TP1 : Echantillonnage de distribution de probabilités

Le but du travail est de générer une série de nombres aléatoires ayant une distribution de probabilités donnée.

1) Ecrire un programme qui génère une série de valeurs d'un variable aléatoire X: $X_1, X_2, \ldots X_N$. Prendre N grand.
2) Calculer les estimateurs statistiques pour la moyenne et la variance de la variable aléatoire X, selon les formules:
$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}_N\right)^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\right)^2\right) - \left(\overline{X}_N\right)^2$$
et vérifier que $\overline{X}_N$ est proche de $E(X)$, et S_N^2 est proche de $Var(X)$.
3) Trier les couples de valeurs (X_i, U_i) par valeurs croissantes de X. Produire un graphe qui représente U en fonction de X. On doit observer la courbe de $F(x)$
4) Pour la variable X continue, calculer $m = Min\{X_i\}$ et $M = Max\{X_i\}$. Définir $L = (M - m)/10$. Remplir le tableau suivant:

Classe	Centre	Effectif	Cumul	N x $F(x)$
$[m, m+L[$	$x_1 = (2m+L)/2$	n_1	n_1	$N \times F(x_1)$
$[m+L, m+2L[$	$x_2 = (2m+3L)/2$	n_2	$n_1 + n_2$	$N \times F(x_2)$
$[m+2L, m+3L[$	$x_3 = (2m+5L)/2$	n_3	$n_1 + n_2 + n_3$	$N \times F(x_3)$
$\vdots$	$\vdots$			
$[m+9L, m+10L]$	$x_{10} = (2m+19L)/2$	n_{10}	N	$N \times F(x_{10})$
		N		

Les deux dernières colonnes doivent être proches

5) Pour la variable X discrète, remplir le tableau suivant:

X	Effectif	Cumul	N x $F(x)$
x_1	n_1	n_1	$N \times F(x_1)$
x_2	n_2	$n_1 + n_2$	$N \times F(x_2)$
x_3	n_3	$n_1 + n_2 + n_3$	$N \times F(x_3)$
$\vdots$			
x_k	n_k	N	$N \times F(x_k)$
	N		

Les deux dernières colonnes doivent être proches

<u>Distributions</u>

1. X suit une distribution uniforme $U(0,1)$. On a $E(X) = 1/2$, $Var(X) = 1/12$ et $F(X) = x; \quad x \in [0,1]$
2. X suit une distribution exponentielle $Exp(\lambda)$. $E(X) = 1/\lambda$, $Var(X) = 1/\lambda^2$ et $F(X) = 1 - e^{-\lambda x}; \quad x > 0$
3. X a une distribution discrète définie par: $P(X=0) = 0.3$, $P(X=2) = 0.2$, $P(X=6) = 0.5$ $E(X) = 3.4$ et $Var(X) = 7.24$