

# 第九章 多元函数微分法及其应用

9.8 隐函数的求导法

数学与统计学院 李换琴



- 一个二元方程确定的隐函数的求导方法
- 2 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法
  - 3 由方程组确定的隐函数的求(偏)导法



- 1
- 一个二元方程确定的隐函数的求导方法
- 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法
- 由方程组确定的隐函数的求(偏)导法

#### 1 隐函数的概念



设有方程 $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$ ,如果存在一个n元函数  $y=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ,使得

$$F(x_1,\dots,x_n,\varphi(x_1,\dots,x_n))\equiv 0,$$

则称 $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ 是由方程 $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ 所确定的 隐函数.

例如 
$$x^2 + y^2 + z = 1$$
  $z = 1 - x^2 - y^2$  (可显化的隐函数)

$$x^2 + xy - e^y = 0 \longrightarrow y = y(x)$$
?

#### 2 一个二元方程确定的一元隐函数的求导方法



#### 定理1 ( 隐函数存在定理)如果二元函数F(x,y)满足:

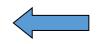
$$(1)F(x_0, y_0) = 0;$$

(2)在 $(x_0, y_0)$ 的某邻域内 $F_x(x, y), F_y(x, y)$ 连续;

$$(3)F_{v}(x_{0},y_{0}) \neq 0$$

则方程F(x,y) = 0在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域中唯一 确定了一个具有连续导数的函数y = f(x),它 满足 $y_0 = f(x_0)$  及 $F(x, f(x)) \equiv 0$ ,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}.$$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

### 例1求方程 $x^2 + xy - e^y = 0$ 所确定的隐函数y = y(x)的导数.



#### 解法1 (套公式)

令
$$F(x,y) = x^2 + xy - e^y$$
,则有 
$$F_x(x,y) = 2x + y, \ F_y(x,y) = x - e^y,$$
 故  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y}{x - e^y}$ 

#### 解法2 (微分法)

等式
$$x^2 + xy - e^y = 0$$
两边求微分,有
$$2xdx + xdy + ydx - e^y dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x - e^y}.$$



- 1
- 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

- 2
- 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法
- 3
- 由方程组确定的隐函数的求(偏)导法

#### 2. 由三元方程确定的二元隐函数的求偏导方法



隐函数的求导法可以推广到多元函数.

若一个三元方程 F(x,y,z)=0 确定了一个二元函数 z = f(x,y),则有

$$F(x,y,z(x,y)) \equiv 0$$

两端分别对x和y求导得  $F_x(x,y,z) + F_z(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$   $F_y(x,y,z) + F_z(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 

$$F_{y}(x,y,z) + F_{z}(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$



$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$





解法1(公式法) 令
$$F = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4$$

$$\iiint \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{6z} = -\frac{x}{3z}$$

解法2 把z看成是
$$x$$
, $y$ 的函数,方程两边同时对 $x$ 求导,得  $2x + 6z \cdot z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{x}{3z}$ 

解法3 (利用全微分形式不变性) 2xdx + 4ydy + 6zdz = 0,

$$dz = -\frac{x}{3z} dx - \frac{2y}{3z} dy \qquad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z}$$

### 例3 设z = z(x,y)由方程 $F(x^2 - y,z) = 0$ 所确定,其中



$$F(u,v)$$
具有一阶连续偏导数,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 

解法1 (求偏导) 
$$F_1 \cdot 2x + F_2 \cdot z_x = 0$$
,  $F_1 \cdot (-1) + F_2 \cdot z_y = 0$  
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xF_1}{F_2} \qquad \Rightarrow z_y = \frac{F_1}{F_2}$$

解法2(微分法)

$$dF(x^2-y,z)=0$$
,  $\mathbb{P}F_1\cdot d(x^2+y)+F_2\cdot dz=0$ 

$$dz = \left(-\frac{2xF_1}{F_2}\right)dx + \left(\frac{F_1}{F_2}\right)dy \qquad \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xF_1}{F_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_1}{F_2}$$



- 1
- 一个二元方程确定的隐函数的求导方法

- 2
- 一个三元方程确定的隐函数的求偏导方法
- 3
- 由方程组确定的隐函数的求(偏)导法

#### 由方程组确定的隐函数的求偏导方法



有许多问题的研究中还会遇到由方程组确定的隐 函数求导问题.

例如,在多元函数微分学几何应用中将要讨论空间曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 45 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y = y(x), \quad z = z(x)$$

的切线和法平面问题,就属于这类问题.

$$\begin{cases} 4x + 2y \cdot y_x + 2z \cdot z_x &= 0 \\ 2x + 4y \cdot y_x = z_x & \end{cases} y_x = -\frac{2x(1+z)}{y(1+4z)}, \ z_x = -\frac{6x}{y(1+4z)}.$$

例 4 设xu-yv=0, yu+xv=1确定u, v 是x, y 的函数,



菜 
$$\frac{\partial u}{\partial x}$$
,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

当系数行列式 $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ v & x \end{vmatrix} \neq 0$ ,

解法1 将所给方程的两边对 x 求导并移项  $\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$  当系数行列式 $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ x & -y \end{vmatrix} \neq 0$ .

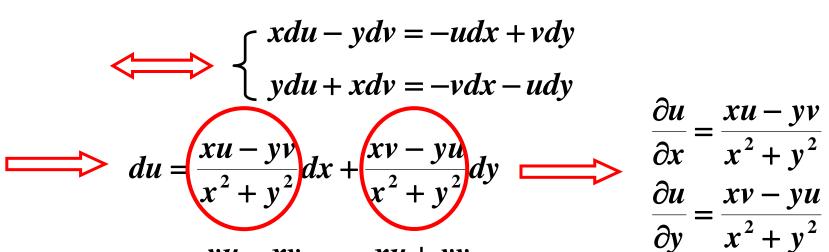
即
$$x^2 + y^2 \neq 0$$
时,解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}$ ,

同理,可得 $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{xv - yu}{x^2 + v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial v} = -\frac{xu + yv}{x^2 + v^2}.$ 





解法2 
$$\begin{cases} udx + xdu - vdy - ydv = 0, \\ udy + ydu + vdx + xdv = 0, \end{cases}$$



$$dv = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2} dx - \frac{xu + yv}{x^2 + v^2} dy$$

u = f(x, y, z, t)

例 5 设u = u(x,y)由方程组  $\begin{cases} g(y,z,t) = 0 & \text{ 所确定,} \\ h(z,t) = 0 \end{cases}$ 

其中f,g,h都是 $C^{(1)}$ 类, $J = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$ ,求 $\frac{\partial u}{\partial v}$ .

$$\text{III} \begin{cases}
du = f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_t dt \\
g_y dy + g_z dz + g_t dt = 0 \\
h_z dz + h_t dt = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
du - f_z dz - f_t dt = f_x dx + f_y dy \\
0 \cdot du + g_z dz + g_t dt = -g_y dy \\
0 \cdot du + h_z dz + h_t dt = 0
\end{cases}$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$

$$du = f_x dx + \frac{1}{J} (-f_z g_y h_t + f_t g_y h_z + J f_y) dy$$