6一阶电路分析

电阻电路——静态、即时，激励响应VCR为代数方程，响应仅由激励引起

动态电路——动态、过渡过程，激励响应VCR为微分方程，响应与激励的全部历史有关

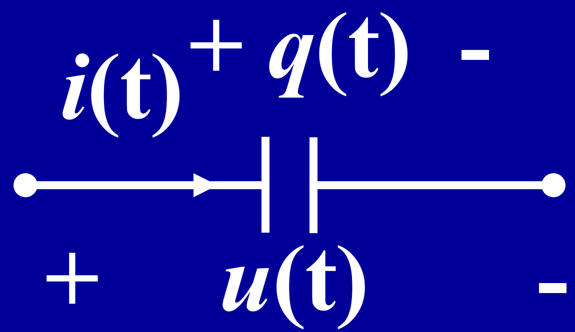
6-1 电容元件和电感元件

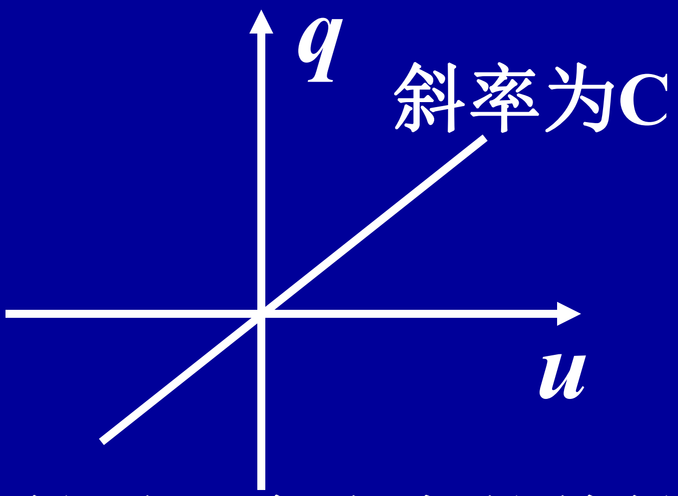
6-1-1 电容元件

定义：如果一个二端元件在任一时刻，其电荷与电压之间的关系由*q-u*平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电容元件。

代表积聚电荷、储存电场能的元件

符号和特性曲线：





线性时不变电容的特性

线性电容——特性曲线是通过坐标原点一条直线，否则为非线性电容。时不变——特性曲线不随时间变化，否则为时变电容元件。

线性非时变电容元件的数学表达式：

$$q(t) = Cu(t)$$

系数 C 为常量，为直线的斜率，称为电容，表征积聚电荷的能力。

单位是法[拉]，用F表示。

电容元件的电压电流关系

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(Cu)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

1. 电容是动态元件

电容的电流与其电压对时间的变化率成正比。假如电容的电压保持不变，则电容的电流为零。电容元件相当于开路（$i=0$）。

2. 电容是惯性元件

当i有限时，电压变化率 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 必然有限；电压只能连续变化而不能跳变。

3. 电容是记忆元件

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda$$

电容电压u有“记忆”电流全部历史的作用。取决于电流$(-\infty\ ,t)$的值。

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\lambda)d\lambda + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)d\lambda$$

$$= u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)d\lambda$$

1. T_0 时刻电容的初始电压,

2. 与 $t > t_0$ 后电流作用的结果。

4 .电容是储能元件

电压电流参考方向关联时，电容吸收功率

$$p(t)=u(t)i(t)=u(t)C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

p 可正可负。当 $p>0$ 时，电容吸收功率（吞），储存电场能量增加；当 $p<0$ 时，电容发出功率（吐），电容放出存储的能量。

任意时刻t得到的总能量为

$$w_C(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{t}u_C(\xi)i_C(\xi)d\xi$$

$$=C\int_{-\infty}^{t}u_C(\xi)\frac{du_C}{d\xi}d\xi=C\int_{u_C(-\infty)}^{u_C(t)}u_C(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}C[u_C^2(t)-u_C^2(-\infty)]$$

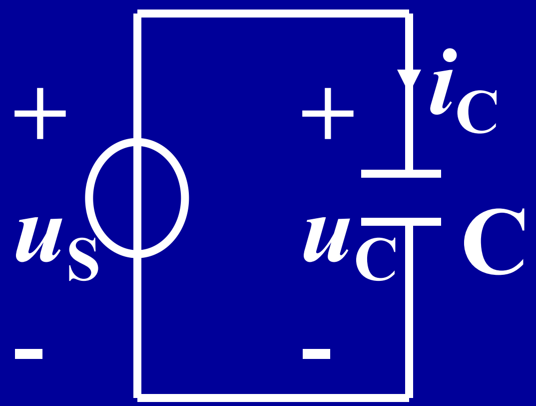
$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)$$

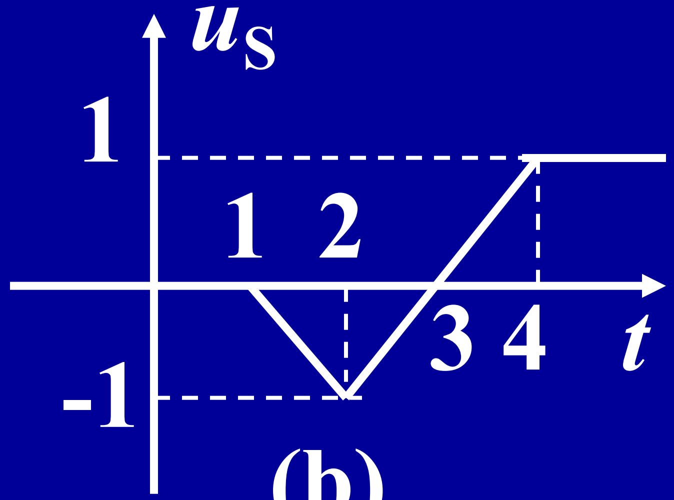
某时刻电容的储能取决于该时刻电容的电压值，与电流值无关。电压的绝对值增大时，储能增加；减小时，储能减少。

当$C > 0$ 时，$w(t)$不可能为负值，电容不可能放出多于它储存的能量，这说明电容是一种储能元件。

　　上式也可以理解为什么电容电压不能轻易跃变，因为电压的跃变要伴随储能的跃变，在电流有界的情况下，是不可能造成电场能发生跃变和电容电压发生跃变的。

例1 C=4F，其上电压如图(b)，试求 $i_C(t)$，$p_C(t)$和 $w_C(t)$，并画出波形。





(b)

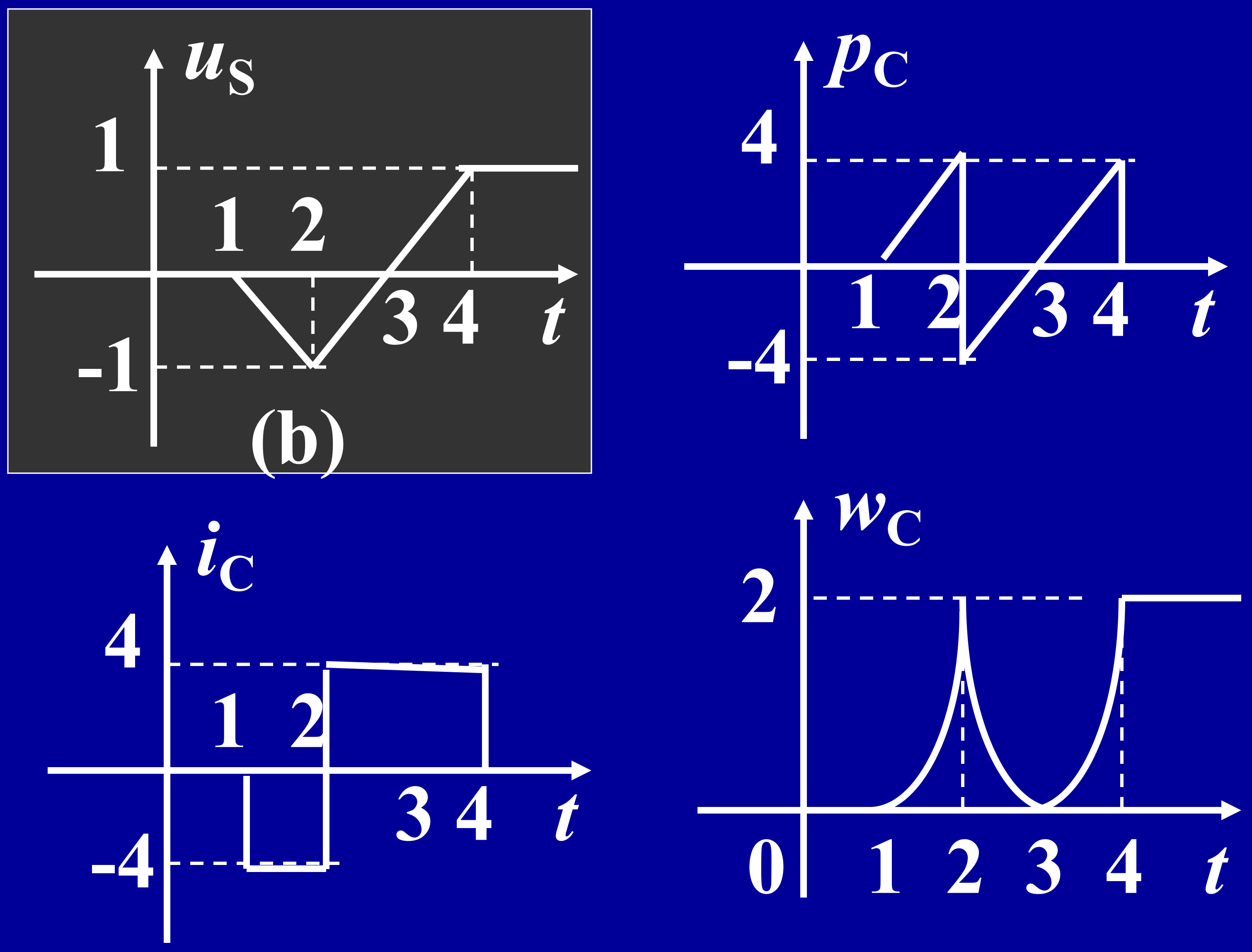
解：

$$u_C(t)=u_S(t)=\begin{cases}0 & t\le 1\\ -t+1 & 1<t\le 2\\ t-3 & 2<t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}(V)$$

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ -4 & 1 < t < 2 \\ 4 & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases} (A)$$

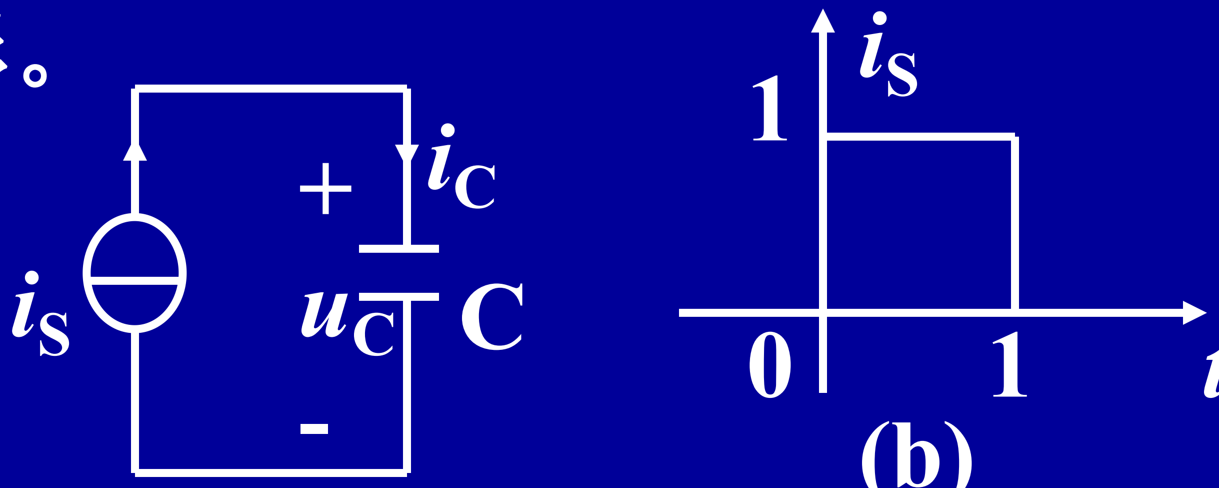
$$p_{\mathrm{C}}(t) = u_C(t) i_C(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 4(t-1) & 1 < t < 2 \\ 4(t-3) & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases} (W)$$

$$w_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}Cu_C^2(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{t} \le 1 \\ 2(1-\boldsymbol{t})^2 & 1 < \boldsymbol{t} \le 2 \\ 2(\boldsymbol{t}-3)^2 & 2 < \boldsymbol{t} \le 4 \\ 2 & \boldsymbol{t} > 4 \end{cases} (\boldsymbol{J})$$



u_S
1
-1
1 2 3 4 t
(b)
p_C
4
-4
1 2 3 4 t
i_C
4
-4
1 2 3 4 t
w_C
2
0 1 2 3 4 t

例2 C =2F，电流如图(b)，初始电压v(0)=0.5V，试求$t \geq 0$ 时电容电压，并画出波形。



(b)

解：

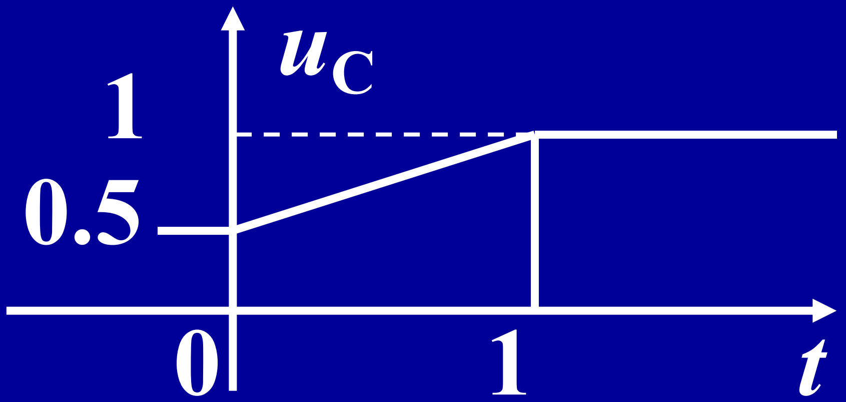
$$i_C(t) = i_S(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} (A)$$

$0 \le t < 1 \qquad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\lambda)d\lambda$

$= 0.5 + 0.5t\ (V)$

$t \ge 1 \qquad u_C(t) = u_C(1) + \frac{1}{C}\int_1^t i_C(\lambda)d\lambda$

$= 1\ (V)$

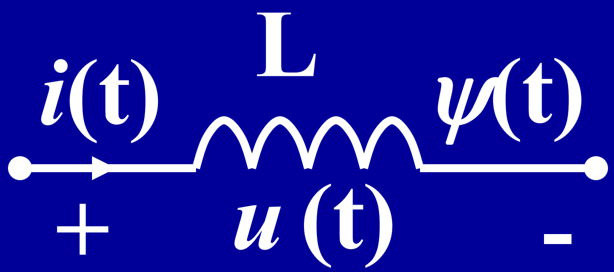


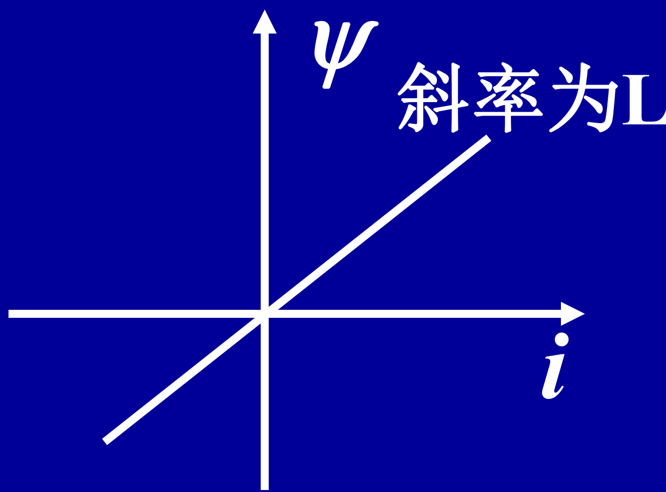
6-1-2 电感元件

定义：如果一个二端元件在任一时刻，其磁链与电流之间的关系由 $\psi(t)-i(t)$ 平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电感元件。

代表建立磁场、储存磁场能的元件

符号和特性曲线：





线性非时变电感的特性

线性电感——特性曲线是通过坐标原点一条直线，否则为非线性；非时变——特性曲线不随时间变化，否则为时变电感元件。

线性非时变电感元件的数学表达式：

$$\psi(t) = Li(t)$$

系数L为常量，直线的斜率，称为电感，表征产生磁链的能力。

单位是亨[利], 用H表示。

电感元件的电压电流关系

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

1. 电感是动态元件

电感的电压与其电流对时间的变化率成正比。假如电感的电流保持不变，则电感的电压为零。电感元件相当于短路（u=0）。

2. 电感是惯性元件

u 有限时，电流变化率 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 必然有限；电流只能连续变化而不能跳变。

3.电感是记忆元件

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)d\lambda$$

电感电流i有“记忆”电压全部历史的作用。取决于电压$(-\infty\ ,t)$的值。

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\lambda)d\lambda+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\lambda)d\lambda$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\lambda)d\lambda$$

1. t_0 时刻电感的初始电流;

2. $t > t_0$ 后电压作用的结果.

4 .电感是储能元件

电压电流参考方向关联时，电感吸收功率

$$p(t)=u(t)i(t)=i(t)L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

p 可正可负。当 $p>0$ 时，电感吸收功率(吞)，储存磁场能量增加；当$p<0$时，电感发出功率(吐)，放出存储的磁场能量。

任意时刻t电感的总能量为

$$w_L(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{t}u(\xi)i_L(\xi)d\xi$$

$$=L\int_{-\infty}^{t}i_L(\xi)\frac{di_L}{d\xi}d\xi=L\int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)}i_L(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}L[i_L^2(t)-i_L^2(-\infty)]$$

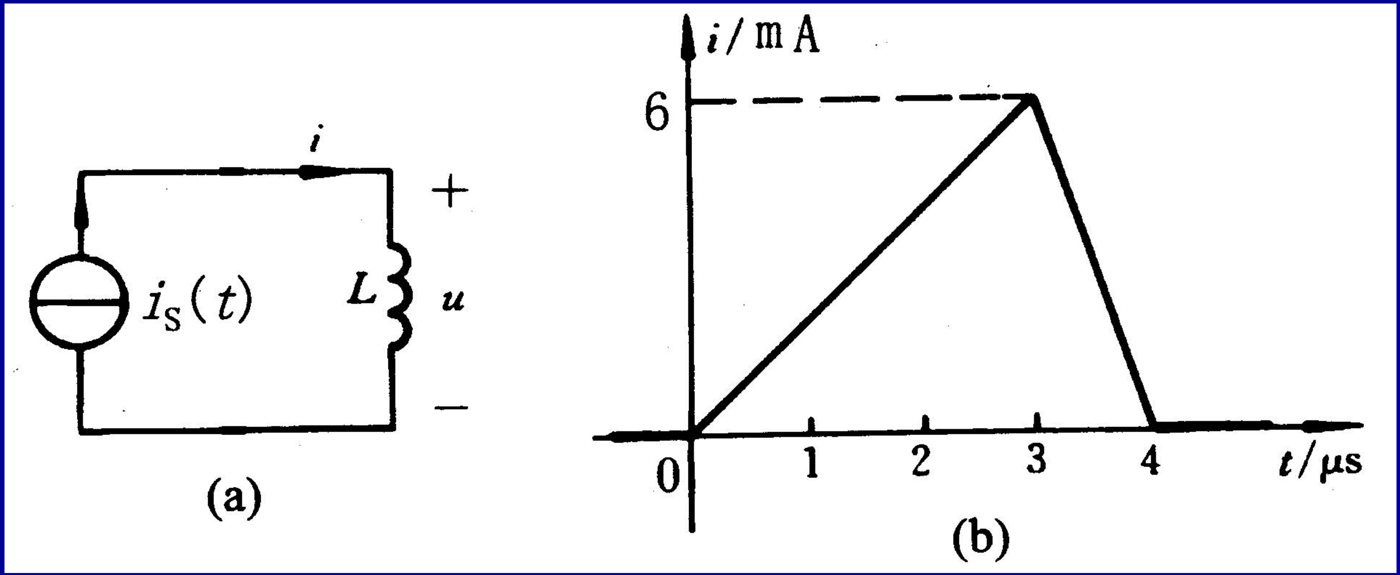
$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li_L^2(t)$$

某时刻电感的储能取决于该时刻电感的电流值，与电压值无关。电流的绝对值增大时，储能增加；减小时，储能减少。

当$L>0$ 时，$w(t)$不可能为负值，电感不可能放出多于它储存的能量，这说明电感是一种储能元件。

上式也可以理解为什么电感电流不能轻易跃变，因为电流的跃变要伴随储能的跃变，在电压有界的情况下，是不可能造成磁场能发生跃变和电感电流发生跃变的。

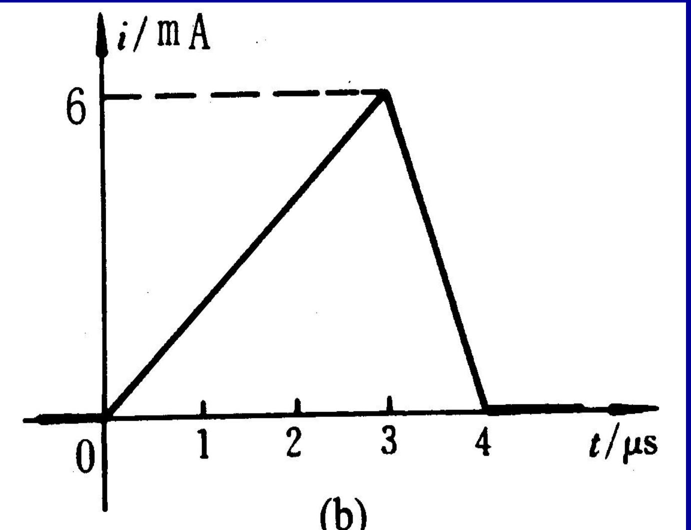
例3 L=5μH，求电感电压$u(t)$, 并画出波形图。



解：

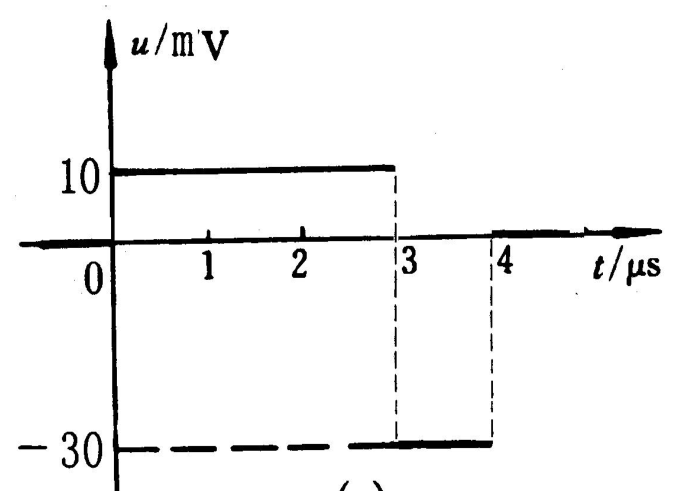
$$i(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2000\,t & 0<t\le 3\mu s\\ 24\times 10^{-3}-6000\,t & 3<t\le 4\mu s\\ 0 & t>4\mu s\end{cases}\quad (A)$$

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 5\times10^{-6}\times\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



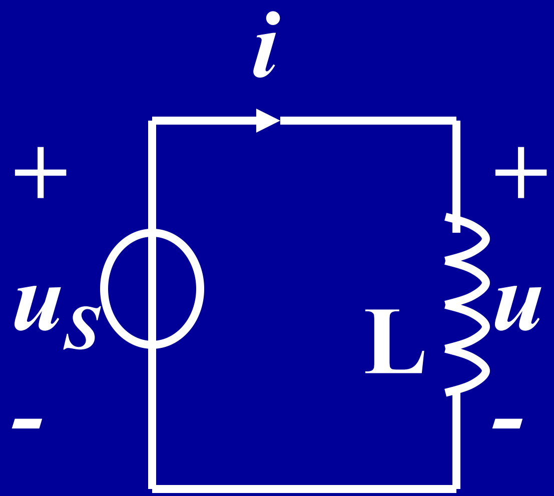
(b)

$$=\begin{cases} 0 & t\le 0 \\ 10 & 0<t<3\mu s \\ -30 & 3<t<4\mu s \\ 0 & t>4\mu s \end{cases}(mV)$$

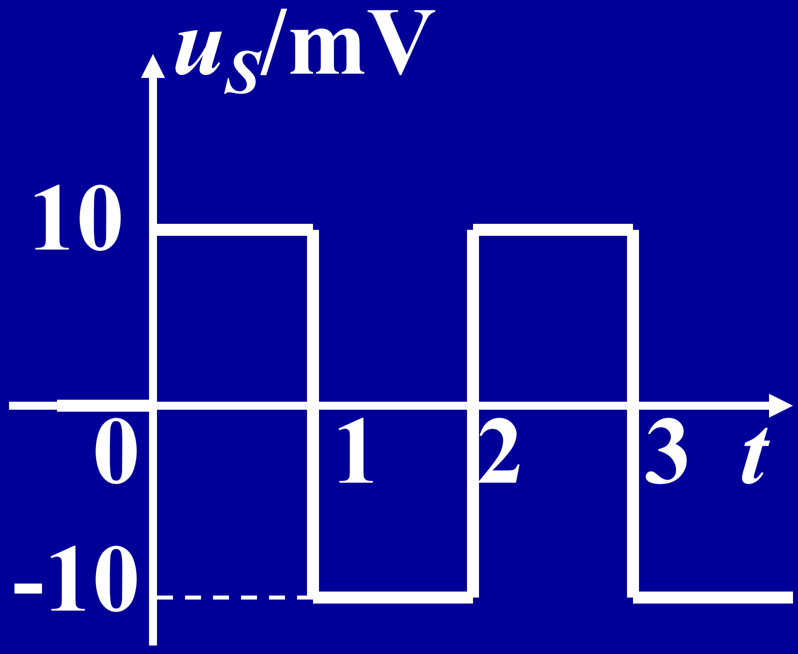


(c)

例4 L=5mH，求电感电流。并画出波形图。



(a)



(b)

解：当$0<t\le 1$s时，$u(t)=10$mV，

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=i(0)+2\times 10^{2}\int_{0}^{t}10^{-2}\mathrm{d}\xi=0+2t\ \mathrm{A}=2t\ \mathrm{A}$$

当 $t=1\mathrm{s}$ 时 $i(1)=2\mathrm{A}$

当$1\mathrm{s}<t\le 2$s时，$u(t)=-10$mV，

$$i(t)=i(1)+\frac{1}{L}\int_{1}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi=2+2\times 10^{2}\int_{1}^{t}-10^{-2}\mathrm{d}\xi=4-2t\ \mathrm{A}$$

当$t=2\mathrm{s}$ 时 $i(2)=0\mathrm{A}$

当$2\text{s}<t\leq 3\text{s}$时，$u(t)=10\text{mV}$,

$$i(t)=i(2)+\frac{1}{L}\int_2^t v(\xi)\mathrm{d}\xi=0+2\times10^2\int_2^t 10^{-2}\mathrm{d}\xi=2(t-2)\text{A}$$

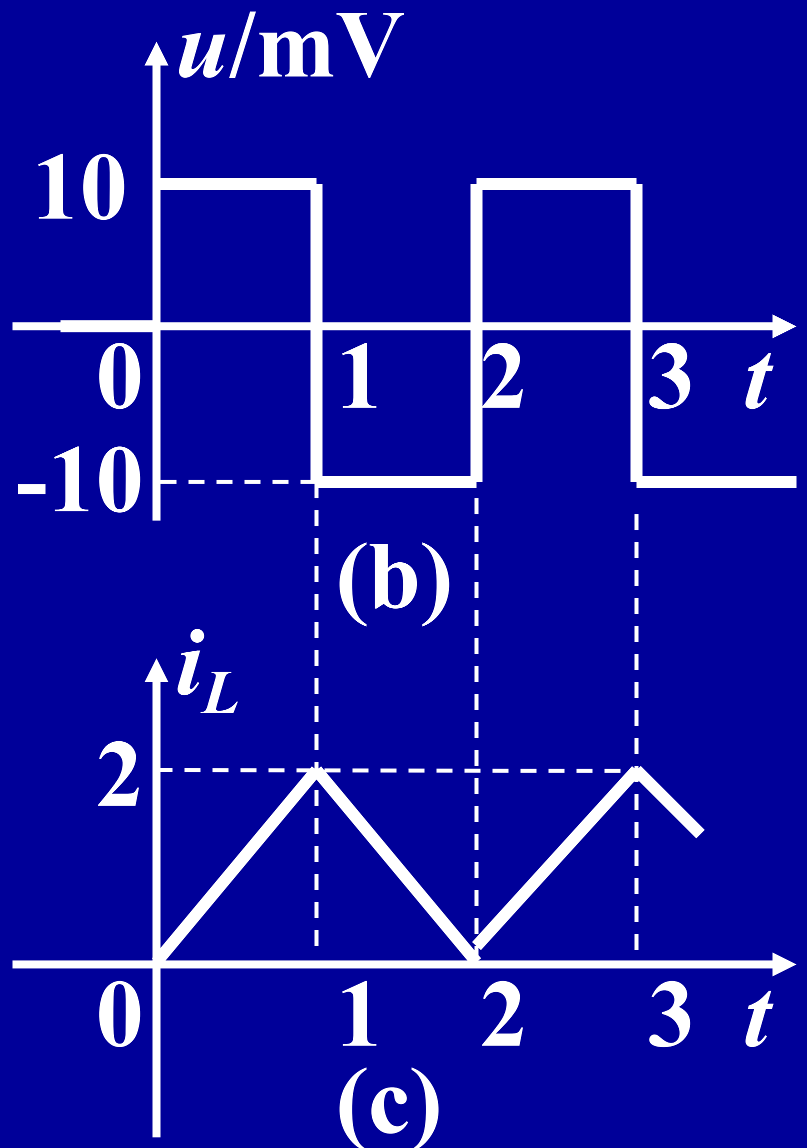
当$t=3\text{s}$ 时 $i(3)=2\text{A}$

当$3\text{s}<t\leq 4\text{s}$时，$u(t)=-10\text{mV}$,

$$i(t)=i(3)+\frac{1}{L}\int_3^t u(\xi)\mathrm{d}\xi=2+2\times10^2\int_3^t(-10^{-2})\mathrm{d}\xi=8-2t\text{A}$$

当$t=4\text{s}$ 时 $i(4)=0\text{A}$

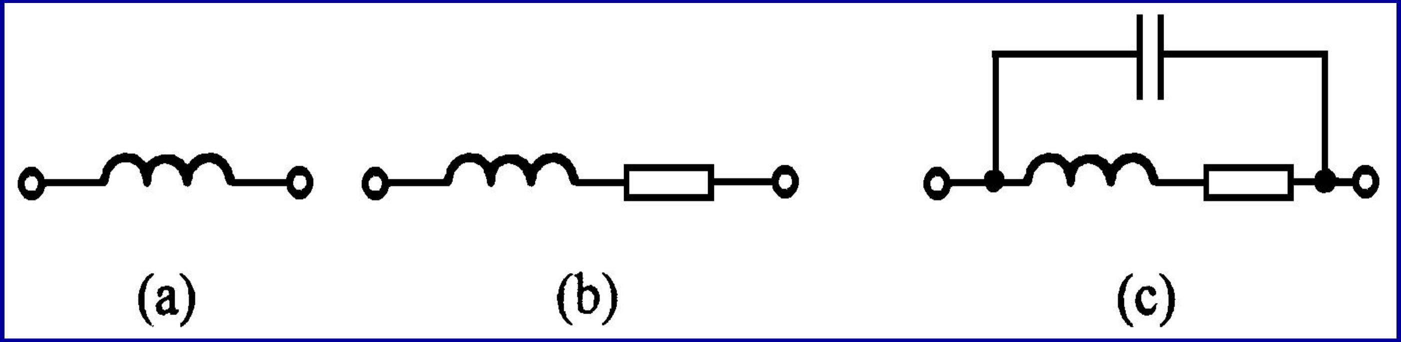
根据以上结果，可画出电感电流的波形如图(c)。



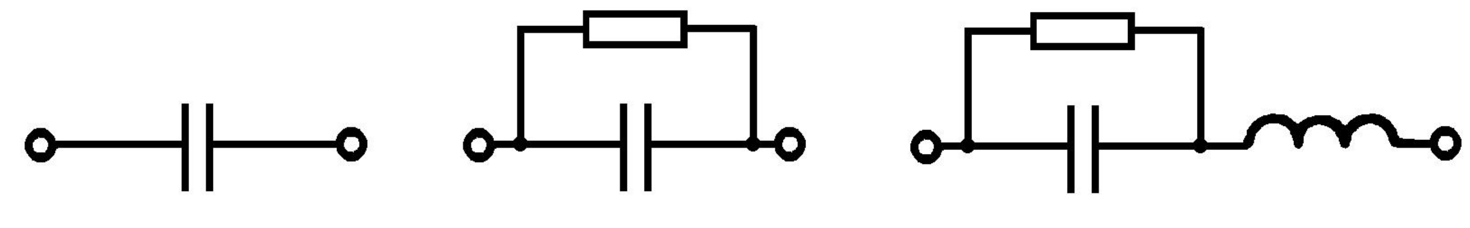
(b) (c)

6-1-3 电容器和电感器的模型

实际电路中使用的电感线圈类型很多，电感线圈可以用一个电感或一个电感与电阻的串联作为它的电路模型。在工作频率很高的情况下，还需要增加一个电容来构成线圈的电路模型，如下图所示。

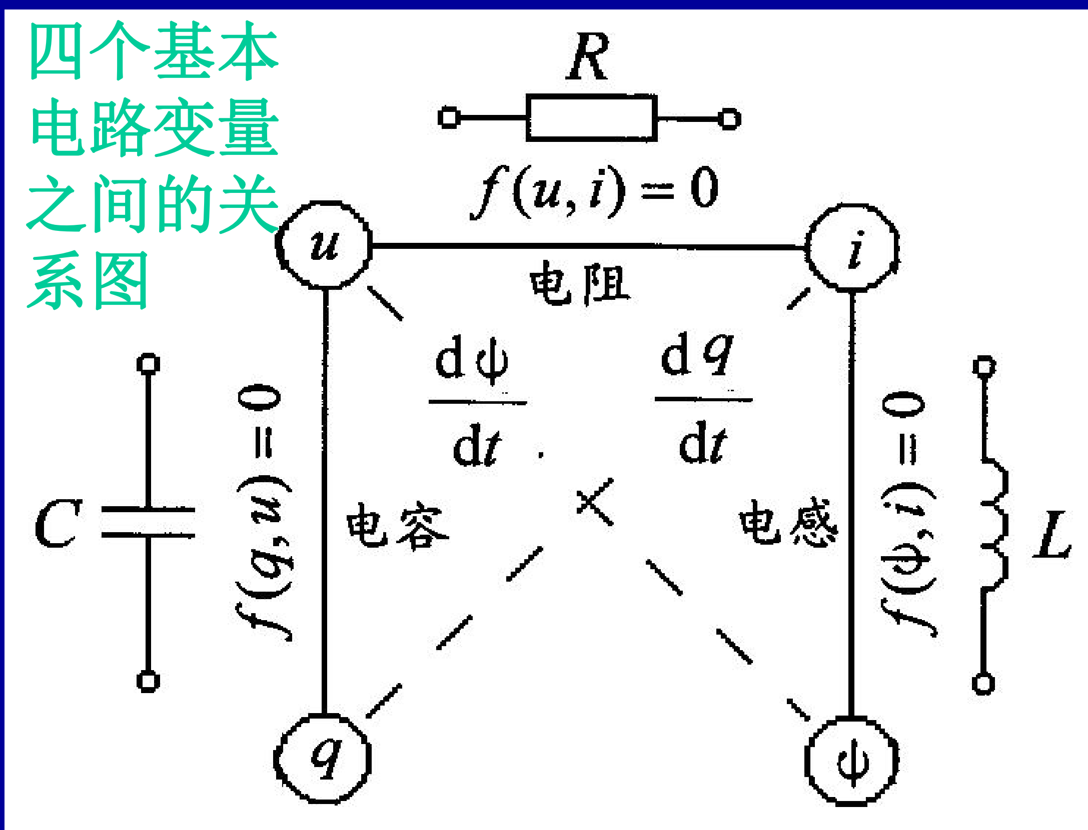


电容器除了标明容量外，还须说明它的工作电压，电解电容还须标明极性。漏电很小，工作电压低时，可用一个电容作为它的电路模型。当漏电不能忽略时，需用一个电阻与电容的并联作为电路模型。工作频率很高时，还需要增加一个电感来构成它的电路模型, 如下图



(a) (b) (c)

电阻，电容和电感是三种最基本的电路元件。它们是用两个电路变量之间的关系来定义的：电压和电流间存在确定关系的元件是电阻元件；电荷和电压间存在确定关系的元件是电容元件；磁链和电流间存在确定关系的元件是电感元件。这些关系从下图可以清楚看到。



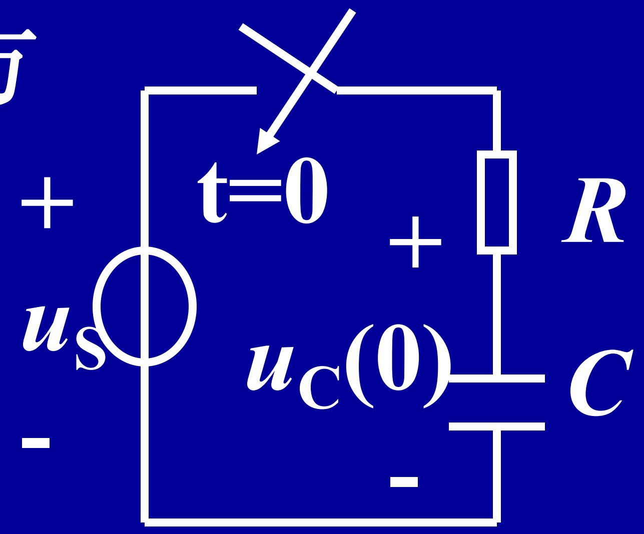
四个基本变量间定义的另外两个关系是

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

6—2 换路定则及初始值计算

换路：电路元件连接方式或参数的突然改变。



换路前瞬间　　换路后

$t=0^-$　　$t=0^+$

$u_C(0^-)$、$i_L(0^-)$；　$u_C(0^+)$、$i_L(0^+)$

初始状态 $(0^-$状态$)$；初始值$(0^+$状态$)$

状态：（某时刻）电容电压和电感电流

瞬态分析（动态分析）：分析动态电路从换路开始直至进入稳态全过程的电压及电流的变化规律。

分析步骤：

1 依据电路两类约束，以所求响应为变量，列换路后的微分方程；

2 找所须初始条件，解微分方程。

换路定则(或开闭定理)：

1. 若电容中电流不为无穷大，则电容电压不会跳变，即: $u_C(0^+)= u_C(0^-)$;

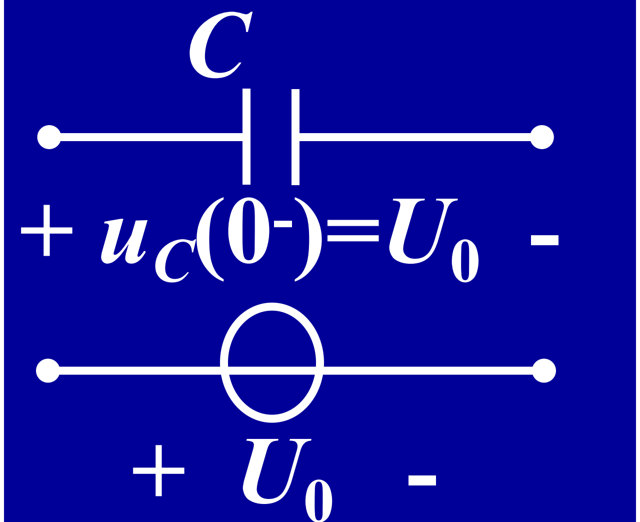
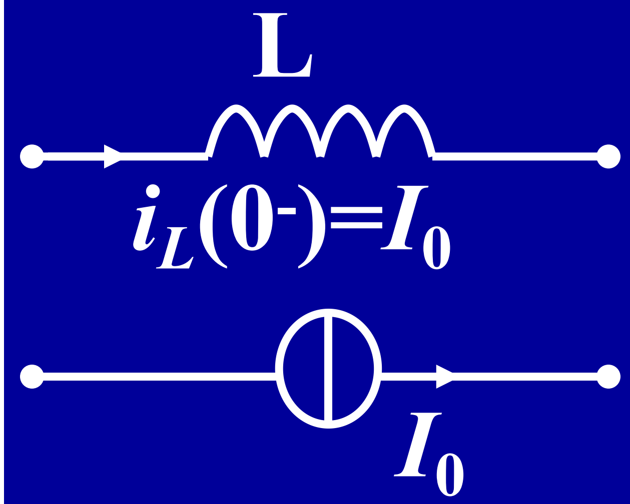
2. 若电感中电压不为无穷大，则电感电流不会跳变，即: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ 。

说 明：

1.　电路中无全电容回路(C-C, u_S -C)，或 无全电感割集(L-L, i_S -L);

2.　只适合 u_C和 i_L ,它们是联系换路前后的唯一纽带，其他变量可能会跳变;

3．实质是电荷守恒，磁链守恒。

元　件	电　容	电　感
数学式	$u_C(0^+)=u_C(0^-)$ $q_C(0^+)=q_C(0^-)$	$i_L(0^+)=i_L(0^-)$ $\psi_L(0^+)=\psi_L(0^-)$
等效图 $t=0^-$ $t=0^+$		
应用条件	i_C有限	u_L有限

初始值的计算：

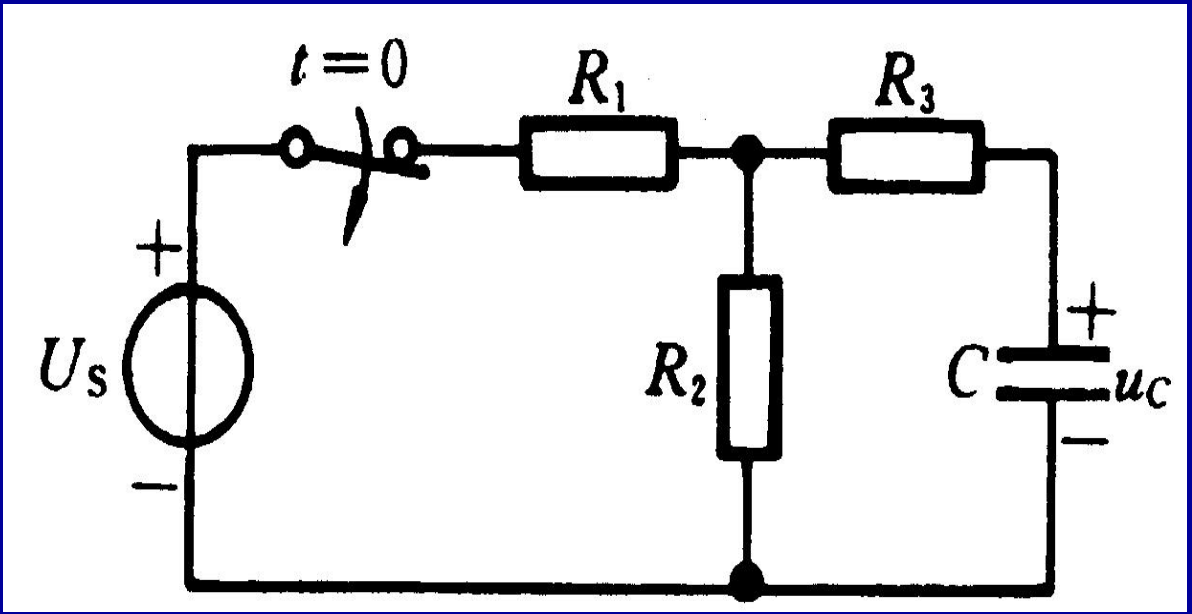
1. 求换路前初始状态 $u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$;

2. 由换路定则，求$u_C(0^+)$ 及 $i_L(0^+)$;

3. 画t=0$^+$时的等效电路——电容用电压等于$u_C(0^+)$的电压源替代；电感用$i_L(0^+)$的电流源替代；

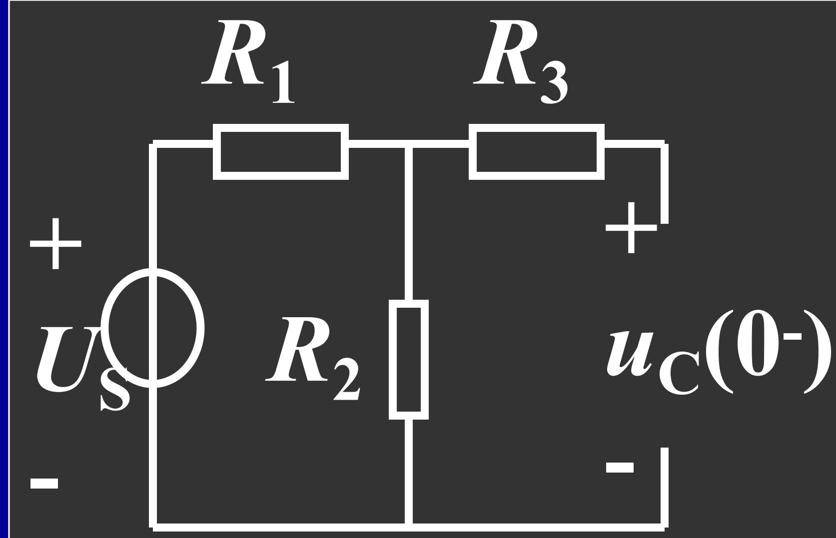
4 . 求待求电压和电流的初始值。

例 5 开关闭合已久，求电容初始值$u_C(0^+)$



解：由于开关闭合已久，由直流电源驱动的电路中，各电压电流均为不随时间变化的恒定值，造成电容电流等于零，电容相当于开路。得t=0$^-$等效图

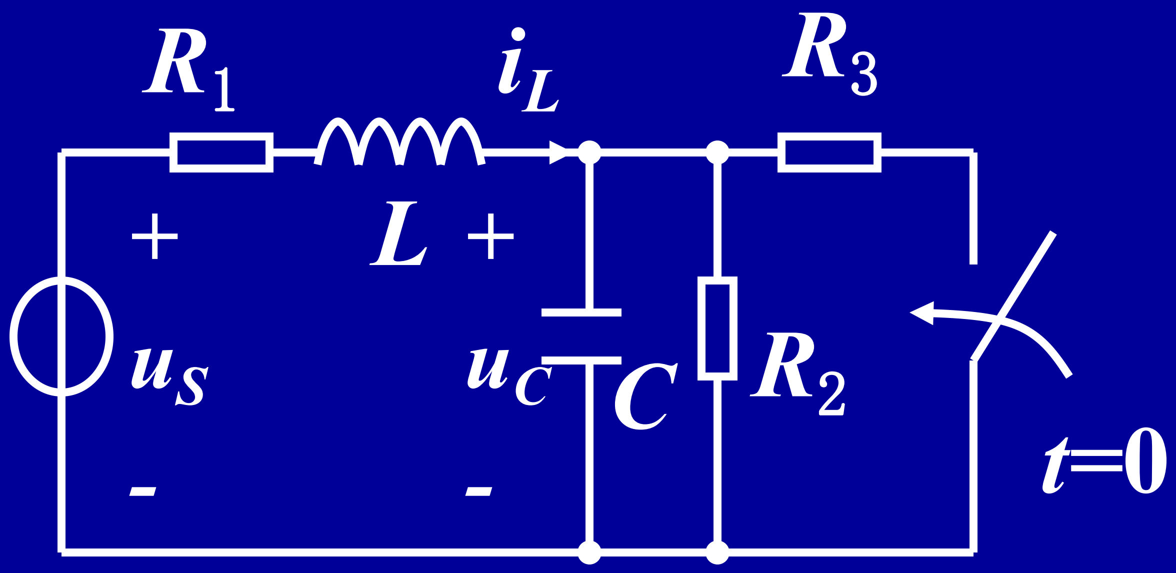
$$u_C(0\_) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$



t=0^-等效图

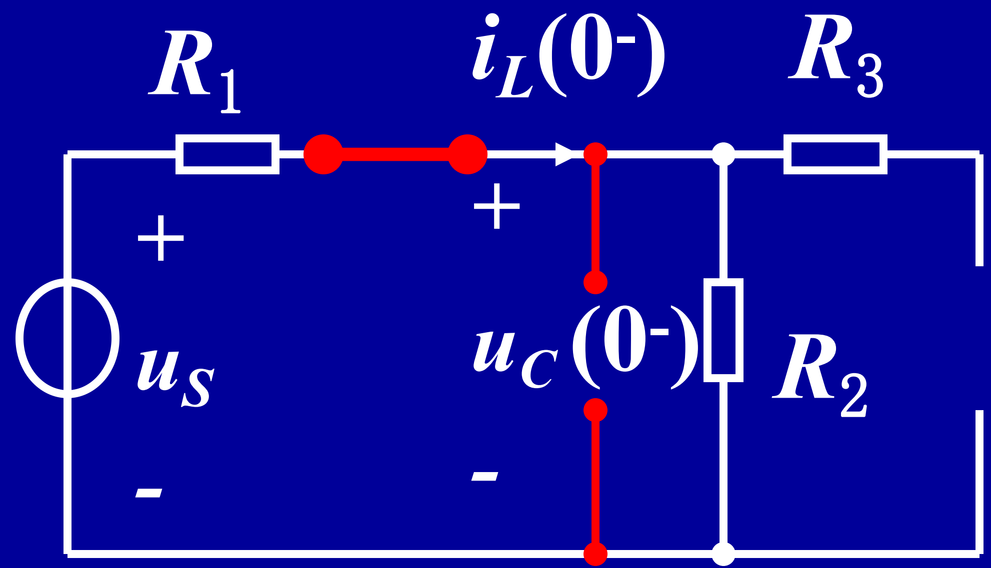
开关断开时，在电阻R_2和R_3不为零的情况下，电容电流为有限值，电容电压不能跃变，即：$u_C(0^+) = u_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$

例6 开关闭合前电路已稳定，$u_S = 10\text{V}$，$R_1=30\Omega$，$R_2=20\Omega$，$R_3=40\Omega$。求开关闭合时各电压、电流的初始值 .



解：(1)求初始状态$u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$

由于t<0时电路已稳定，电感看作短路，电容看作开路，作t=0$^-$等效图



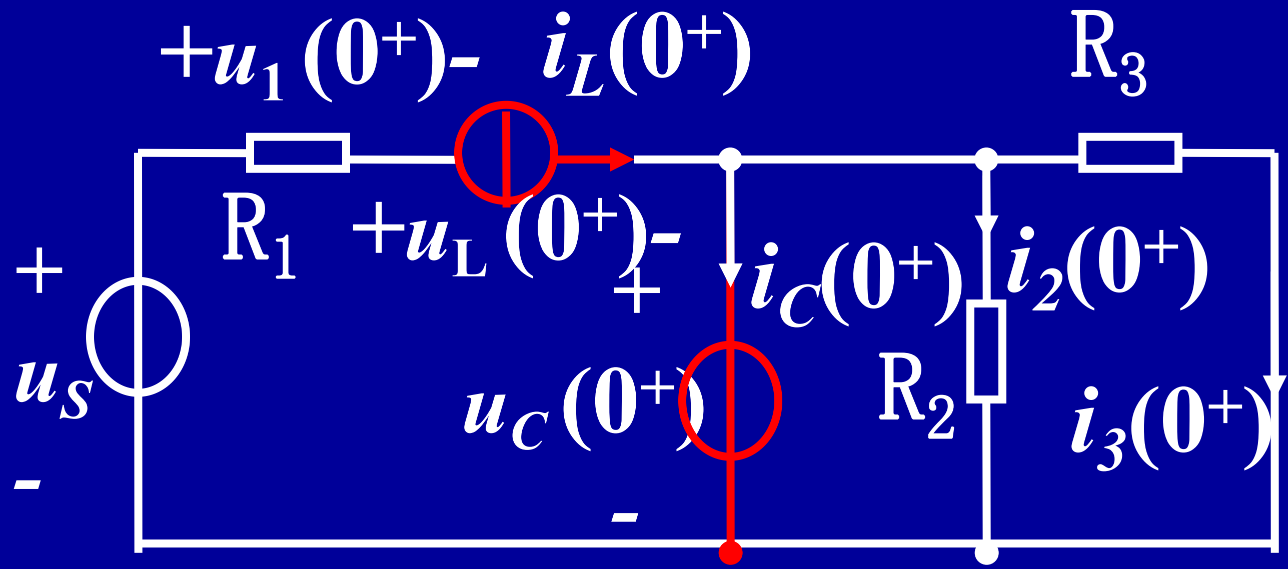
t=0$^-$图

$$i_L(0^-) = \frac{u_S}{R_1 + R_2} = 0.2\ \mathrm{A}$$

$$u_C(0^-) = i_L(0^-) R_2 = 4\ \mathrm{V}$$

(2) 由换路定则， $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.2\text{A}$

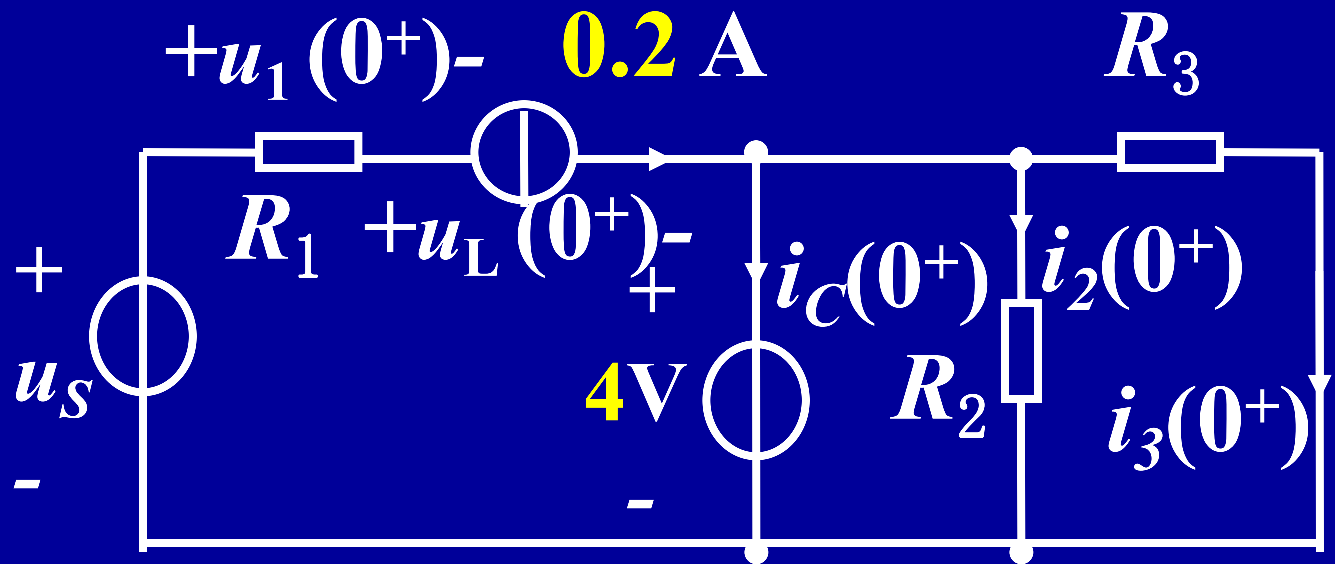
$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4\text{ V}$,作t =0⁺等效图



t=0⁺图

(3)求初始值

$$i_1(0^+) = i_L(0^+) = 0.2\text{A}$$

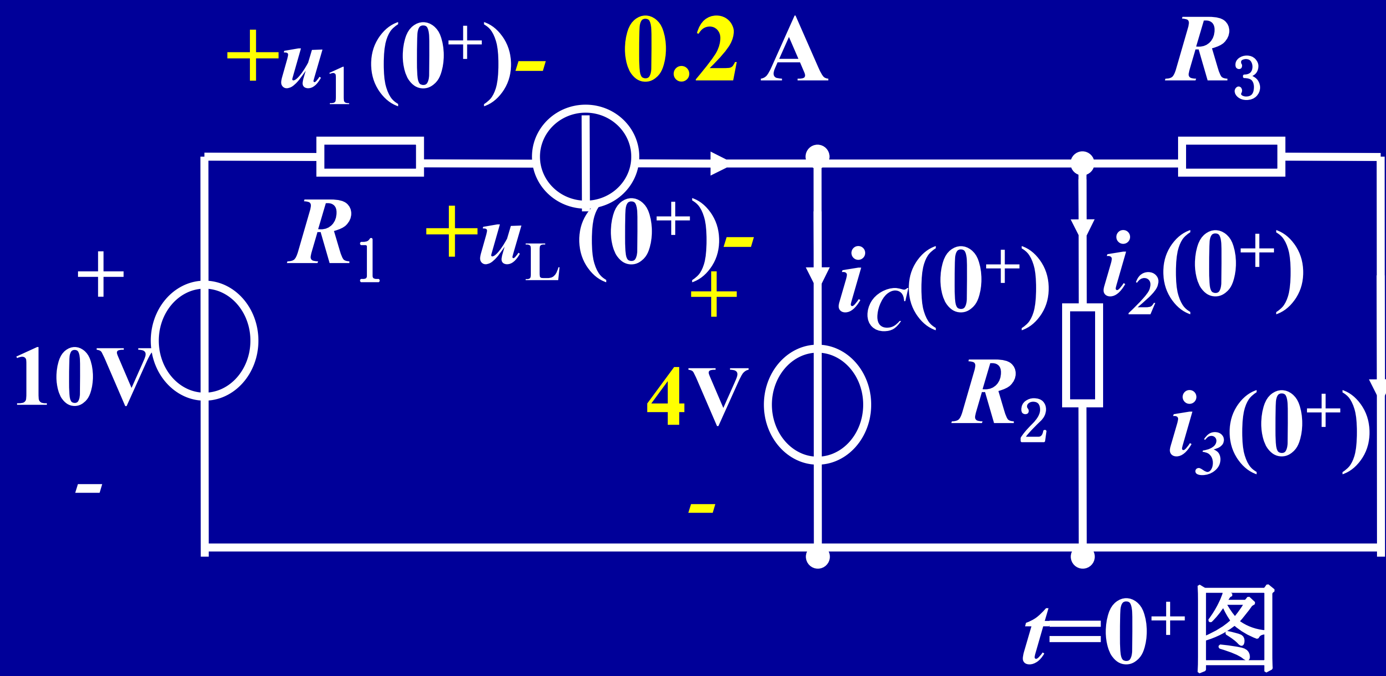


t=0^+图

$$u_1(0^+) = i_1(0^+)R_1 = 6\ \text{V}$$

$$u_2(0^+) = u_3(0^+) = u_C(0^+) = 4\ \text{V}$$

$$i_2(0^+) = u_2(0^+)/R_2 = 0.2\ \ \text{A}$$



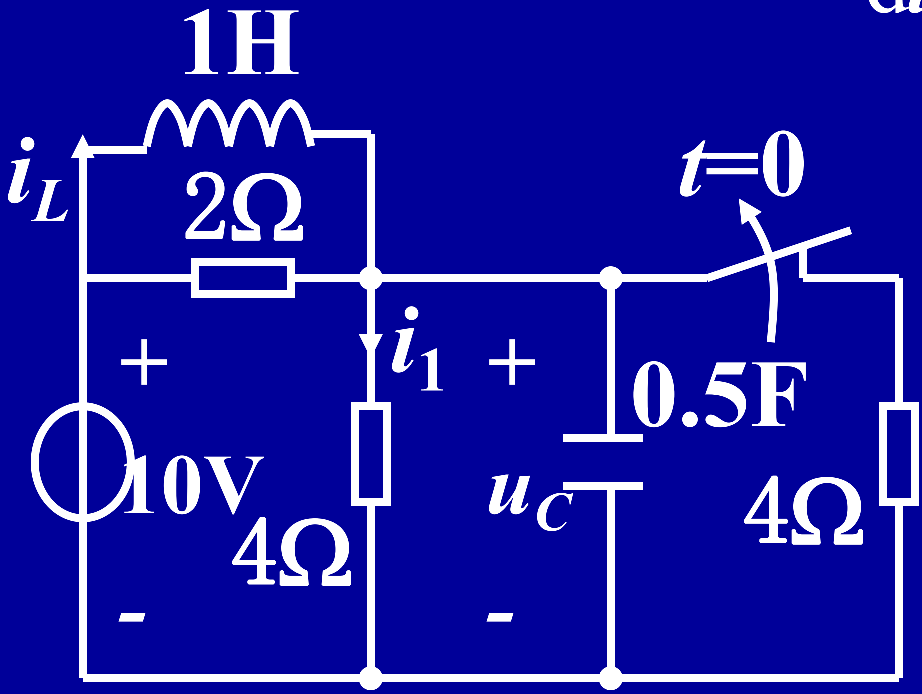
$$i_3(0^+) = u_3(0^+)/R_3 = 0.1\,\mathrm{A}$$

$$i_\mathrm{C}(0^+) = i_\mathrm{L}(0^+) - i_2(0^+) - i_3(0^+) = -0.1\,\mathrm{A}$$

$$u_\mathrm{L}(0^+) = -u_1(0^+) + u_S - u_C(0^+) = 0$$

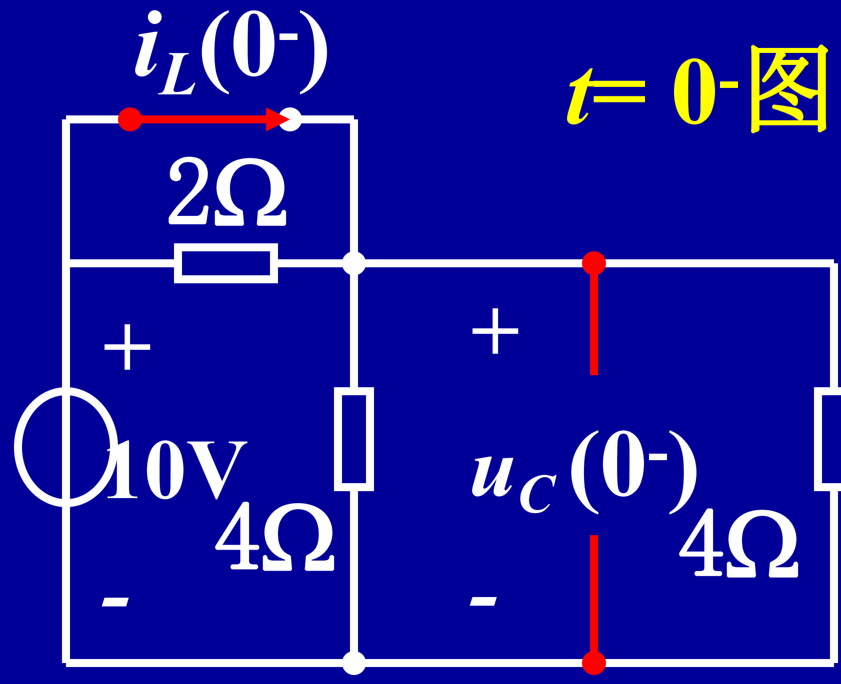
例7 开关打开前电路已稳定，求初始值

$$i_C(0^+), u_L(0^+), i_1(0^+), \frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t} \text{和} \frac{\mathrm{d}u_C(0^+)}{\mathrm{d}t}$$



解：(1)求初始状态$u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$

t<0时电路已稳定，电感看作短路，电容看作开路，作t=0⁻等效图

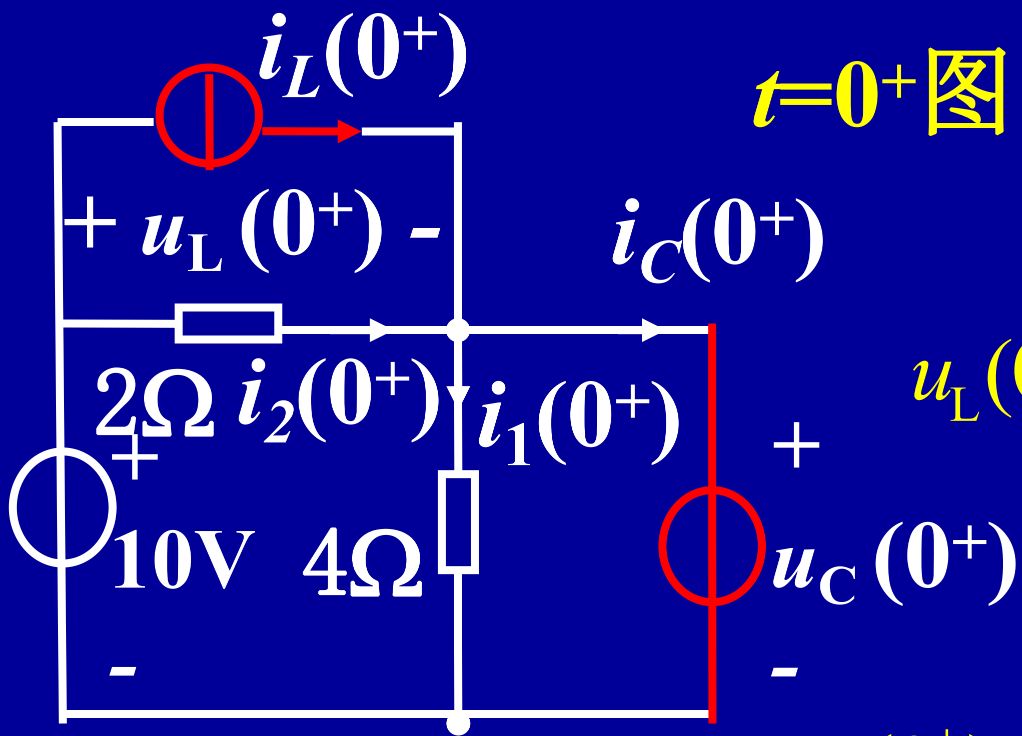


$$u_C(0^-) = 10\text{ V}$$

$$i_L(0^-) = \frac{u_S}{R_1 // R_2} = 5\text{ A}$$

(2) 由换路定则，$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10\ \text{V}$

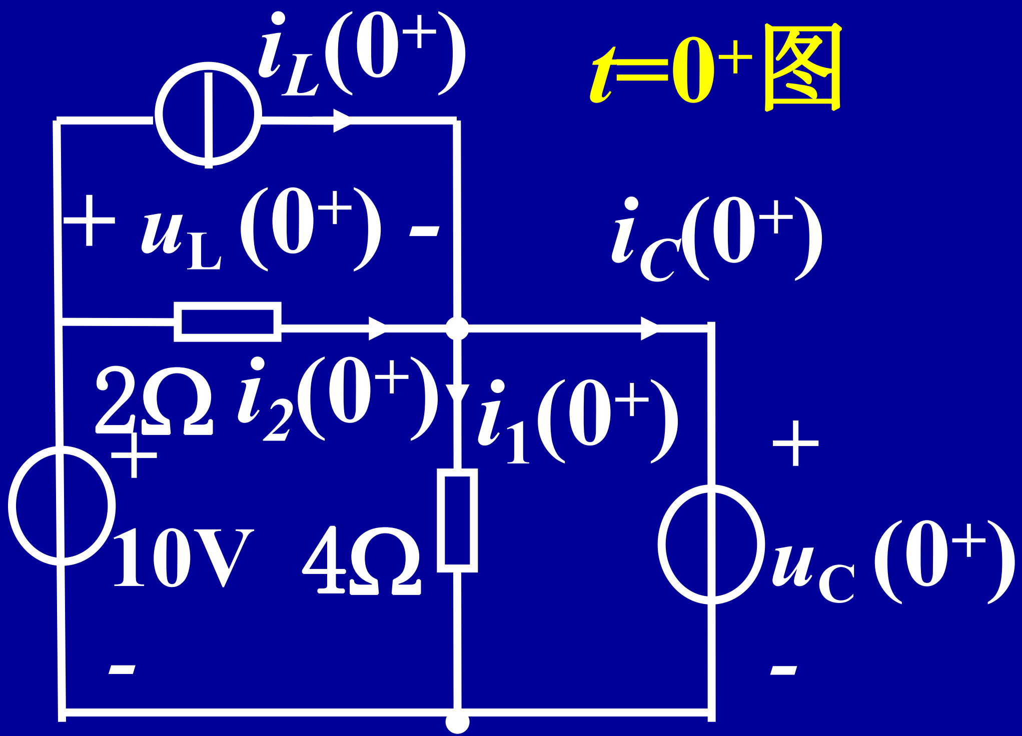
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 5\ \text{A}$,作t =0$^+$等效图



t=0$^+$图

$u_L(0^+) = 10 - u_C(0^+) = 0$

$i_1(0^+) = u_C(0^+)/4 = 2.5\ \text{A}$



t=0$^+$图

$$\frac{\mathrm{d}u_C(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{i_C(0^+)}{C}$$

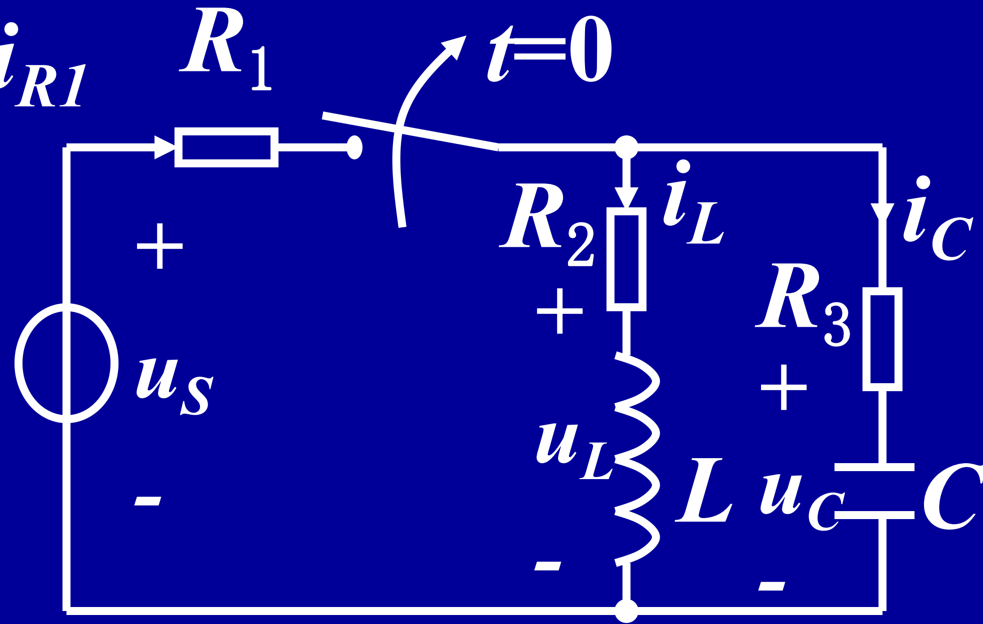
$$=5\,\mathrm{V/s}$$

$$i_C(0^+)=i_L(0^+)+i_2(0^+)-i_1(0^+)=5-2.5=2.5\,\mathrm{A}$$

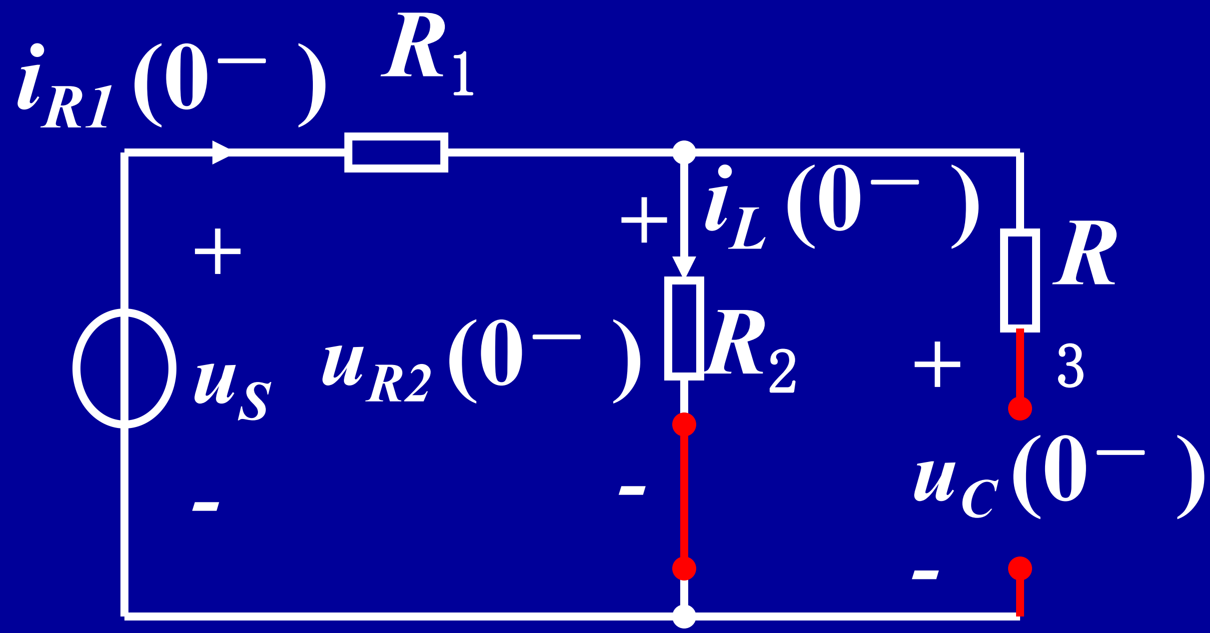
$$\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{u_L(0^+)}{L}=0\ \mathrm{A/s}$$

例8 原电路已稳定, u_S = 10V， R_1=2Ω, R_2=3Ω， C=0. 1F, L=0. 1H。求开关打开时各电压、电流的初始值

解：(1)求初始状态$u_C(0^-)$ 及 $i_L(0^-)$



电路已稳定, 电感看作短路，电容看作开路，作t=0-等效图.



t= 0-图

可得:

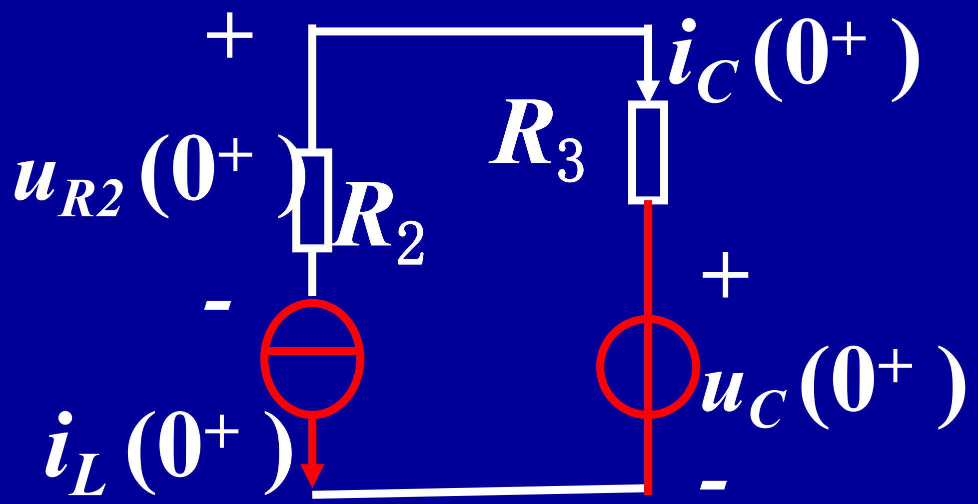
$$i_L(0^-) = \frac{u_S}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2+3} = 2\,\mathrm{A}$$

$$u_C(0^-) = i_L(0^-)R_2 = 2 \times 3 = 6\,\mathrm{V}$$

(2) 由换路定则，得：$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 6\,\mathrm{V}$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2\,\mathrm{A}$$

(3) 作t=0^+等效图

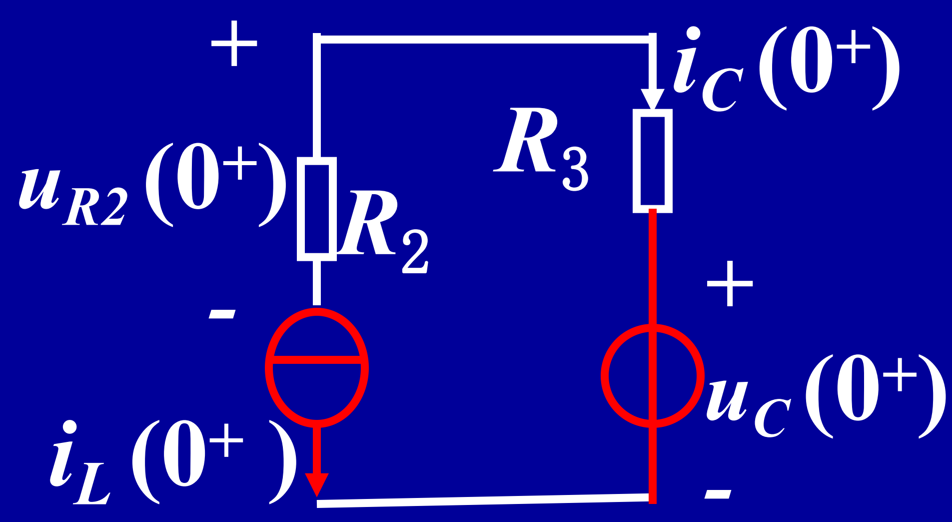


t= 0^+图

(4)求初始值

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -2A$$

思考：换路时，电容电流、电感电压、电阻电流及电压有无跳变？



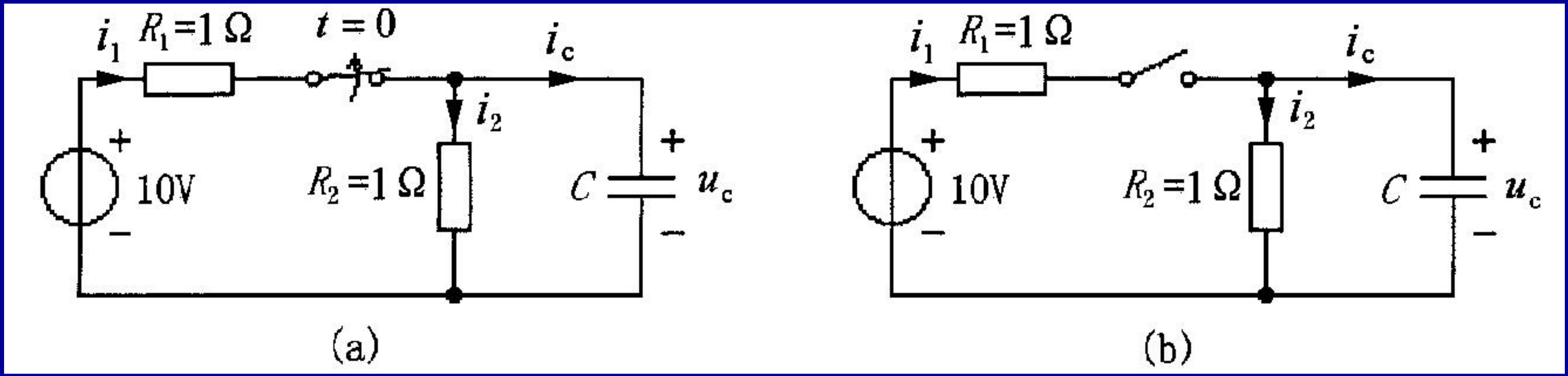
$t = 0^+$图

$$u_{\mathrm{R2}}(0^+) = i_{\mathrm{L}}(0^+) R_2 = 2 \times 3 = 6\ \mathrm{V}$$

$$u_{\mathrm{R3}}(0^+) = i_{\mathrm{C}}(0^+) R_3 = -2 \times 1 = -2\ \mathrm{V}$$

$$u_{\mathrm{L}}(0^+) = -u_{\mathrm{R2}}(0^+) + u_{\mathrm{C}}(0^+) + u_{\mathrm{R3}}(0^+) = -2\ \mathrm{V}$$

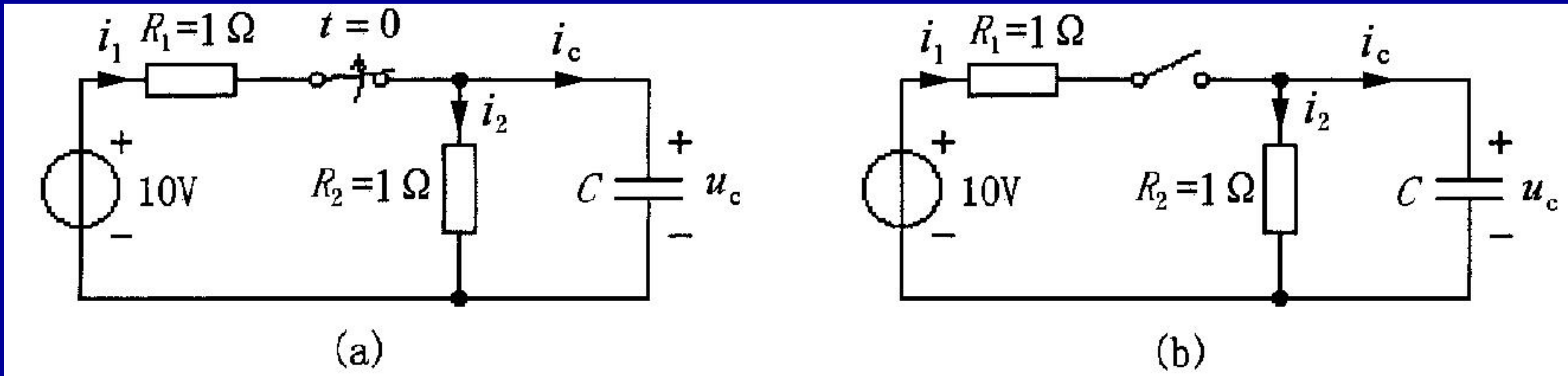
例9 图(a)电路中的开关闭合已久，t=0时断开开关，试求开关转换前和转后瞬间的电容电压和电容电流。



解：图(a)电路，t=0⁻时，电容电压为恒定值，电容电流为0，电容相当于开路。用分压公式得

$$u_C(0^+) = u_{R_2}(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 10 = \frac{1}{2} \times 10 = 5\text{V}$$

电阻R_1和R_2的电流$i_1(0^-)=i_2(0^-)=10/2=5\text{A}$



开关断开后如图(b)。电压源对电容不再起作用，由于t=0时刻电容电流有界，电容电压不能跃变，由此得 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=5\text{V}$

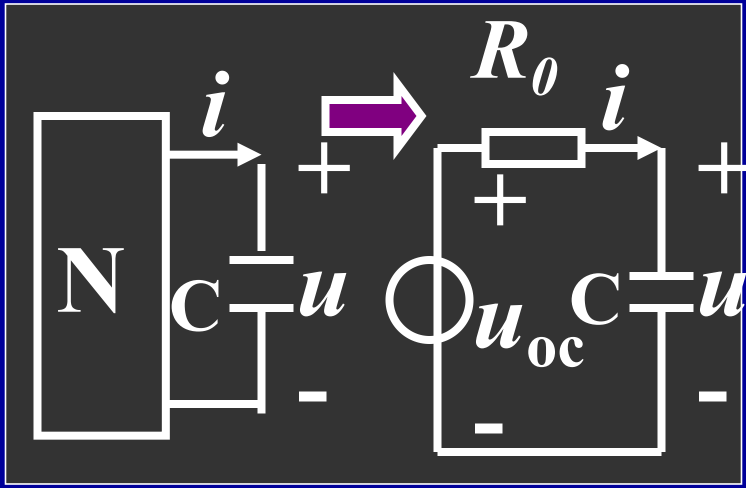
此时电容电流与电阻R_2的电流相同，可得

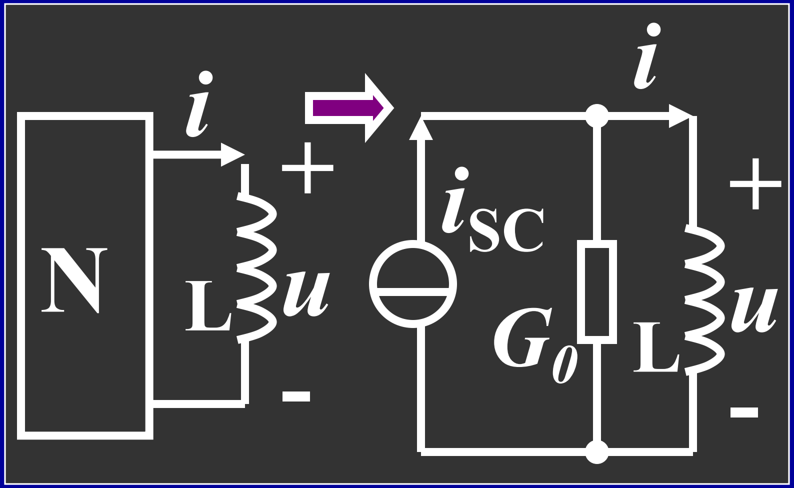
$$i_C(0^+)=-i_2(0^+)=-\frac{5}{1}=-5\text{A}$$

电容电流由$i_C(0^-)$=0A变化到$i_C(0^+)$=−5A。电阻R_1的电流由$i_1(0^-)$=5A变化到$i_1(0^+)$=0A

6-3 一阶电路的零输入响应

一阶电路:由一阶微分方程描述的电路



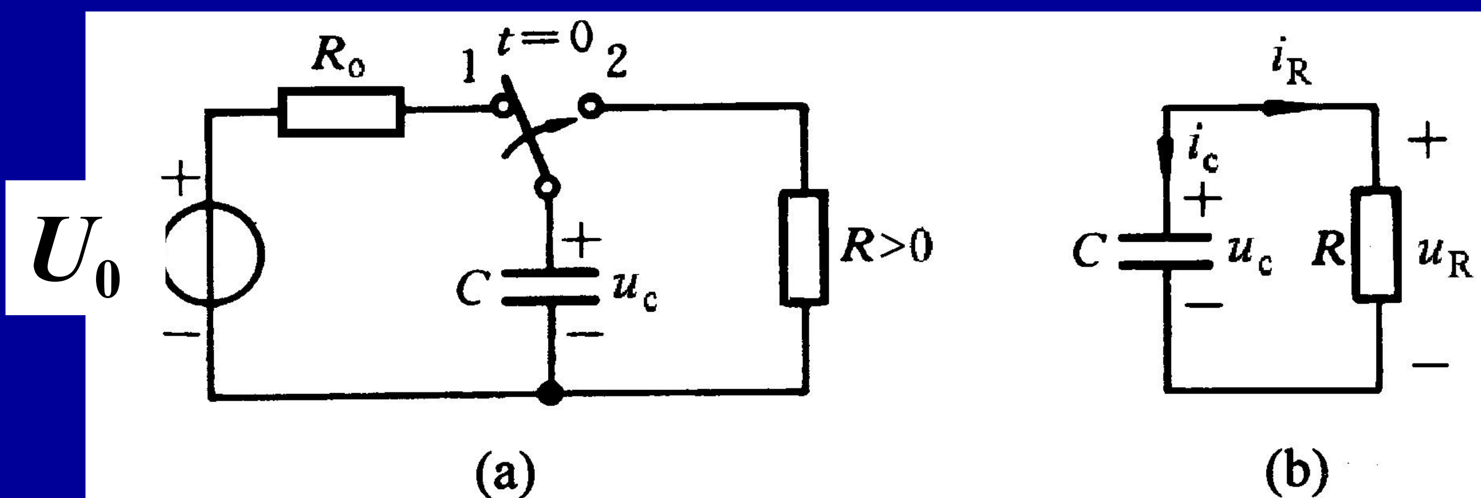


零输入响应：没有外加激励时的响应。
仅由动态元件初始状态（内激励）引起

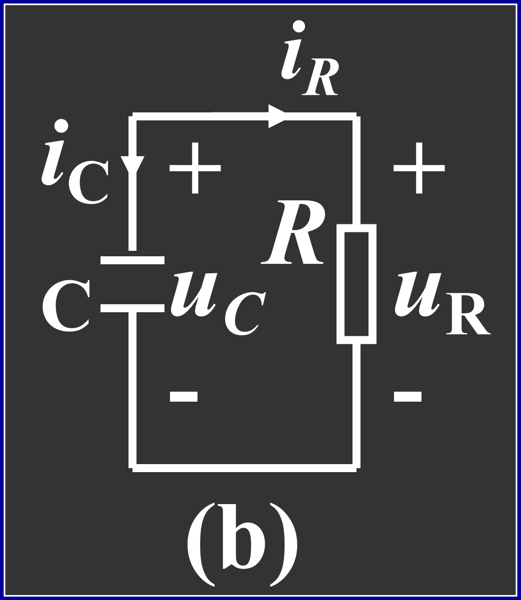
6-3-1 RC电路的零输入响应

开关转换前，电容电压已经达到U_0。换路后如图(b)所示。由换路定则得

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$



由KCL得：$-u_{\mathrm{R}}+u_{\mathrm{C}}=0$



电阻和电容的VCR得：

$$u_{\mathrm{R}}=Ri_{\mathrm{R}}=-Ri_{\mathrm{C}}=-RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$$

代入上式得以下方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}=0 \qquad (t\geq 0)$$

这是一个常系数线性一阶齐次微分方程。其通解为 $u_{\mathrm{C}}(t)=K\mathrm{e}^{st}$

特征方程： $RCs+1=0$

特征根： $s=-\dfrac{1}{RC}$

称为电路的固有频率。于是电容电压变为

$$u_C(t)=Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

K是一个常量，由初始条件确定。当t=0$^+$ 时上式变为

$$u_C(0^+)=Ke^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0+}=K$$

根据初始条件 $u_C(0^+)=U_0$

求得 $K=U_0$

最后得到图(b)电路的零输入响应为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t > 0)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t > 0)$$

各电压电流均以相同的指数规律变化，变化的快慢取决于R和C的乘积。

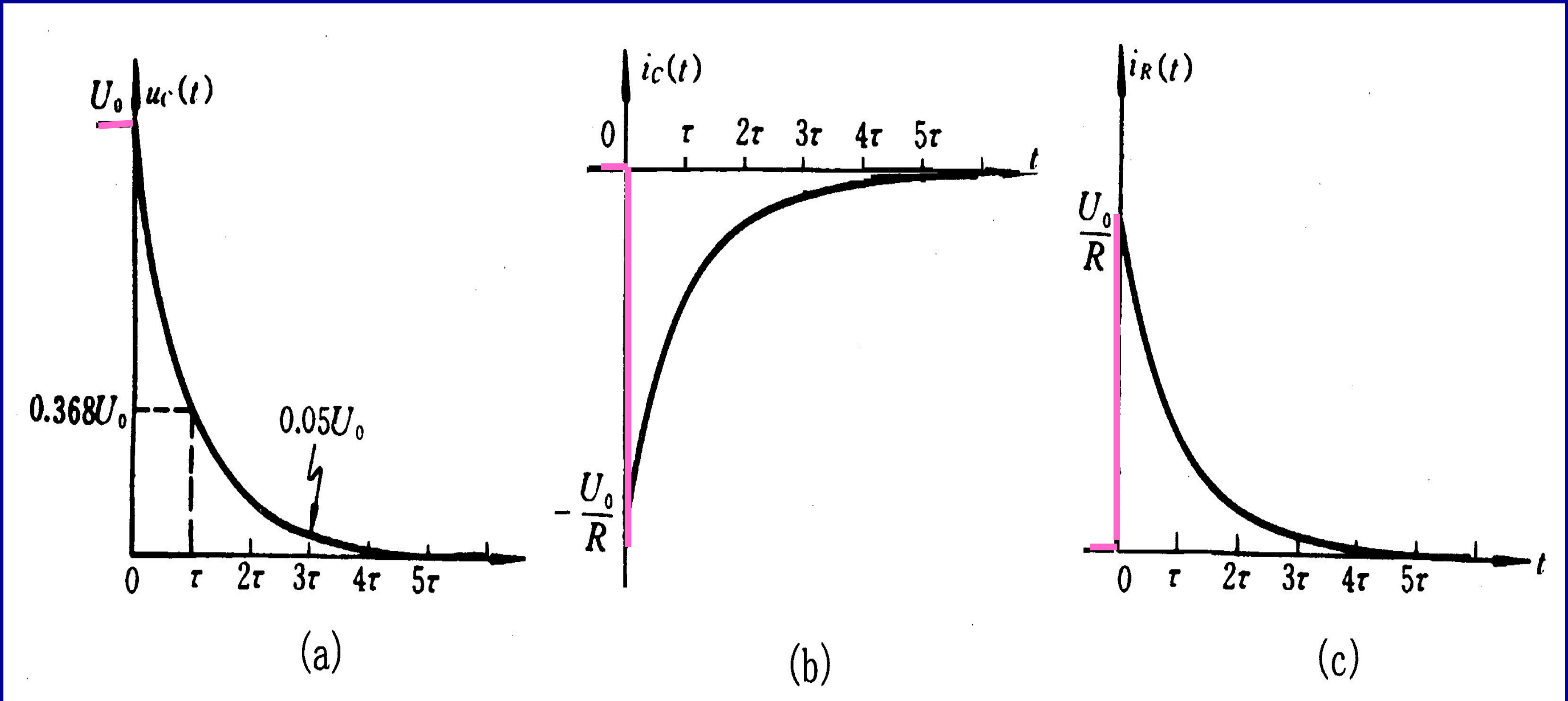
令$\tau=RC$，τ 具有时间的量纲，故称它为RC电路的时间常数。

电压的变化与时间常数的关系。

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$v_c(t)$	V_0	$0.368V_0$	$0.135V_0$	$0.050V_0$	$0.018V_0$	$0.007V_0$

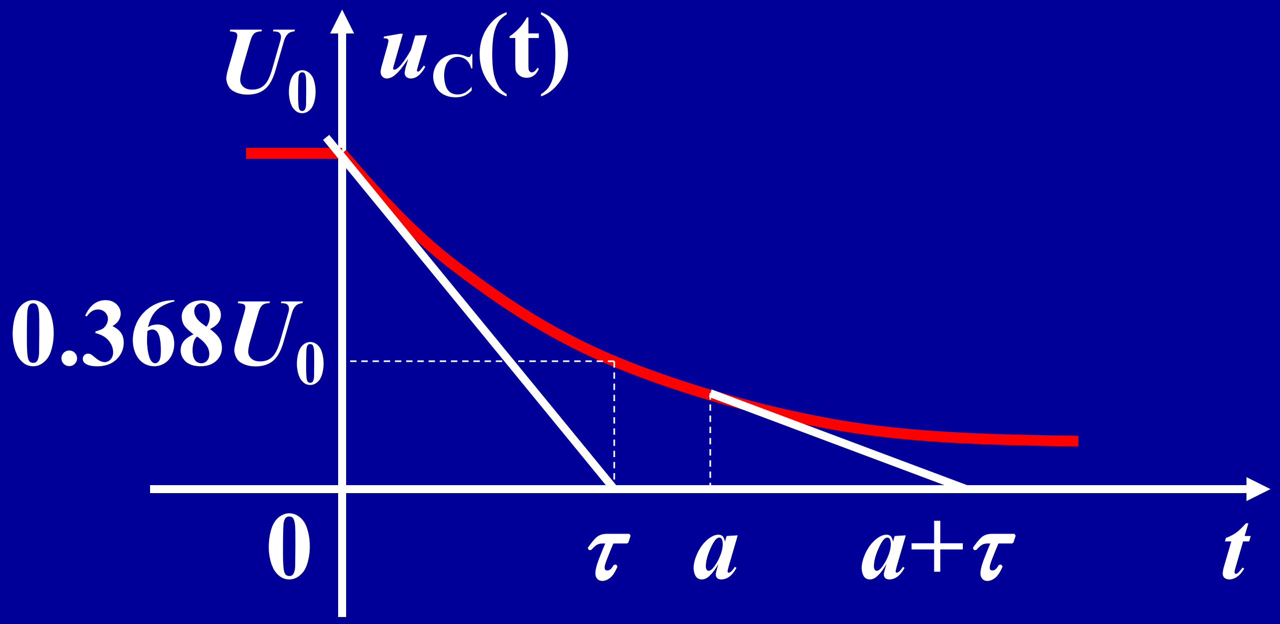
由于波形衰减很快，实际上只要经过4～5τ的时间就可认为放电（瞬态）过程基本结束。

RC电路零输入响应的波形曲线



$i_R(t)$和$i_C(t)$ 有跳变

时间常数在曲线上的意义



τ：切线与横轴焦点（切距）

衰减到原来值36.8%所需的时间

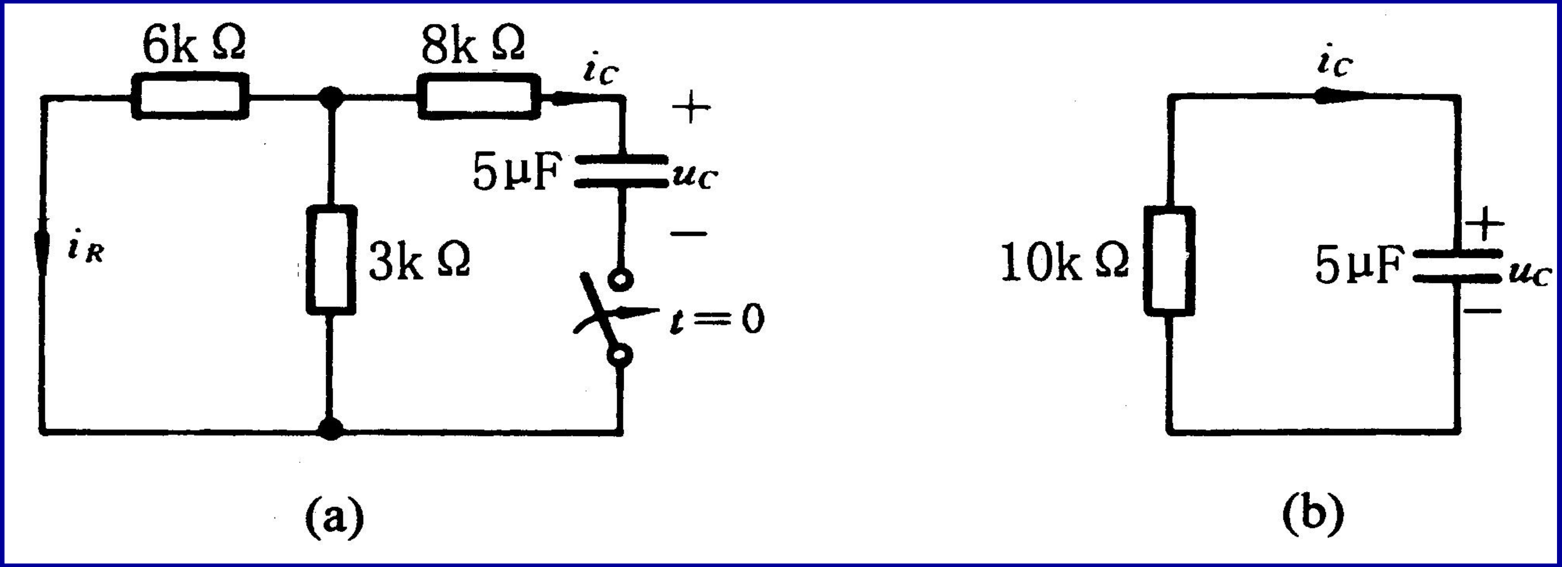
电阻在电容放电过程中消耗的总能量：

$$W_{\mathrm{R}}=\int_0^{\infty} i_{\mathrm{R}}^2(t)R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_0^2$$

结果表明：电容在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。

当$\tau=RC$变大时，电容放电过程会加长，因为增加电容C，就增加电容的初始储能；若增加电阻R，放电电流就减小。反之，时间常数小，则放电快。

例10 已知$u_C(0^-)=6V$。求t>0的电容电压



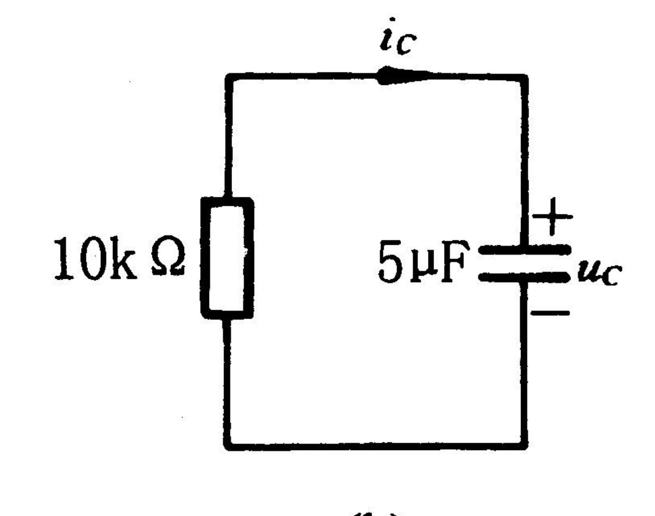
解：在开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，则 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=6\,V$

连接于电容两端的电阻等效为

$$R_0 = (8+6\,//\,3)\mathrm{k}\Omega = 10\,\mathrm{k}\Omega$$

$$\tau = R_0 C = 10\times10^{3}\times5\times10^{-6}$$

$$= 5\times10^{-2} = 0.05\text{s}$$



(b)

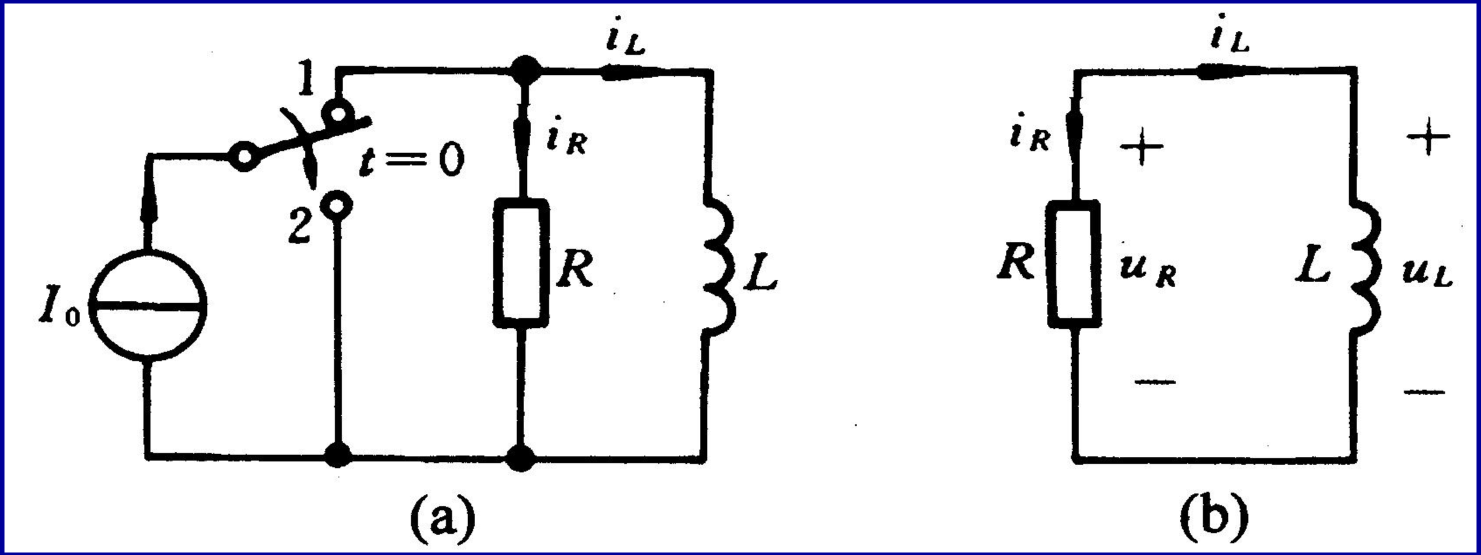
因此

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-20t}\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

假如还要计算电容中的电流$i_C(t)$，则

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 5\times10^{-6}\times6(-20)e^{-20t} = -0.6e^{-20t}\text{mA}$$

6-3-2 RL电路的零输入响应



开关连接于1端已很久，电感中的电流等于I_0，换路后的电路如图(b)。在开关转换瞬间，由于电感电压有界，电感电流不能跃变，即$i_L(0^+)= i_L(0^-)= I_0$

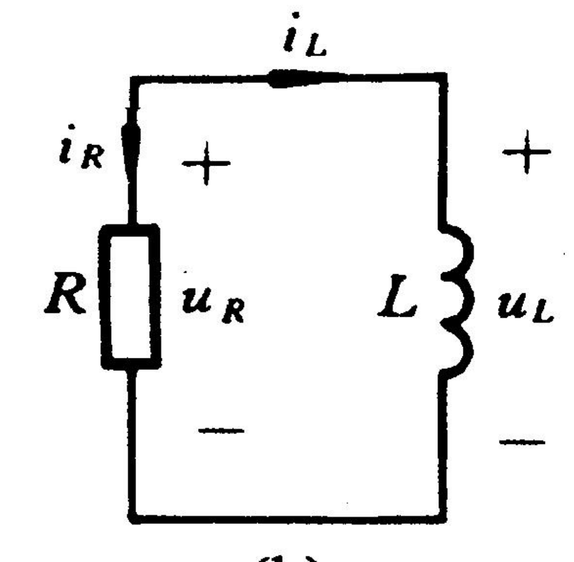
列方程：　　$u_R = u_L$

代元件VCR，得

$$-Ri_L = L\frac{di_L}{dt}$$

得到以下微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + i_L = 0 & t \geq 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \end{cases}$$



(b)

微分方程的通解为 $i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$

代入初始条件$i_L(0^+)=I_0$求得：　$K=I_0$

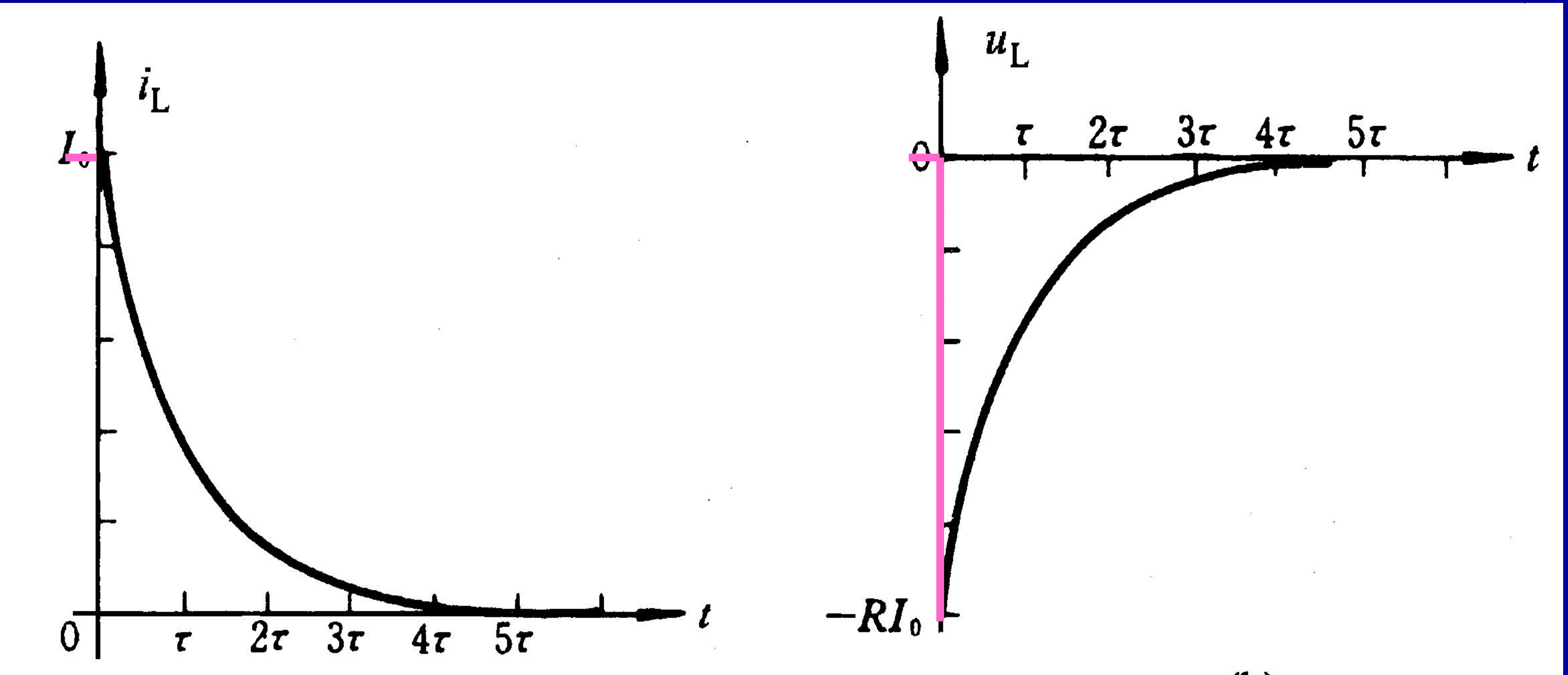
最后得到电感电流和电感电压为

$$i_L(t)=I_0 e^{-\frac{R}{L}t}=I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\geq 0)$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}=-RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

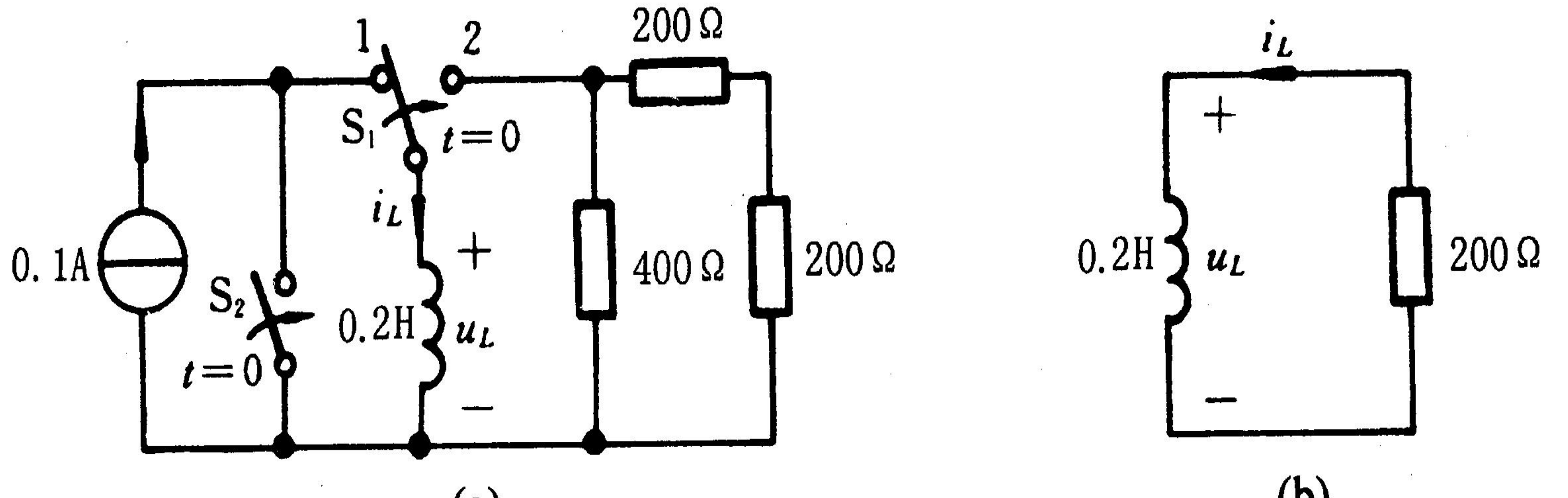
其中$\tau=GL=L/R$，具有时间的量纲，称它为RL电路的时间常数。

其波形如下图。结果表明，**RL**电路零输入响应也是按指数规律衰减，衰减的快慢取决于常数τ 。



(a) (b)

例11 开关S_1连1端已很久，t=0时S_1倒向2端，开关S_2也同时闭合。求t≥0时的$i_L(t)$和$u_L(t)$。



(a) (b)

解：换路瞬间，电感电压有界，电感电流不能跃变，故 $i_L(0^+)=i_L(0^-)=0.1\text{A}$

图(b)电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.2}{200} = 10^{-3}\,\mathrm{s} = 1\mathrm{ms}$$

电感电流和电感电压为

$$i_{\mathrm{L}}(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0.1\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{mA} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = -0.2 \times 0.1 \times 10^3\,\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{V}$$

$$= -20e^{-1000t}\,\mathrm{V} \qquad (t > 0)$$

6-3-3 一阶电路零输入响应的一般公式

一阶电路零输入响应——各电压电流均从其初始值开始，按照指数规律衰减到零，一般表达式为

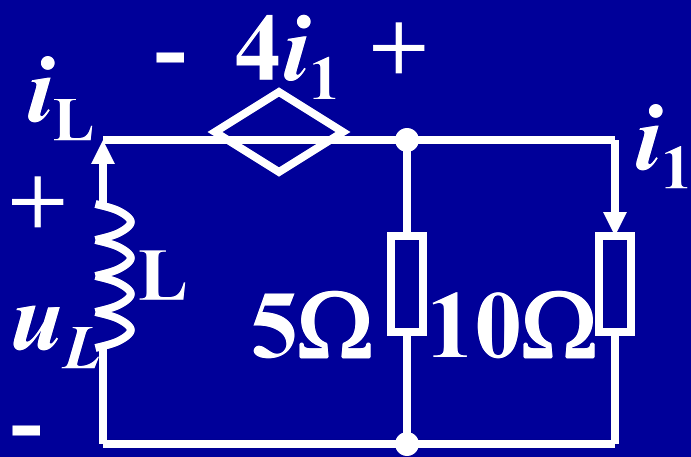
$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

$r_{zi}(t)$——一阶电路任意需求的零输入响应

$r_{zi}(0^+)$——响应的初始值

τ——时间常数

例12 已知$i_L(0^-)=1.5A$, $L=0.5H$, 求$i_1(t)$和$u_L(t)$。

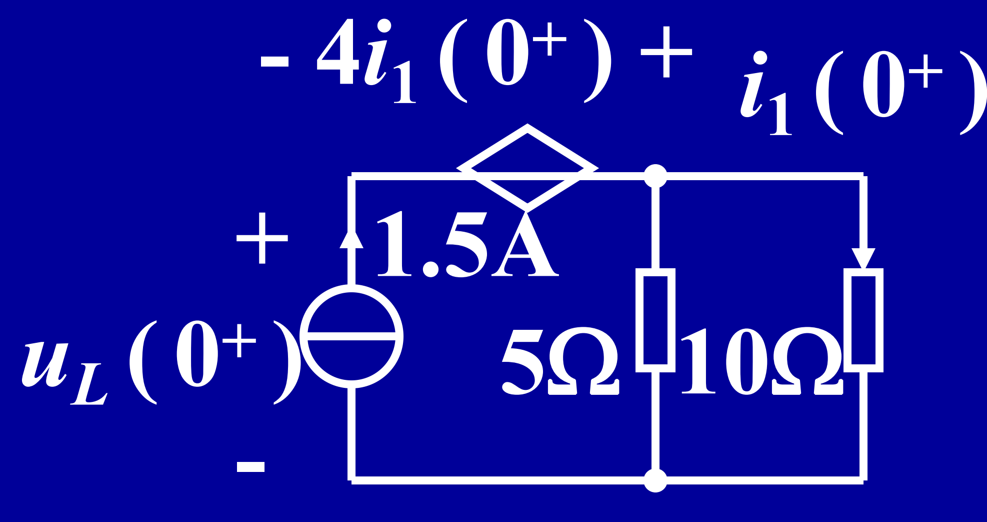


解：（1）由换路定则，得：

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=1.5A$$

（2）画0^+图，求初始值$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$。

网孔法，得：

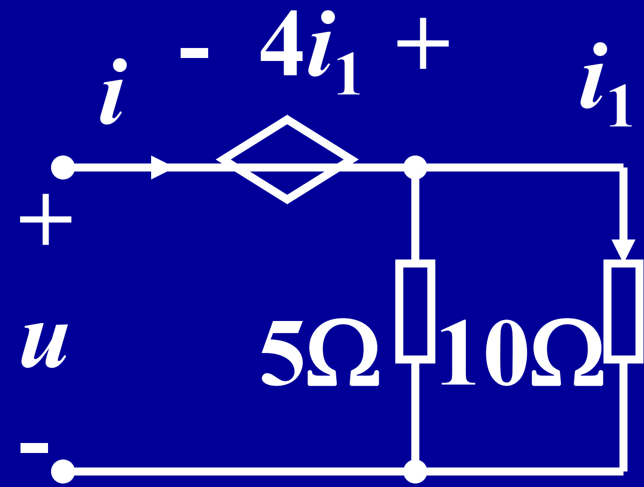


$$(5+10)i_1(0^+) - 5\times 1.5 = 0$$

即： $i_1(0^+) = 0.5\text{ A}$

$$u_L(0^+) = -4i_1(0^+) + 10i_1(0^+) = 3\text{ V}$$

（3）求时间常数：先求等效电阻，用加压求流法



$$\begin{cases} u = -4i_1 + 10i_1 = 6i_1 \\ i_1 = \dfrac{5}{5+10} i \end{cases}$$

消去i_1得：$u = 2i$　即：$R_{\mathrm{eq}} = \dfrac{u}{i} = 2\,\Omega$

所以　$\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{0.5}{2} = \dfrac{1}{4}s$

（4）初始值和时间常数代入下式

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

得结果

$$i_1(t) = 0.5\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{A}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = 3\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{V}, \quad t > 0$$

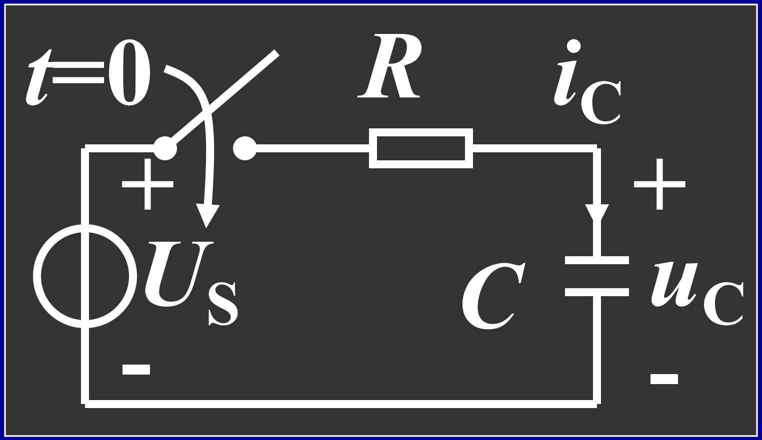
6-4 一阶电路的零状态响应

零状态响应：初始状态为零，仅由独立电源(称为外激励或输入）引起的响应。

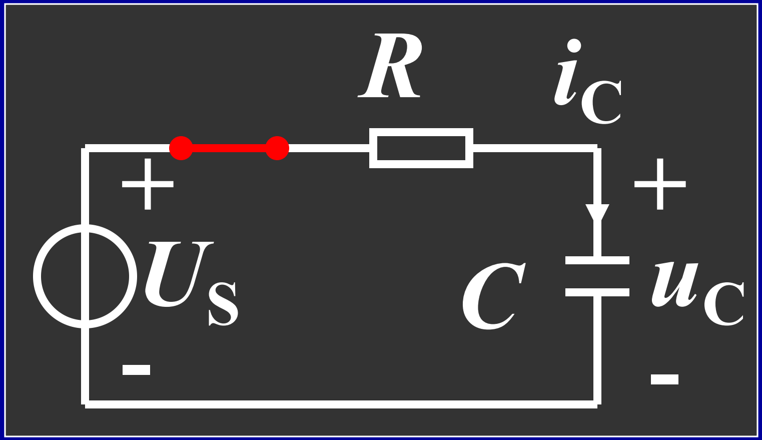
这里仅讨论一阶电路在直流激励下的零状态响应

6-4-1 RC电路的零状态响应

图示电路中的电容原来未充电，$u_C(0^-)=0$。换路时，由于电容电流有界，电容电压不会跃变，$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$



换路后如右图



以电容电压为变量，列微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S,\quad t>0$$

这是一个常系数线性非齐次一阶微分方程。其解由两部分组成，即

$$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)$$

$U_{\mathrm{Ch}}(t)$是与齐次微分方程相应的通解，其形式与零输入响应相同，即

$$通解：u_{\mathrm{Ch}}(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)$$

$u_{\mathrm{Cp}}(t)$是非齐次微分方程的特解。一般来说，它的模式与输入函数相同。对于直流激励的电路，它是一个常数，令

$$特解：u_{\mathrm{Cp}}(t) = K$$

将它代入微分方程，求得 $K = U_S$

因而完全解为

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + U_S, \quad t > 0$$

式中的常数A由初始条件确定。

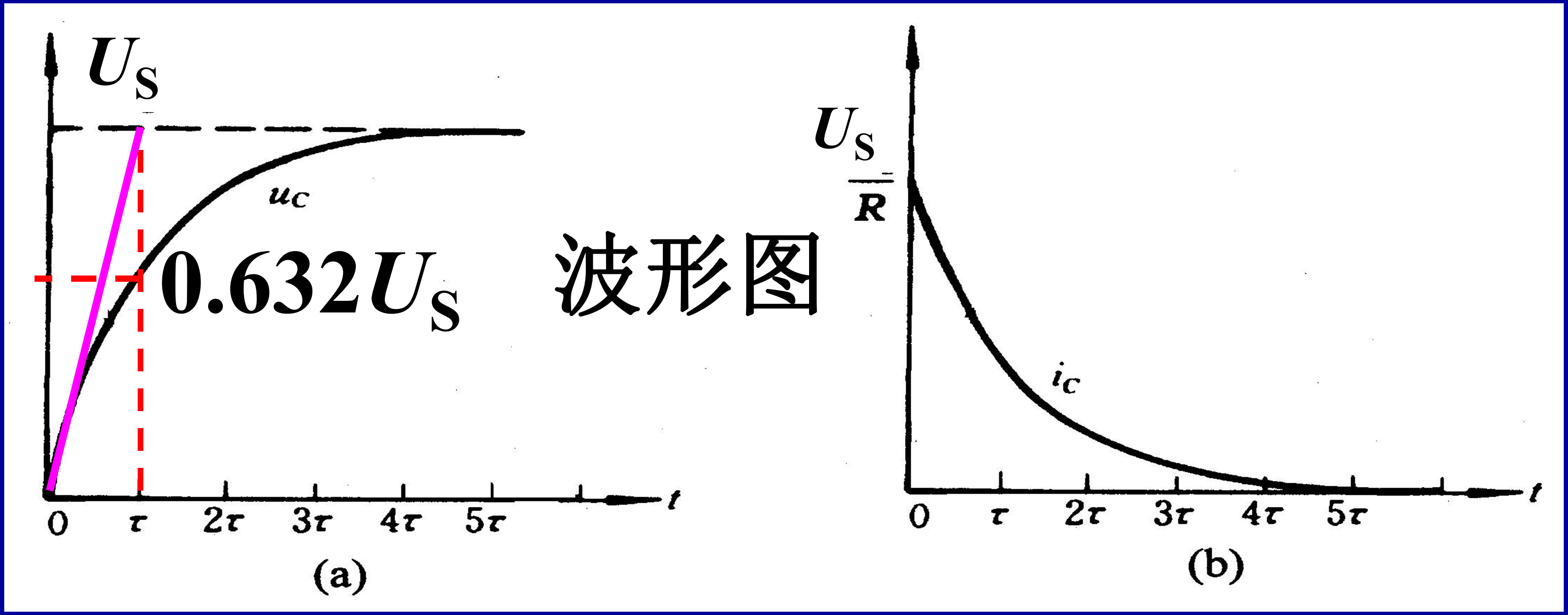
$$u_C(0^+) = A + U_S = 0$$

得：$A = -U_S$

得零状态响应为

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})=U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\qquad (t\geq 0)$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad (t>0)$$



零状态响应变化的快慢也取决于时间常数$\tau=RC$。τ 越大，充电过程越长。

电容电压的特解与激励形式相同——强制响应分量。直流激励的一阶电路，它就是t→∞时的电容电压，即$U_{Cp}(t)=U_C(\infty)$ ——稳态响应分量。

通解由激励引起，响应形式与激励无关，反映电路自身特性——固有响应分量或自然响应分量。有耗电路，$t\to\infty$时这一分量趋于0 ——暂态响应分量。

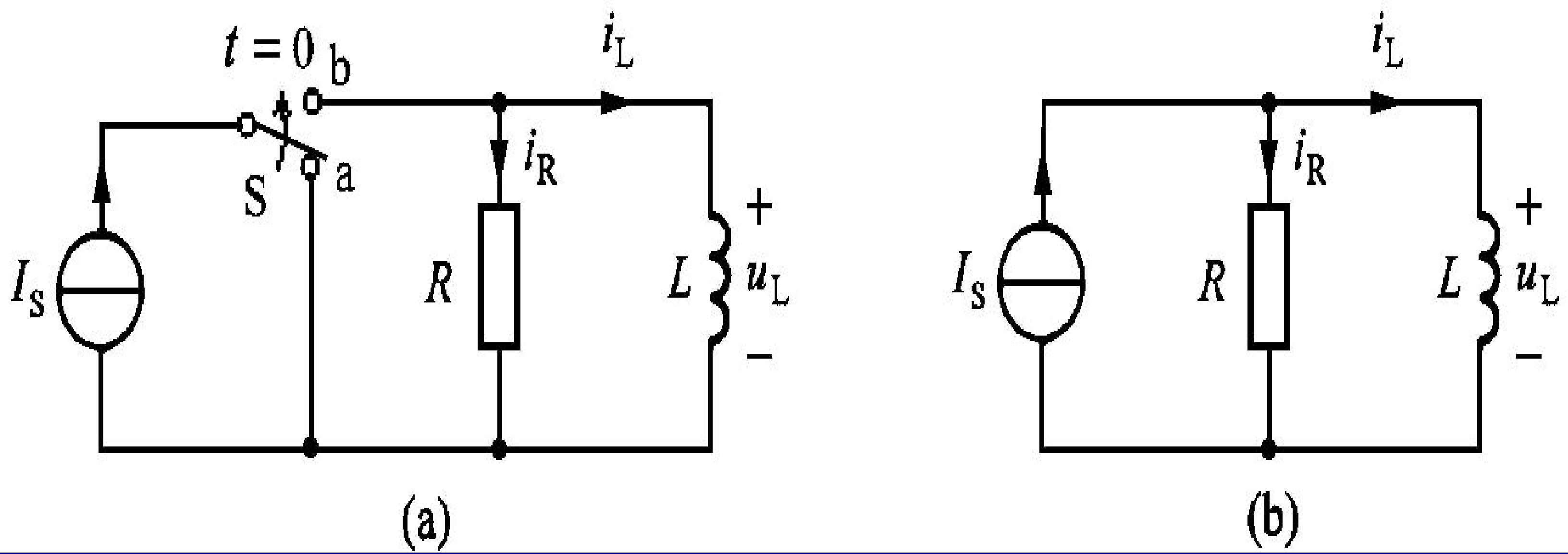
电阻在电容充电过程中消耗的总能量：

$$W_R = \int_0^{\infty} i_R^2(t) R \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_S}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_S^2$$

结果表明：与充电结束时电容所储存的电场能量相同。充电效率50%

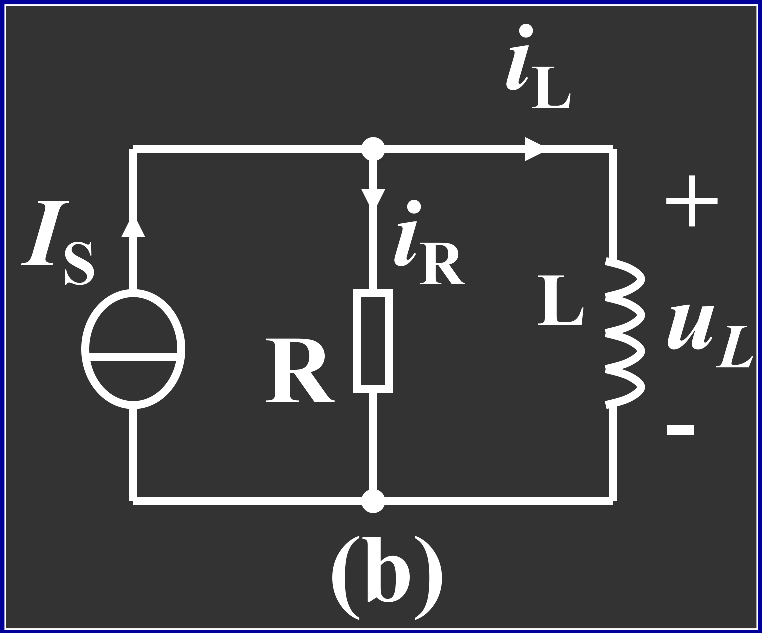
6-4-2 RL电路的零状态响应

图(a)电路换路前已稳定，即$i_L(0^-)=0$。$t=0$时开关由a倒向b，如图(b)。由于电感电压有界时，电感电流不能跃变，即$i_L(0^+)= i_L(0^-)=0$。因此是零状态问题。



图(b)电路列方程

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_S \quad (t\ge 0)$$



这是常系数非齐次一阶微分方程。其解与RC电路相似，即

$$i_L(t)=i_{Lh}(t)+i_{Lp}(t)=B\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+I_S=B\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+I_S$$

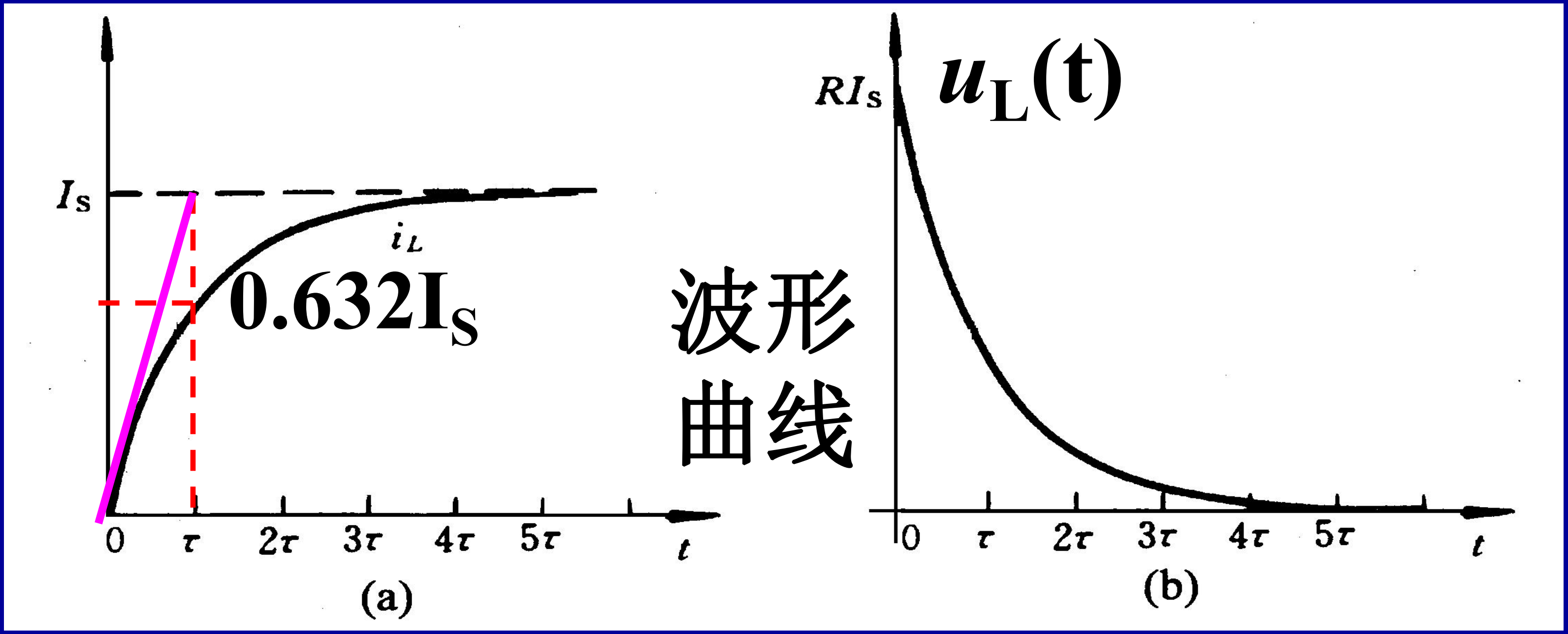
$\tau=L/R$是该电路的时间常数。常数B由初始条件确定，即由下式

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=B+I_S=0 \quad 即B=-I_S$$

最后得RL一阶电路的零状态响应为

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} = RI_S e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t > 0)$$



6-4-3 一阶电路电容电压、电感电流零状态响应的一般公式

直流激励下零状态电路的动态过程是动态元件的充电过程。一般表达式为

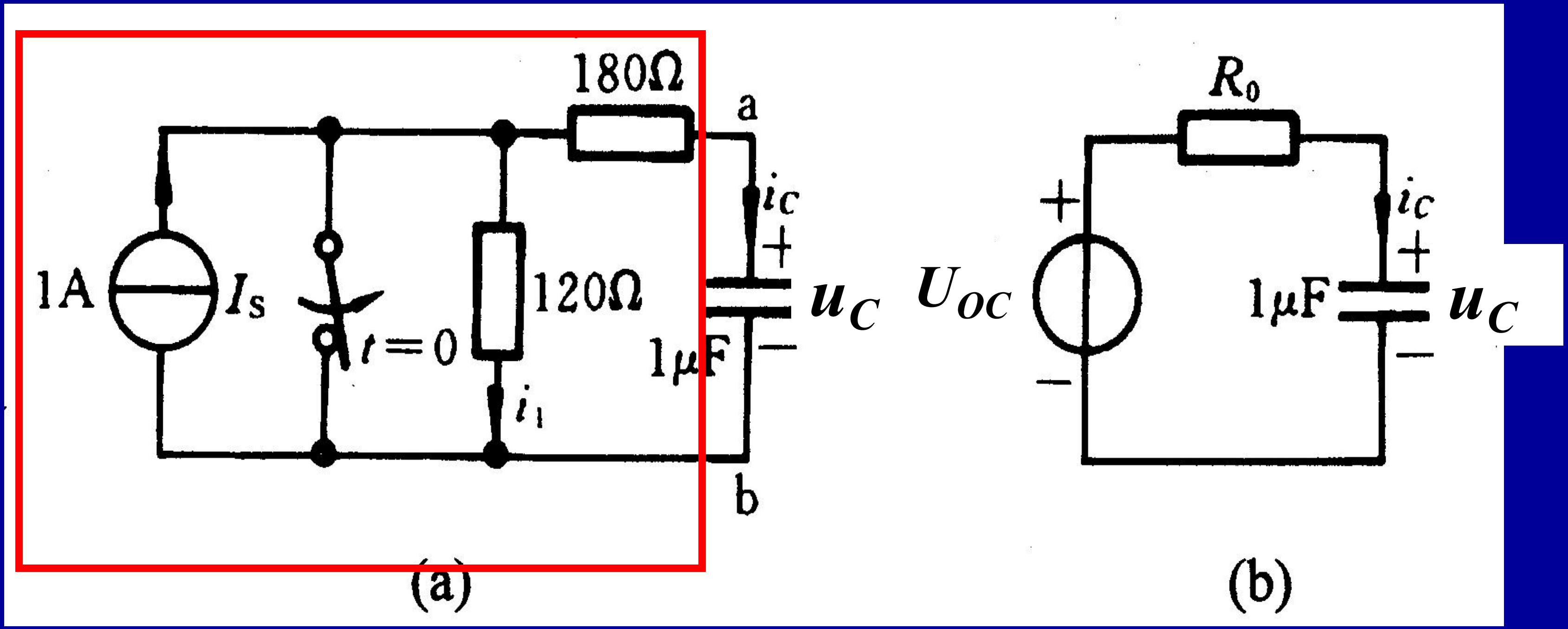
$$u_{Czs}(t) = u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

$$i_{Lzs}(t) = i_L(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

$u_{\mathrm{CzS}}(\infty)$、$i_{\mathrm{LzS}}(\infty)$——稳态值或终值

τ——时间常数

例13 图(a)电路原已稳定，求$t\geq 0$的$u_C(t)$, $i_C(t)$及$i_1(t)$。



(a) (b)

解：先求等效戴维南电路，得图(b)，其中 $U_{oc}=120\times 1=120\text{V}$ $R_0=120+180=300\Omega$

$$\tau = R_0 C = 300\times 10^{-6} = 3\times 10^{-4} s = 300\,\mu s$$

当电路达到新的稳定状态时，电容相当开路，可得 $u_C(\infty) = U_{oc} = 120\text{V}$

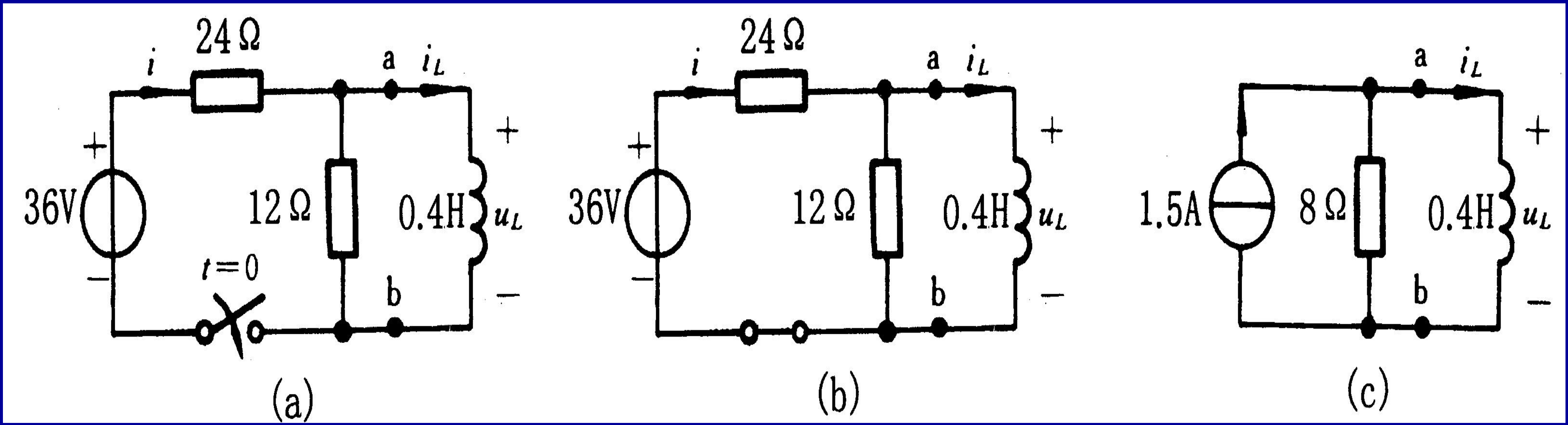
$$u_C(t) = U_{oc}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 120(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 10^4 t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0.4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 10^4 t}\text{A} \qquad (t > 0)$$

图(a)用KCL可得

$$i_1(t) = I_S - i_C(t) = (1-0.4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 10^4 t})\text{A}, \quad (t > 0)$$

例14 图(a)电路原已稳定，求 $t \geq 0$ 的电感电流和电感电压。

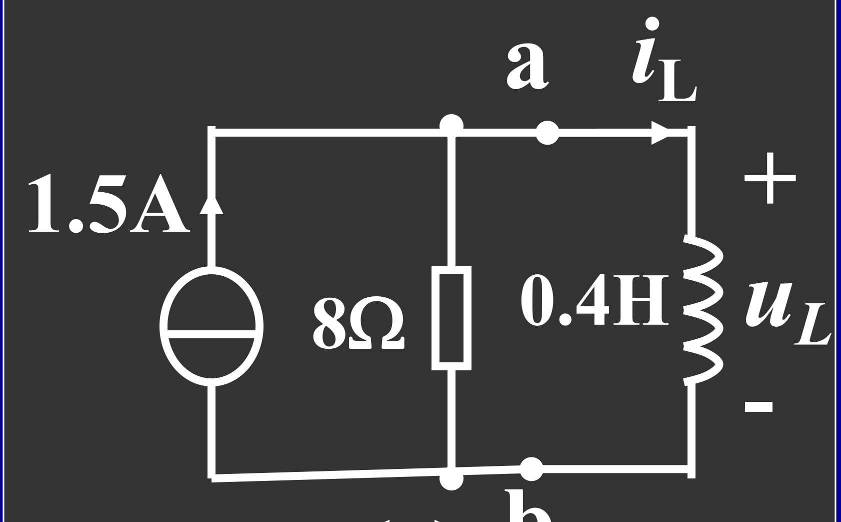


解：换路后如图(b)，开关闭合瞬间电感电压有界，电感电流不能跃变，即

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

将图(b)用诺顿等效电路代替，得到图(c) 电路。求得时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.4}{8} = 0.05s$$



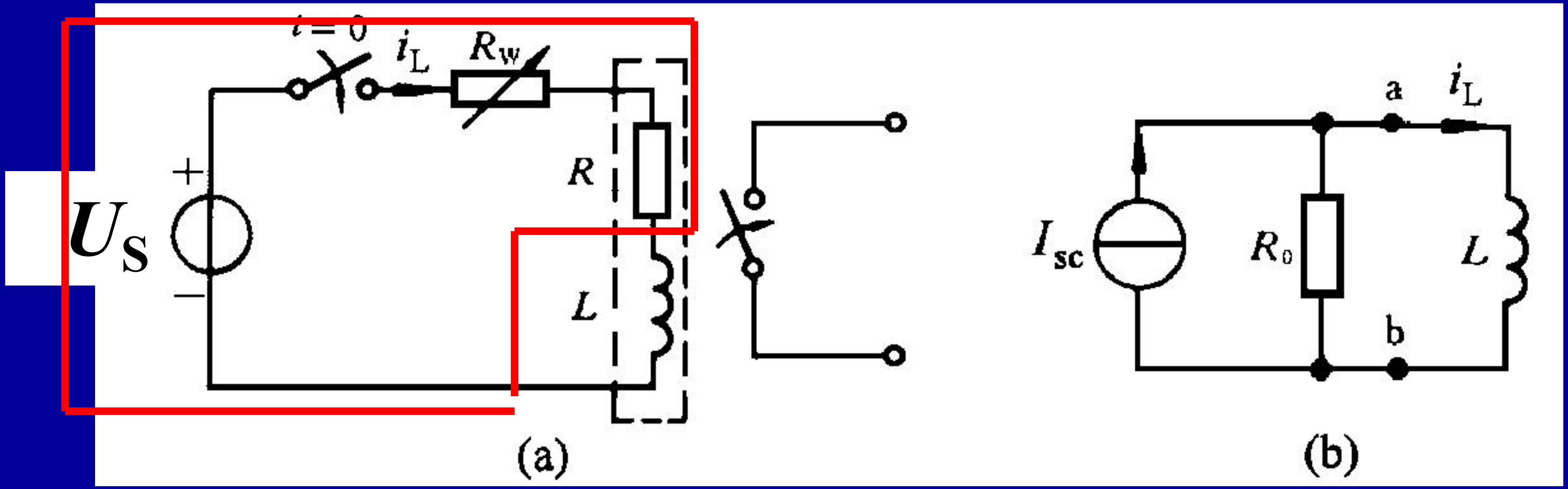
(c)

因此

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t})\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20e^{-20t} = 12e^{-20t}\text{V} \quad (t > 0)$$

例15 图(a)为一继电器延时电路模型。继电器参数：R=100Ω，L=4H，当线圈电流达到6mA时，继电器动作，将触头接通。从开关闭合到触头接通时间称为延时时间。为改变延时时间，在电路中串联一个电位器，阻值从零到900Ω 间变化。若U_S=12V，试求电位器电阻值变化所引起的延时时间的变化范围



解：开关闭合前，电路处于零状态，$i_L(0^-)=0$。

由换路定则得：$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$。用图(b)所示诺顿等效电路代替，其中

$$R_o = R + R_W \qquad I_{sc} = \frac{U_S}{R + R_W} = \frac{U_S}{R_o}$$

电感电流的表达式为

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R_o}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

设t_0为延时时间，则有 $$i_L(t_0)=\frac{U_S}{R_o}(1-e^{-\frac{t_0}{\tau}})=6\text{mA}$$

由此求得 $$t_0=-\tau\ \ln\left[1-\frac{R_o i_L(t_0)}{V_S}\right]$$

当R_w=0Ω时, τ =0.04s

$$t_0=-0.04\,ln\left[1-\frac{100\times 6\times 10^{-3}}{12}\right]=2.05\text{ms}$$

当R_w=900Ω时, τ =0.004s

$$t_0=-0.004\,ln\left[1-\frac{1000\times 6\times 10^{-3}}{12}\right]=2.77\text{ms}$$