École **S**upérieure **P**rivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Série d'exercices N^{o}4 Résolution numérique des équations non linéaires.

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ année

Partie 1. Partie Synchrone

Exercice 1 *On se propose de résoudre numériquement l'équation* $(E) : f(x) = 0$ *dans l'intervalle* $I = [1, 2]$*, avec* $f(x) = e^x - 2x - 2$.

1. *Montrer que* (E) *admet une unique solution* $x^* \in]1, 2[$.
2. *Déterminer le nombre des itérations nécessaires par la méthode de dichotomie pour avoir une valeur approchée de* x^* *avec une précision de* 10^{-2}.
3. *Calculer* c_0, c_1 *et* c_2 *les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle* $]1, 2[$.
4. *Montrer qu'on peut trouver deux fonctions* g_1 *et* g_2 *telles que*
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x \Leftrightarrow g_2(x) = x.$$
5. *Pour approcher* x^**, on définit la suite suivante:*
$$\begin{cases} x_0 \in [1, 2], \\ x_{n+1} = g_i(x_n) \quad \text{avec } i = 1, 2. \end{cases}$$
Vérifier la convergence de la méthode du point fixe pour les deux fonctions.
6. *Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E).*
7. *Donner un choix convenable de* x_0 *pour assurer la convergence de la méthode Newton.*
8. *Déterminer les deux premiers itérés par la méthode de Newton.*

Exercice 2 *On se propose de résoudre numériquement l'équation* $(E) : f(x) = 0$ *dans* $I = [0, 1]$ *où la fonction* f *est donnée par:*
$$f(x) = x^3 + 3x - 3,\ x \in I.$$

1. *Montrer que* (E) *admet une unique solution* x^* *dans* $]0, 1[$.
2. *Montrer que la fonction* $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3}$ *vérifie la relation suivante:*
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x.$$

3. *Pour approcher x^* par la méthode du point fixe on définit la suite suivante:*

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1], \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}$$

   a) *Par comparaison, vérifier que $\forall x \in [0,1], |g'(x)| \leqslant M_0$, avec $M_0 = \frac{2}{3}$.*

   b) *Montrer que cette suite converge vers l'unique solution x^*.*

   c) *Estimer dans ce cas n_0 : le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

   d) *Pour $x_0 = 0,5$ calculer les trois premières itérations.*

4. a) *Déterminer n_1 le nombre des itérations nécessaires par la méthode de Dichotomie pour avoir une valeur approchée avec la même précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

   b) *Expliquer la différence entre n_0 et n_1.*

   c) *Calculer c_0, c_1 et c_2 les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $]0,1[$.*

Dans la suite, on s'intéresse à savoir l'importence de bien trouver le bon majorant de la fonction $|g'(x)|$ pour déterminer ensuite le nombre minimal d'itérations pour estimer l'unique solution dans la méthode du point fixe en donnant une valeur de précision ε.

5. a) *Démontrer que $M_1 = \dfrac{3}{8}$ est un maximum de la fonction $|g'(x)|$ sur l'intervalle I.*

   b) *Déduire qu'on peut approcher x^* avec la même précision $\varepsilon = 10^{-3}$ par un nombre des itérations n_2 plus petit que n_0?*

   c) *n_2 est le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* avec la tolérance $\varepsilon = 10^{-3}$? Justifier votre réponse.*

Exercice 3 *On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [0, \dfrac{\pi}{3}]$, où la fonction f est donnée par:*

$$f(x) = \cos(x) - 3x \qquad \forall x \in I.$$

Il est á noter que la variable x est exprimée en radian.

1. *Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.*

En utilisant la méthode de dichotomie :

2. *Estimer le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

3. *déterminer x^* avec une tolérence de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

En utilisant la méthode du point fixe :

Pour approcher x^*, on définit la suite suivante:

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{\pi}{3}] & , \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec $g(x) = \dfrac{cos(x)}{3}$

4. *Montrer que cette suite converge vers x^*.*

5. *Pour $x_0 = 0$, calculer les quatre premières itérations.*

Application de la méthode de Newton :

6. *Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton.*

7. *Choisir une valeur intitiale x_0 assurant la convergence de la méthode.*

8. *Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

Partie 2. Partie Asynchrone

Exercice 4 *On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 1 - x$ dans $[0, 1]$, où la fonction f est donnée par:*

$$f(x) = x^3 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

1. *Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $x^* \in]0, 1[$.*

2. *Application de la méthode de dichotomie : estimer le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*

3. *Application de la méthode de Newton :*

   - *Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E) et déterminer x_0, une valeur initiale assurant la convergence de cette méthode.*
   - *Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*