9 耦合电感和变压器电路分析

前几章已学过的无源元件有：*R*、*L*、*C*。

R：　　耗能、静态、无记忆；

L、*C*：储能、动态、有记忆；

它们都是二端元件。本章介绍两种四端元件：

1.耦合电感：具有电感的特性；

2.理想变压器：是静态、无记忆,但不耗能。

受控源也是四端元件，它与将要介绍的耦合电感均属耦合元件。

9—1 耦合电感

耦合电感：指多个线圈(这里先介绍两个线圈)相互之间存在磁场的联系。

它是耦合线圈的理想化模型。

复习： 单个线圈(电感、或称自感)的VCR：

磁链=匝数乘磁通： $\varphi = N\phi$

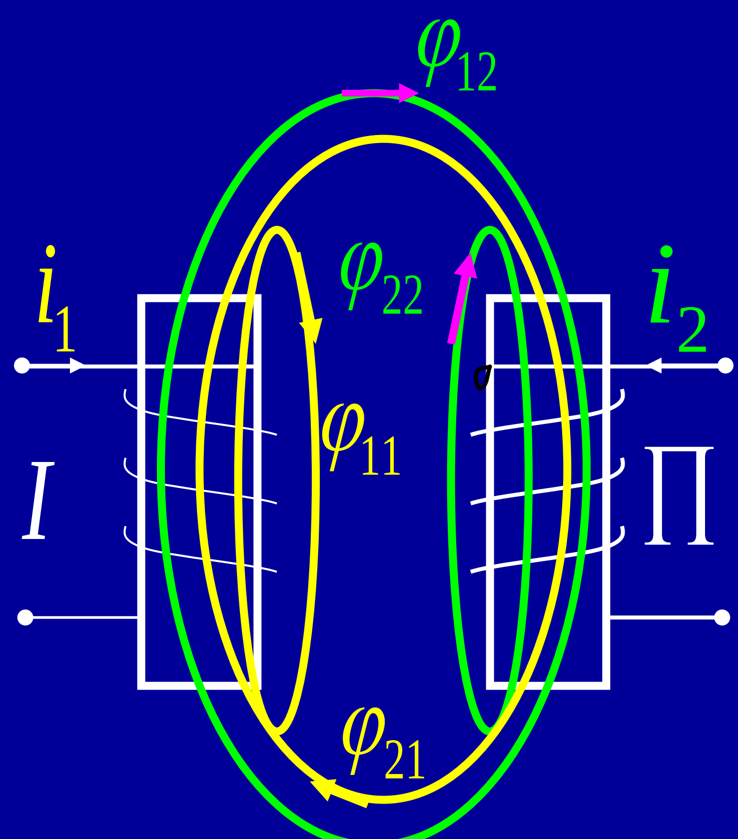
自感=磁链比电流： $L = \dfrac{\varphi}{i} = \dfrac{N\phi}{i}$

若v、i方向关联，

由电磁感应定律： $u = \dfrac{d\varphi}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$

8-1-1.耦合电感的伏安关系

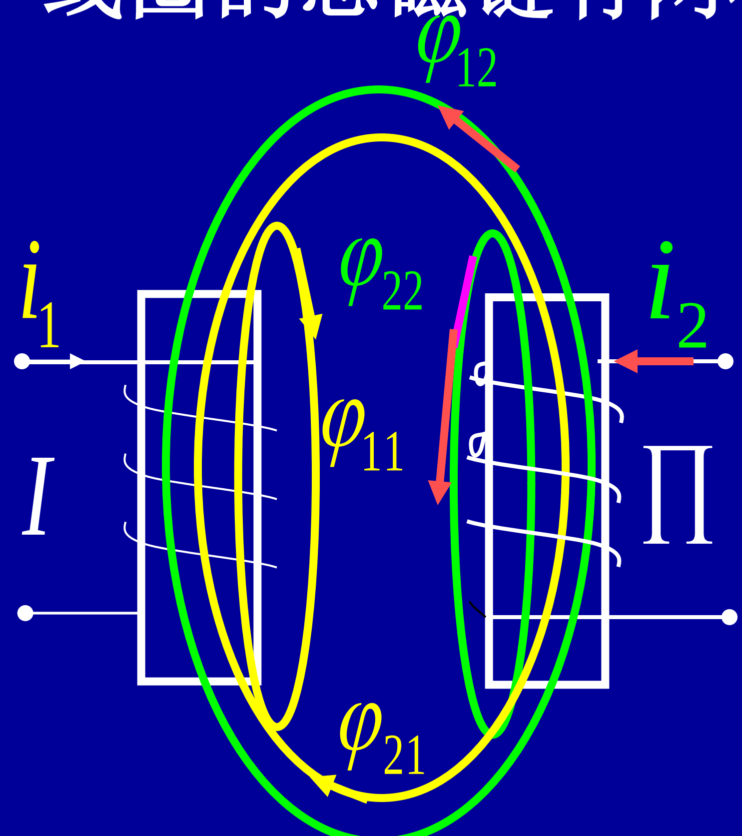
设两线圈的电压和电流参考方向均各自关联。由图，磁通方向与电流方向符合右手法则。



其中 φ_{11} 表示线圈1电流在本线圈中产生的磁链，称为**自感磁链**；类此有φ_{22}；

φ_{12} 表示线圈2的线圈电流在线圈1中产生的磁链，称为**互感磁链**，类此有 φ_{21}。

图中显示自磁链与互磁链的参考方向一致；若线圈2改变绕向，如下图所示，则自磁链与互磁链参考方向将不一致。因此，穿过一线圈的总磁链有两种可能，分别表示为：



$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1$$

式中 $L_1=\dfrac{\varphi_{11}}{i_1}, L_2=\dfrac{\varphi_{22}}{i_2}$ 称为自感系数，

单位亨(利)H

式中 $M_1=\dfrac{\varphi_{12}}{i_2}, M_2=\dfrac{\varphi_{21}}{i_1}$ 称为互感系数，

单位亨(利)H

且 $M_{12}=M_{21}=M$

若线圈电流变化，则自磁链，互磁链也随之变化。由电磁感应定律，线圈两端会产生感应电压，若电压与电流采取关联参考方向，则：

耦合电感伏安关系(VCR)表达式：

$$u_1=\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi_{11}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t}=u_{L1}+u_{M1}=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2=\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi_{22}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\varphi_{21}}{\mathrm{d}t}=u_{L2}+u_{M2}=L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

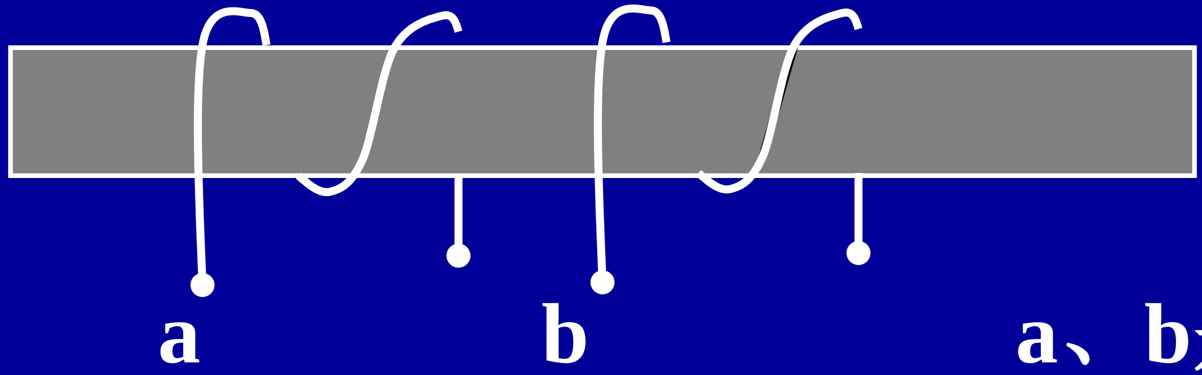
式中， u_{L1} u_{L2} 为自感电压， u_{M1} u_{M2} 互感电压，取正号或负号；可见，耦合电感是一种动态、有记忆的四端元件。(与电感有类似的特性)

耦合电感的VCR中有三个参数：L_1、L_2和M。

9－1－2.耦合电感的同名端

耦合线圈自磁链和互磁链的参考方向是否一致，不仅与线圈电流的参考方向有关，还与线圈的绕向及相对位置有关，后者不便画出，故引入同名端的概念。

1.顾名思义,指绕法相同的一对端钮;



a、b是同名端

2.起的作用相同的一对端钮；

当线圈电流同时流入(或流出)该对端钮时，各线圈中产生的磁通方向一致的这对端钮。

或者说，(1)同名端就是当电流分别流入线圈时，能使磁场加强的一对端钮；

(2)同名端就是当电流分别流入线圈时，能使电压增加的一对端钮；

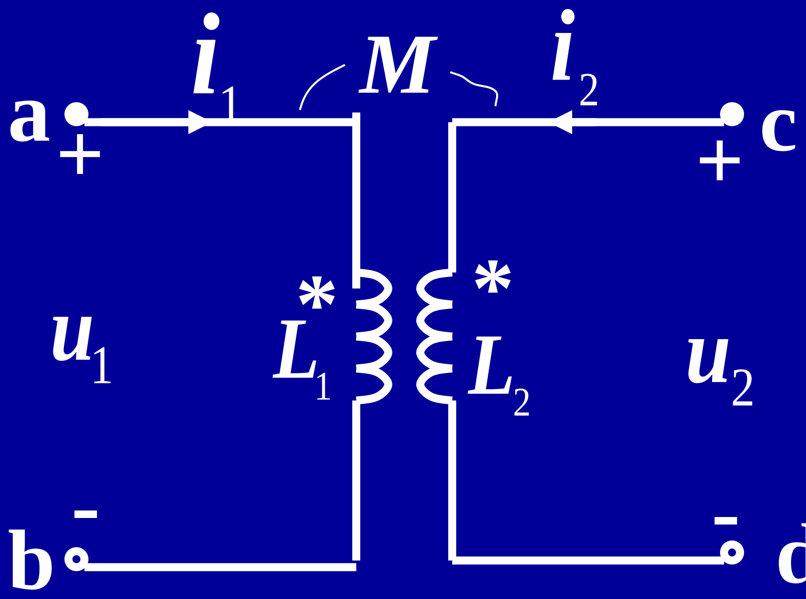
(3)产生自感电压与互感电压极性相同的一对端钮。

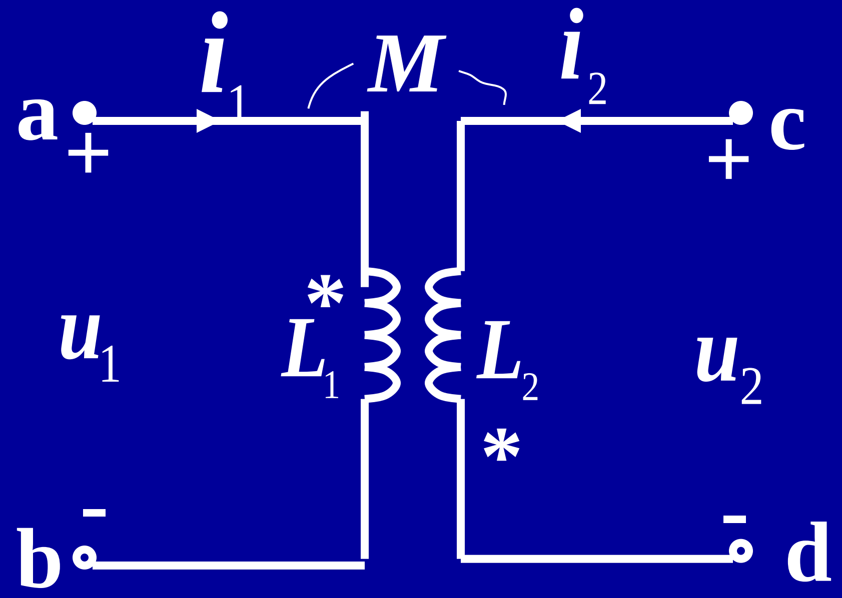
同名端用标志‘.’或‘*’等表示。注意：同名端不一定满足递推性，故当多个线圈时有时必需两两标出。

在VCR中 $u_{M1}=\pm M\dfrac{di_2}{dt}$ 到底取正还是取负，要根据电流参考方向和同名端来确定：

当自磁链与互磁链的参考方向一致时取正号，不一致时取负号。或者说，根据同名端，电流在本线圈中产生的自感电压与该电流在另一个线圈中产生的互感电压极性是相同的。

耦合电感的电路符号：



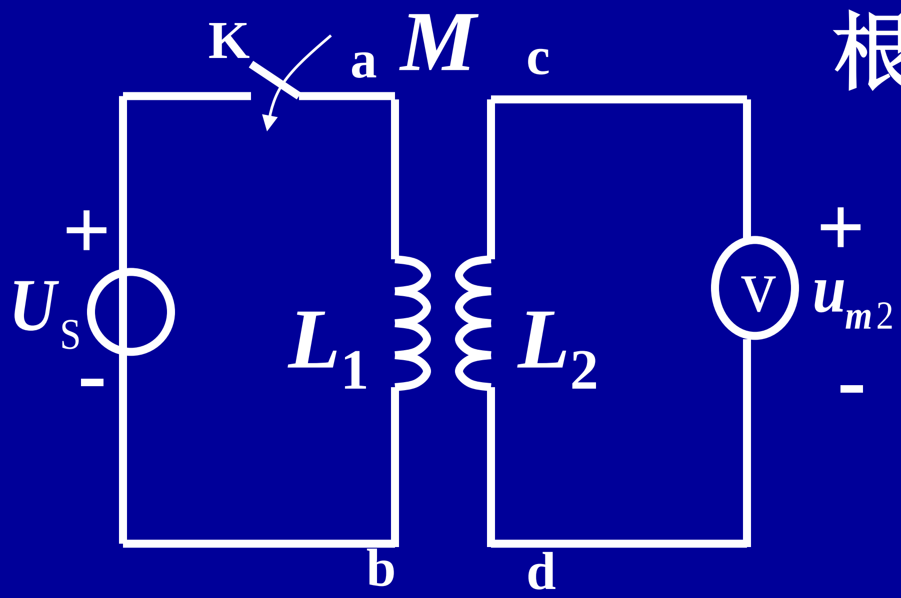


VCR中互感电压取+　　VCR中互感电压取－

(当各线圈的电压、电流方向关联时只有这两种可能。)

在绕法无法知道的情况下，同名端的测定：

(1)直流法



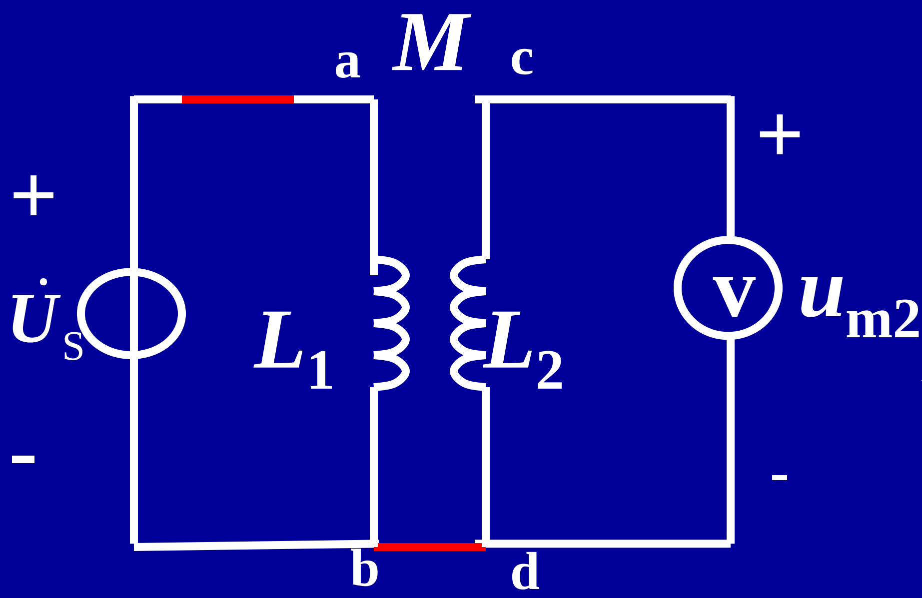
根据其VCR，

正偏，a,c同名端

反偏，a,d同名端

(2)交流法

原图电源改为正弦电源，开关移去，



直流电压表改为交流电压表，bd端连接。

根据其VCR的相量形式同样能判定其同名端。

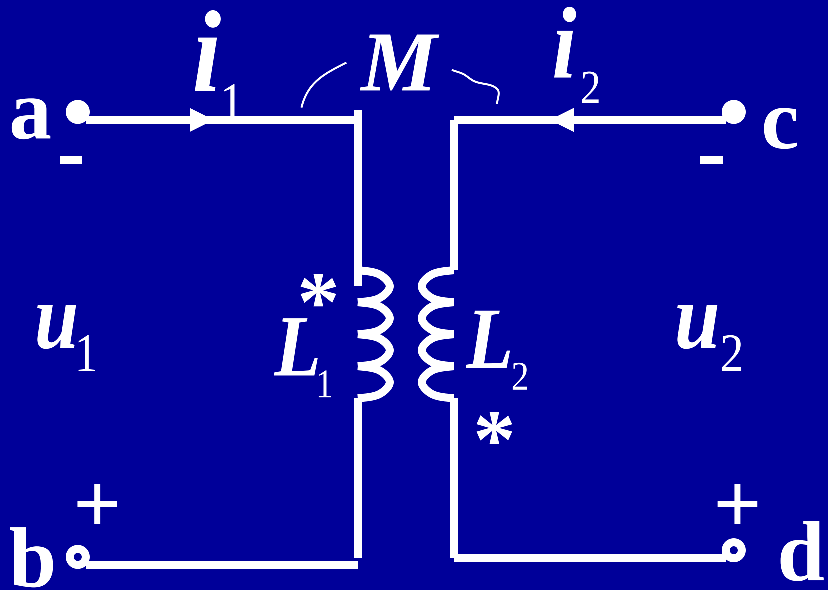
根据同名端标记，根据线圈电流和电压的参考方向，就可以直接列写耦合电感伏安关系。其

规则：法1：若耦合电感线圈电压与电流的参考方向为关联参考方向时，自感电压前取正号，否则取负号；若耦合电感线圈的电压正极性端与另一线圈的电流流入端为同名端时，则该线圈的互感电压前取正号，否则取负号。

或：法2：第一步：总认为电压、电流方向关联(假设电压或电流的参考方向)，这时，自感电压总是正的,互感电压总是同一符号；

第二步：按要求(消去假设的变量)改变相应互感电压的符号。

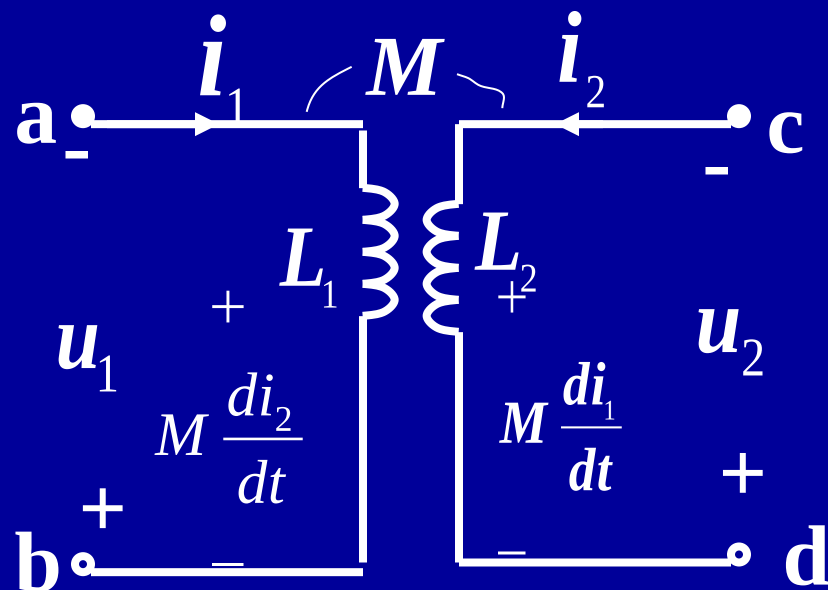
例1 列写伏安关系式，电路模型如下图。



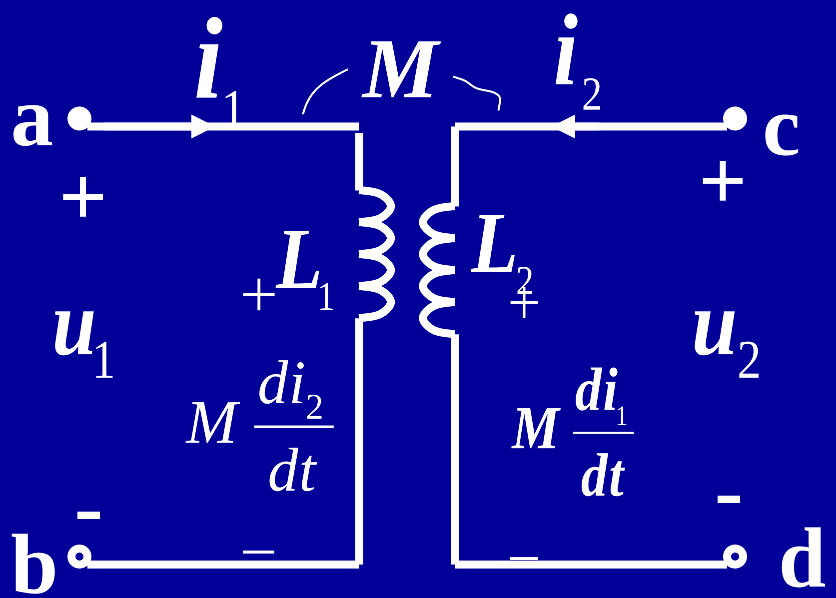
$$u_1 = u_{L1} + u_{M1} = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

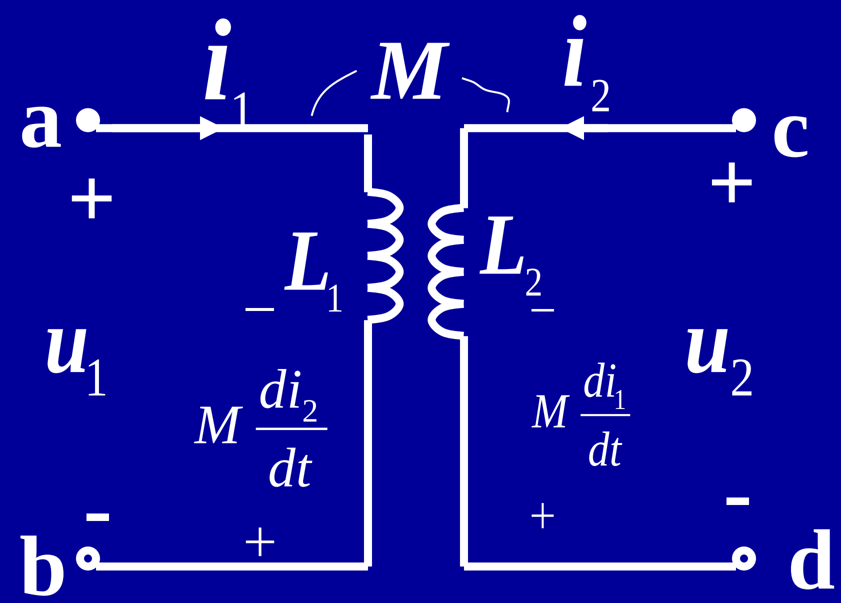
$$u_2 = u_{L2} + u_{M2} = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

故电路模型也可以用受控源的形式表示:



当两线圈的电流、电压参考方向关联时，相应耦合电感的电路模型为:





耦合电感的相量(模型)形式为

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$$

$\mathrm{j}\omega L_1, \mathrm{j}\omega L_2$ 称为自感阻抗

$\mathrm{j}\omega M$ 称为互感阻抗

据此可画出相应的相量模型图

9-1-3 耦合电感的储能

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}u_1 i_1 dt+\int_{-\infty}^{t}u_2 i_2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt})i_1 dt+\int_{-\infty}^{t}(L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt})i_2 dt$$

$$=\frac{1}{2}L_1 i_1{}^2+\frac{1}{2}L_2 i_2{}^2\pm M i_1 i_2\geq 0$$ 无源元件

也可以用其VCR和上式代入下式来验证

$$\frac{dw(t)}{dt}=p(t)=u_1 i_1+u_2 i_2$$

9-2 耦合电感的联接及去耦等效

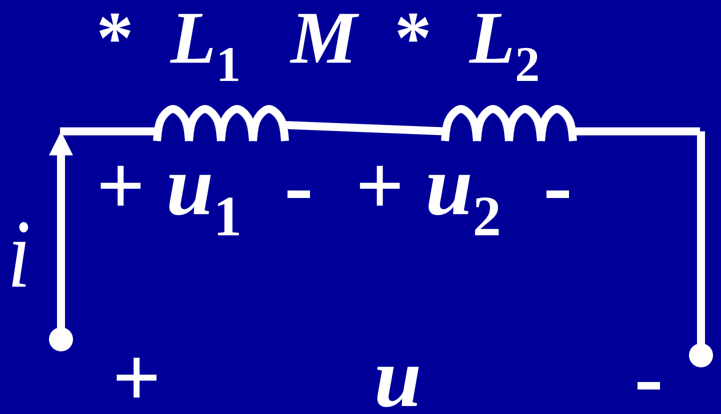
联接方式：串联，并联和三端联接

去耦等效：

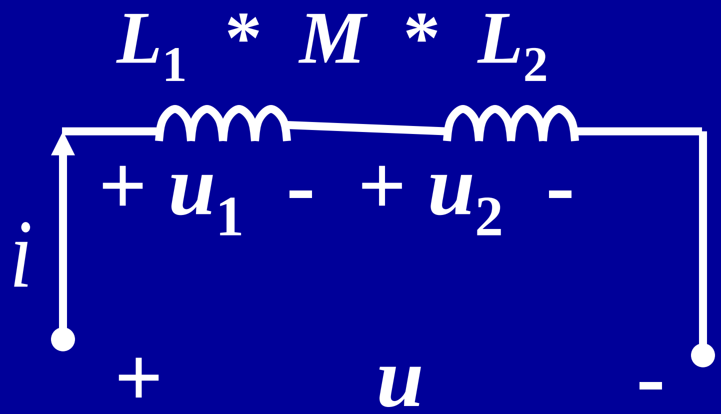
耦合电感用无耦合的等效电路去等效。

9-2-1 耦合电感的串联

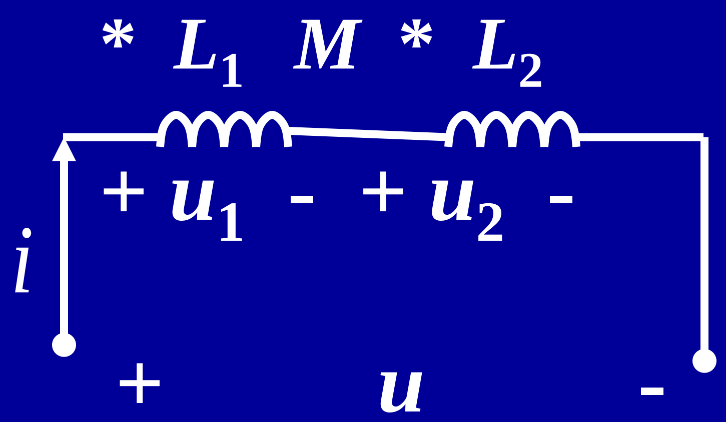
顺串：异名端相接。反串：同名端相接



顺串



反串

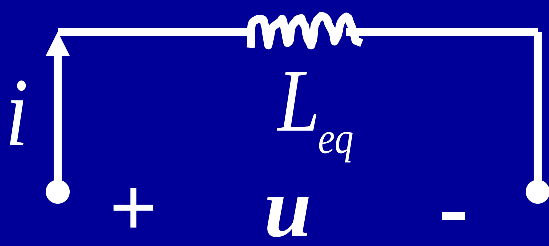


顺串

在图示参考方向下，耦合电感的伏安关系为:
(下面推导中，顺串取+，反串取一)

$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$=(L_1+L_2\pm 2M)\frac{di}{dt}=L_{eq}\frac{di}{dt}$$



串联等效

顺串等效: $L_{eq}=L_1+L_2+2M$

反串等效: $L_{eq}=L_1+L_2-2M$

由耦合电感为储能公式

$$w(t)=\frac{1}{2}(L_1+L_2\pm 2M)i^2=\frac{1}{2}L_{eq}i^2\geq 0$$

得：

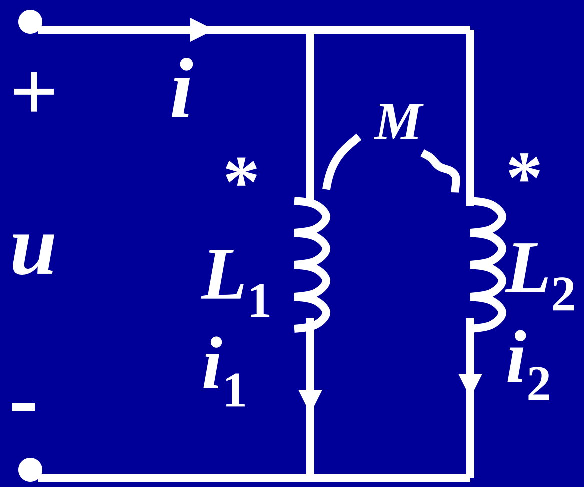
$$L_1+L_2\pm 2M\geq 0$$

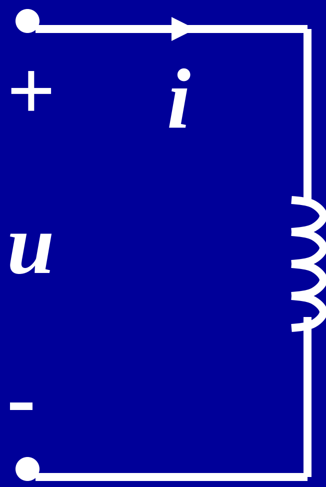
$$M\leq\frac{1}{2}(L_1+L_2)$$ 算术平均值

9-2-2 耦合电感的并联

同侧并联:(顺并)同名端两两相接。

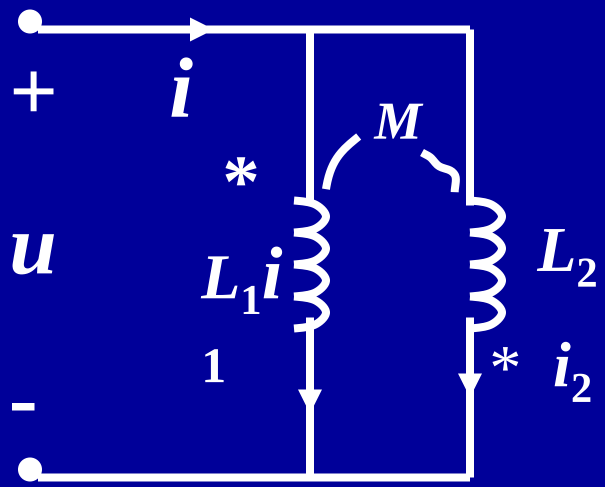
异侧并联:(反并)异名端两两相接。



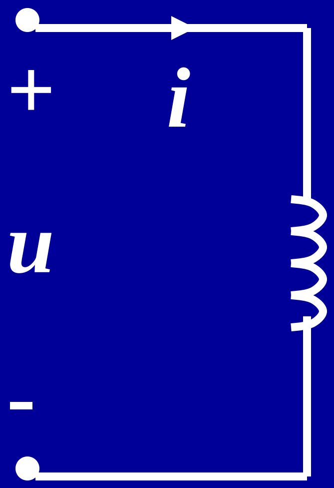


$$L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

同侧并联



异侧并联



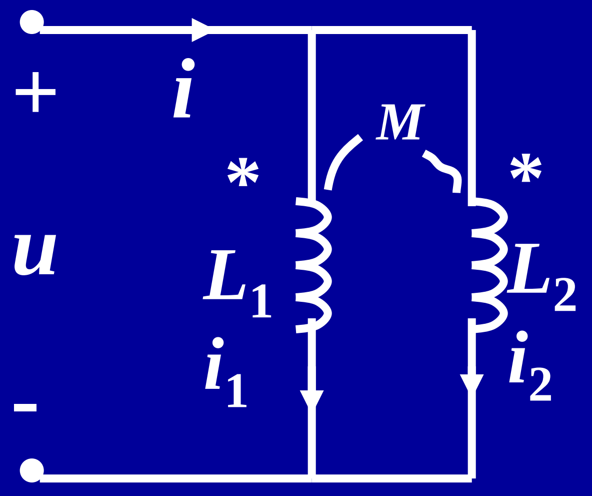
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

图示电压，电流参考方向下，由耦合电感的伏安关系：

$$\left.\begin{aligned} u &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u &= \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{L_2 \mp M}{L_1L_2 - M^2}u \\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{L_1 \mp M}{L_1L_2 - M^2}u \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{L_1L_2 - M^2}u$$

$$u = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}\cdot\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_{eq}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



同侧并联

$$\therefore \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L_{eq} i^2 \geq 0$$

$$\therefore \quad \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \geq 0 \qquad L_1 L_2 \geq M^2$$

$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ 几何平均值

$$\because \quad \sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$$

定义：耦合系数 $$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$0 \le k \le 1$$

k=1　全耦合，

$k \approx 1$　紧耦合，

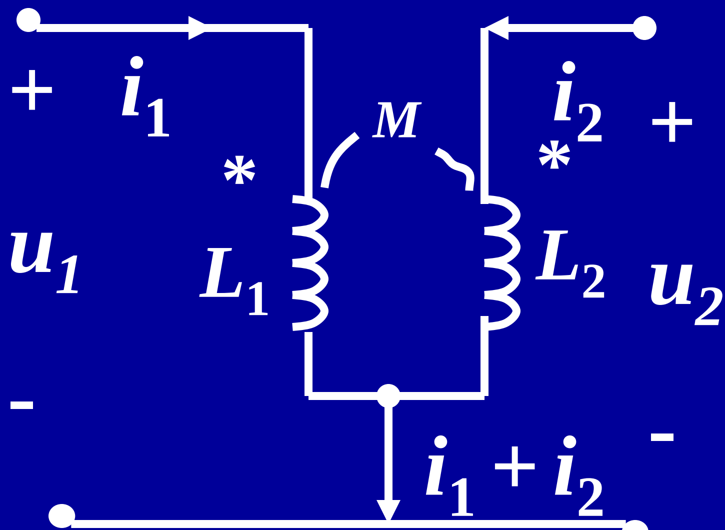
k较小，松耦合，

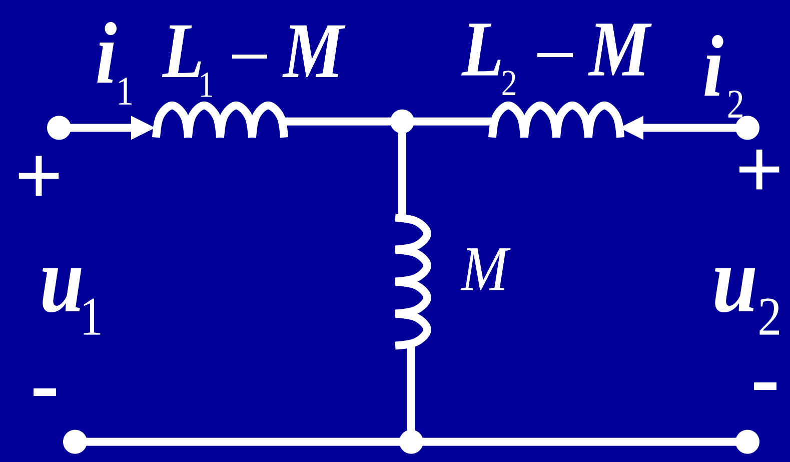
k=0无耦合。

9-2-3 耦合电感的三端联接

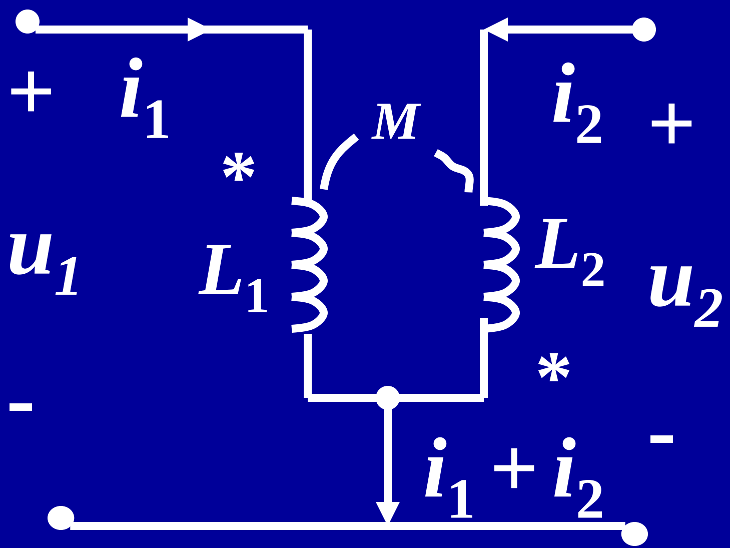
将耦合电感的两个线圈各取一端联接起来就成了耦合电感的三端联接电路。(1)同名端相联;

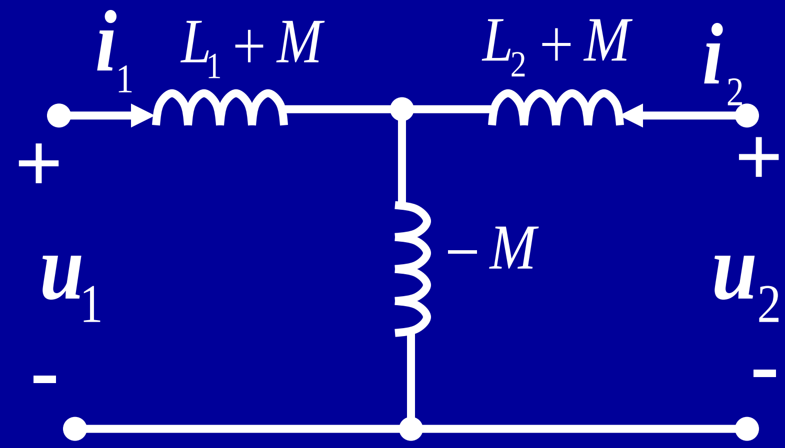
(2)异名端相联.





(1) 同名端相联





(2)异名端相联

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = (L_1 \mp M)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}(i_1+i_2)}{\mathrm{d}t}$$

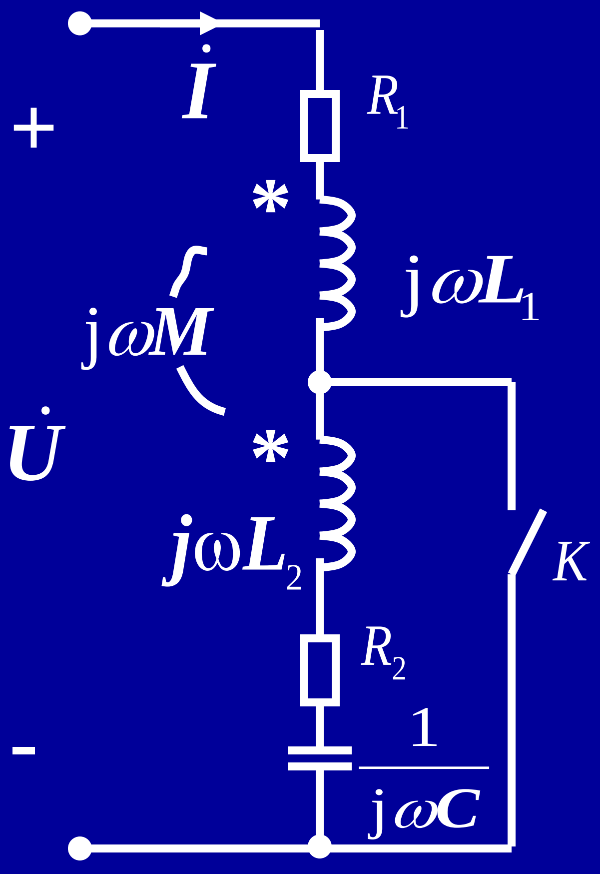
$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = (L_2 \mp M)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}(i_1+i_2)}{\mathrm{d}t}$$

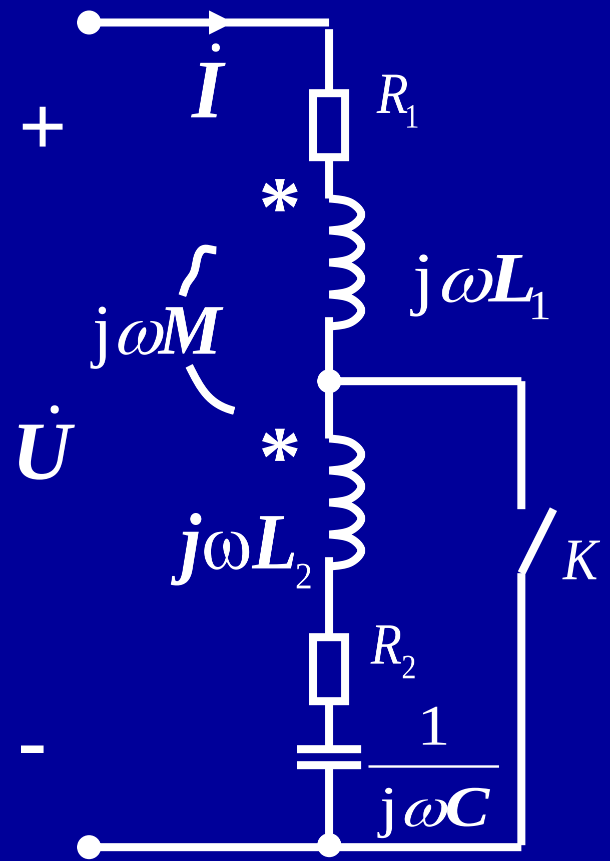
例2 已知

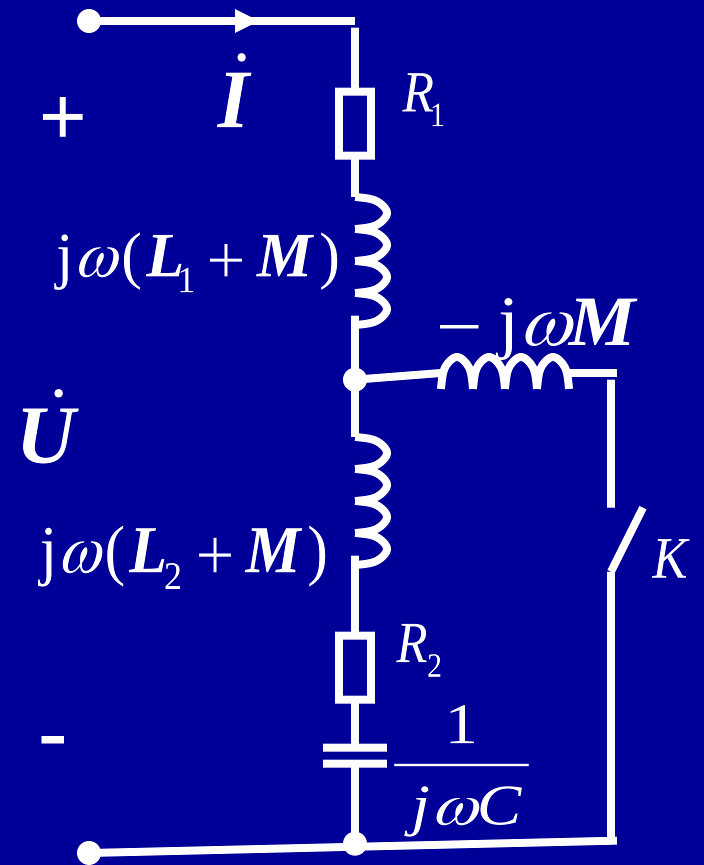
$$R_1 = 6\Omega, R_2 = 6\Omega, \frac{1}{\omega C} = 12\Omega, \omega L_1 = 4\Omega,$$

$$\omega L_2 = 12\Omega, \omega M = 6\Omega, \dot{U} = 80\angle 0°$$

求:开关打开和闭合时的电流。





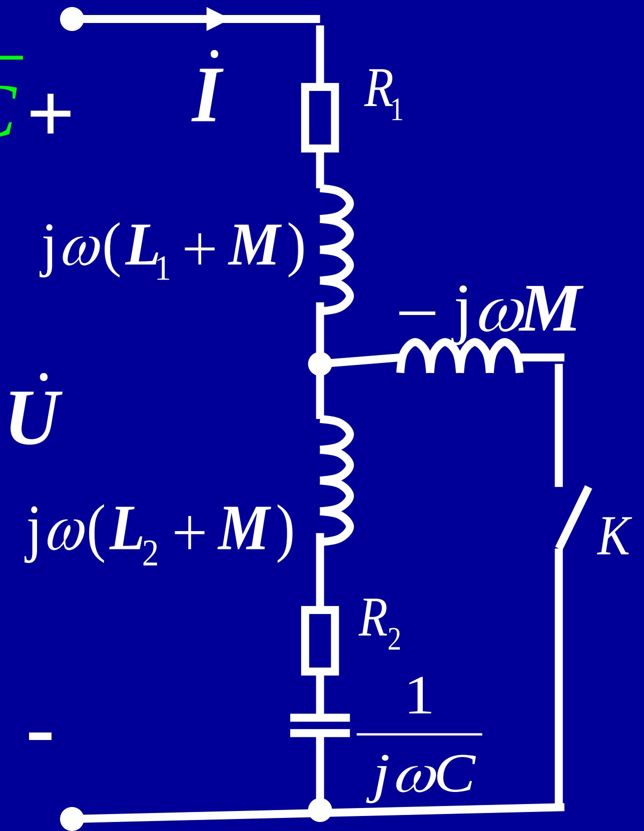


解：这种互感线圈常称自耦变压器。

开关打开时

$$Z = R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 + 2M) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

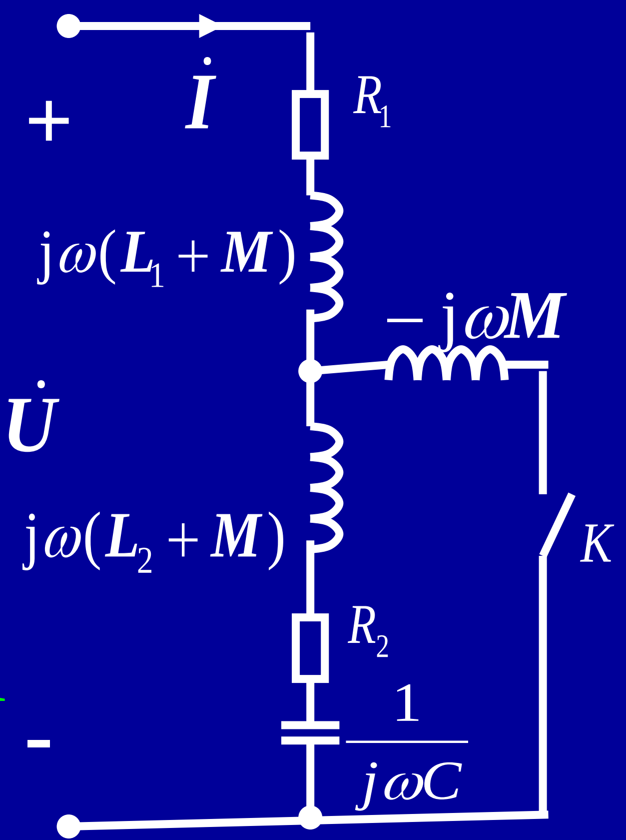
$$= 12 + j16\Omega$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{80\angle 0^\circ}{12+\mathrm{j}16} = \frac{80\angle 0^\circ}{20\angle 53.1^\circ} = 4\angle -53.1^\circ \mathrm{A}$$

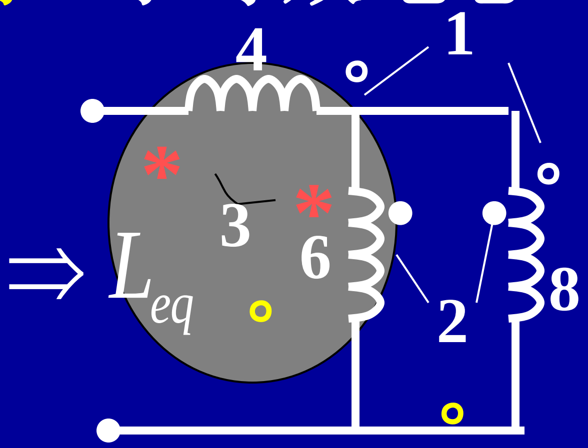
开关闭合时

$$Z' = R_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + M) + \frac{-\mathrm{j}\omega M\left[R_2 + \mathrm{j}\omega(L_2 + M) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right]}{-\mathrm{j}\omega M + R_2 + \mathrm{j}\omega(L_2 + M) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

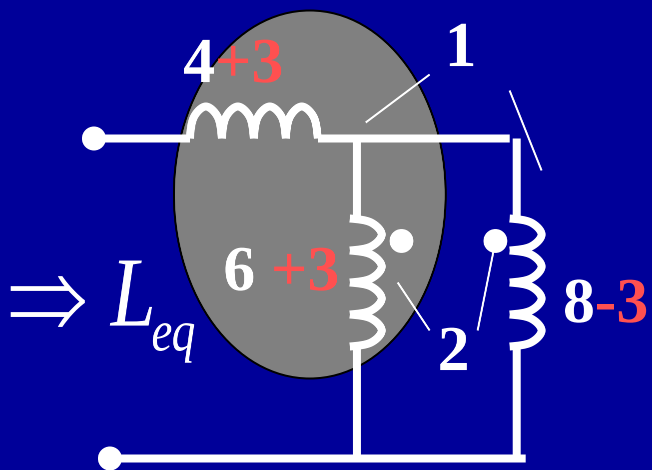


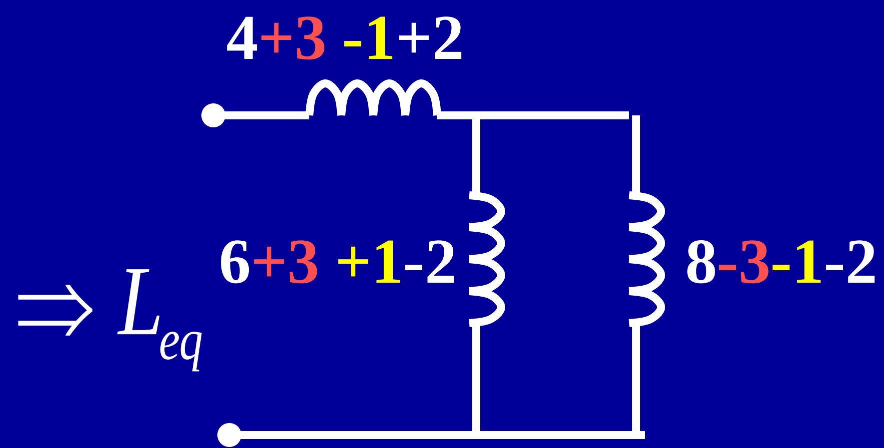
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z'} = \frac{80\angle 0^\circ}{4\sqrt{10}\angle 18.4^\circ} = 2\sqrt{10}\angle -18.4^\circ\,\mathrm{A}$$

例：求等效电感Leq。



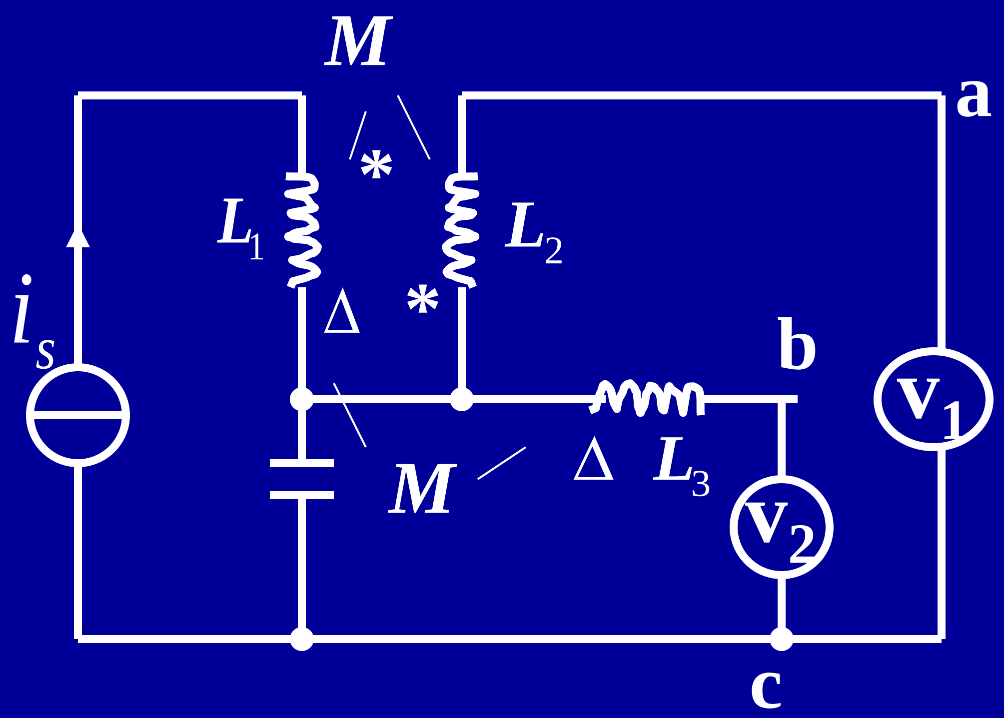
解：两两去耦





Leq=8+1.6=9.6 H

例：

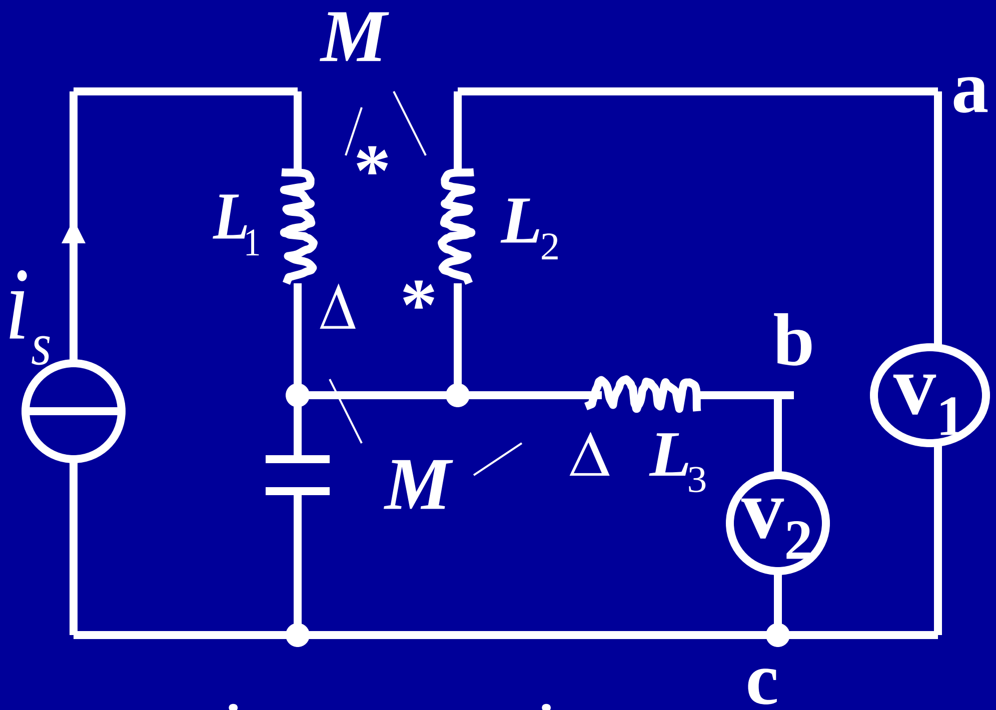


已知 $i_S(t)=\sqrt{2}\cos 5000t$,

$M=2\text{mH}, C=2\mu\text{F}$,

求电压表 V_1, V_2 的读数

解：$\dot{I}_s=1\angle 0°, X_C=\dfrac{1}{\omega C}=100\Omega, \omega M=10\Omega$



$$\dot{U}_{bc}=-\mathrm{j}X_C\cdot\dot{I}_S+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_S=\mathrm{j}(-X_C+\omega M)\dot{I}_S=-\mathrm{j}90\ \mathrm{V}$$

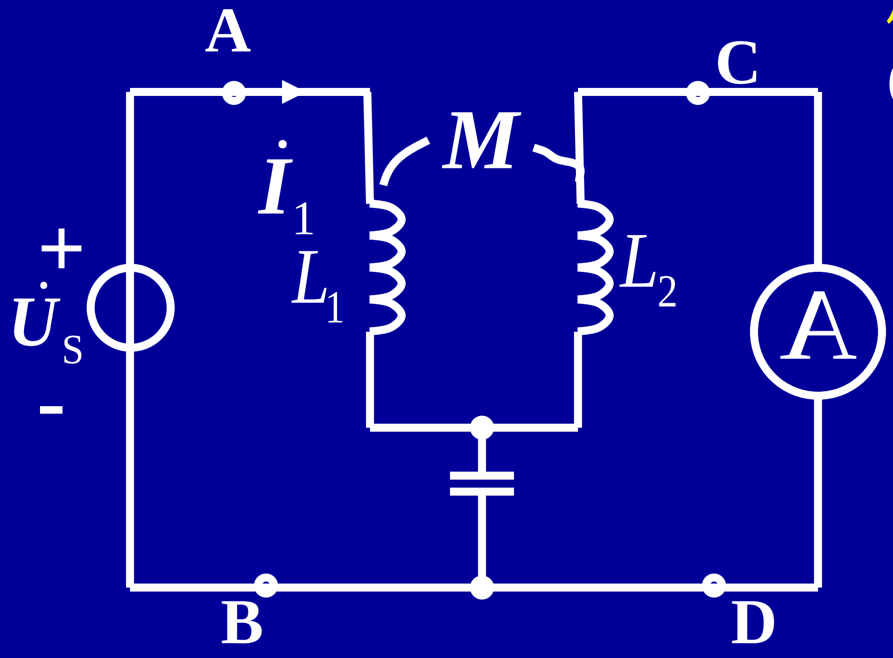
$$\therefore\ V_2=U_{bc}=90\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{ac}=-\mathrm{j}X_C\cdot\dot{I}_S-(\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_S=-\mathrm{j}(X_C+\omega M)\dot{I}_S=-j110\ \mathrm{V}$$

$$\therefore\ V_1=U_{ac}=110\ \mathrm{V}$$

例：已知 $u_S(t)=U_m\cos\omega t$, C , M 也已知。

求：在什么条件下，安培表读数为零，标出同名端。



解：安培表读数为零时，CD间开路电压为零

即 $\dot{U}_{CDo}=\pm j\omega M\dot{I}_1+\dfrac{\dot{I}_1}{j\omega C}=0$

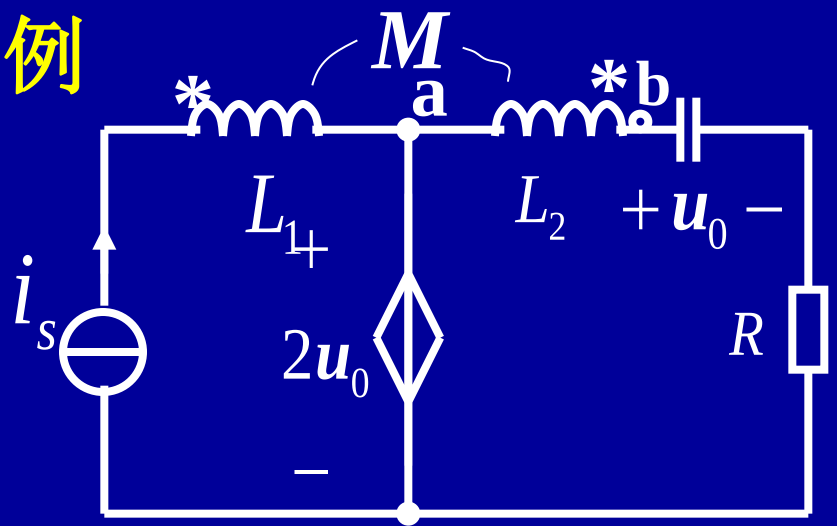
$$\pm j\omega M=-\frac{1}{j\omega C}$$

$$\omega^2=\pm\frac{1}{MC}$$

显然上式只能取正号,即A,C为同名端，且

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{MC}}$$

例



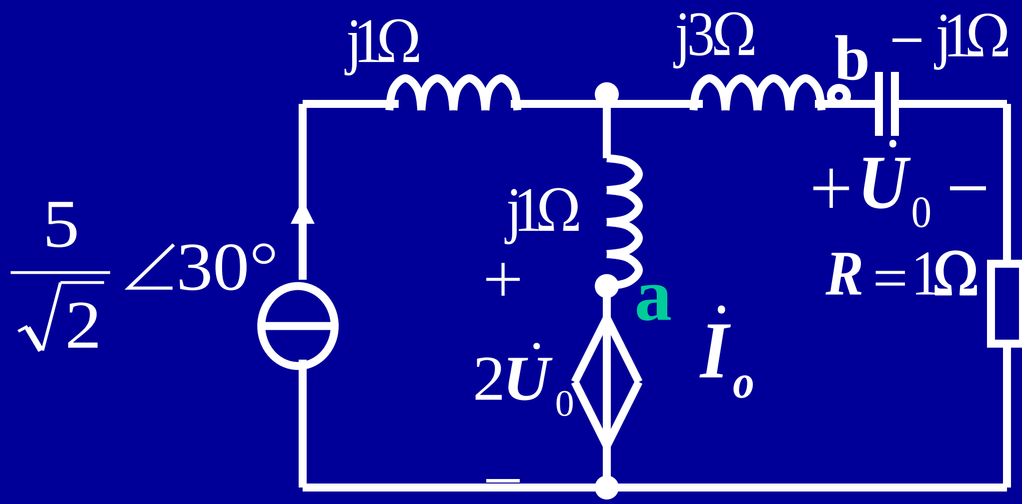
已知$L_1=1\text{H}, L_2=2\text{H}, C=0.5\text{F}$,

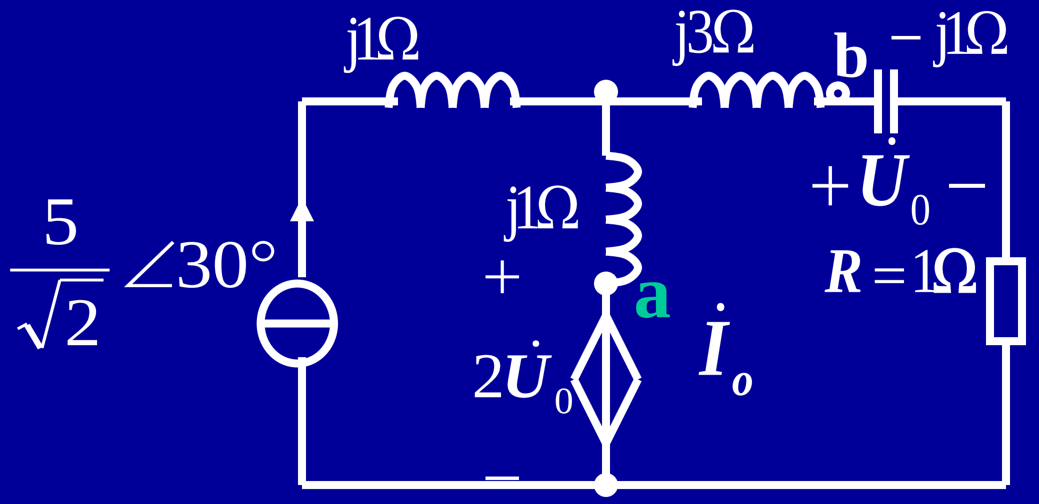
$M=0.5\text{H}, R=1\Omega$,

$i_S(t)=5\cos(2t+30°)\ \text{A}$

求：u_{ab}

解：先作出其向量模型，并去耦等效





对右网孔列写网孔方程

$$\begin{cases}(1-\mathrm{j}1+\mathrm{j}4)\dot{I}_o-\mathrm{j}1\dot{I}_s=2\dot{U}_o\\ \dot{U}_o=-\mathrm{j}1\dot{I}_o\end{cases}$$

$$\therefore (1+\mathrm{j}5)\dot{I}_o=\mathrm{j}1\cdot\dot{I}_\mathrm{S}$$

$$\dot{I}_o=0.7\angle 32.6°$$

$$\dot{U}_{ab}=\mathrm{j}4\dot{I}_o-\mathrm{j}1\dot{I}_\mathrm{S}=0.95\angle -87.3°$$

$$u_{ab}=0.95\sqrt{2}\cos(2t-87.3°)\ \mathrm{V}$$

9-3 空芯变压器

变压器是利用耦合线圈间的磁耦合来传输能量或信号的器件。通常有两个线圈。与电源相接的为初级(原边)线圈，与负载相接的为次级(副边)线圈。

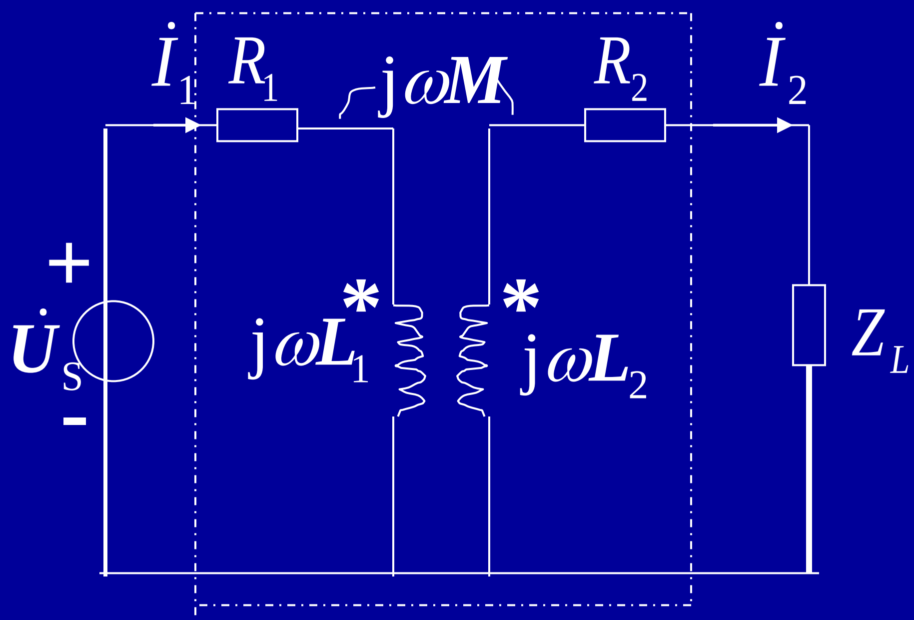
习惯上，线圈绕在铁芯上，构成铁芯变压器，芯子是非铁磁材料，构成空芯变压器。铁芯变压器一般耦合系数接近1，属紧耦合，用于输配电设备，空芯变压器耦合系数一般较小，属松耦合，用于高频电路和测量仪器。

必须指出：

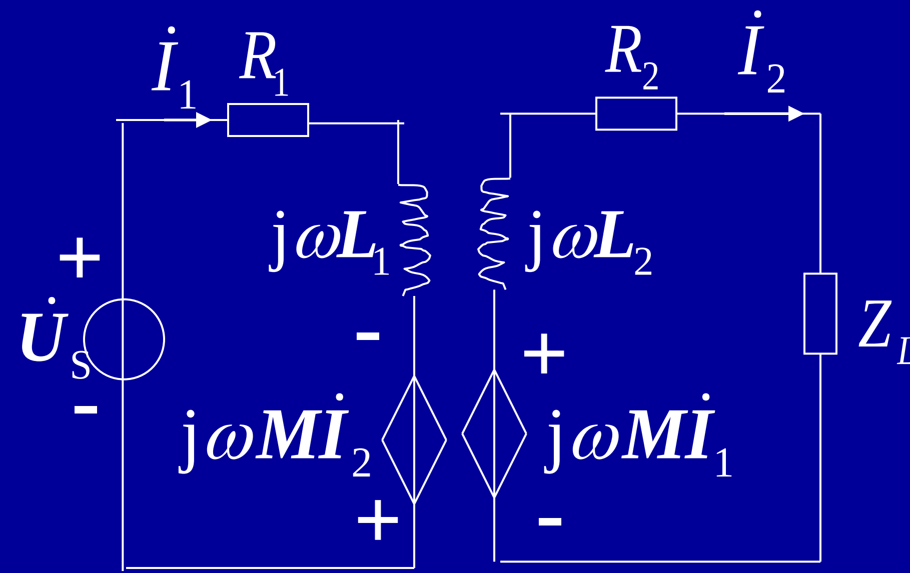
空芯变压器的分析是以互感的**VCR**作为基础；
铁芯变压器的分析是以理想变压器作为基础。
是两种不同的分析方法。

没有严格的限制，这两种方法可以统一。

正弦稳态分析



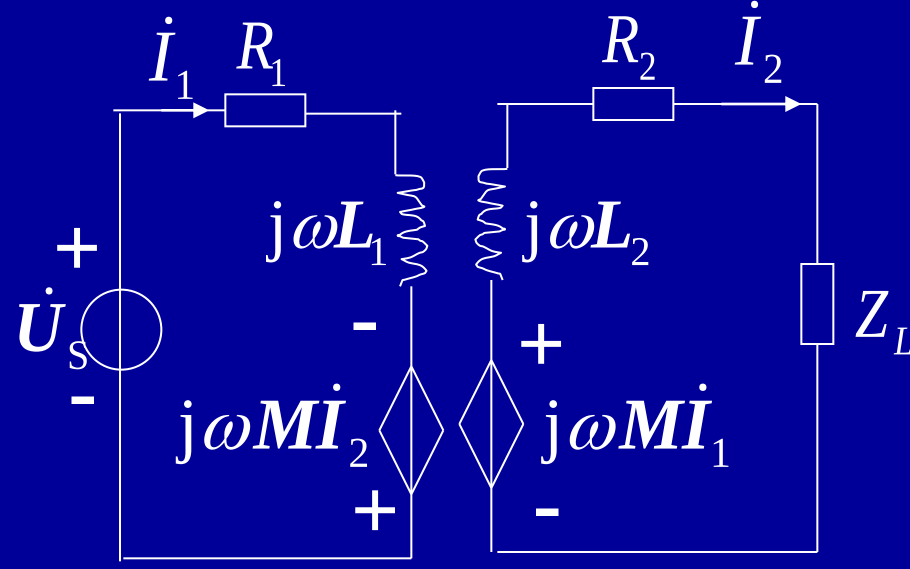
空芯变压器电路向量模型



用受控源表示互感电压

R_1, R_2 ：初、次级线圈的电阻

法1：列写回路方程



两回路的KVL方程为

$$\left.\begin{aligned}(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_S\\ -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+Z_L)\dot{I}_2=0\end{aligned}\right\}$$

$$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1\ ,\ Z_{22}=R_2+\mathrm{j}\omega L_2+Z_L$$

分别是初、次级回路的自阻抗。

法2：初、次级等效电路法

联立求得 $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$

从初级线圈两端看入的等效阻抗(初级输入阻抗)

$$Z_i = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

其中：

$\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$ 称为次级回路对初级回路的反映阻抗或

引入阻抗，用Z_{f1}表示。它反映了次级回路通过磁耦合对初级回路的影响。

据此，可作为初级等效回路，很方便地求出初级回路电流。而次级回路的电流为

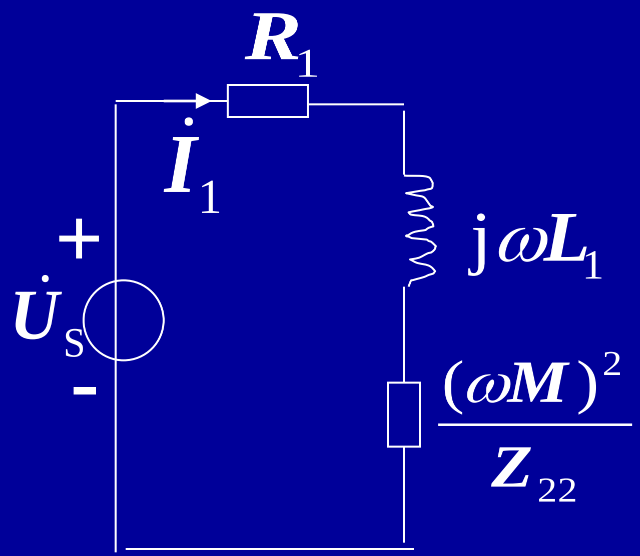
$$\dot{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}}$$

若 $Z_L = \infty$ ，相当于次级未接，$Z_i = Z_{11}$，即次级对初级无影响；

若 $Z_L = 0$,当k=1，线圈绕组近似为零时，

$$Z_i = \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{\mathrm{j}\omega L_2} = \mathrm{j}\omega L_1 - \mathrm{j}\omega \frac{M^2}{L_2} = 0$$

可见，次级短路相当于(近似于)初级短路。



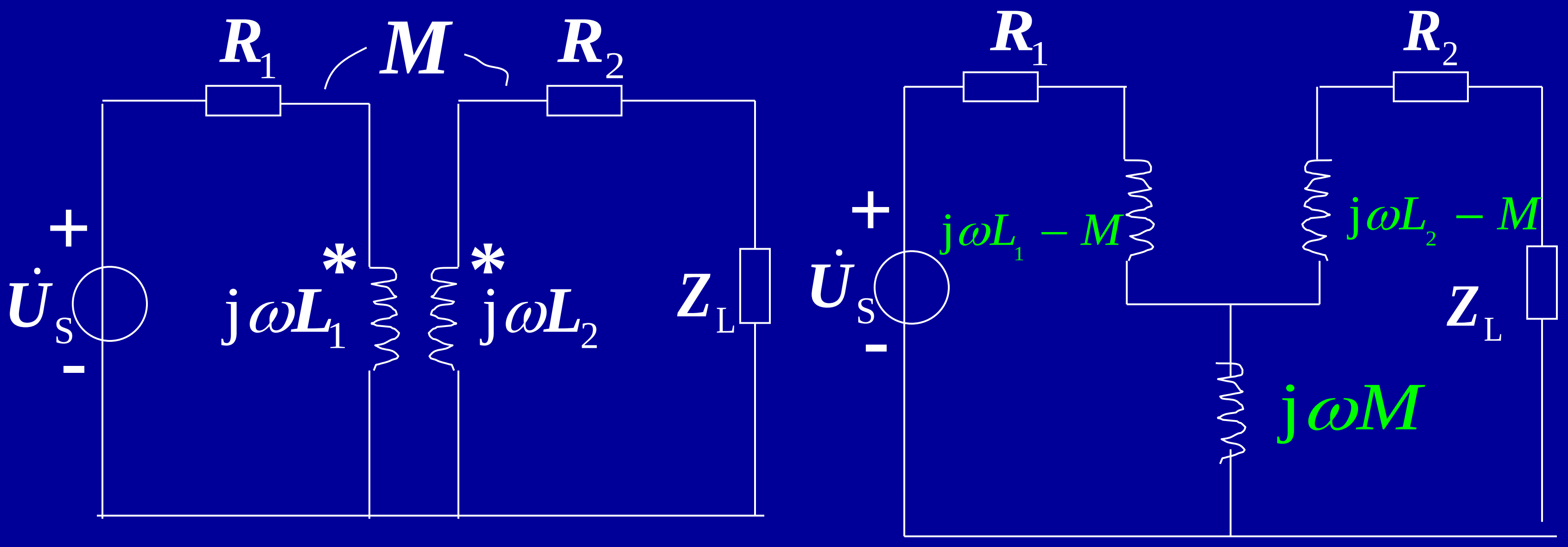
初级等效电路

反映阻抗特点：(1)与同名端无关；

(2)反映阻抗改变了次级阻抗的性质。

本法:(1)先求输入阻抗，(2)求初级电流(与同名端无关)(3)求次级电流(与同名端有关)

法3：空芯变压器电路也可用去耦等效电路来分析。



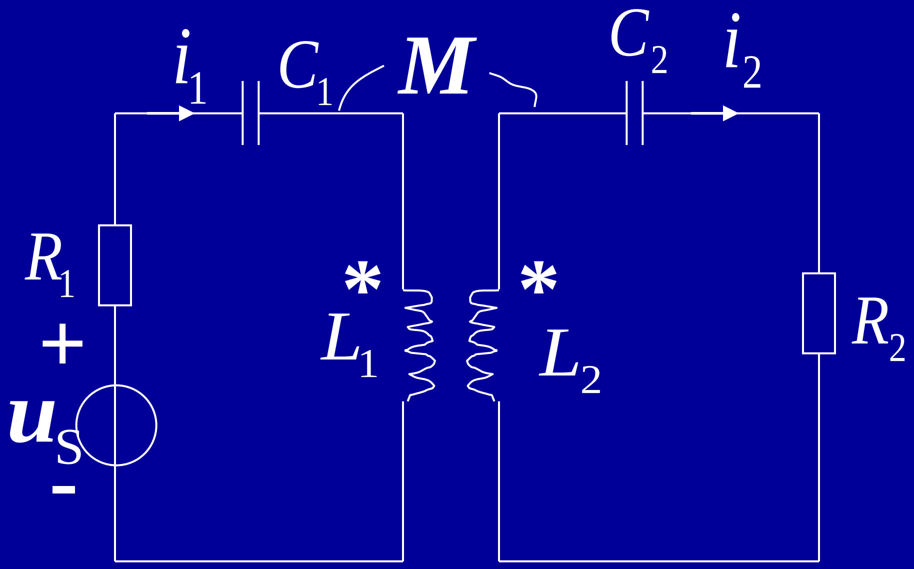
例8-3

已知 $L_1 = 2\text{mH}, L_2 = 1\text{mH},$

$M = 0.2\text{mH}, R_1 = 9.9\Omega,$

$R_2 = 40\Omega, C_1 = C_2 = 10\mu\text{F}$

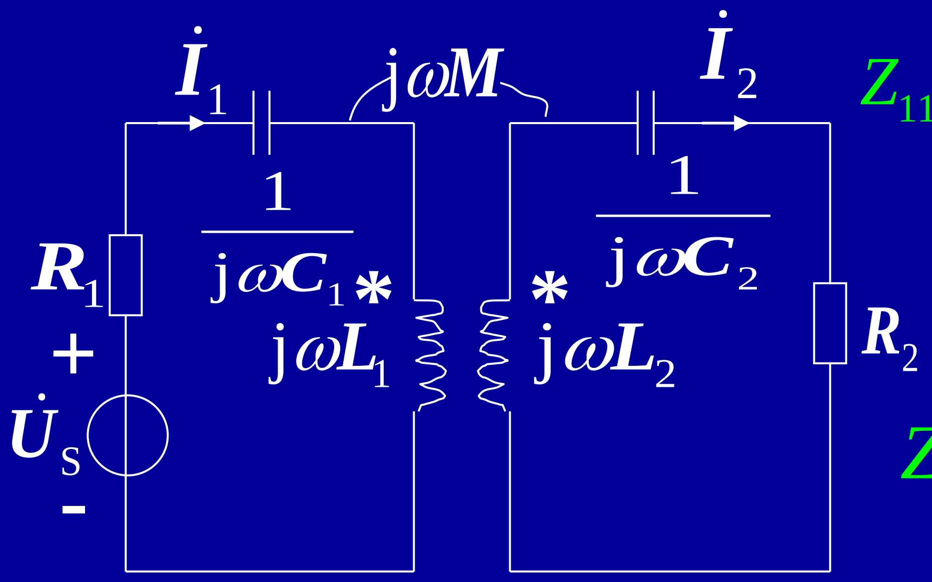
$u_S(t) = 10\sqrt{2}\cos 10^4 t \text{ V}$



求次级回路电流 $i_2(t)$

解：作出相量模型

$$\dot{U}_S = 10\angle 0° \text{ V}$$



$$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1})=9.9+j10\Omega$$

$$Z_{22}=R_2+\mathrm{j}(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2})=40\Omega$$

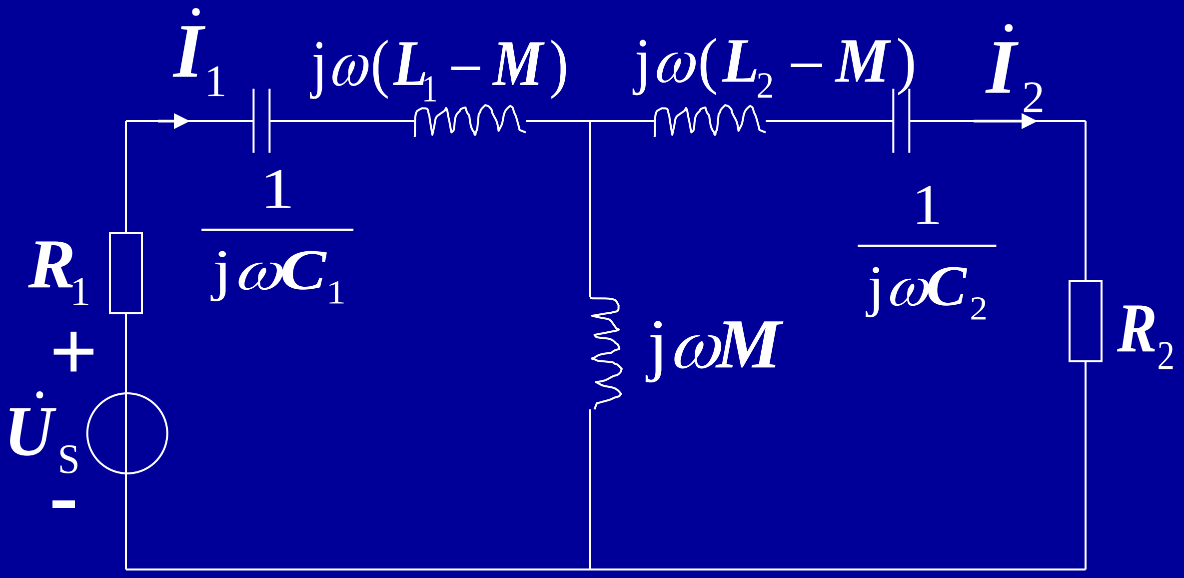
(1)反映阻抗的概念 $\mathrm{j}\omega M=\mathrm{j}2\Omega$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle-45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}=\frac{1}{20\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\therefore \quad i_2(t) = 0.05\cos(10^4 t + 45°)\ \mathrm{A}$$

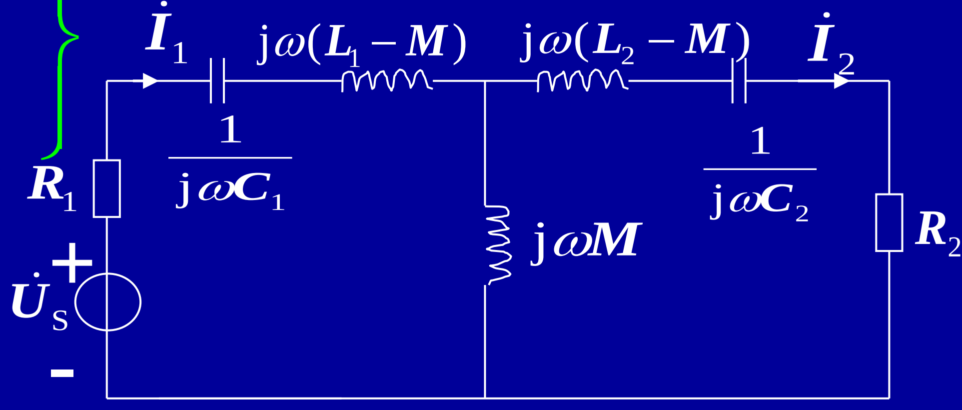
(2).去耦等效电路



$$\left.\begin{aligned}&\left(R_1+\mathrm{j}\omega L_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\right)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_S\\&-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\left(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right)\dot{I}_2=0\end{aligned}\right\}$$

代入数据

$$\left.\begin{aligned}&(9.9+\mathrm{j}10)\dot{I}_1-\mathrm{j}2\dot{I}_2=10\angle 0^\circ\\&-\mathrm{j}2\dot{I}_1+40\dot{I}_2=0\end{aligned}\right\}$$



用克莱姆法则

$$D = \begin{vmatrix} 9.9 + j10 & -j2 \\ -j2 & 40 \end{vmatrix} = 400 + j400$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 9.9 + j10 & 10 \\ -j2 & 0 \end{vmatrix} = j20$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\mathrm{j}20}{400 + \mathrm{j}400} = \frac{1}{20\sqrt{2}} \angle 45°$$

$$\therefore \quad i_2(t) = 0.05 \cos(10^4 t + 45°)\ \mathrm{A}$$

法4：戴维南等效电路

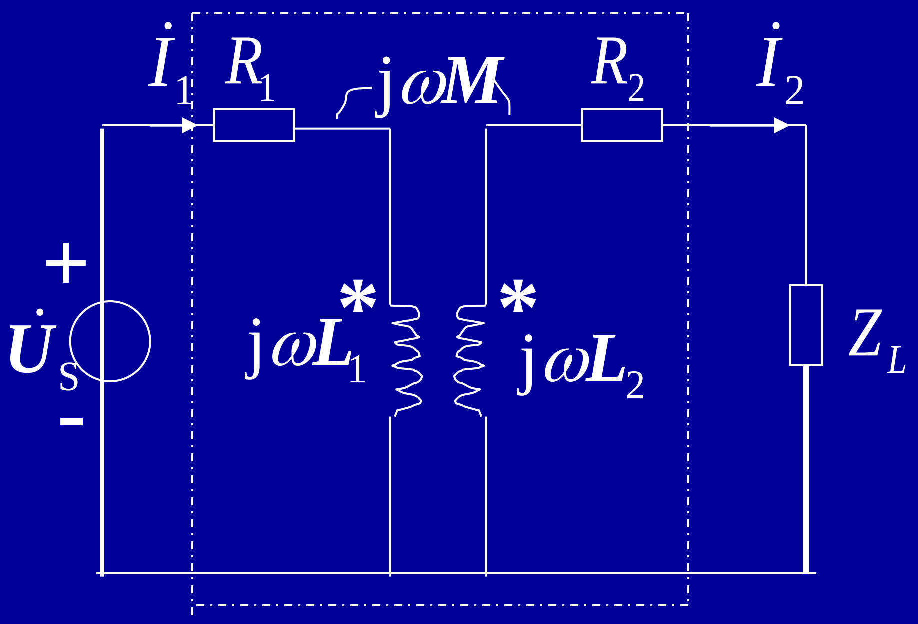
当需求负载可变化时获得最大功率时常用此法。

以下图(原图)为例:其中

$$Z_o = R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} = Z_{22} + Z_{f2}$$

$$\dot{I}_{1o} = \frac{\dot{U}_S}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}$$

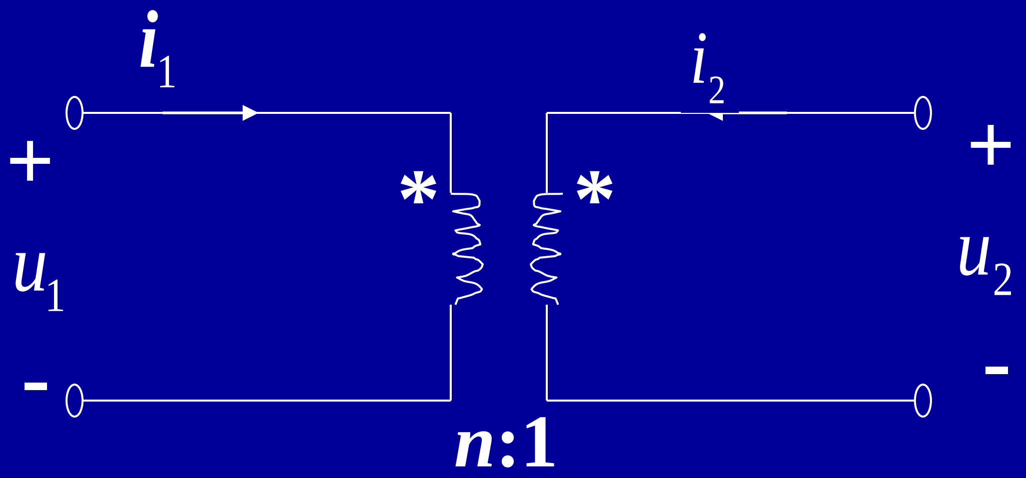
$$\dot{U}_{OC} = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_{1o}$$



注意：这是次级开路时的初级电流，开路电压与同名端有关。

9-4.理想变压器和全耦合变压器

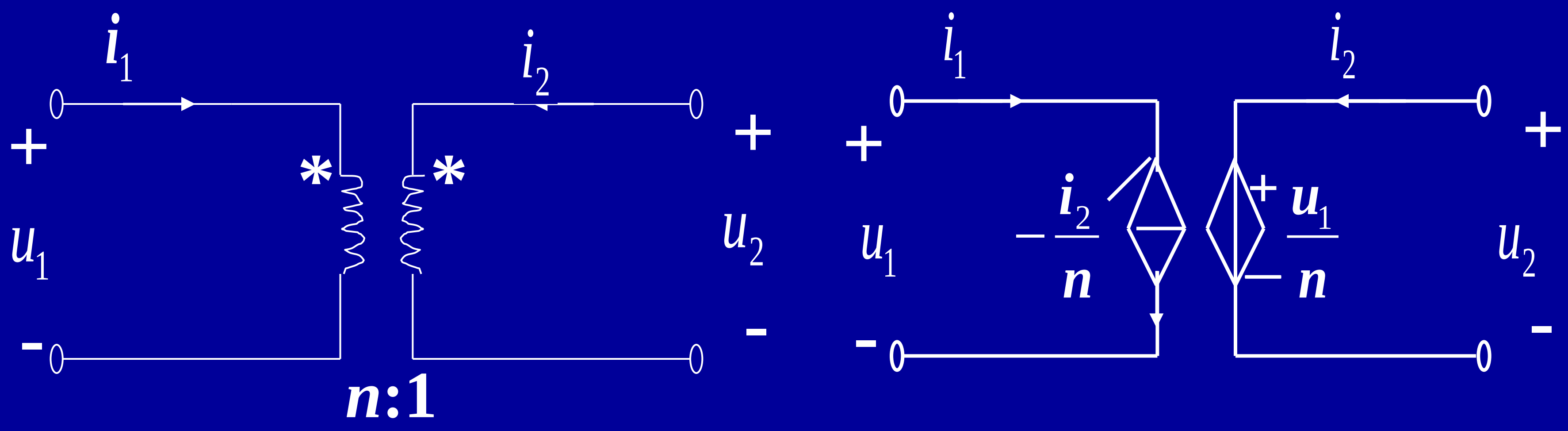
理想变压器也是一种耦合元件。它是实际变压器在理想条件下的电路模型。理想变压器的电路符号如下图，在如图同名端、电压和电流参考方向下，理想变压器的伏安关系为：



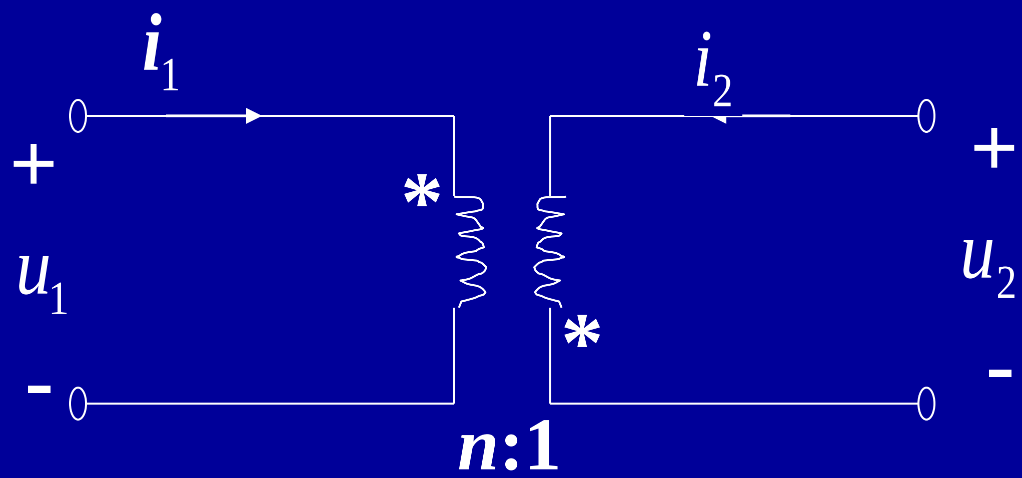
$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} &= n \\ \frac{i_1}{i_2} &= -\frac{1}{n} \end{aligned}\right\}$$

理想变压器的唯一参数是变比(或匝比): n

有理想变压器的伏安关系可以看出，理想变压器已经没有电感或耦合电感的作用了，故理想变压器的电路模型也可以画出受控源的形式：



由于同名端的不同，理想变压器还有另一个电路模型，其伏安关系为



$$\left.\begin{aligned}\frac{u_1}{u_2}&=-n\\ \frac{i_1}{i_2}&=\frac{1}{n}\end{aligned}\right\}$$

当线圈的电压、电流参考方向关联时只有这两种情况，这两种VCR仅差一个符号。

理想变压器可以看成是耦合电感或空芯变压器在理想条件下的极限情况:

(1)耦合电感无损耗，即线圈是理想的;

(2)耦合系数k=1，即是全耦合 $M=\sqrt{L_1L_2}$;

(3)自感系数L_1和L_2 均为无限大，但 L_1 / L_2等于常数，互感系数 $M=\sqrt{L_1L_2}$ 也为无限大。

9 -4 -1 理想变压器伏安关系推导

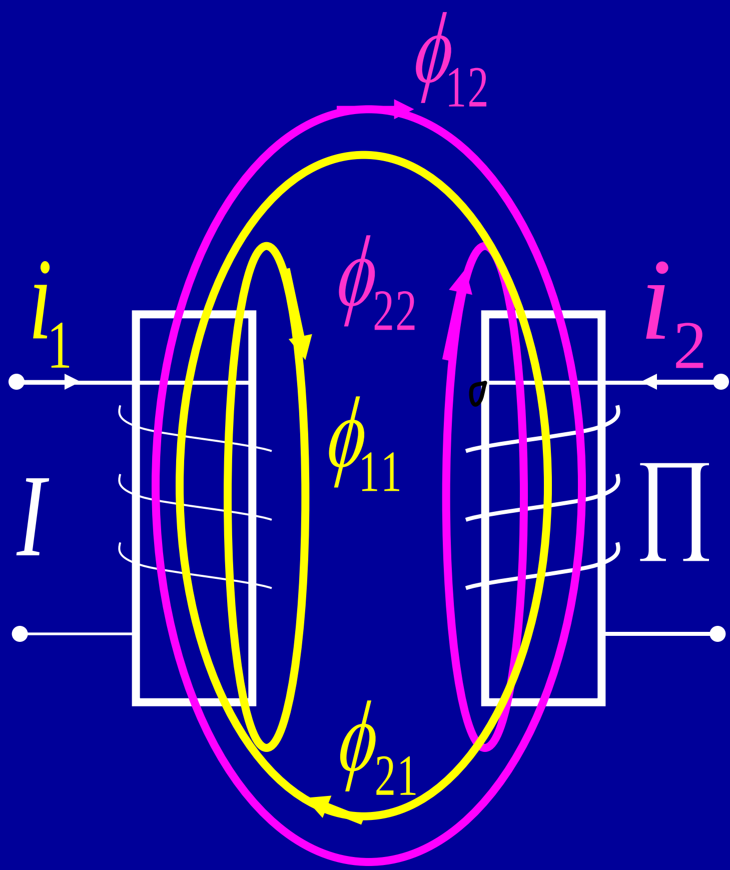
下面先从符合前两个理想化条件的全耦合变压器着手推导理想变压器的VCR：当线圈的电压、电流参考方向关联时只有这两种情况，由耦合线圈的VCR：

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_{11}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t} = u_{L1} + u_{M1} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_{22}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\varphi_{21}}{\mathrm{d}t} = u_{L2} + u_{M2} = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

这里仅讨论第一种(相加的)情况。且当耦合系数k=1时的情况。

仍然应用书上图9-1(a)：初级线圈电流i_1：



产生的磁通为ϕ_{11}，其中有一部分磁通ϕ_{21}穿过了次级线圈。

次级线圈电流i_2：

产生的磁通为ϕ_{22}，其中有一部分磁通ϕ_{12}穿过了初级线圈。

显然，由自感、互感的定义：

$$N_1\phi_{11}=L_1 i_1, N_1\phi_{12}=M i_2$$

$$N_2\phi_{21}=M i_1, N_2\phi_{22}=L_2 i_2$$

耦合系数 k 显然有另一个定义为：

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}=\sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}=\sqrt{\frac{\phi_{12}\phi_{21}}{\phi_{11}\phi_{22}}}$$

电流在本线圈中产生的磁通全部与另一个线圈相交链，即 $\phi_{11}=\phi_{21}$, $\phi_{22}=\phi_{12}$ 时 $k=1$。

若 初、次级 线圈的匝数分别为N_1和N_2，则两线圈的总磁链分别为：

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = N_1(\phi_{11} + \phi_{12}) = N_1(\phi_{11} + \phi_{22}) = N_1\phi$$

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21} = N_2(\phi_{22} + \phi_{21}) = N_2(\phi_{11} + \phi_{22}) = N_2\phi$$

式中，$\phi = \phi_{11} + \phi_{22}$ 称为**主磁通**，由电磁感应定律，初、次级电压分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{N}_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{u}_2 &= \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{N}_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} \end{aligned}\right\}$$

故得：

$$\frac{\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_2} = \frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{N}_2} = \boldsymbol{n}$$

由耦合电感VCR的第一式：$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

从 $-\infty$到 t 积分，有

$$\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\mathrm{d}\tau = L_1 i_1 + M i_2$$

得：

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{M}{L_1} i_2$$

由自感、互感的定义：$N_1\phi_{11} = L_1 i_1, N_1\phi_{12} = M i_2$

$N_2\phi_{21} = M i_1, N_2\phi_{22} = L_2 i_2$

得：$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} = n$

得：

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{n} i_2$$

**

由于u_1为有限值，当$L_1 \to \infty, \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$ 保持不变，即满足理想化的第三个条件，有 $i_1 = -\frac{1}{n} i_2$

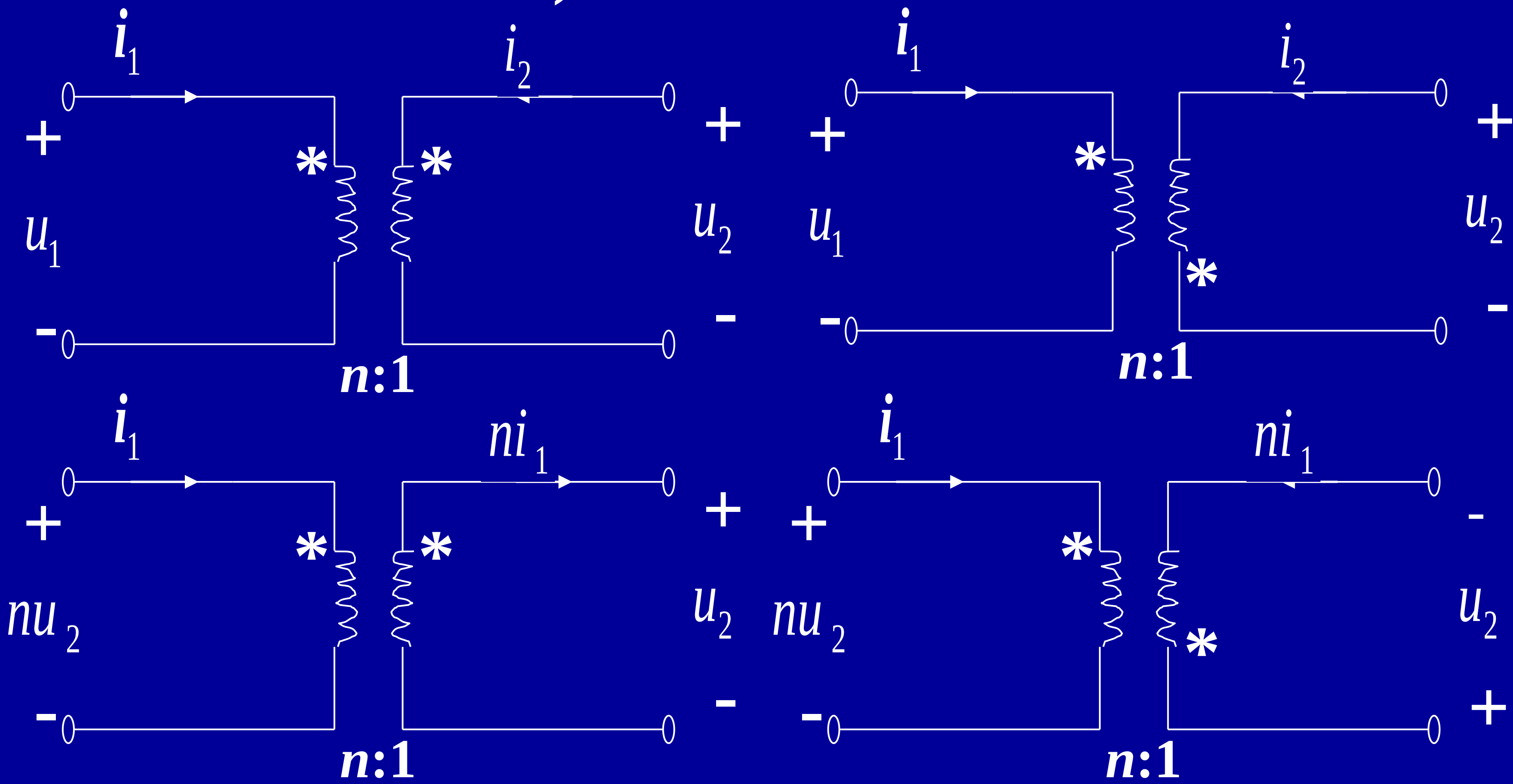
类此，可以推导出同名端不同的另一种情况。

由理想变压器的伏安关系，可以得出：理想变压器是一种无记忆元件，也称即时元件。如代入上述伏安关系，理想变压器的吸收功率为：

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2)(-\frac{1}{n} i_2) + u_2 i_2 = 0$$

可见：理想变压器既不耗能，也不储能。

为了方便，习惯上把由于同名端不同而引起的两种伏安关系合并成一种，且不带负号。两线圈的电压(标同名端处假设为正极)、电流(一侧流入另一侧流出)应如下图假设：

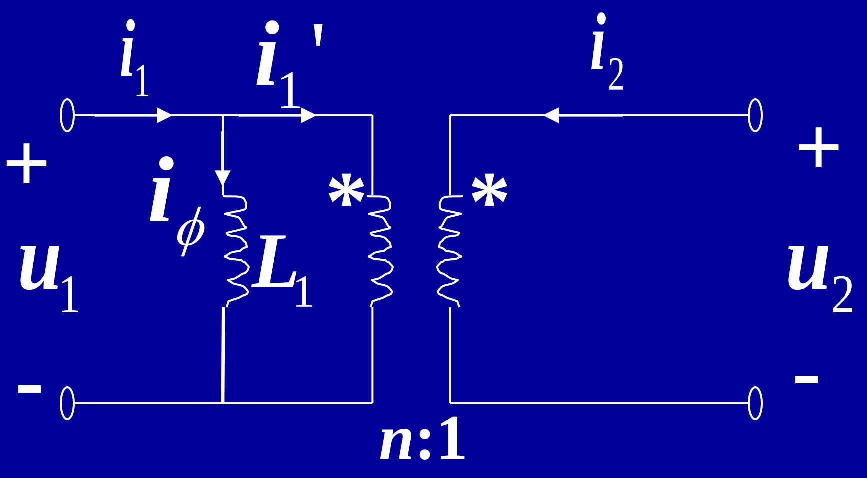


9 -4-2 全耦合变压器的电路模型

实际铁芯变压器一般更易满足前两个条件，而不满足第三个条件，那就是全耦合变压器。两线圈的电压关系同理想变压器，电流关系有**式，有

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{n}i_2 = i_\phi + i_1'$$

可见，全耦合变压器的初级电流有两部分组成，其中 i_ϕ 称为激磁电流。其等效电路模型如图所示。



上图中， L_1称为激磁电感。这也说明理想变压器由于L_1为无穷大(极限情况)，故不需要激磁电流，就可以在铁芯中产生磁场。

工程上为了近似获得理想变压器的特性，通常采用导磁率μ很高的磁性材料做变压器的芯子。而在保持匝比不变的情况下，增加线圈的匝数，并尽量紧密耦合，使k接近于1。同时使L_1, L_2, M非常非常大，认为增大到无限大。

9-5 含理想变压器电路的分析计算

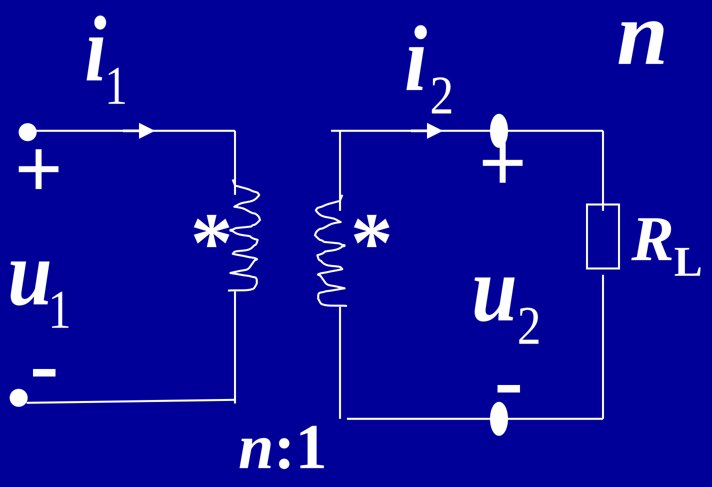
由于全耦合变压器的等效电路中同样含有理想变压器，激磁电感 (即初级电感) 可以认为是外接电感，故本节也包括了全耦合变压器电路的分析计算。

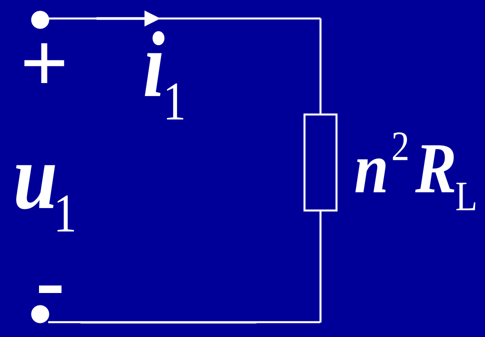
9-5-1 理想变压器的阻抗变换

由理想变压器的伏安关系可知，它除了可以以n倍的关系变换电压、电流外，还可以有n^2倍的关系变换阻抗。

如：从初级看进去的等效电阻为

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{\frac{1}{n} i_2} = n^2 \frac{u_2}{i_2} = n^2 R_{\mathrm{L}}$$

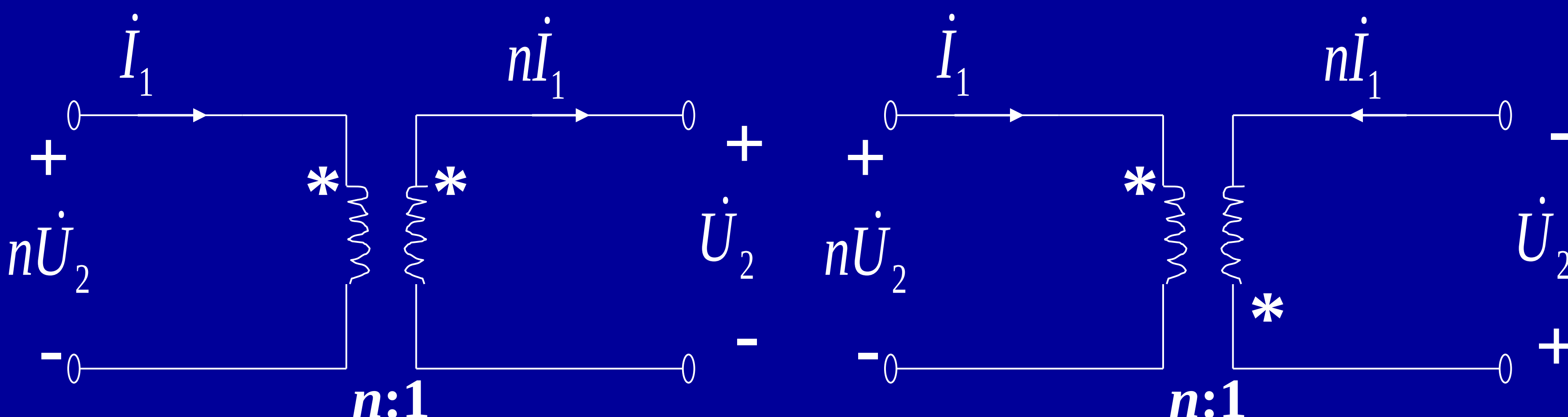




显然，输入电阻仅与匝比有关，与同名端无关。

对于正弦稳态电路，如果按照前面所规定的参考方向，理想变压器伏安关系的相量形式为：

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \quad , \quad \dot{I}_2 = n\dot{I}_1$$



若次级接负载阻抗，则从初级看进去的等效阻抗为

$$Z_i = n^2 Z_{\mathrm{L}}$$

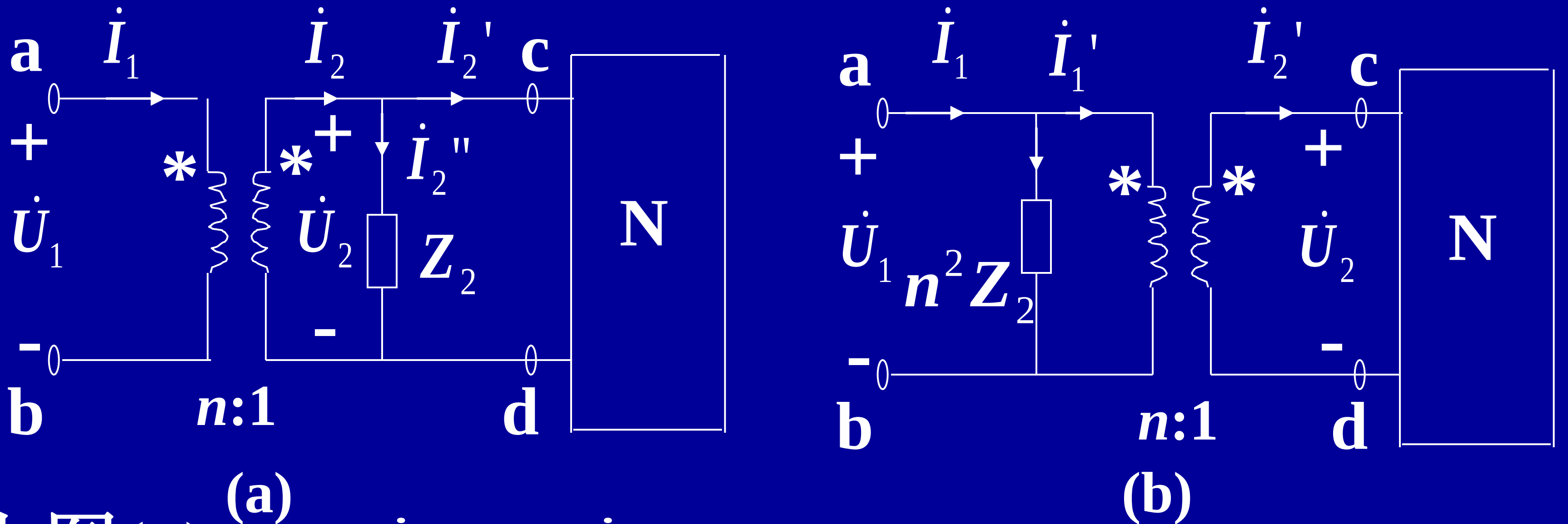
上述“搬移”阻抗的方法还可以进一步推广：

1. 并联阻抗可以从次级搬移到初级；

2.串联阻抗可以从初级搬移到次级。

阻抗可以从初级与次级之间来回搬移。

1. 并联阻抗可以从次级搬移到初级；



由图(a)：

$$\dot U_1 = n\dot U_2$$

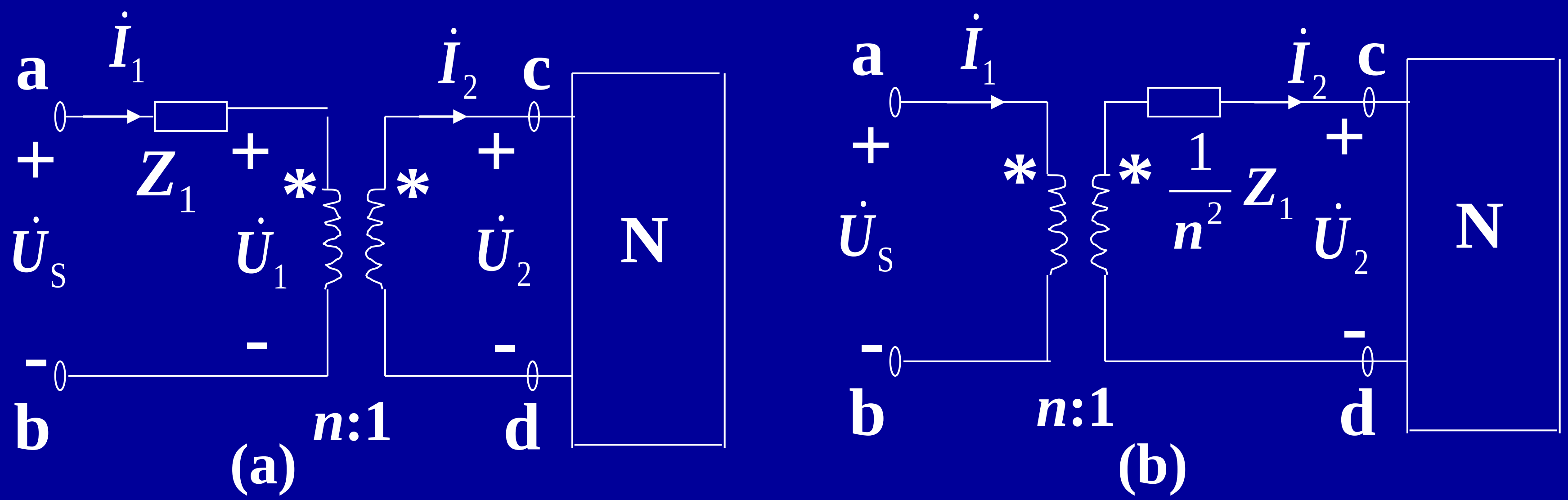
$$\dot I_1 = \frac{1}{n}\dot I_2 = \frac{1}{n}(\dot I_2'' + \dot I_2')$$

$$= \frac{1}{n}(\frac{\dot U_2}{Z_2} + \dot I_2') = \frac{\dot U_1}{n^2 Z_2} + \dot I_1'$$

得图(b)。上式中：

$$\dot I_1' = \frac{1}{n}\dot I_2'$$

2.串联阻抗可以从初级搬移到次级。



由图(a)： $\dot{I}_2 = n\dot{I}_1$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = \frac{1}{n}(\dot{U}_S - Z_1\dot{I}_1)$$

$$= \frac{1}{n}(\dot{U}_s - Z_1\frac{\dot{I}_2}{n}) = \frac{1}{n}\dot{U}_S - \frac{Z_1}{n^2}\dot{I}_2$$

得图(b)。

应该指出：阻抗的 n^2 倍与元件的 n^2 倍是不一样的。

电阻和电感意义相同;

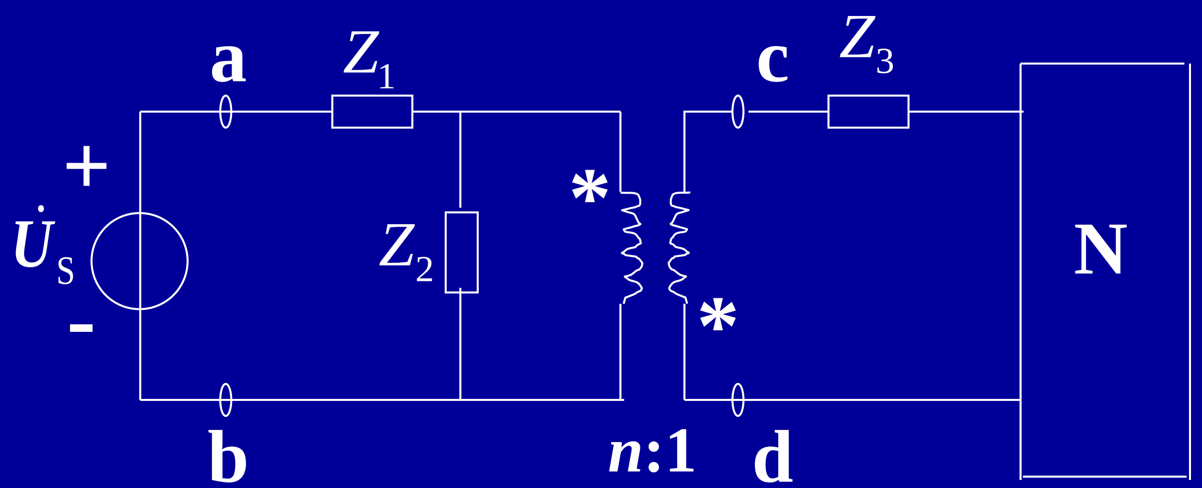
而　电容意义刚好相反:

$$n^2 \times R = (n^2 R)$$

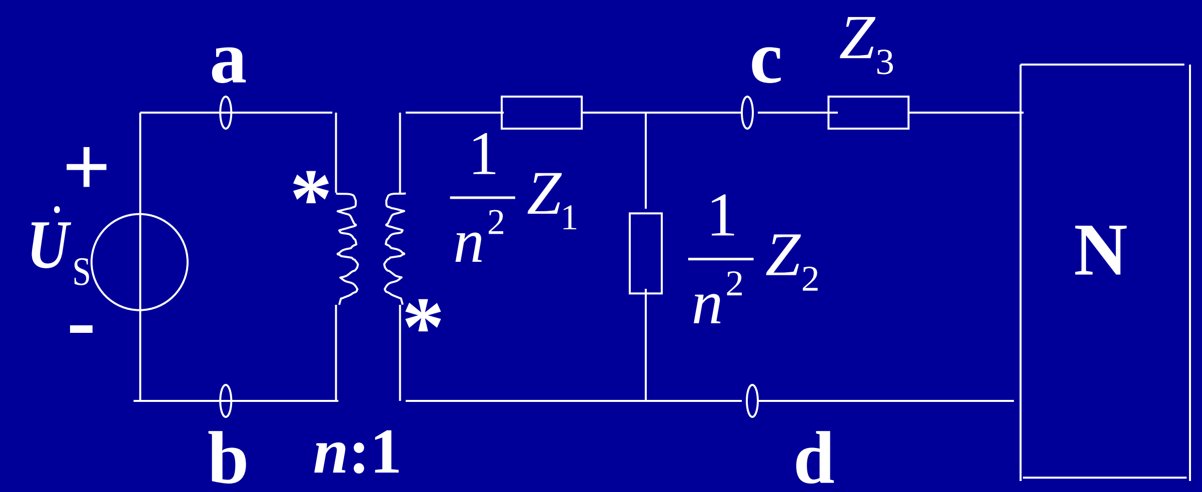
$$n^2 \times (\mathrm{j}\omega L) = \mathrm{j}\omega(n^2 L)$$

$$n^2 \times \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega(\frac{1}{n^2} C)}$$

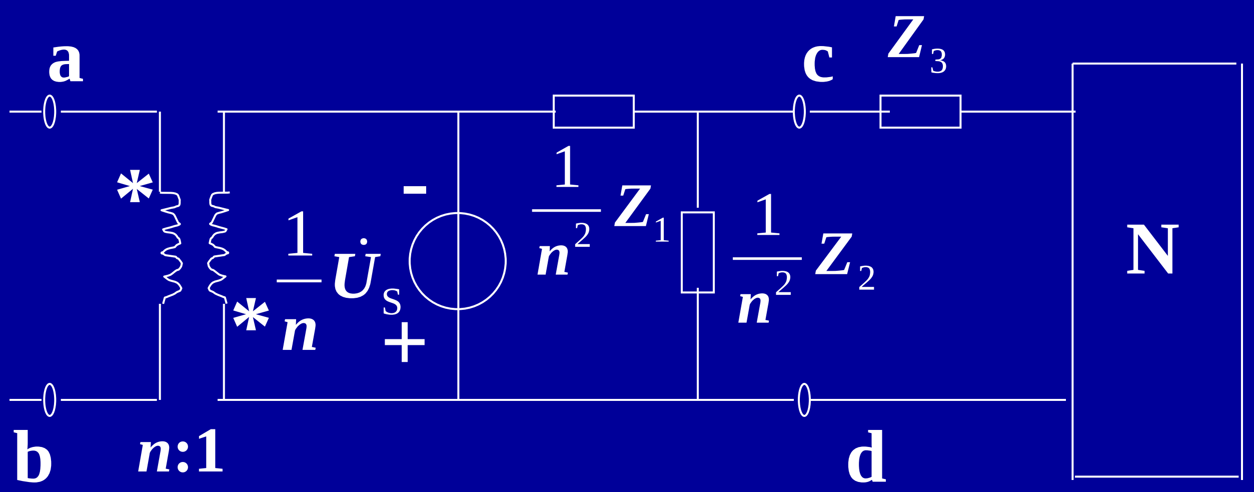
利用阻抗的来回搬移，能使问题简化。例如：



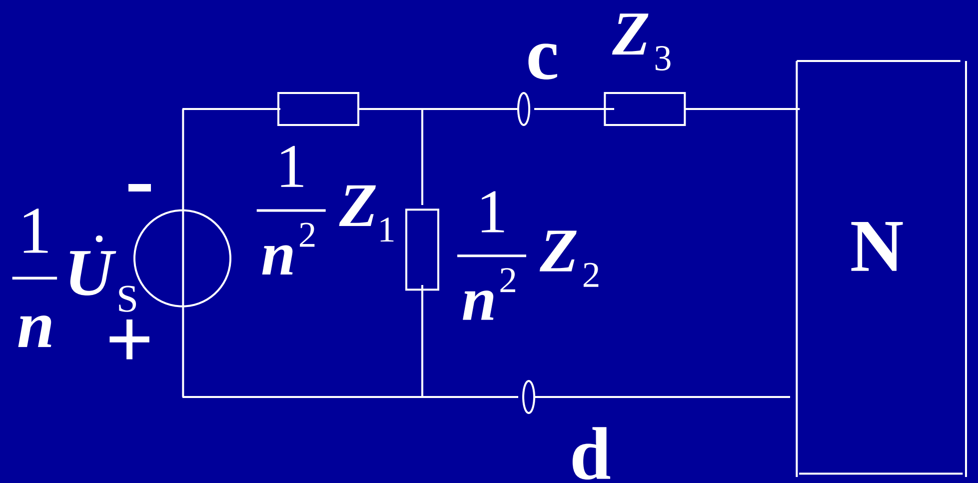
简化为



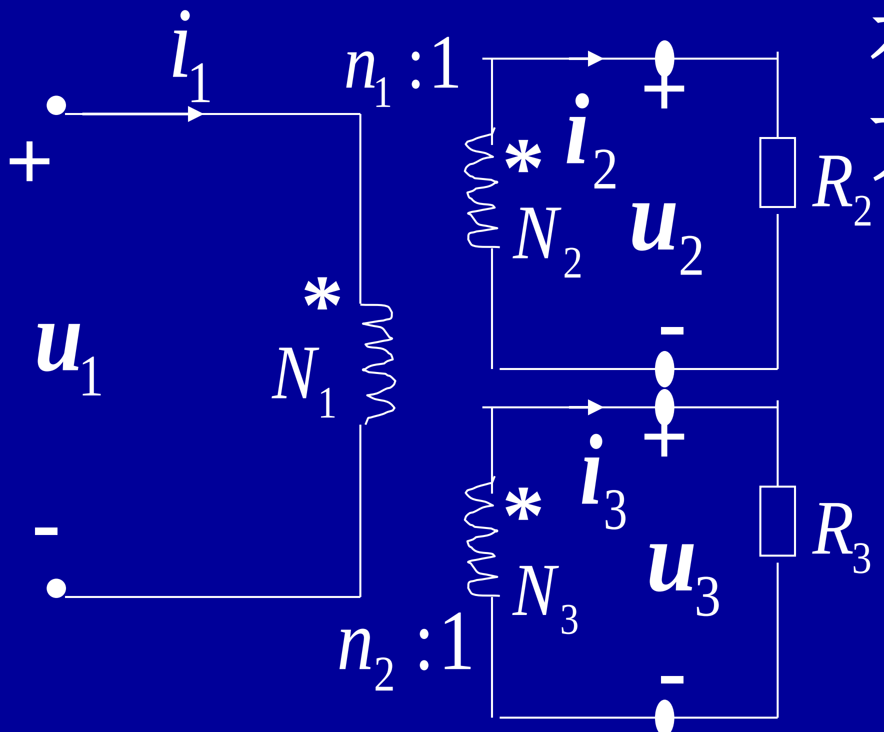
电源也可以“搬移”。不过，电源搬移与同名端有关。



由理想变压器的VCR，简化成没有变压器的电路。



理想变压器还可由一个初级线圈与多个次级线圈构成。



在图示电压，电流参考方向下，有

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} = \frac{u_3}{N_3}$$

即：

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n_1 \qquad \frac{u_1}{u_3} = \frac{N_1}{N_3} = n_2$$

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0 \quad 即 \quad i_1 = \frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3$$

$$p = u_1 i_1 - u_2 i_2 - u_3 i_3 = 0 \quad 即 \quad v_1 i_1 - \frac{v_1}{n_1} i_2 - \frac{v_1}{n_2} i_3 = 0$$

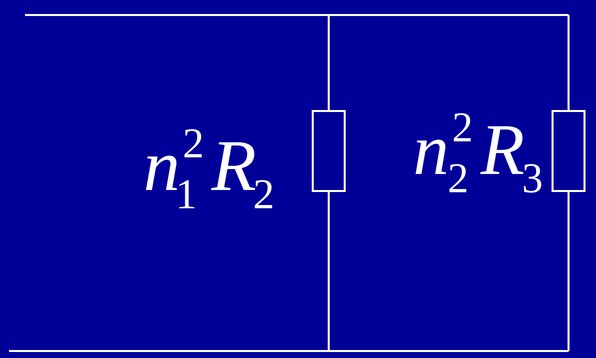
从初级看入的等效电导

$$G_i = \frac{i_1}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2}{u_1} + \frac{\frac{1}{n_2} i_3}{u_1}$$

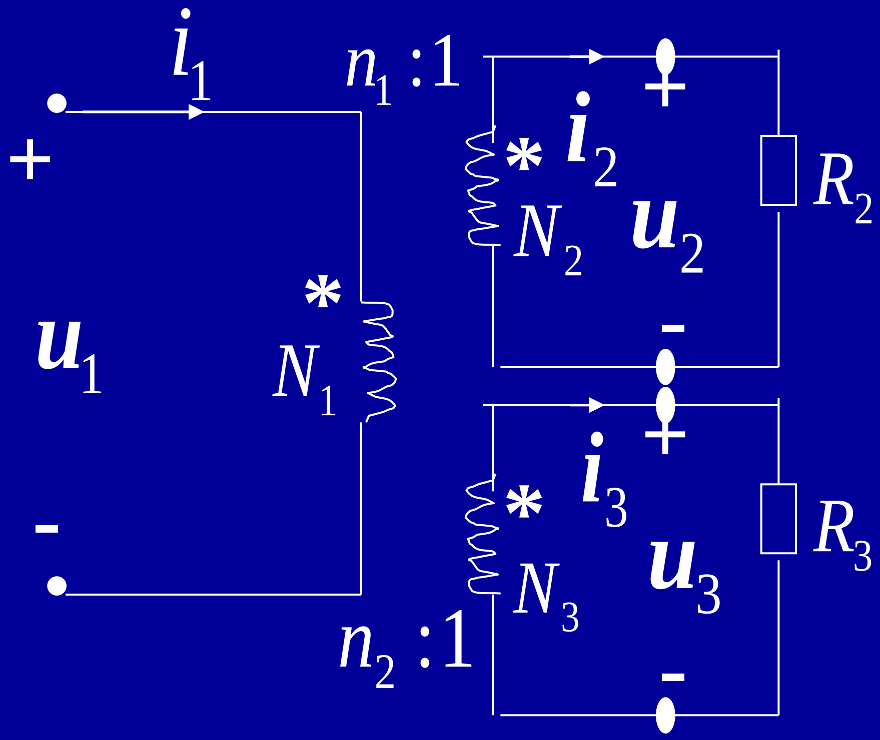
$$=\frac{\frac{1}{n_1}i_2}{n_1u_2}+\frac{\frac{1}{n_2}i_3}{n_2u_3}=\frac{G_2}{n_1^2}+\frac{G_3}{n_2^2}$$

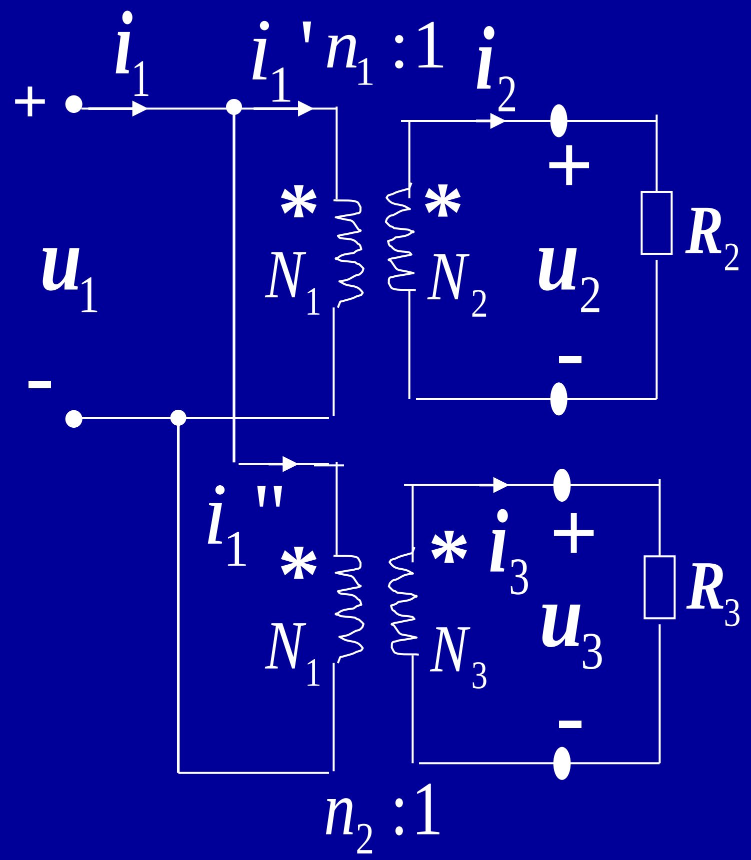
$$R_1=\frac{(n_1^{\ 2}R_2)(n_2^{\ 2}R_3)}{n_1^{\ 2}R_2+n_2^{\ 2}R_3}=n_1^{\ 2}R_2\,//\,n_2^{\ 2}R_3$$

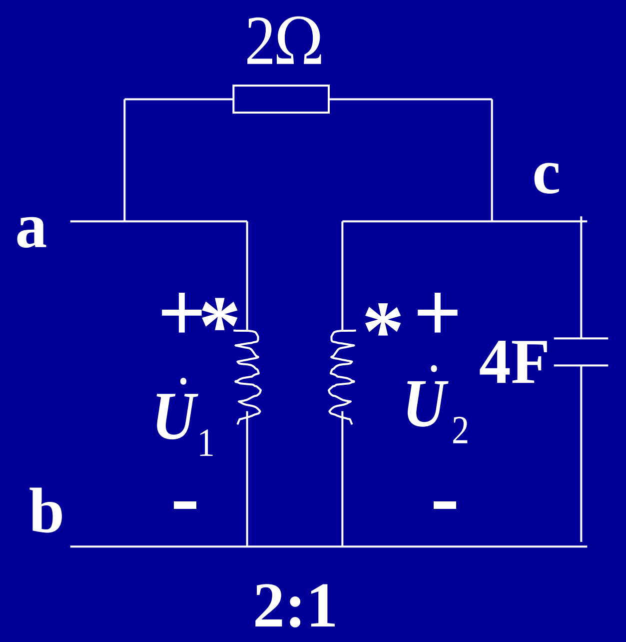
即：有多个次级线圈时，次级阻抗可以一个一个地搬移。



其实，多个次级的理想变压器电路，可以认为初级是双线(或多线)并绕，这样就更易理解。





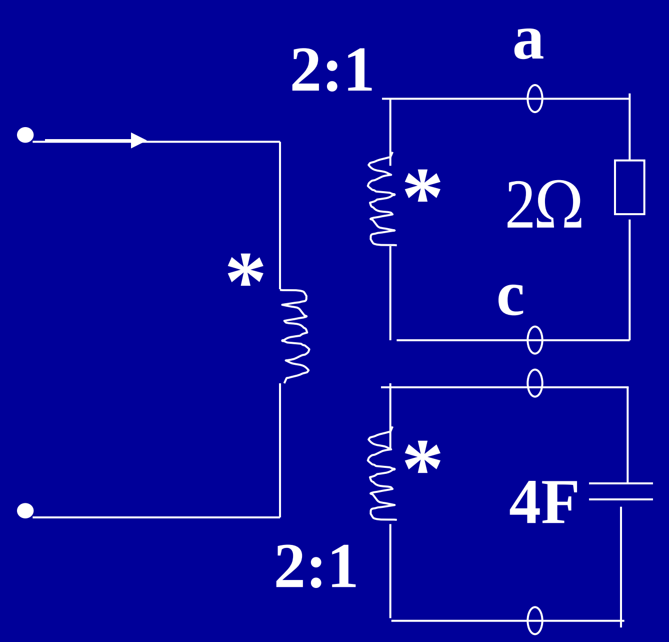


利用上述结论可以巧妙的计算如下例题：

已知 $\omega=1$，求ab端的输入阻抗。

解：由KVL：

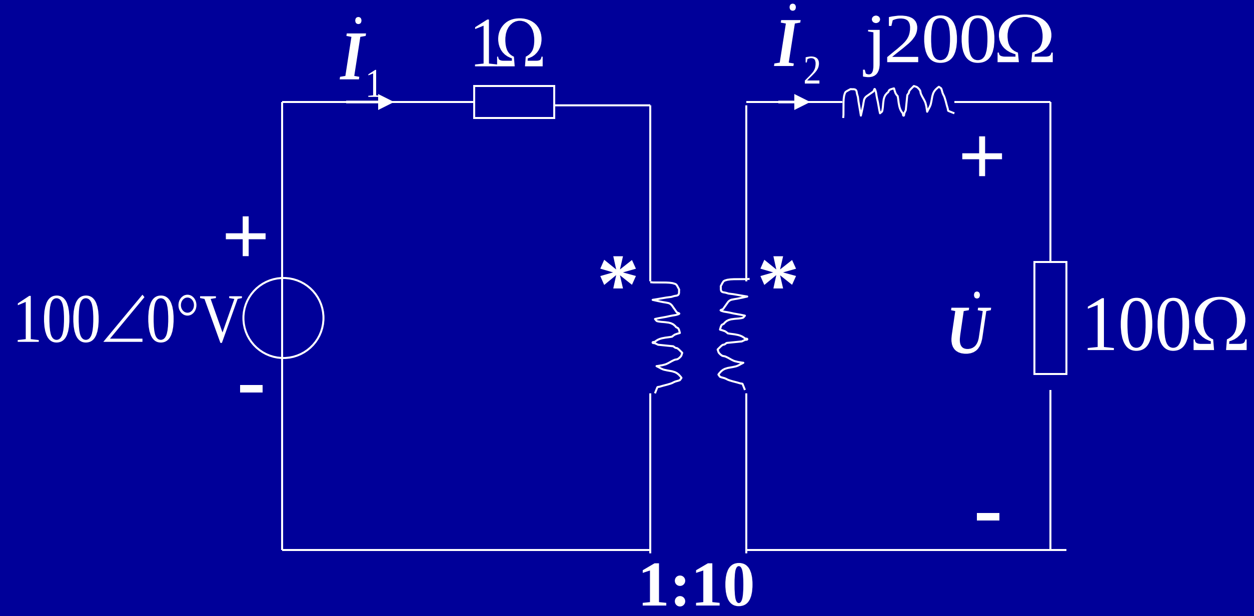
$$\dot{U}_{ac}=\dot{U}_1-\dot{U}_2=2\dot{U}_2-\dot{U}_2=\dot{U}_2$$



等效电路如左图，输入阻抗为：

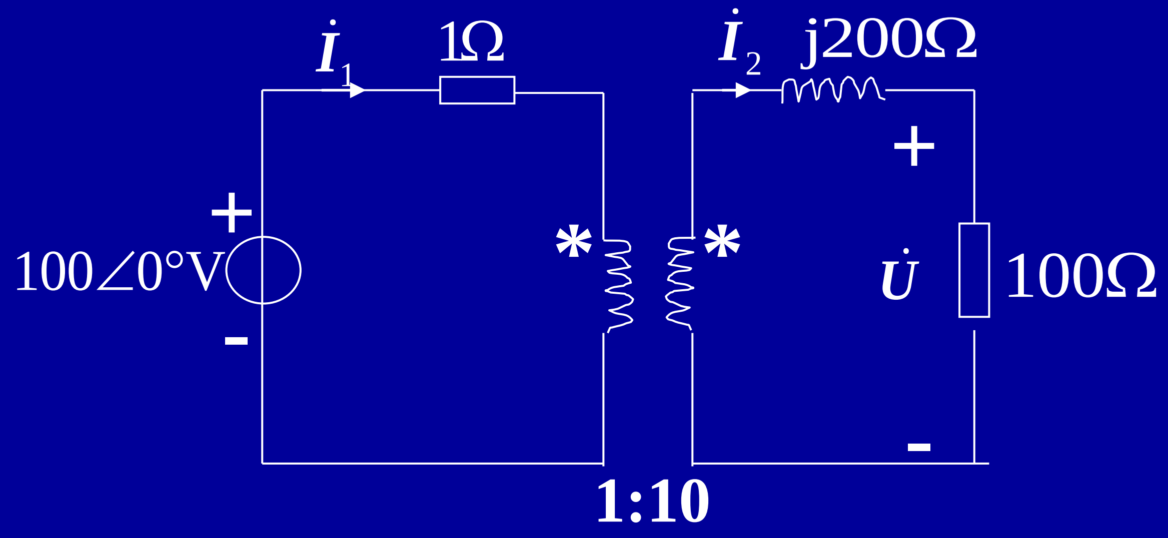
$$Z_i=1//(-\mathrm{j})=\frac{-\mathrm{j}}{1-j}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{j})\ \Omega$$

例9-4.含理想变压器电路如图，试求 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{U}$ 。



解：将次级折合到初级

$$Z_L = 100 + j200\Omega \qquad Z_i = n^2 Z_L = 1 + j2\Omega$$



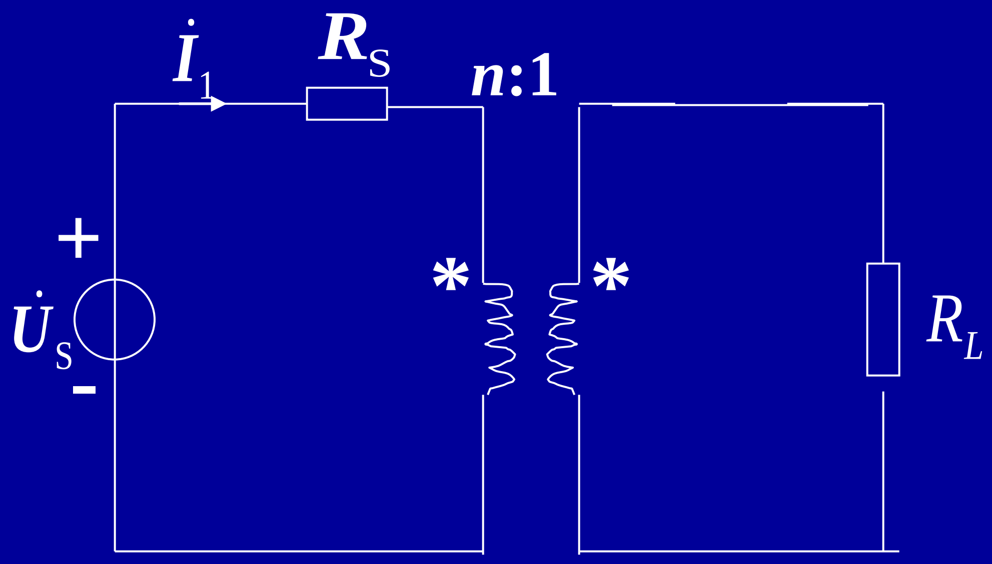
$$\dot{I}_1 = \frac{100\angle 0^\circ}{2 + \mathrm{j}2} = 25\sqrt{2}\angle -45^\circ \mathrm{A}$$

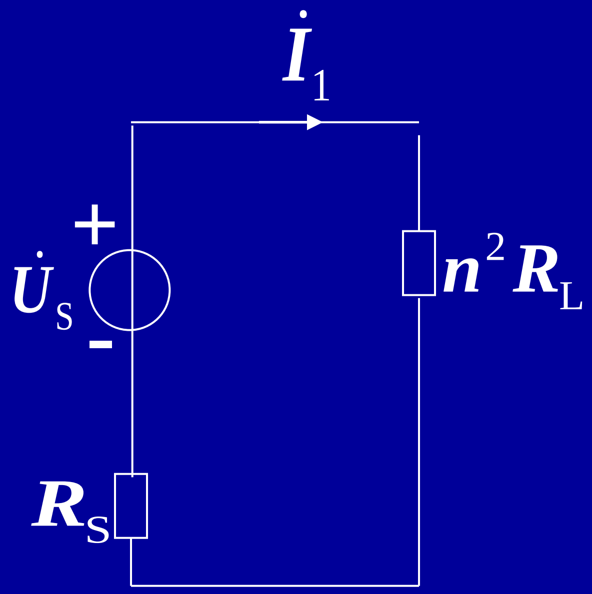
由理想变压器的伏安关系

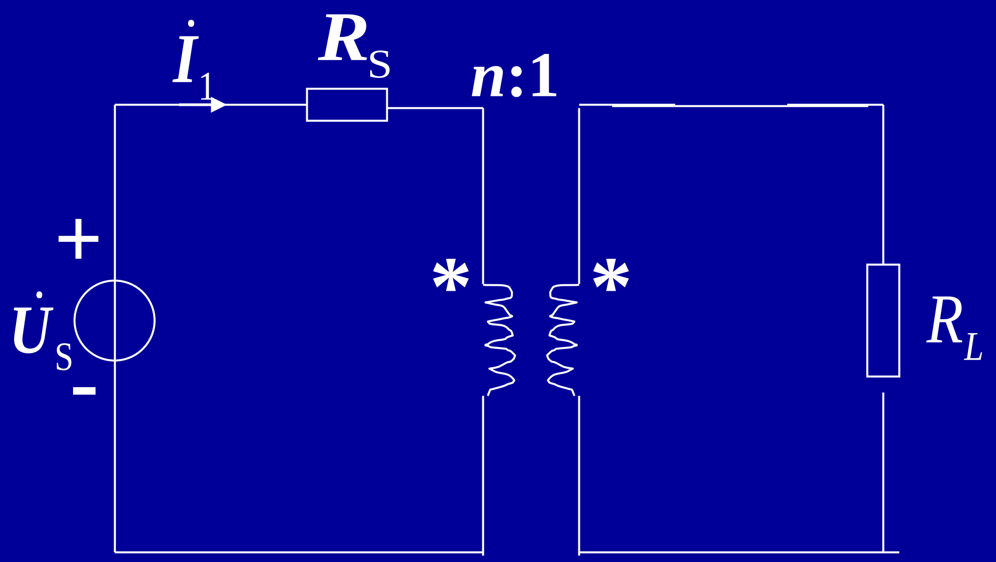
$$\dot{I}_2 = n\dot{I}_1 = 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ \mathrm{A}$$

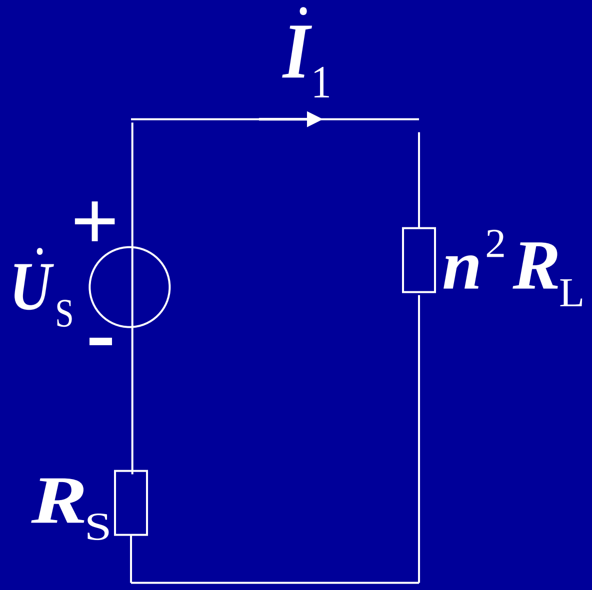
$$\dot{U} = 100\dot{I}_2 = 250\sqrt{2}\angle -45^\circ \ \mathrm{V}$$

例9-5.在如图所示电路中，已知 $\dot{U}_S = 8\angle 0°\ \text{V}$ 内阻 $R_S = 2\,\Omega$，负载电阻 $R_L = 8\,\Omega$，求 n=?时，负载电阻与电源达到最大功率匹配？此时，负载获得的最大功率为多少？









解：将次级折合到初级，根据最大功率匹配条件有

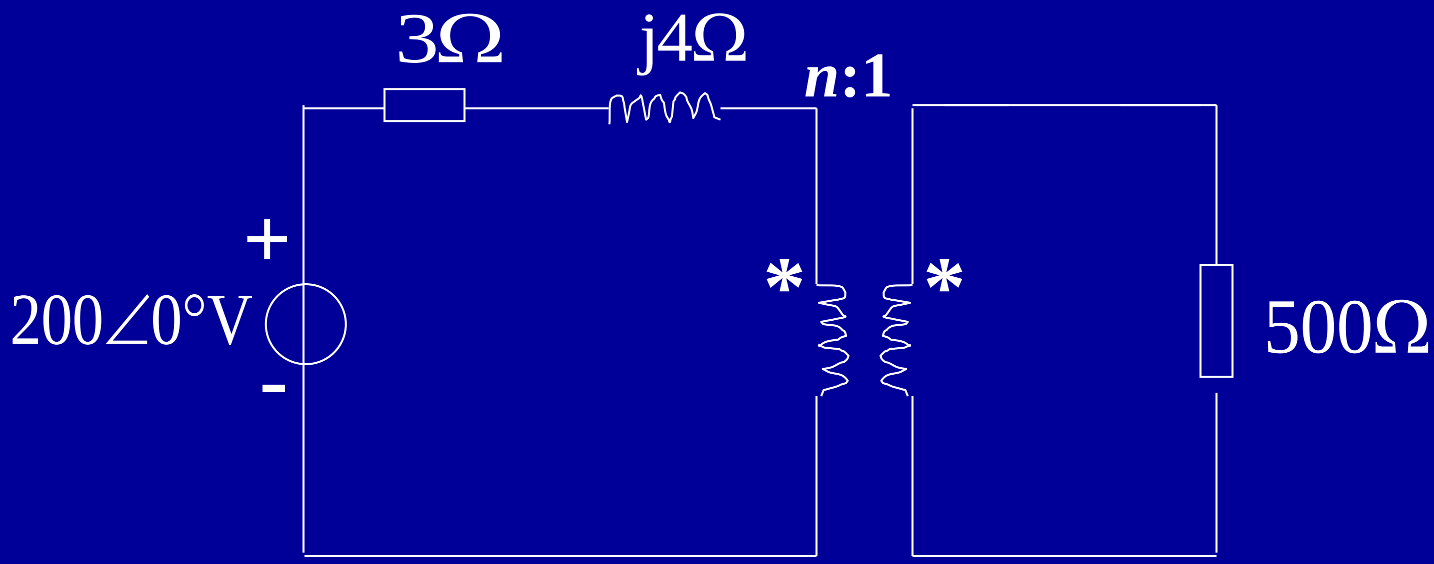
$$n^2 R_L = R_S \qquad n = \sqrt{\frac{R_S}{R_L}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = 0.5$$

时，达到最大功率匹配。

由于理想变压器既不能耗能也不能储能，故等效电路中 $n^2 R_L$ 吸收的功率就是 R_L 原电路获得的功率，

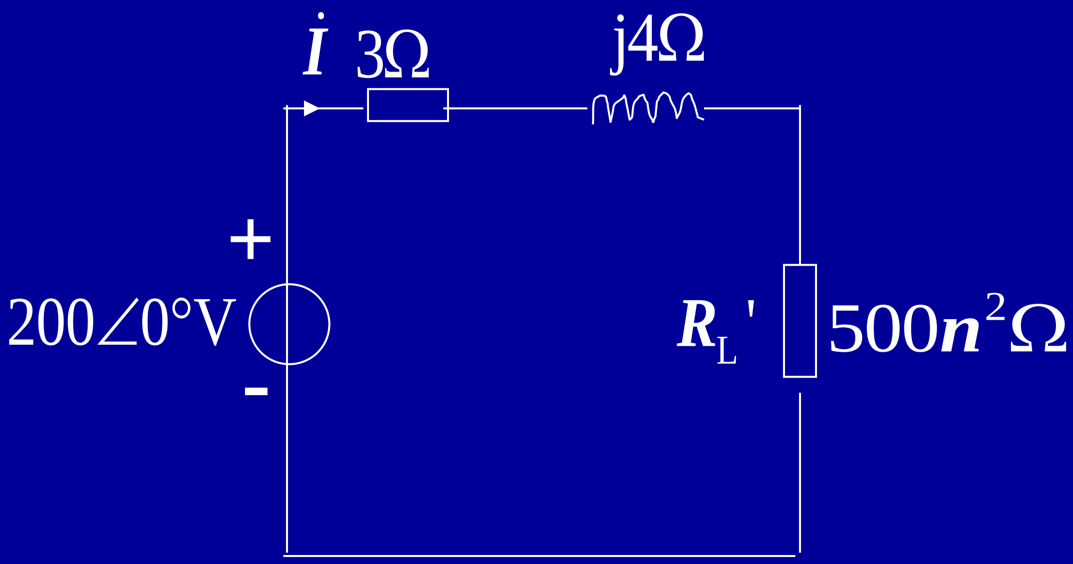
$$P_{max} = \frac{U_S{}^2}{4R_S} = 8\ \mathrm{W}$$

例9-6



要使负载获得最大功率，求：$n=?, P_{\max}=?$

解：将次级折合到初级，R_L'与$Z_L=3+\mathrm{j}4\Omega$不可能达到共扼匹配。



$$\dot{I}=\frac{200\angle 0^{\circ}}{(3+500\boldsymbol{n}^{2})+\mathrm{j}4}$$

$$=\frac{200\angle 0^{\circ}}{(3+\boldsymbol{R}_{\mathrm{L}}{}')+\mathrm{j}4}$$

由于这时可变化的只是变比$\boldsymbol{n}$，这就是“模匹配”的情况。

下面先证明：

一般地，理想变压器内阻 $Z_S = R_S + jX_S$，变换后的阻抗 $Z_L' = |Z_L'|\cos\theta_L + j|Z_L'|\sin\theta_L$，当仅负载阻抗的模可变时，不可能达到共扼匹配，求负载获得最大功率的条件：

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{(R_S + |Z_L'|\cos\theta_L) + j(X_S + |Z_L'|\sin\theta_L)}$$

负载中电阻吸收的功率：

$$P = I^2(|Z_L'|\cos\theta_L) = \frac{U_S{}^2|Z_L'|\cos\theta_L}{(R_S + |Z_L'|\cos\theta_L)^2 + (X_S + |Z_L'|\sin\theta_L)^2}$$

要使P达到最大，必须 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(|Z_{\mathrm{L}}'|)}=0,$ 即 $|Z_{\mathrm{L}}'|=|Z_{\mathrm{S}}|$

这时，负载获得最大功率。这种情况称为“模匹配”。模匹配时负载中电阻吸收的功率一般比达到共扼匹配时的功率小。这时

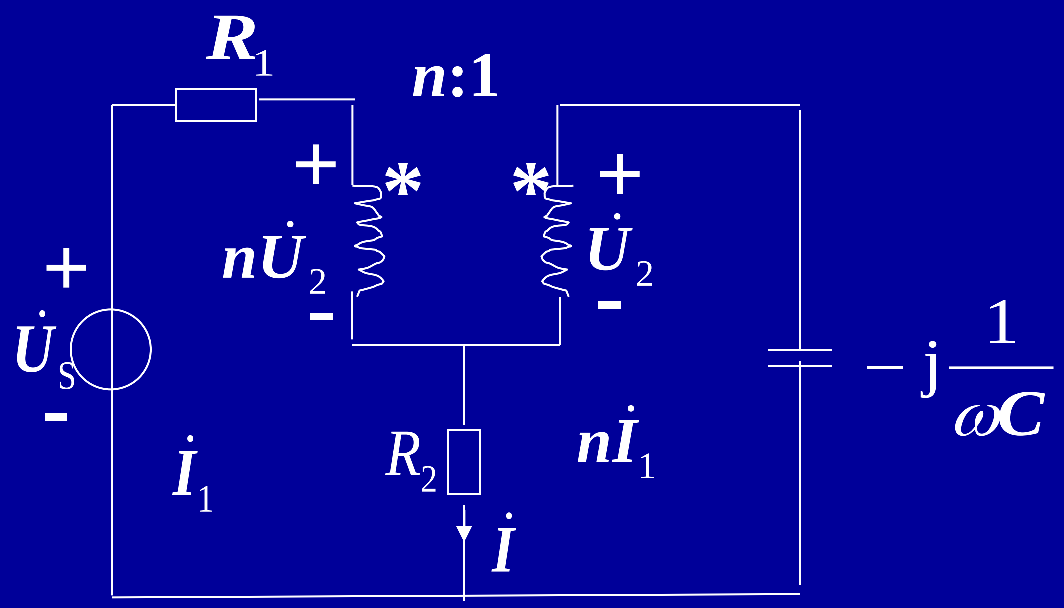
$$R_{\mathrm{L}}'=n^2R_{\mathrm{L}}=\sqrt{3^2+4^2}=5n=0.1$$

$$P=I^2R_{\mathrm{L}}'=\frac{200^2\times 5}{(3+5)^2+4^2}=2500\ \mathrm{W}$$

9 -5 -2 含理想变压器电路的一般分析方法

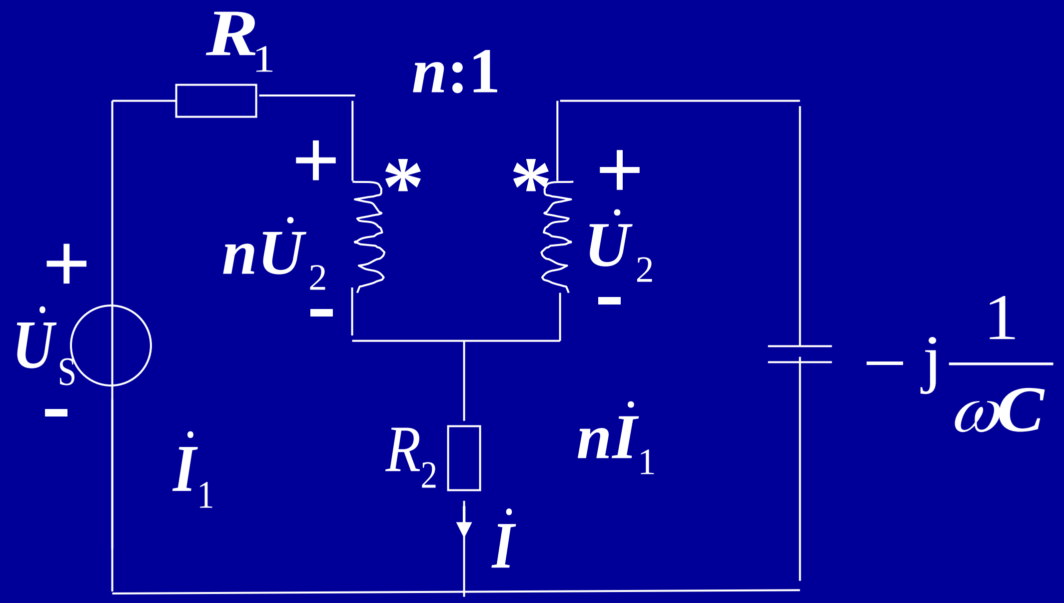
列写网络方程和应用戴维南定理是常用的方法。

例9 -7：



已知 $\boldsymbol{n}=0.5$, $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2=10\,\Omega$,

$\dfrac{1}{\omega C}=50\,\Omega$, $\dot{U}_S=50\angle 0°\ \mathrm{V}$,求流过 R_2 的电流$\boldsymbol{I}$。



解：理想变压器没有接成初、次级的形式，故只能列写网孔方程。按照前面的方法假设电压、电流。

网孔方程

$$\boxed{\begin{aligned}&(R_1+R_2)\dot{I}_1-R_2(n\dot{I}_1)+n\dot{U}_2=\dot{U}_S\\&-R_2\dot{I}_1+(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2})(n\dot{I}_1)-\dot{U}_2=0\end{aligned}}$$

代入数据

$$20\dot{I}_1 - 10\times\frac{1}{2}\dot{I}_1 + \frac{1}{2}\dot{U}_2 = 50$$

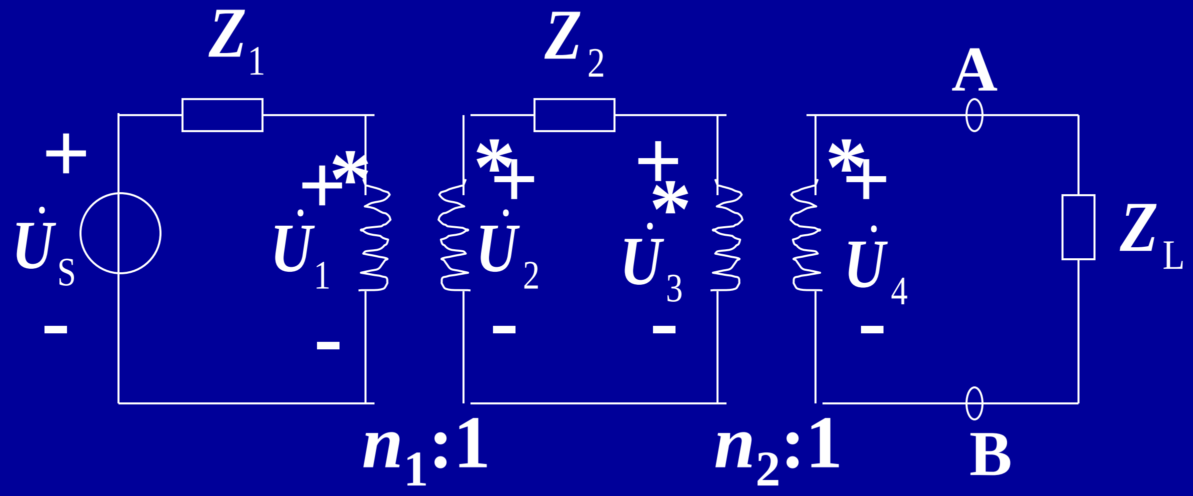
$$-10\dot{I}_1 + (20 - \mathrm{j}50)\frac{1}{2}\dot{I}_1 - \dot{U}_2 = 0$$

得

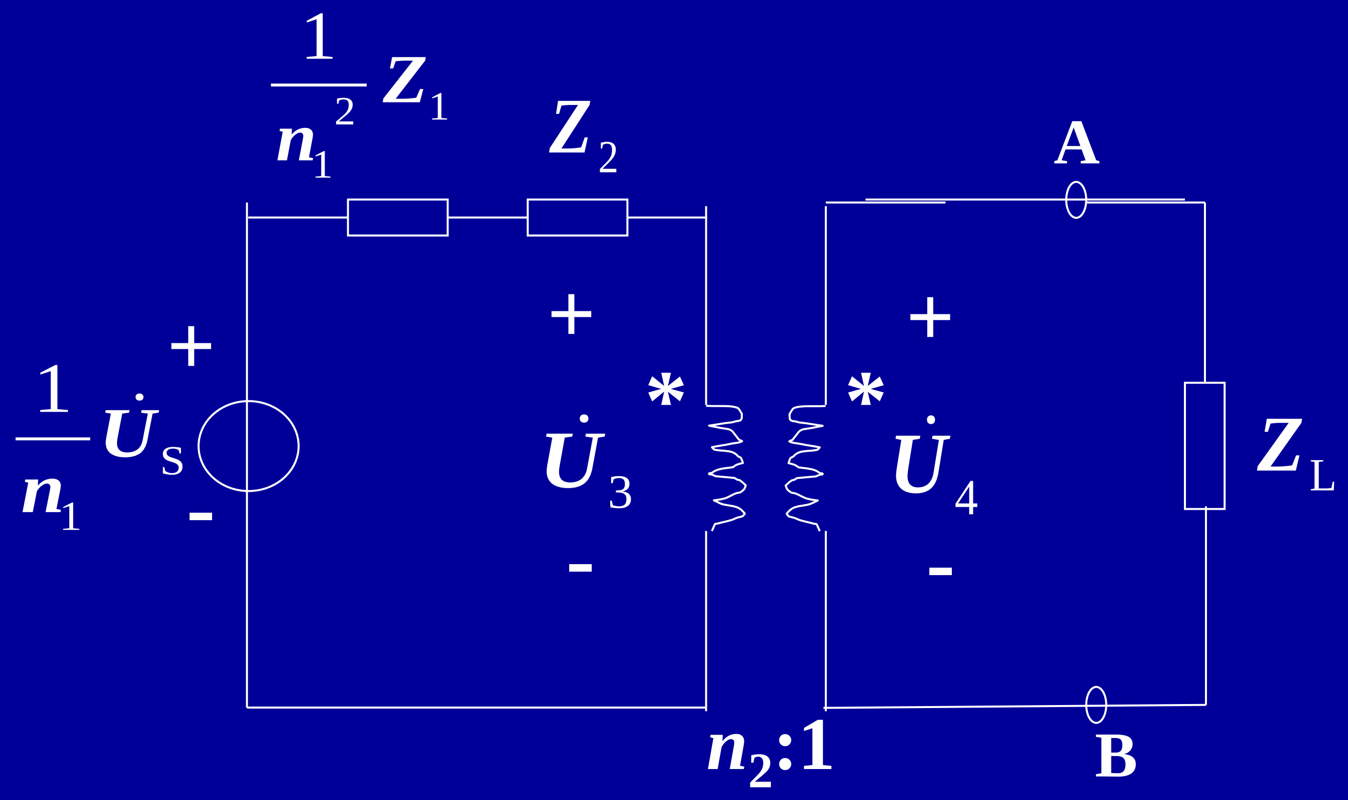
$$\dot{I}_1 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \qquad \dot{I}_2 = \sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\therefore\ \dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \sqrt{2}\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

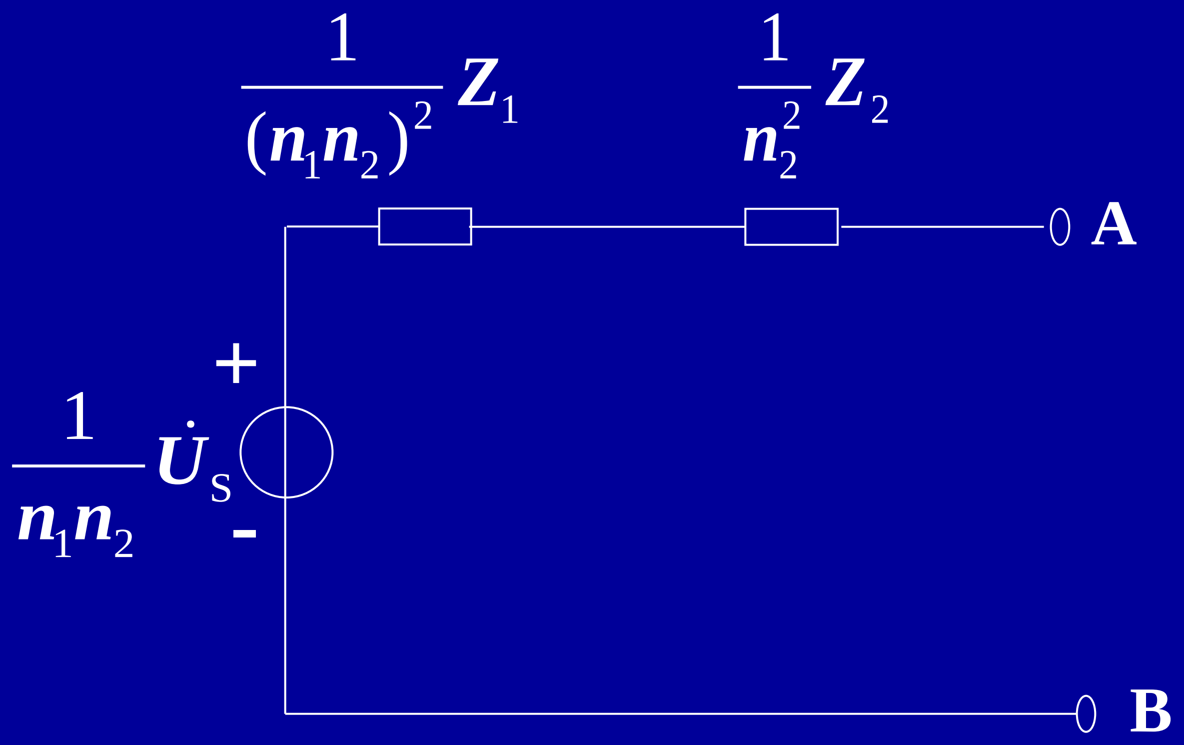
例9 -8 求：A、B以左电路的戴维南等效电路。



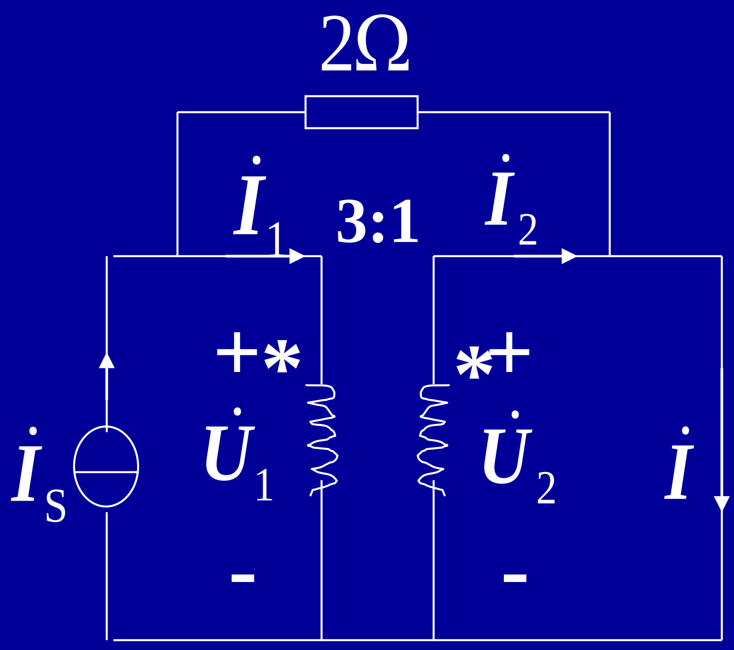
解：本题含有两个理想变压器，先搬移走第一个：



再搬移第二个：



例9 -9. 已知$\dot{I}_S = 6\angle 0°\text{A}$, 求$\dot{I}$



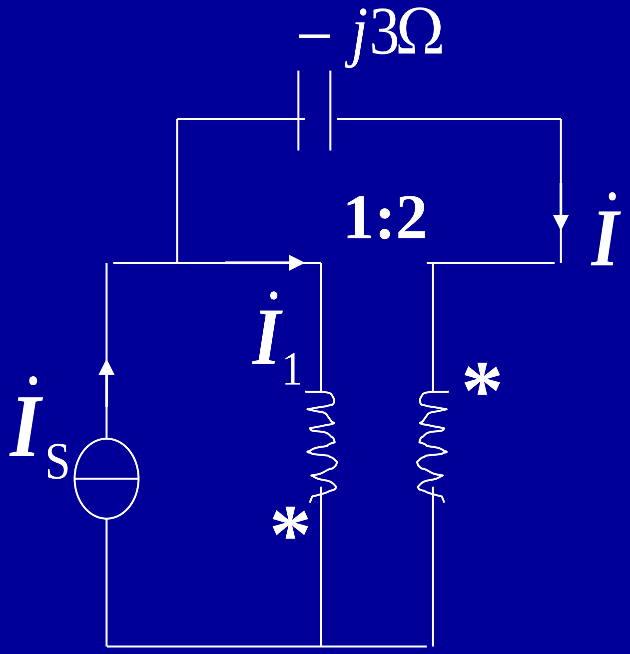
解：运用VCR：

$\because \dot{U}_2 = 0 \qquad \therefore \dot{U}_1 = 0$

则 2Ω 电阻上没有电流。

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_S = 6\angle 0°\ \text{A}\,, \dot{I}_2 = \dot{I} = 3\dot{I}_1 = 18\angle 0°\text{A}$$

例9 -10已知 $\dot{I}_S = 6\angle 0°\text{A}$，求 $\dot{I}$



解：由VCR和KCL：

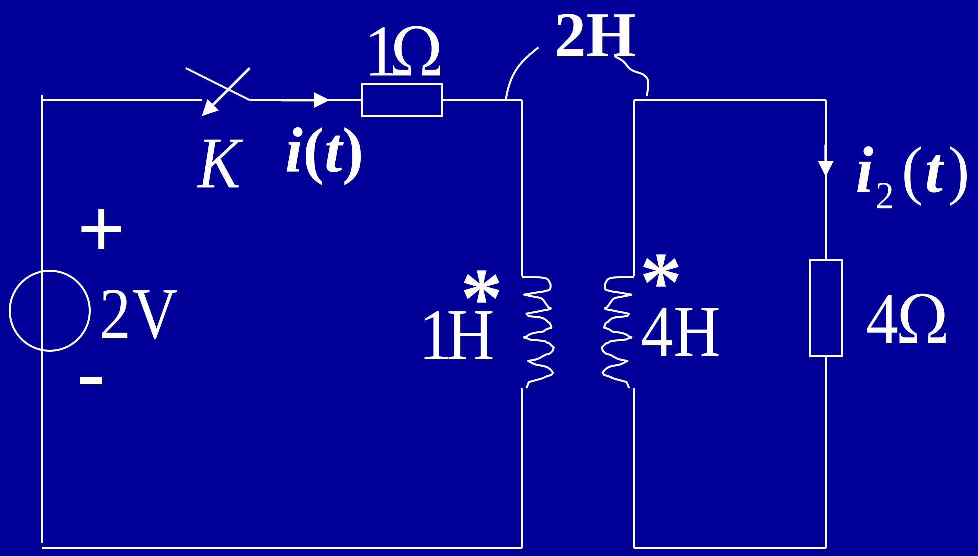
$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_1 + \dot{I}$$

解上两式，得

$$\dot{I} = \frac{1}{3}\dot{I}_S = 2\angle 0°\text{A}$$

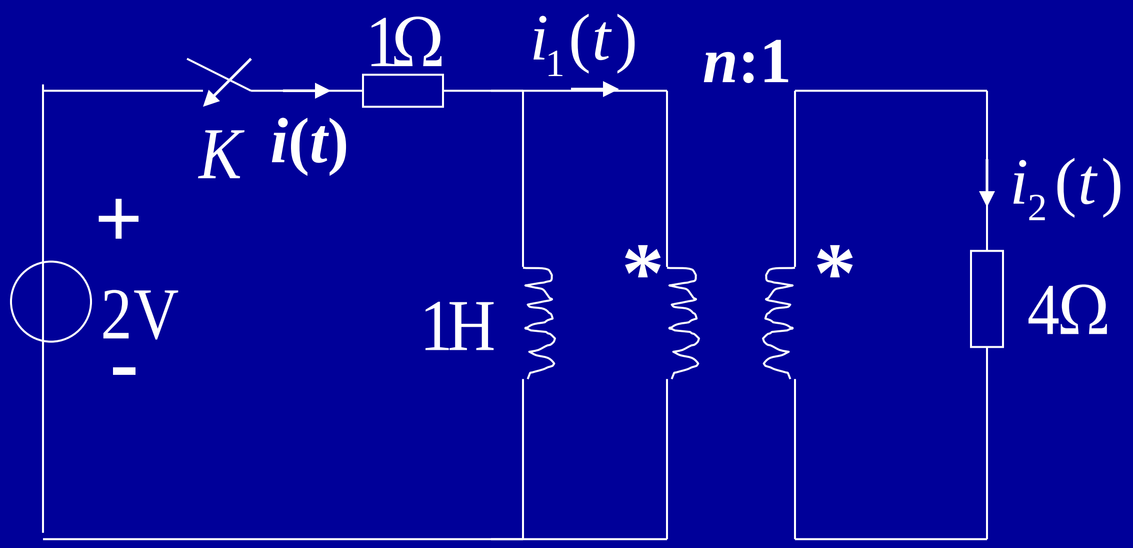
例9 -11：电路初始状态为零，t=0开关闭合，试求t>0时的电流$i(t)$



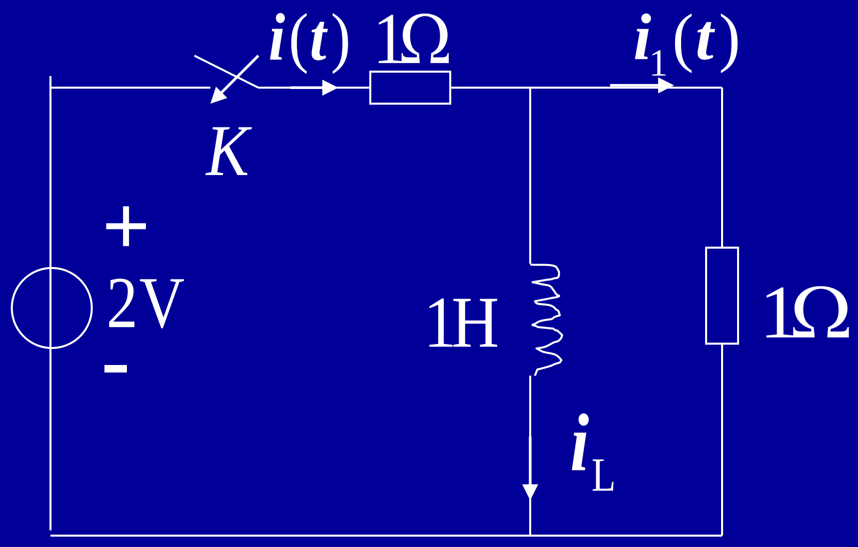
解：由已知参数，

$$\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{M}}{\sqrt{\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2}}=1$$

此乃全耦合变压器，其等效电路为：



其中 $n=\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$ ，将理想变压器次级搬移到初级，得等效电路，利用一阶电路的三要素法求解。



$$\tau = \frac{L}{R} = 2\,\mathrm{s}$$

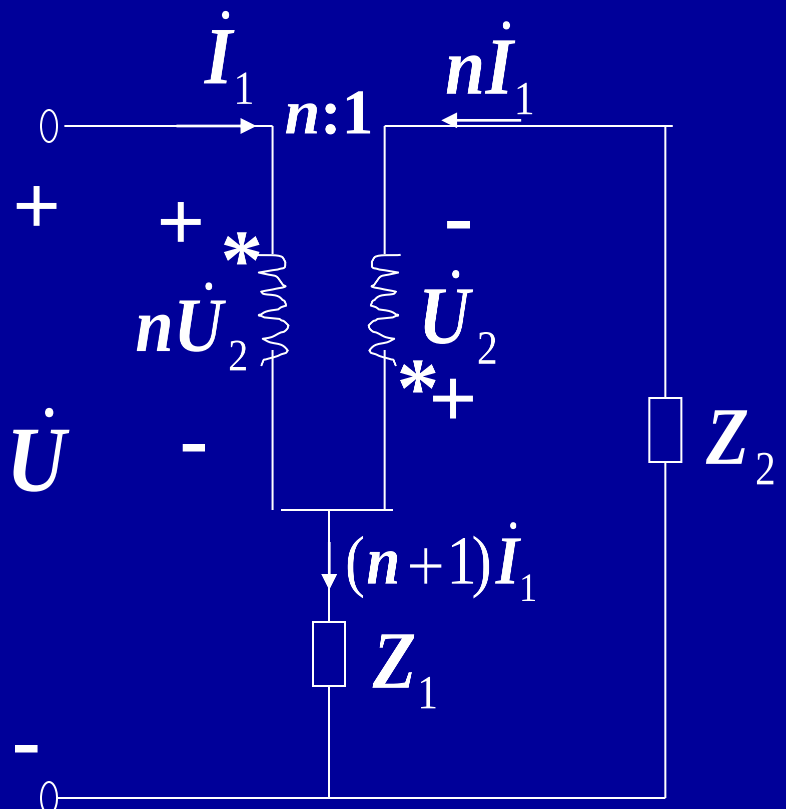
$$i_L(0^-) = 0\mathrm{A} = i_L(0^+)\,, \quad \therefore i(0^+) = 1\mathrm{A}\,,\, i(\infty) = 2\mathrm{A}$$

$$\therefore i(t) = 2 + [1-2]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 2 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\ \mathrm{A} \qquad t > 0$$

思考：若需求 $i_2(t)$，应如何求解？$i(t)$ 与 $i_2(t)$ 是不是 n 倍的关系？

例9 -12：求输入阻抗。

解：按图所示假设电压、电流。

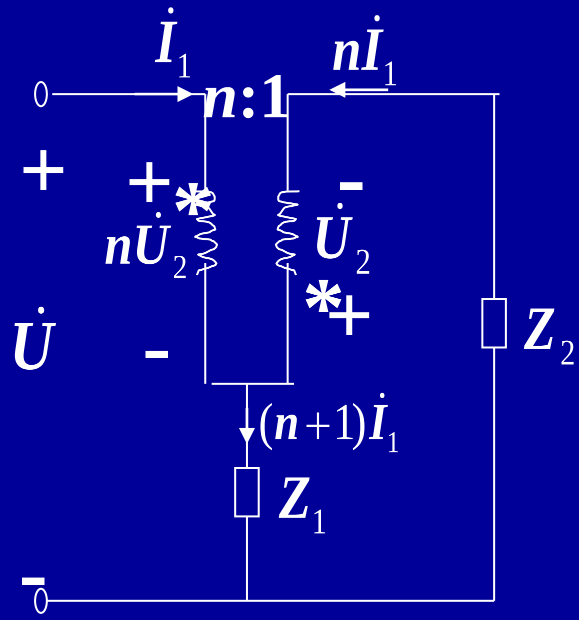


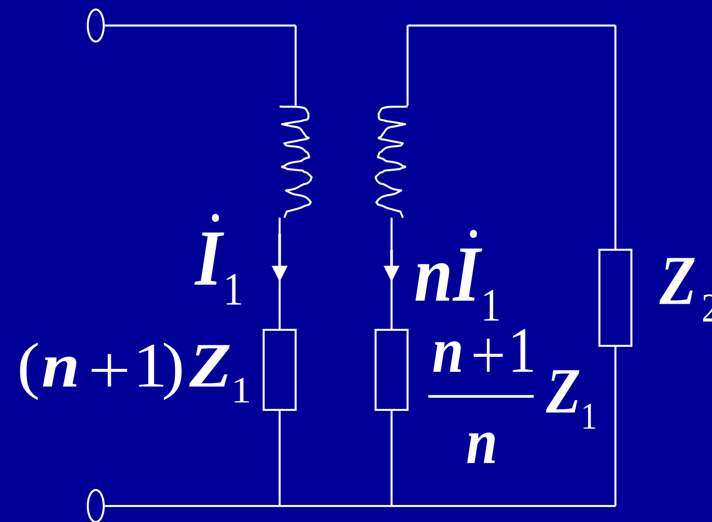
法一：列方程

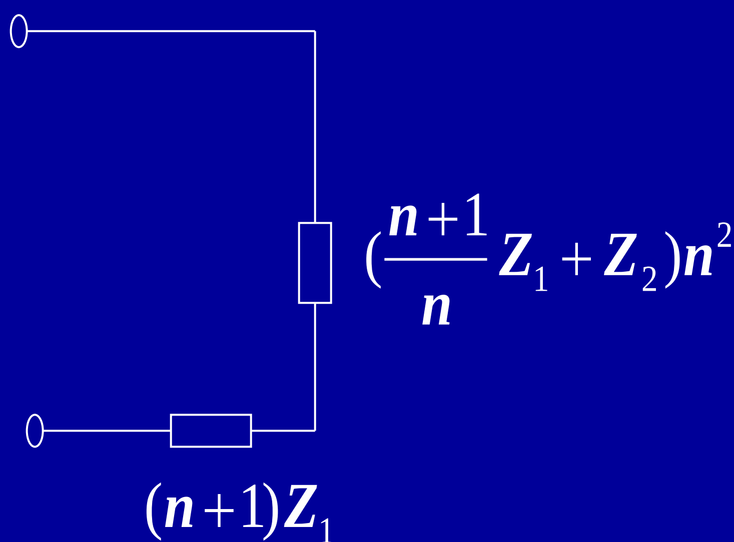
$$\begin{cases} \dot{U} = n\dot{U}_2 + (n+1)\dot{I}_1 Z_1 \\ n\dot{I}_1 Z_2 + (n+1)\dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_i = n^2 Z_2 + (n+1)^2 Z_1$$

法二：



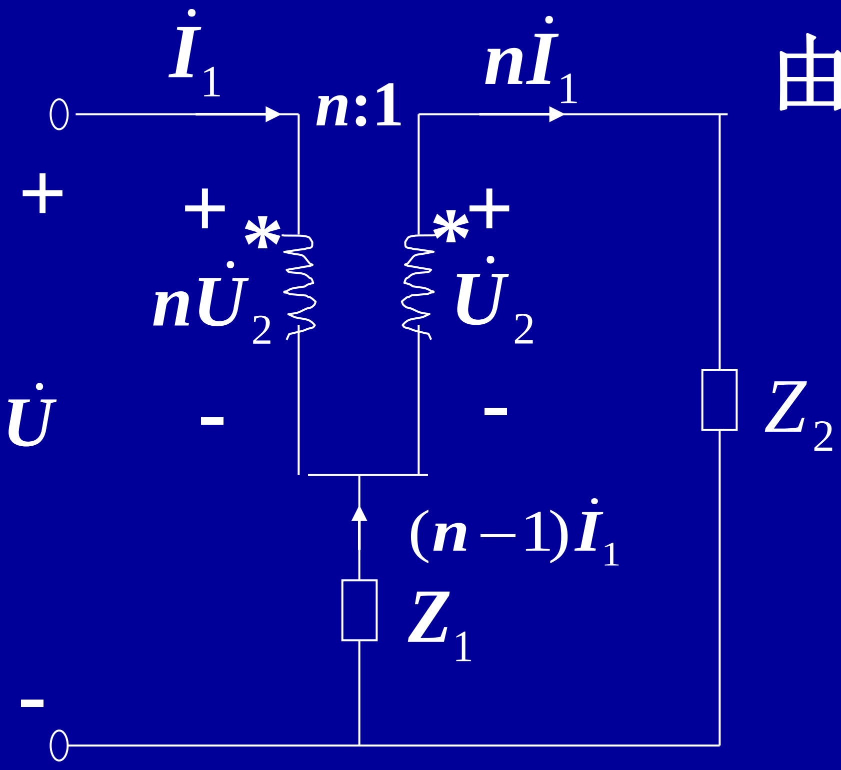




$$Z_i = n^2 Z_2 + (n+1)^2 Z_1$$

求输入阻抗:

解：按图所示假设电压、电流。



由上题完全类似，可得:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_i = n^2 Z_2 + (n-1)^2 Z_1$$

P.247. 例 9 -9就是实例：戴维南等效电路的输出阻抗为：

$$Z_o = R_o = 2^2 R_1 + (2-1)^2 R_2 = 10\Omega$$

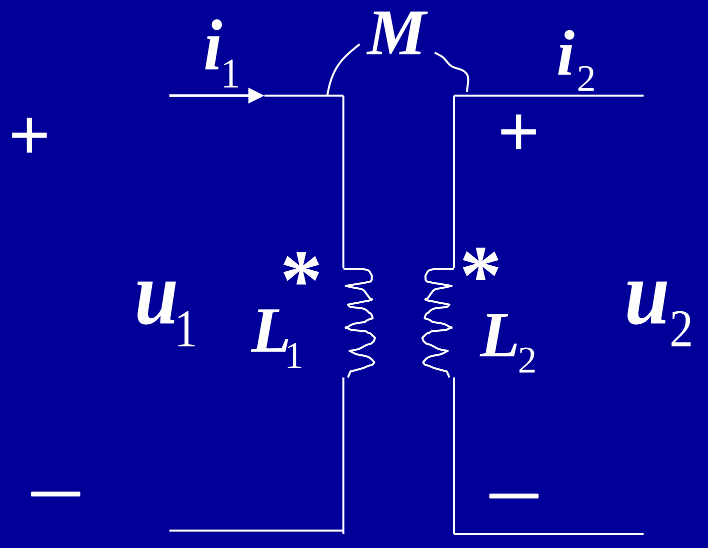
开路电压由理想变压器的VCR直接得到：

$$\because i_2 = 0 \quad \therefore \quad i_1 = 0$$

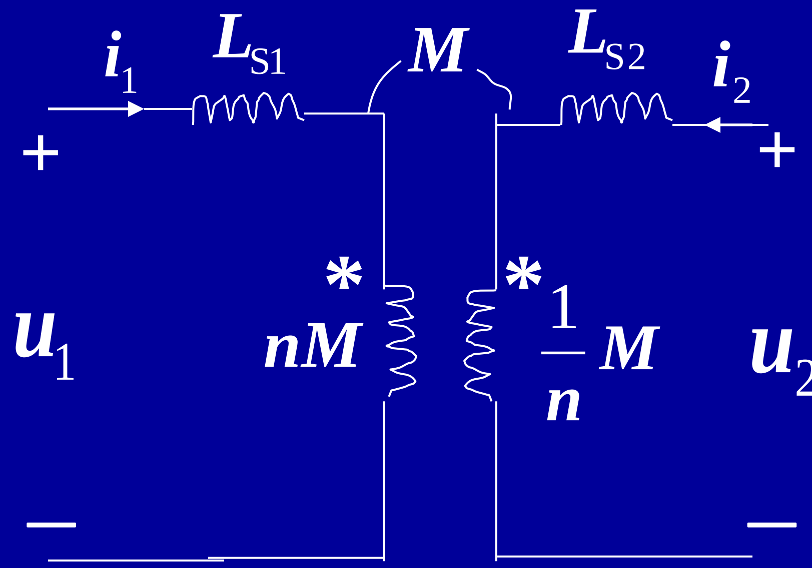
$$\therefore \quad \boldsymbol{u}_{oc} = 2\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}} = 2\varepsilon(\boldsymbol{t})$$

9-6 一般变压器的电路模型

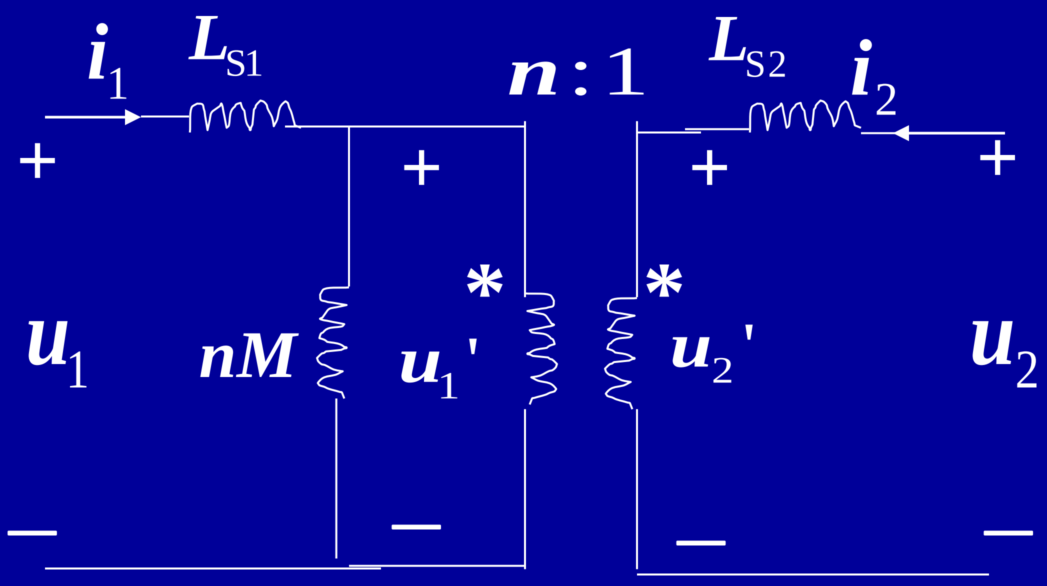
一般变压器可以用电感或空芯变压器的分析方法，也可以用含有理想变压器的等效电路的方法来分析。这其实也就是变压器电路分析的两种方法。一般变压器的初、次级电感不会是无限大，耦合系数 k 也小于 1，现在先看一般的互感线圈(见图a)，由于存在漏磁通，可以想象为如图(b)所示的全耦合电感和漏磁通组成；再运用理想变压器的等效电路，即可得到一般变压器的含理想变压器的等效电路(见图c)。


i1
M
i2
+
+
u1
*
L1
*
L2
u2
—
—

(a)


i1
LS1
M
LS2
i2
+
+
*
*
u1
nM
1/n M
u2
—
—

(b)


i1
LS1
n : 1
LS2
i2
+
+
+
+
*
*
u1
nM
u1'
u2'
u2
—
—
—
—

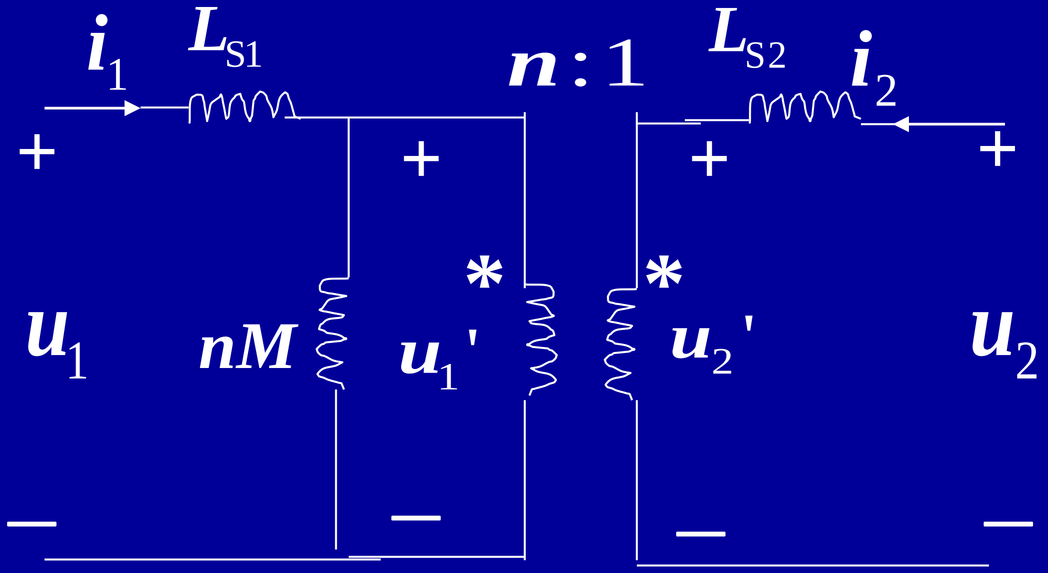
(c)

由图(a): $u_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}$ $\qquad u_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt}$

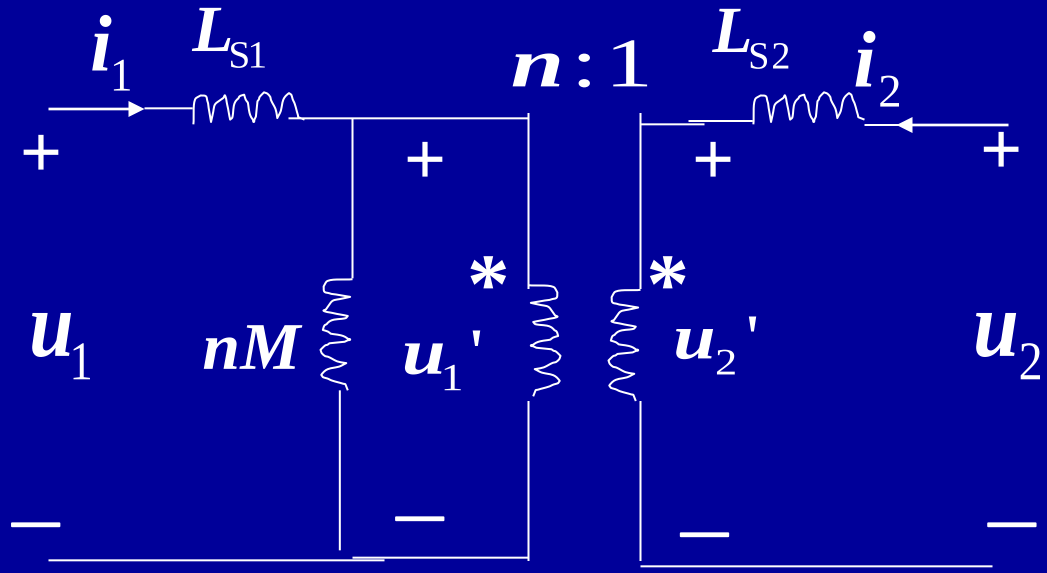
由图(c): $u_1 = L_{S1} \dfrac{di_1}{dt} + u_1' = L_{S1} \dfrac{di_1}{dt} + L_M \dfrac{d(i_1 - i_1')}{dt}$

$$= L_{S1} \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{di_1}{dt} - L_M \frac{di_1'}{dt}$$

$$= (L_{S1} + L_M) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{n} L_M \frac{di_2}{dt}$$



(c)



$$u_2 = u_2' + L_{S2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{1}{n}u_1' + L_{S2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

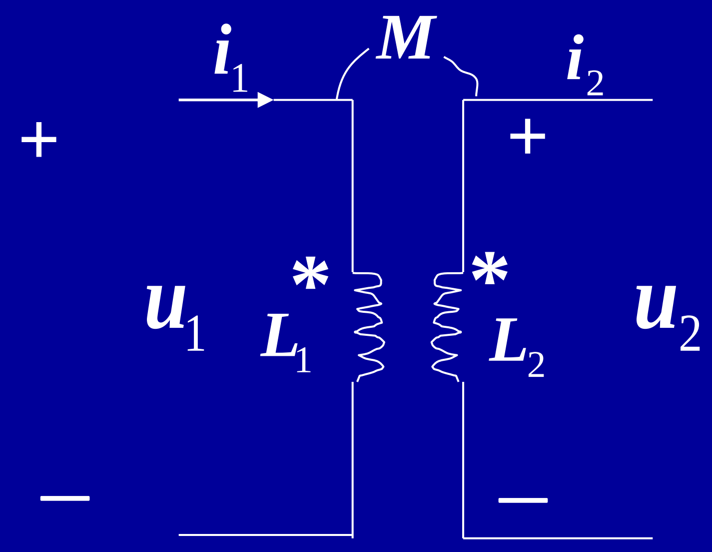
$$= \frac{1}{n}L_M\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_1')}{\mathrm{d}t} + L_{S2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{1}{n}L_M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{n}L_M\frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}t} + L_{S2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

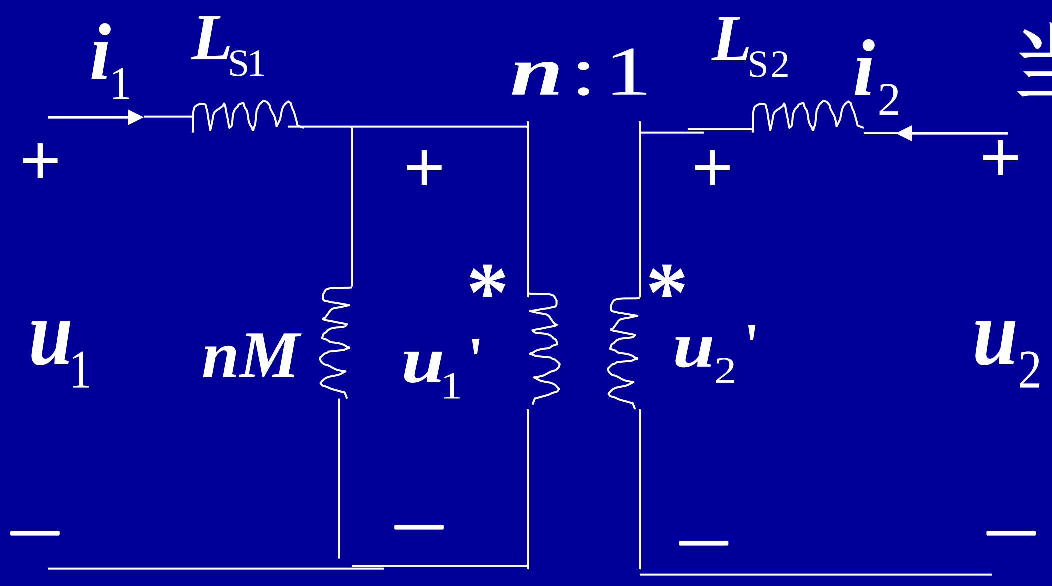
$$= \frac{1}{n}L_M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{n^2}L_M + L_{S2}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

式中应用了：$u_1' = nu_2'$，$i_2' = -ni_1'$

这两种方法可以相互等效：



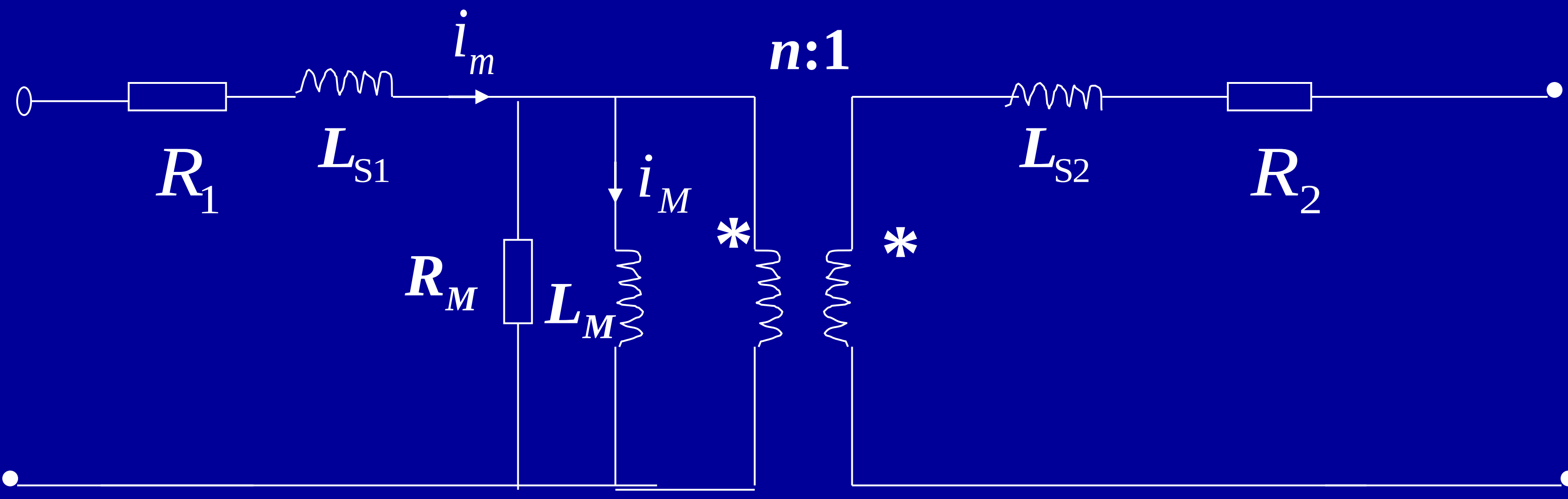
$$
\begin{cases}
L_1 = L_{S1} + L_M \\
M = \dfrac{1}{n} L_M \\
L_2 = \dfrac{1}{n^2} L_M + L_{S2}
\end{cases}
$$



当取 $n = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}$ 时：

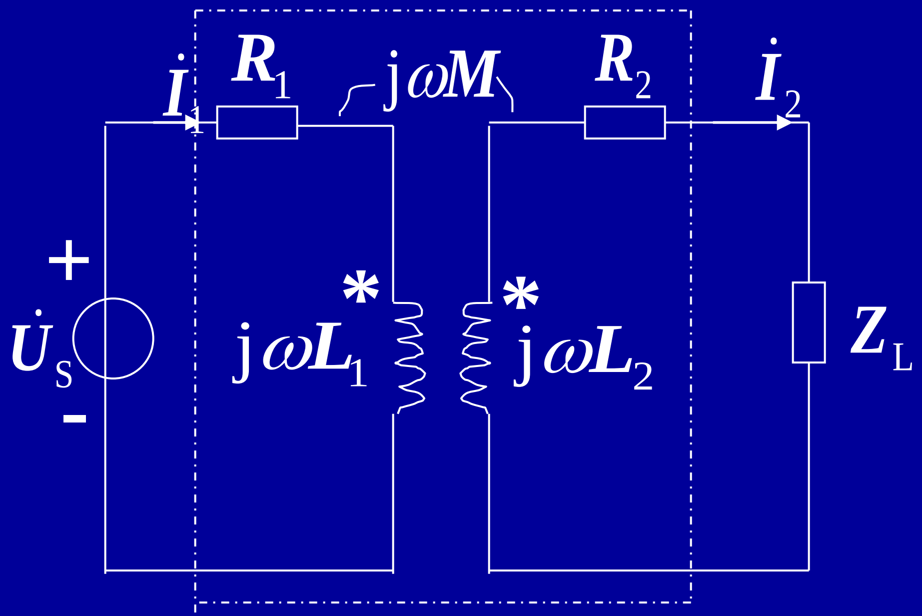
$$
\begin{cases}
L_{S1} = L_1 - nM \\
L_M = nM \\
L_{S2} = L_2 - \dfrac{1}{n} M
\end{cases}
$$

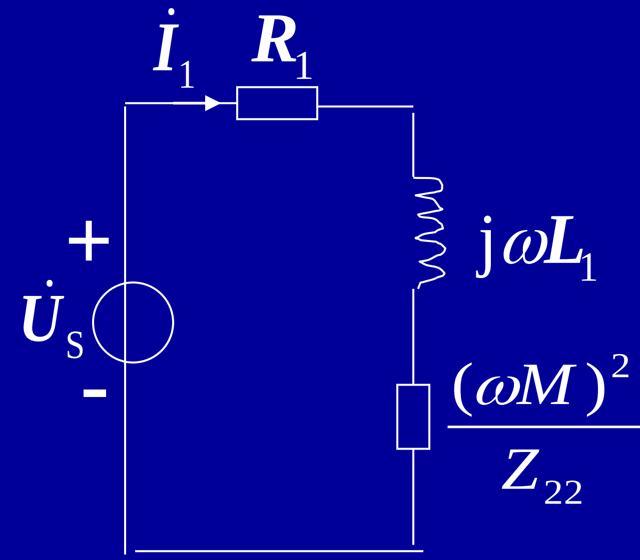
如果还需考虑线圈的绕线电阻和铁芯损失，铁芯变压器的电路模型如下图所示：

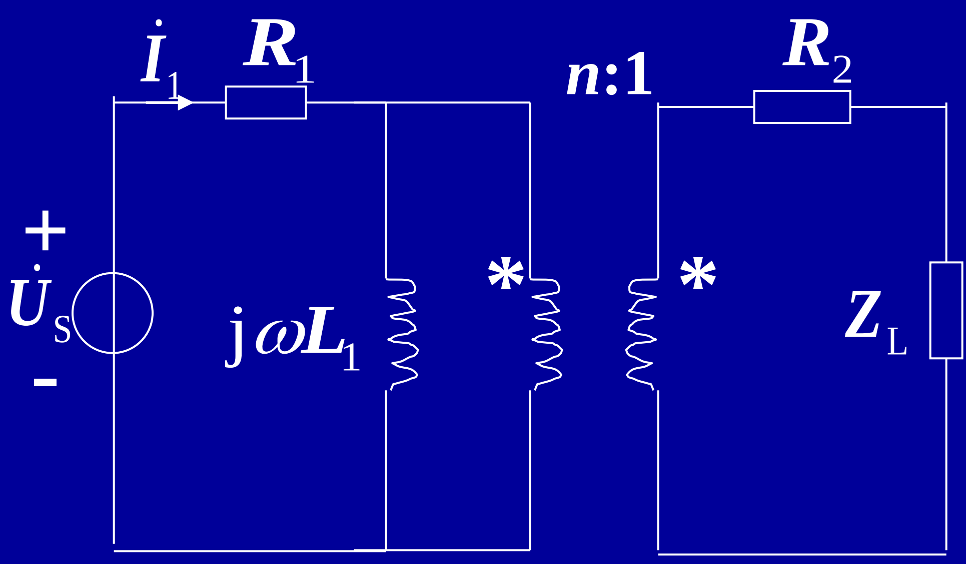


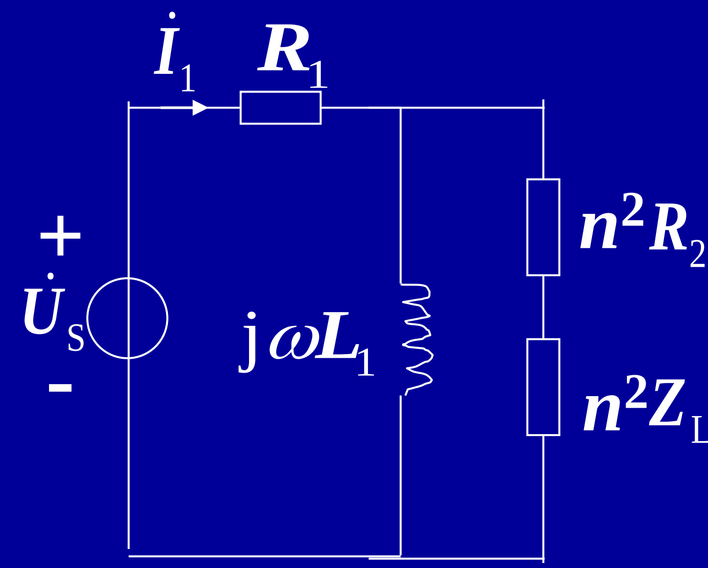
当然，如果还要考虑线圈的匝间电容等，即还有相应的等效电路。

当k=1时，空芯变压器和理想变压器模型的区别

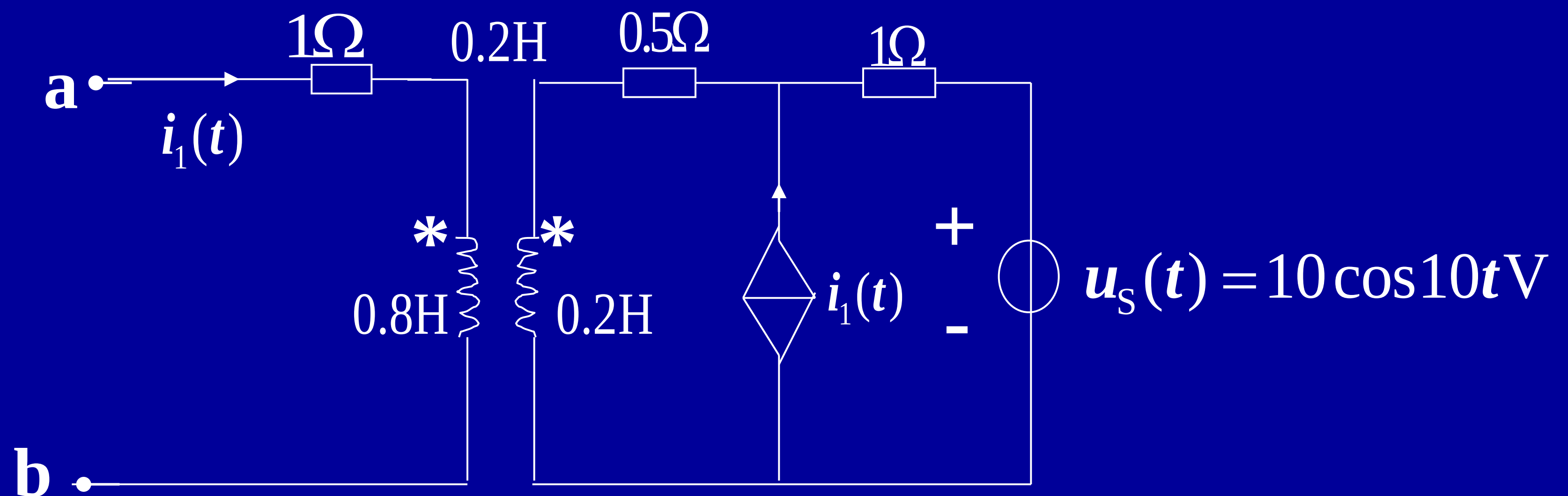








思考题1: 试求a、b端的戴维南等效电路(时域)。



思考题2: 电路原已稳定，开关K在t=0时闭合，试求：