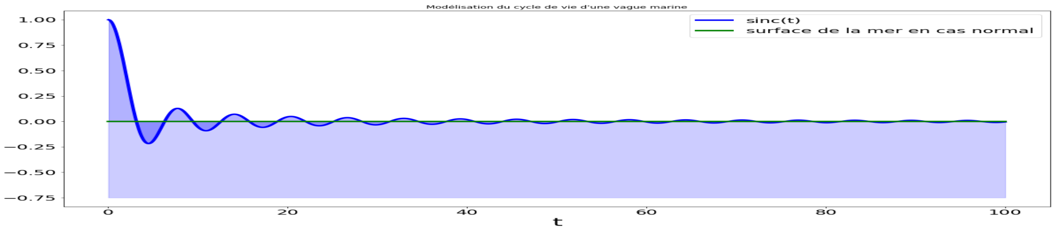


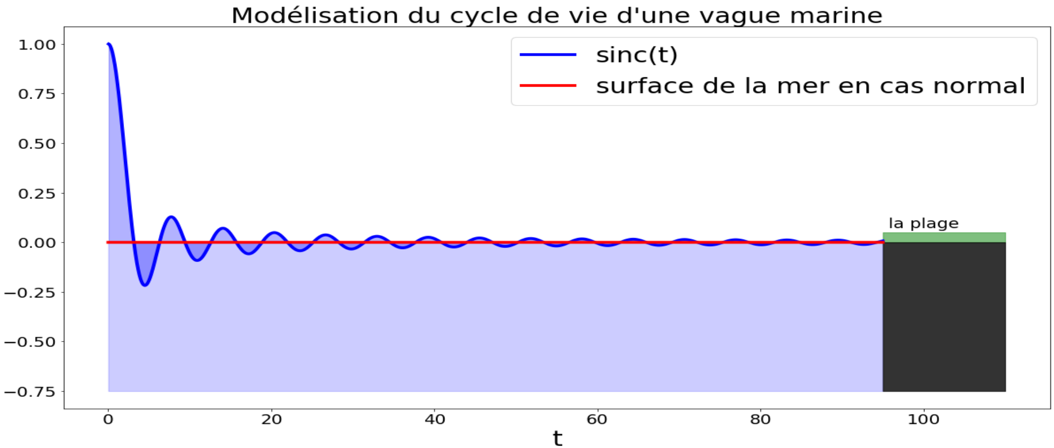
Figure: Vagues vues à l'océan atlantique

Les vagues fascinent par leurs énergies et leurs beautés. Elles sont nées aux fonds des mers et des océans mais elles pourraient être la cause des catastrophes aux niveaux des dégâts et les destructions quils peuvent produire sur les cotes surtout. Pour cela l'étude de cycle de vie des vagues dés la naissance jusqu'à la mort était primordiale pour prédire les phénomènes anormaux tels que les tsunamis. Les études sintéressent surtout à la détermination des amplitudes maximales et les fréquences (en général il sagit des phénomènes pseudo-périodiques).

Modélisation mathématique du cycle de vie d'une vague

Parmi les modèles mathématiques utilisés pour décrire le cycle de vie des vagues ceux qui se basent sur la fonction sinus cardinal notée dans la littérature par $sinc$ et elle est définie par:

$$\begin{array}{rcl} sinc : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$



Les pics maximaux d'une vague

- Une vague atteint ses maximums pour les abscisses x tels que

$$(\frac{\sin x}{x})' = 0.$$

Ce qui implique la résolution de l'équation

$$x \cos x - \sin x = 0.$$

- La fonction $f(x) = x \cos x - \sin x$ est une fonction non-linéaire définie sur $\mathbb{R}$. Il est difficile de trouver une expression explicite des racines de léquation $f(x) = 0$.
- Alternative : résolution numérique de léquation $f(x) = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x^* \in]a, b[$ tel que $f(x^*) = 0$.

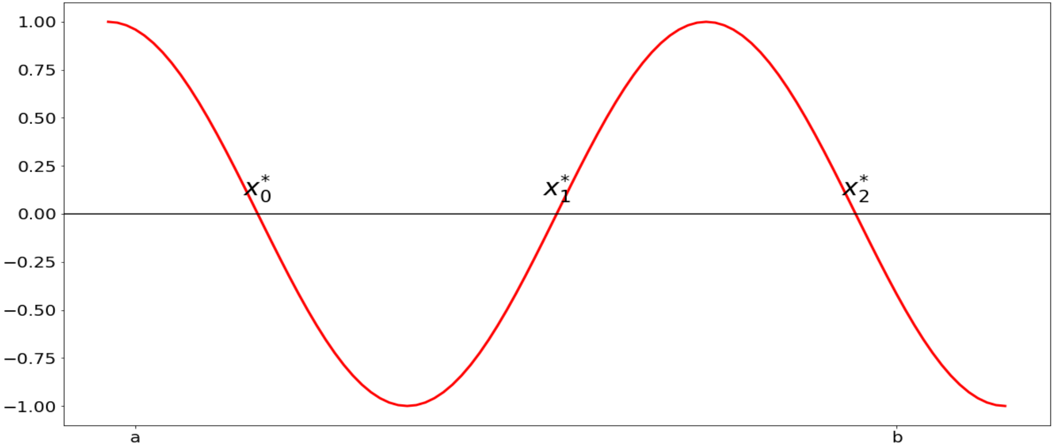


Figure: Théorème des valeurs intérmédiaires

Question : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et Unicité

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Sous quelles hypothèses la solution de $f(x) = 0$ est unique?

Réponse : La monotonie stricte

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a,b]$ alors il existe une unique solution x^* de l'équation $f(x) = 0$.

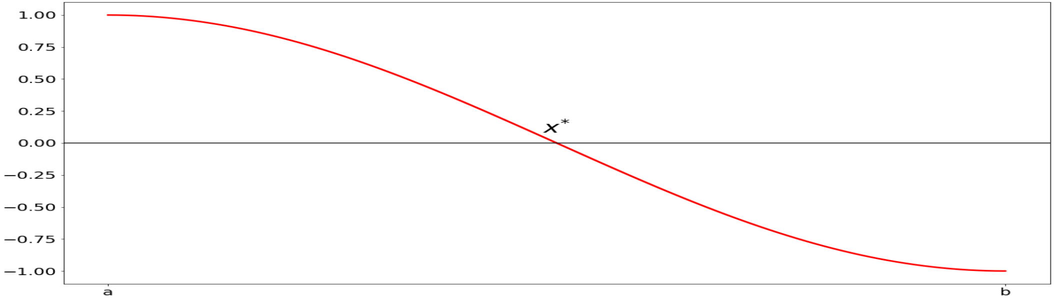


Figure: Théorème des valeurs intérmédiaires et unicité

Exercice

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 30$.

1. Dresser le tableau de variation de g sur $[2, 6]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 30$ admet une unique solution dans $]2, 6[$.

Correction

- La fonction $g(x) = f(x) - 30 = x^3 - 12x - 30$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[2, 6]$.
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g^{'}(x) = 3x^2 - 12$.
- $g^{'}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [2; 6]$.

x	2	6
$g^{'}(x)$	$+$	
$g(x)$	-46 ↗	114

- g est strictement croissante sur $[2; 6]$et $g(2).g(6) < 0$ alors d'aprés le TVI $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]2, 6[$. $\Rightarrow$ $f(x) = 30$ admet une unique solution dans $]2, 6[$.