西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第九章 多元函数微分法及其应用

9.8 隐函数的求导法

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

2 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法

3 由方程组确定的隐函数的求（偏）导法

主要内容

1 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

2 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法

3 由方程组确定的隐函数的求（偏）导法

1 隐函数的概念

设有方程$F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$, 如果存在一个n元函数 $y=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$,使得

$$F(x_1,\cdots,x_n,\varphi(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0,$$

则称$y=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$是由方程$F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$所确定的 **隐函数.**

例如 $x^2+y^2+z=1 \Longrightarrow z=1-x^2-y^2$ （可显化的隐函数）

$x^2+xy-e^y=0 \Longrightarrow y=y(x)$?

2 一个二元方程确定的一元隐函数的求导方法

定理1（ 隐函数存在定理）如果二元函数$F(x,y)$满足：

$(1) F(x_0,y_0)=0;$

(2)在(x_0,y_0)的某邻域内$F_x(x,y), F_y(x,y)$连续;

$(3) F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数$y=f(x)$,它满足$y_0=f(x_0)$及$F(x,f(x))\equiv 0$，且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.} \Longleftarrow F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

例1 求方程$x^2+xy-e^y=0$所确定的隐函数$y=y(x)$的导数.

解法1 （套公式）

令$F(x,y)=x^2+xy-e^y$，则有

$$F_x(x,y)=2x+y,\ F_y(x,y)=x-e^y,$$

故$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x+y}{x-e^y}$$

解法2 （微分法）

等式$x^2+xy-e^y=0$两边求微分，有

$$2xdx+xdy+ydx-e^ydy=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x-e^y}.$$

主要内容

1 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

2 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法

3 由方程组确定的隐函数的求（偏）导法

2. 由三元方程确定的二元隐函数的求偏导方法

隐函数的求导法可以推广到多元函数.

若一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了一个二元函数 $z=f(x,y)$, 则有

$$F(x,y,z(x,y))\equiv 0$$

两端分别对x和y求导得 $F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$

$$F_y(x,y,z)+F_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

例2 求由方程$x^2+2y^2+3z^2=4$确定的二元隐函数的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解法1（公式法） 令$F=x^2+2y^2+3z^2-4$

则$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{6z}=-\frac{x}{3z}$$

解法2 把z看成是x,y的函数，方程两边同时对x求导，得

$$2x+6z\cdot z_x=0\quad\Rightarrow z_x=-\frac{x}{3z}$$

解法3（利用全微分形式不变性） $2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\,\mathrm{d}z=0,$

$$dz=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y\qquad\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}$$

例3 设$z=z(x,y)$由方程$F(x^2-y,z)=0$所确定，其中$F(u,v)$具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解法1（求偏导）

$$F_1\cdot 2x+F_2\cdot z_x=0,\qquad F_1\cdot(-1)+F_2\cdot z_y=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xF_1}{F_2}\qquad \Rightarrow z_y=\frac{F_1}{F_2}$$

解法2（微分法）

$$dF(x^2-y,z)=0,\quad 即\ F_1\cdot d(x^2+y)+F_2\cdot dz=0$$

$$dz=\underline{\left(-\frac{2xF_1}{F_2}\right)}dx+\underline{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)}dy\qquad \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xF_1}{F_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1}{F_2}$$

主要内容

1 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

2 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法

3 由方程组确定的隐函数的求（偏）导法

由方程组确定的隐函数的求偏导方法

有许多问题的研究中还会遇到由方程组确定的隐函数求导问题.

例如，在多元函数微分学几何应用中将要讨论空间曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=45 \\ x^2+2y^2=z \end{cases} \Rightarrow y=y(x),\quad z=z(x)$$

的切线和法平面问题，就属于这类问题.

$$\begin{cases} 4x+2y\cdot y_x+2z\cdot z_x=0 \\ 2x+4y\cdot y_x=z_x \end{cases} \Rightarrow y_x=-\frac{2x(1+z)}{y(1+4z)},\quad z_x=-\frac{6x}{y(1+4z)}.$$

例 4 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$ 确定 u，v 是 x，y 的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解法1 将所给方程的两边对 x 求导并移项 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}$，

当系数行列式 $J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}\neq 0$，

即 $x^2+y^2\neq 0$ 时，解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$，

同理，可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

$xu - yv = 0$， $yu + xv = 1$确定 u， v 是 x， y 的函数.

解法2

$$\begin{cases} udx + xdu - vdy - ydv = 0, \\ udy + ydu + vdx + xdv = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xdu - ydv = -udx + vdy \\ ydu + xdv = -vdx - udy \end{cases}$$

$$\Rightarrow du = \frac{xu - yv}{x^2 + y^2}dx + \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}dy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xu - yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$$

$$dv = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}dx - \frac{xu + yv}{x^2 + y^2}dy$$

例 5 设$u=u(x,y)$由方程组 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 所确定，

其中 f,g,h都是$C^{(1)}$类，$J=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$,求$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\begin{cases} du=f_x dx+f_y dy+f_z dz+f_t dt \\ g_y dy+g_z dz+g_t dt=0 \\ h_z dz+h_t dt=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} du-f_z dz-f_t dt=f_x dx+f_y dy \\ 0\cdot du+g_z dz+g_t dt=-g_y dy \\ 0\cdot du+h_z dz+h_t dt=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow du=f_x dx+\dfrac{1}{J}(-f_z g_y h_t+f_t g_y h_z+Jf_y)dy$

$$J=\begin{vmatrix} g_z & g_t \\ h_z & h_t \end{vmatrix}$$

故$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{J}(-f_z g_y h_t+f_t g_y h_z+Jf_y)$