11　二端口网络

11-1 二端口网络
11-2 二端口网络的方程与参数
11-3 二端口网络的等效电路
11-5 二端口网络的连接

11-1 二端口网络

具有多个端子与外电路连接的网络（或元件），称为多端网络（或多端元件）。在这些端子中，若在任一时刻，从某一端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，这样一对端子，称为一个端口。二端网络的两个端子就满足上述端口条件，故称二端网络为单口网络。假若四端网络的两对端子分别均满足端口条件，称这类四端网络为二端口网络，也称双口网络。

单口网络[图11-1(a)]只有一个端口电压和一个端口电流。无源单口网络，其端口特性可用联系u-i关系的一个方程 $u=R_0 i$ 或 $i=G_0 u$来描述。二端口网络[图11-1(b)]则有两个端口电压u_1、u_2和两个端口电流i_1、i_2。其端口特性可用其中任意两个变量列写的两个方程来描述，显然，共有六种不同的表达形式。

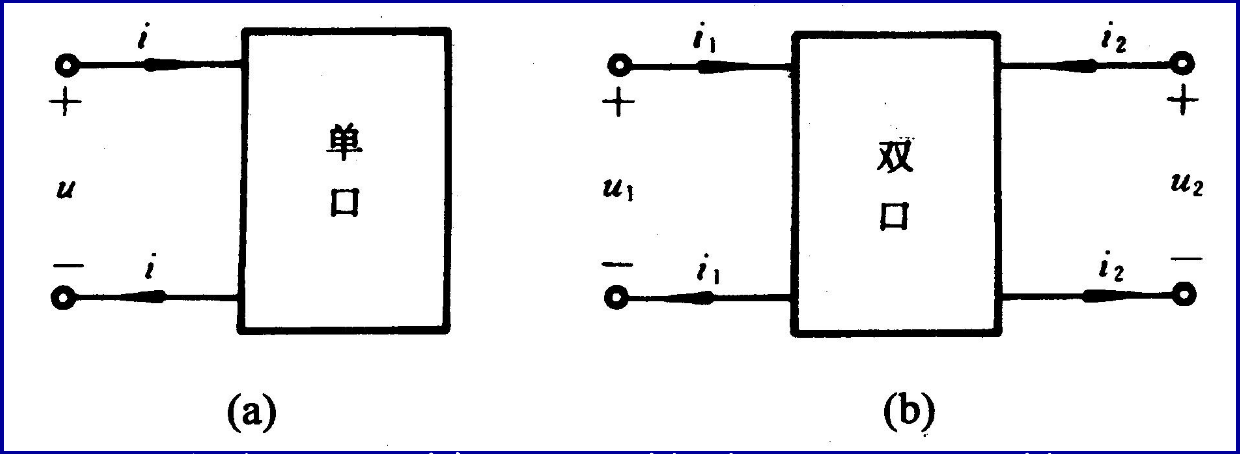


图11-1单口网络与双口网络

通常，只讨论不含独立电源、初始储能为零的线性二端口网络，现分别介绍它们的表达式。

本章仅讨论实际应用较多的四种参数：Z参数、Y参数、H参数和A参数。

并注意与第九章9-1(次级不是开路就是短路)的不同。

11-2　二端口网络的方程与参数

11-2-1 Z参数

若将二端口网络的端口电流作为自变量，则可建立如下方程：

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$$

其中,Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} 称为二端口网络的Z参数。四个参数的计算方法如下：

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

为输出端口开路时的输入阻抗。

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\Big|_{\dot{I}_1=0}$$

为输入端口开路时的转移阻抗。

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0}$$

为输出端口开路时的转移阻抗。

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\Big|_{\dot{I}_1=0}$$

为输入端口开路时的输出阻抗。

由于Z参数均具有阻抗量纲，且又是在输入或输出端口开路时确定，因此Z参数又称为开路阻抗参数。

11-2-2 Y参数

若将二端口网络的端口电压作为自变量，则可建立如下方程：

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$$
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2$$

其中，$Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ 称为二端口网络的Y参数。四个参数的计算方法如下：

$$Y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的输入导纳。

$$Y_{12}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$

为输入端口短路时的转移导纳。

$$Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的转移导纳。

$$Y_{22}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$

为输入端口短路时的输出导纳。

由于Y参数均具有导纳量纲，且又是在输入或输出端口短路时确定，因此Y参数又称为短路导纳参数。

11-2-3 H参数

若将二端口网络的 $\dot{I}_1, \dot{U}_2$ 作为自变量，则可建立如下方程：

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2$$

其中，$H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ 称为二端口网络的H参数。四个参数的计算方法如下：

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的输入阻抗。它具有阻抗量纲。

$$H_{12}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0}$$

为输入端口开路时的反向转移电压比。无量纲。

$$H_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的正向转移电流比。无量纲。

$$H_{22}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0}$$

为输入端口开路时的输出导纳。具有导纳量纲。

由于H参数中，参数有各种量纲，因此H参数又称为混合参数。

11-2-4 A参数

若将二端口网络的 $\dot{U}_2, -\dot{I}_2$ 作为自变量，则可建立如下方程：

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2$$

其中，A, B, C, D 称为二端口网络的A参数。四个参数的计算方法如下：

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

为输出端口开路时的反向转移电压比。无量纲。

$$B=\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\Big|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的反向转移阻抗。它具有阻抗量纲。

$$C=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\Big|_{\dot{I}_2=0}$$

为输出端口开路时的正向转移导纳。它具有导纳量纲。

$$D=\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\Big|_{\dot{U}_2=0}$$

为输出端口短路时的反向转移电流比。无量纲。

A参数也属于混合参数，但工程上常称A参数为(正向)传输参数。

相应的参数用矩阵形式表示为：

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

当然，还应该要两种参数，它们是：
另一种混合参数，**G参数**；

(反向) 传输参数，**B参数**。

11-2-5 各种参数的相互转换

二端口网络的各种参数是从各种不同的角度得到的，是对于同一个二端口网络外部特性的描述。因此，各种参数之间必然存在内在的联系，只要参数存在，可以从一种参数转换成另一种参数。

书上P.317表11-1列出了上述四种参数之间的转换关系。可供参阅。

有关每一种参数特点的讨论：

1. 对于任意二端口网络需用四个参数来描述；

2. 对于无源(无受控源)二端口网络，由互易定理可知：互阻抗、互导纳相等，即

$Z_{12}=Z_{21}$ ， $Y_{12}=Y_{21}$ 由表11-1可得：

$$H_{12}=-H_{21}=-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}\ ,\ AD-BC=\frac{Y_{11}Y_{22}-\Delta Y}{Y_{21}^{2}}=1$$

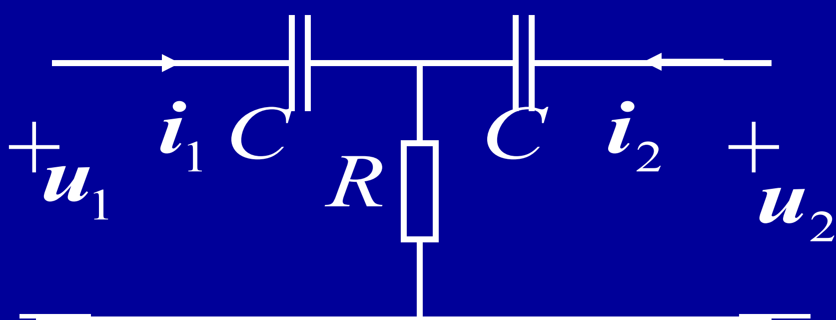
可见，无源二端口网络只有三个参数是独立的。

3. 对于既无源又对称的二端口网络，由于输入端口和输出端口的阻抗或导纳相等，故四个参数中只有两个是独立的。

下面举例说明已知双口网络，求双口网络参数的方法：

1. 直接应用定义来做；

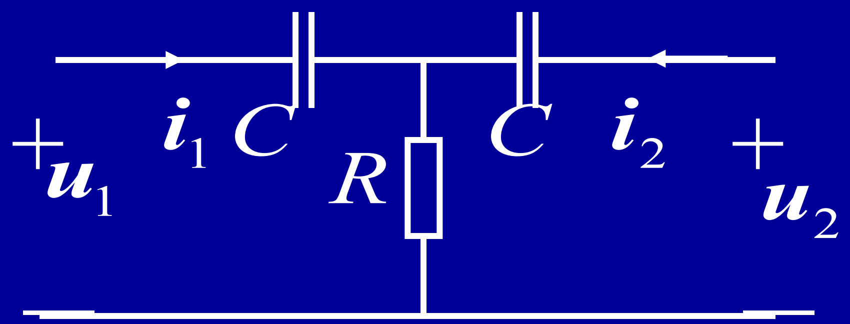
例：试求下图所示二端口网络的Z参数。



$$Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

$$=R+\frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} = R$$



由于此网络是无源对称网络，有

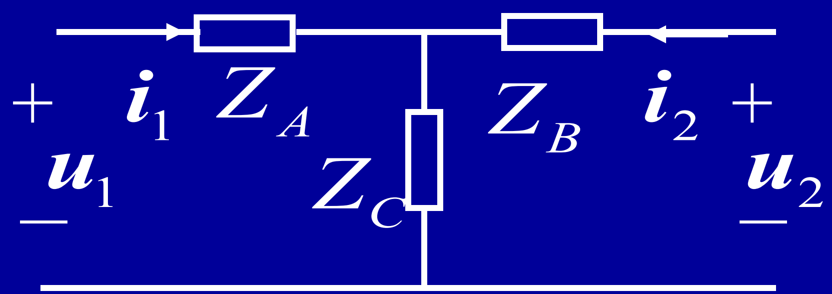
$$Z_{21} = Z_{12}\ , \quad Z_{22} = Z_{11}$$

得Z参数为：

$$Z = \begin{bmatrix} R + \dfrac{1}{j\omega C} & R \\ R & R + \dfrac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

2. 列写网络方程(节点方程、网孔方程)来做。

例：求下图所示T型二端口网络的Z参数。



列网孔方程

$$\dot{U}_1 = Z_A\dot{I}_1 + Z_C(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_A + Z_C)\dot{I}_1 + Z_C\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_B\dot{I}_2 + Z_C(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = Z_C\dot{I}_1 + (Z_B + Z_C)\dot{I}_2$$

得Z参数为：

$$Z = \begin{bmatrix} Z_A + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_B + Z_C \end{bmatrix}$$

如果需求Y参数，由表11-1,或转变自变量的方法，得

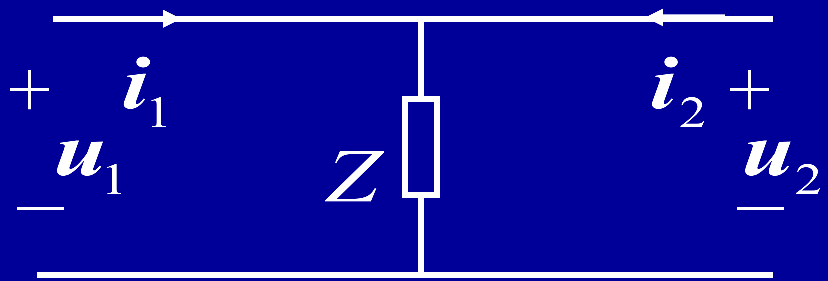
$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & Z_{12} \\ \dot{U}_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22}\dot{U}_1 - Z_{12}\dot{U}_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z}\dot{U}_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta_Z}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{U}_1 \\ Z_{21} & \dot{U}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11}\dot{U}_2 - Z_{21}\dot{U}_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}\dot{U}_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}\dot{U}_2$$

可以看出，1.参数转换是有条件的，即

$$\Delta_Z \neq 0$$

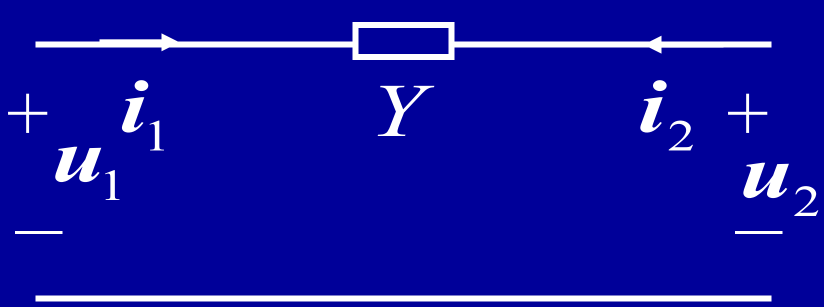
2. 并不是所有二端口网络六种参数都存在。当 $Z_A = Z_B = 0$ 时，



$$Z = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}$$

$\Delta_Z = 0$ 它无Y参数

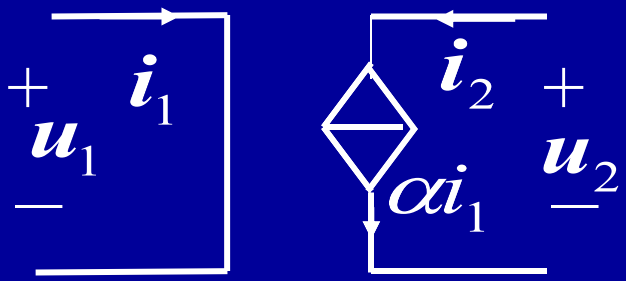
对偶地，



$$Y = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$$

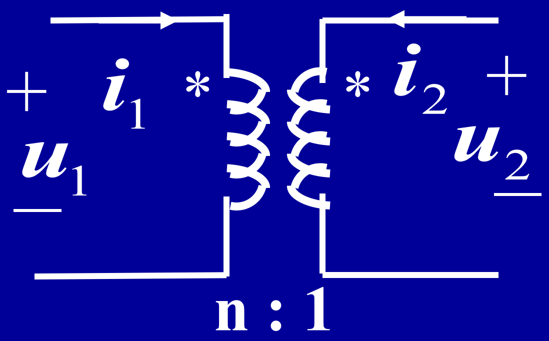
$\Delta_Y = 0$ 它无Z参数

如CCCS，它有H参数。



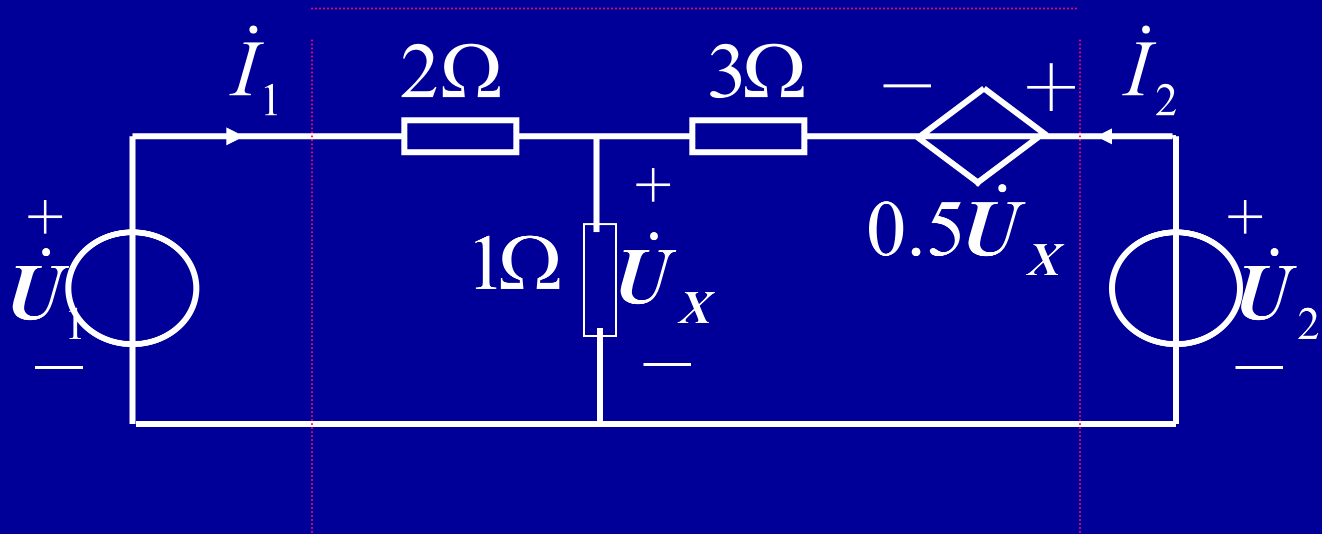
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \therefore H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

如理想变压器，它有H参数。



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \therefore H = \begin{bmatrix} 0 & +n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

例：试求下图所示电路的Y参数。



解：设二端口网络两端加电压源，列网孔方程。

$$\begin{cases} 3\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 + 4\dot{I}_2 = \dot{U}_2 - 0.5\dot{U}_X \\ \dot{U}_X = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

消去变量 $\dot{U}_X$ ：

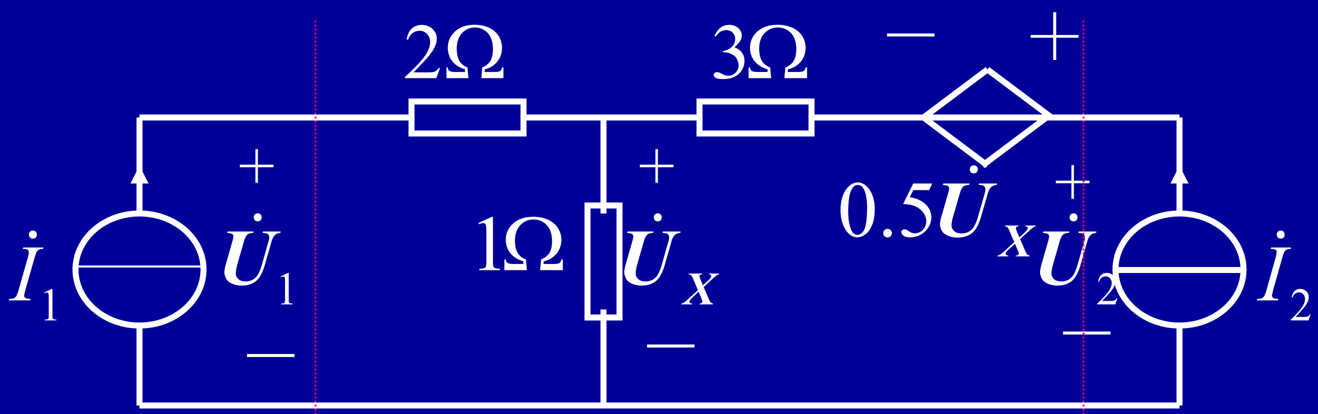
$$\begin{cases} 3\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ \dfrac{3}{2}\dot{I}_1 + \dfrac{9}{2}\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \end{cases} \qquad Z = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{9}{2} \end{bmatrix}$$

这就是Z参数的方程Z参数矩阵。如果需求Y参数，只需改变上述方程的形式即可。

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}\dot{U}_1 - \dfrac{1}{12}\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \\ -\dfrac{1}{8}\dot{U}_1 + \dfrac{1}{4}\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \end{cases} \qquad Y = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{8} & -\dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{1}{8} & +\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

这就是Y参数的方程和Y参数矩阵。如果需求其它参数，方法是一样的。

如果改变二端口网络两端为电流源，列节点方程也是可以的。



$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\dot{U}_1-\frac{1}{2}\dot{U}_X=\dot{I}_1\\
(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\dot{U}_X-\frac{1}{2}\dot{U}_1-\frac{1}{3}\dot{U}_2=-\frac{1}{6}\dot{U}_X\\
-\frac{1}{3}\dot{U}_2-\frac{1}{3}\dot{U}_X=\dot{I}_2+\frac{1}{6}\dot{U}_X
\end{cases}
$$

消除中间变量 $\dot{U}_X$。得Y参数方程和Y参数矩阵。

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}\dot{U}_1 - \dfrac{1}{12}\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \\ -\dfrac{1}{8}\dot{U}_1 + \dfrac{1}{4}\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{8} & -\dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{1}{8} & +\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

11-3　二端口网络的等效电路

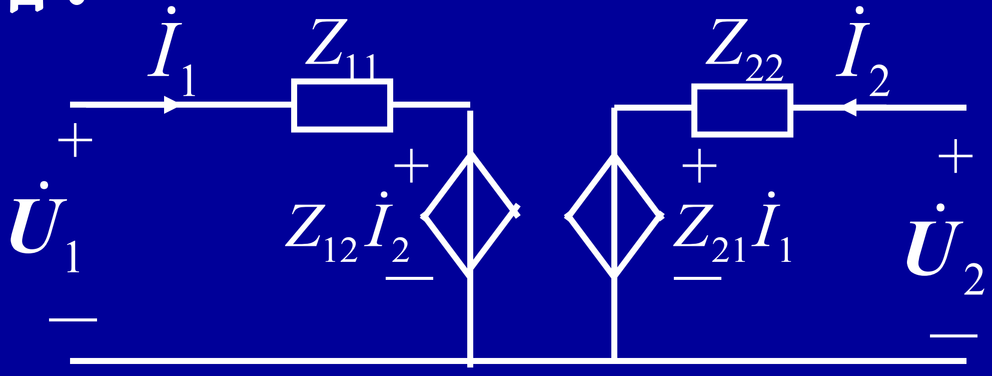
等效电路法是电路分析的主要方法，从前面的知识可知：任意无源线性单口网络其外部特性都可以用一个等效阻抗或等效导纳来表征；同样地，我们已经知道，任意无源线性二端口网络其外部特性都可以用三个参数来确定。那么，只要能找到由三个阻抗或导纳组成简单的二端口网络，如果其网络参数与原二端口网络的参数相同，则就说明这两个二端口网络的外部特性相同，即它们相互等效。二端口网络常见的最简单结构为T形和Π形两种形式。

本节介绍Z参数、Y参数和H参数的等效电路。

由Z参数方程：

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$$

可构成如图所示的含两个受控源的等效电路：

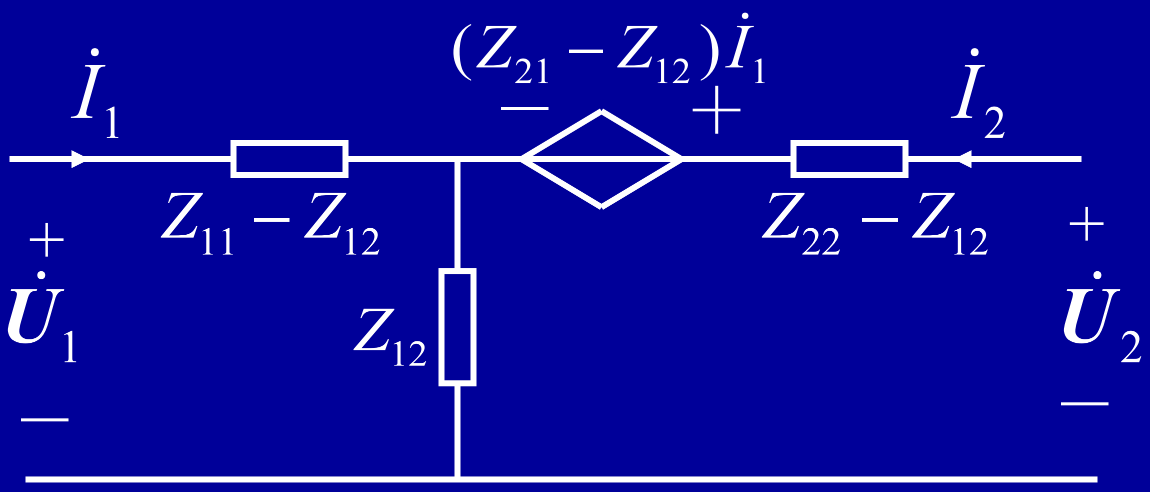


如果将Z参数方程改变一下，可得：

$$\dot{U}_1 = (Z_{11} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

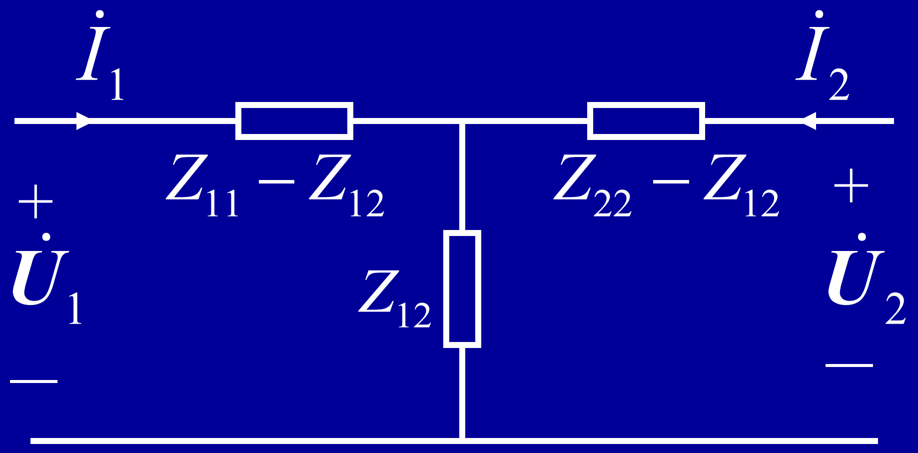
$$\dot{U}_2 = (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1 + (Z_{22} - Z_{12})\dot{I}_2 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

由此可得如下图所示的T形等效电路：



上述两种等效电路适合任意二端口网络。

当二端口网络为无源线性网络时，由互易定理：$Z_{12}=Z_{21}$ ，等效电路简化为无源T形等效电路：

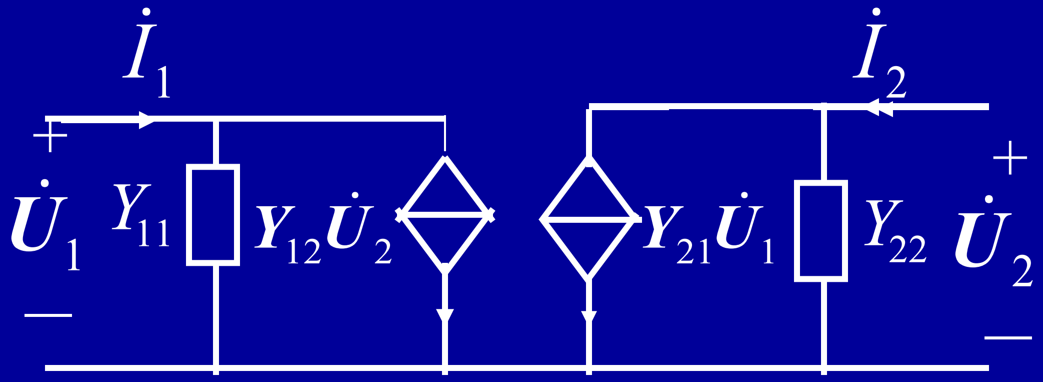


上述等效电路适合任意线性二端口网络。

同样地，由Y参数方程：

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$$
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2$$

可构成如下图所示的含两个受控源的等效电路：

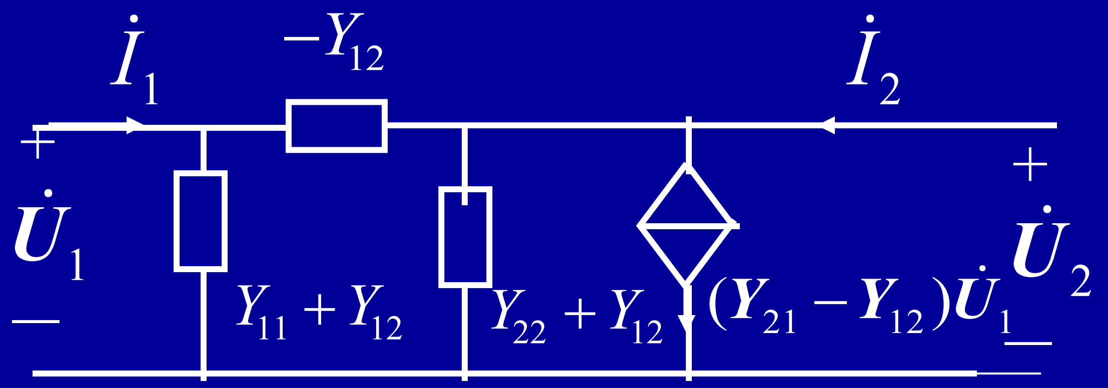


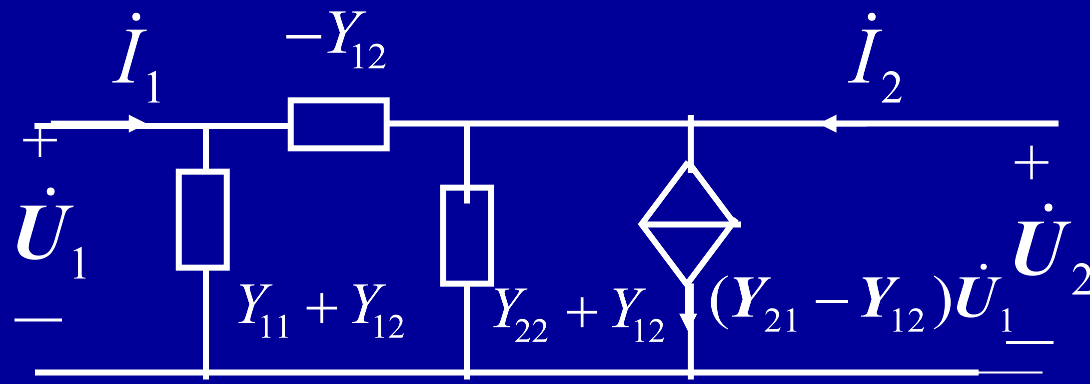
如果将Y参数方程改变一下，可得：

$$\dot{I}_1 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$$

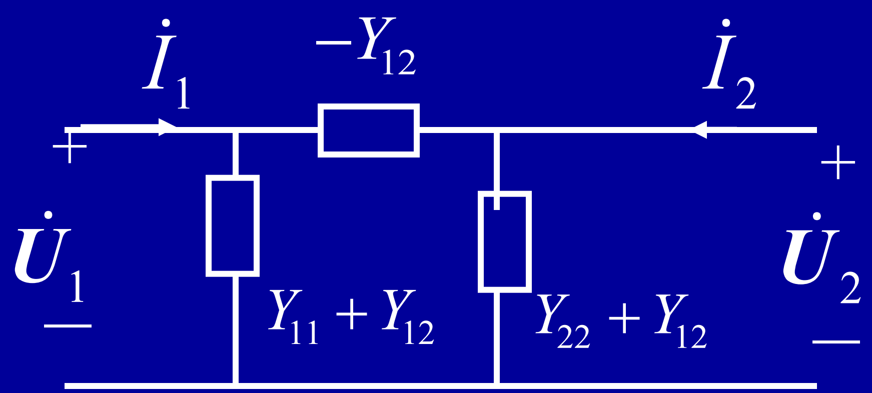
$$\dot{I}_2 = (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1 + (Y_{22} + Y_{12})\dot{U}_2 - Y_{12}(\dot{U}_2 - \dot{U}_1)$$

由此可得如下图所示的Π形等效电路：





当二端口网络为无源线性网络时，由互易定理：$Y_{12}=Y_{21}$ ，等效电路简化为无源Π形等效电路：

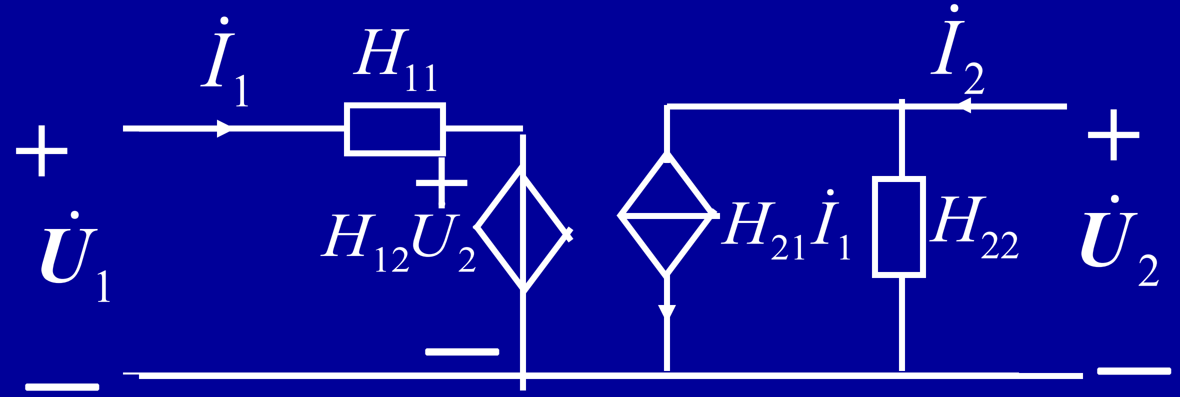


同样地，由H参数方程：

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2$$

可构成如下图所示的含两个受控源的等效电路：



上述等效电路是晶体三极管的等效电路，此电路的优点是参数便于测量，物理意义明确：

H_{11} 是三极管的输入电阻；

H_{12} 是三极管的反向电压传输系数；

H_{21} 是三极管的电流放大系数；

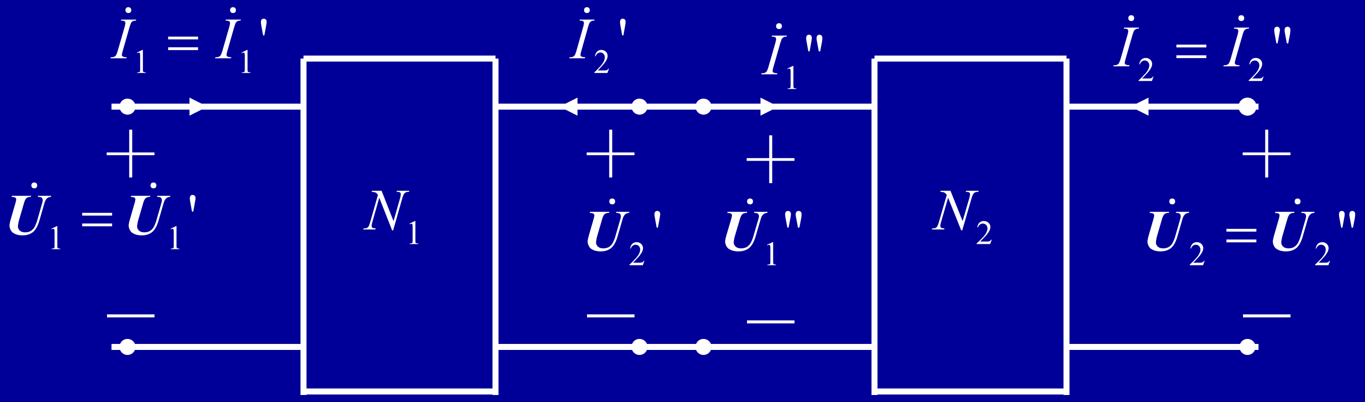
H_{22} 是三极管的输出导纳。

11-5　二端口网络的联接

对于一个复杂的二端口网络来说，可以把它看成是若干相对简单的二端口网络按某种方式联接而成，二端口网络可以按多种不同的方式相互联接。其主要联接方式有：级联、串联、并联；还有串、并联等。

1. 两个二端口网络N_1和N_2级联；设相应的A参数分别为：

$$A' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \qquad A'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$



(a) 级联

根据A参数方程，有 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = A'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2'' \\ -\dot{I}_2'' \end{bmatrix}$

由图：$\dot{U}_1 = \dot{U}_1'$ $\dot{I}_1 = \dot{I}_1'$ $\dot{U}_2 = \dot{U}_2''$ $\dot{I}_2 = \dot{I}_2''$ $\dot{U}_2' = \dot{U}_1''$ $\dot{I}_2' = -\dot{I}_1''$

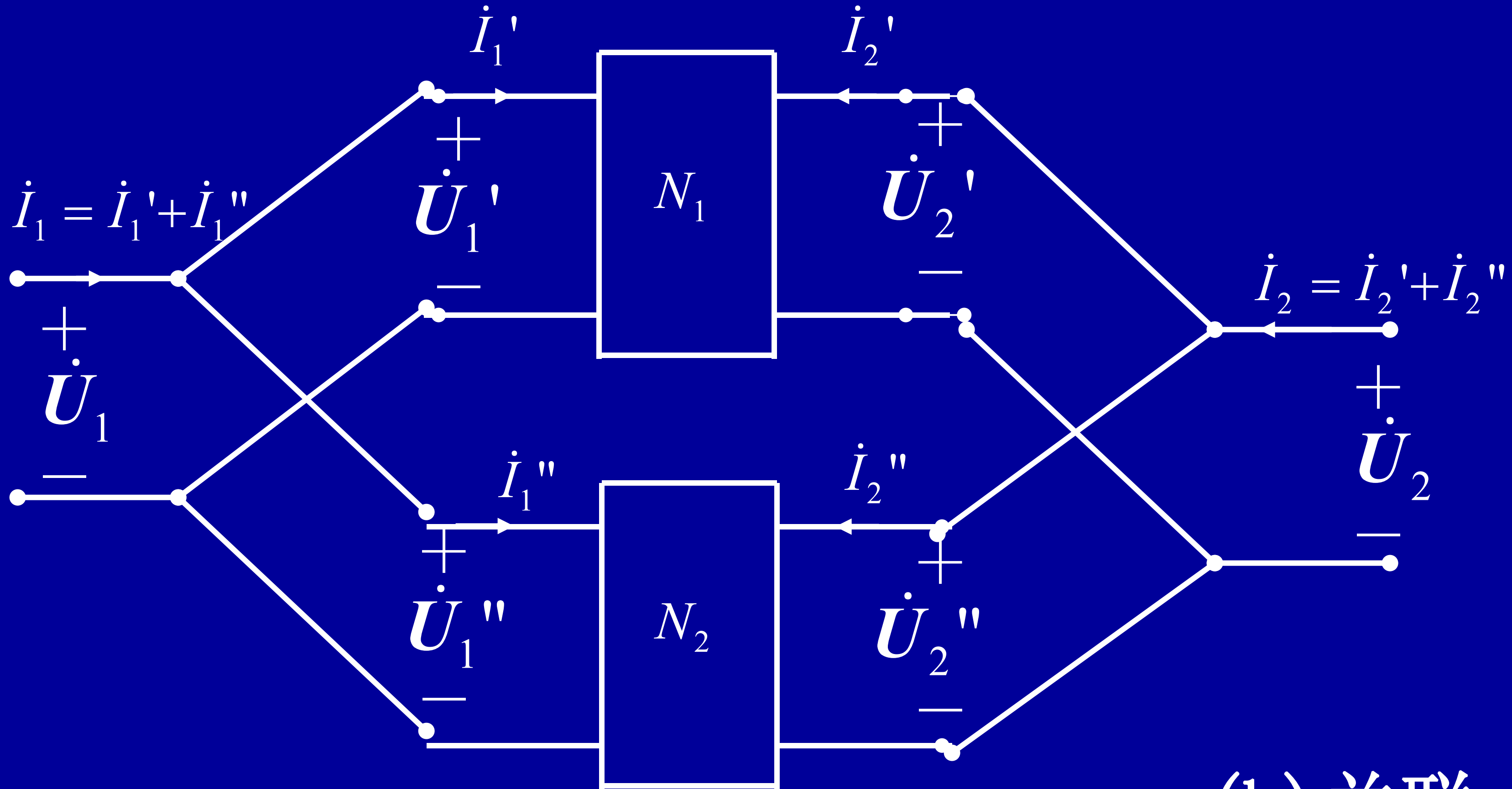
得：
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = A' A'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2'' \\ -\dot{I}_2'' \end{bmatrix}$$
$$= A' A'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

故得二端口网络级联时A参数的公式：

$$A = A'A''$$

2.两个二端口网络N_1和N_2并联；设相应的Y参数分别为：

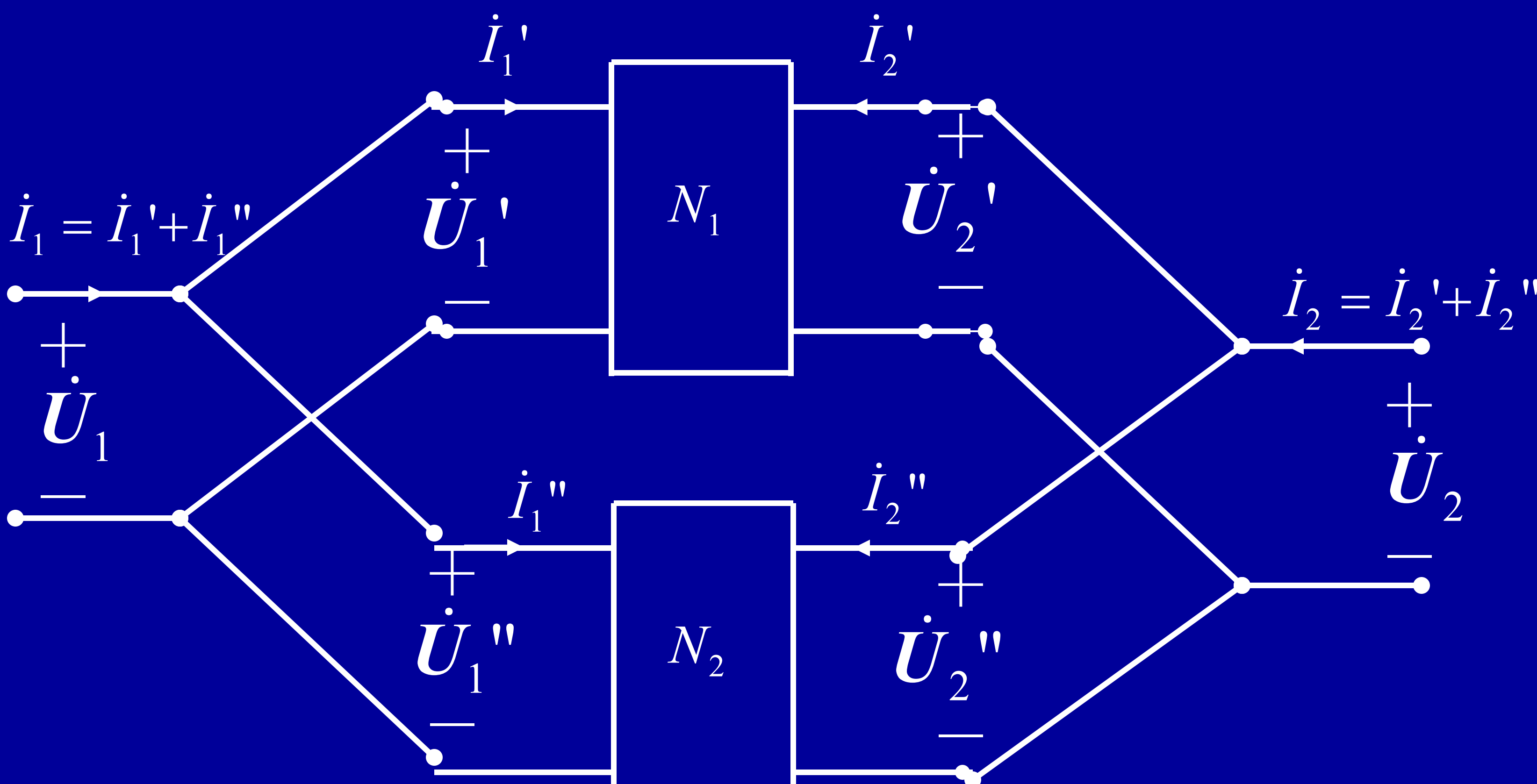
$$Y' = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \qquad Y'' = \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix}$$



(b) 并联

由图： $\dot U_1 = \dot U_1' = \dot U_1''$ $\quad$ $\dot U_2 = \dot U_2' = \dot U_2''$

$\dot I_1 = \dot I_1' + \dot I_1''$ $\quad$ $\dot I_2 = \dot I_2' + \dot I_2''$


$\dot{I}_1'$
$\dot{I}_2'$
$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1''$
$\dot{U}_1'$
N_1
$\dot{U}_2'$
$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$
$\dot{U}_1$
$\dot{U}_2$
$\dot{I}_1''$
$\dot{I}_2''$
$\dot{U}_1''$
N_2
$\dot{U}_2''$

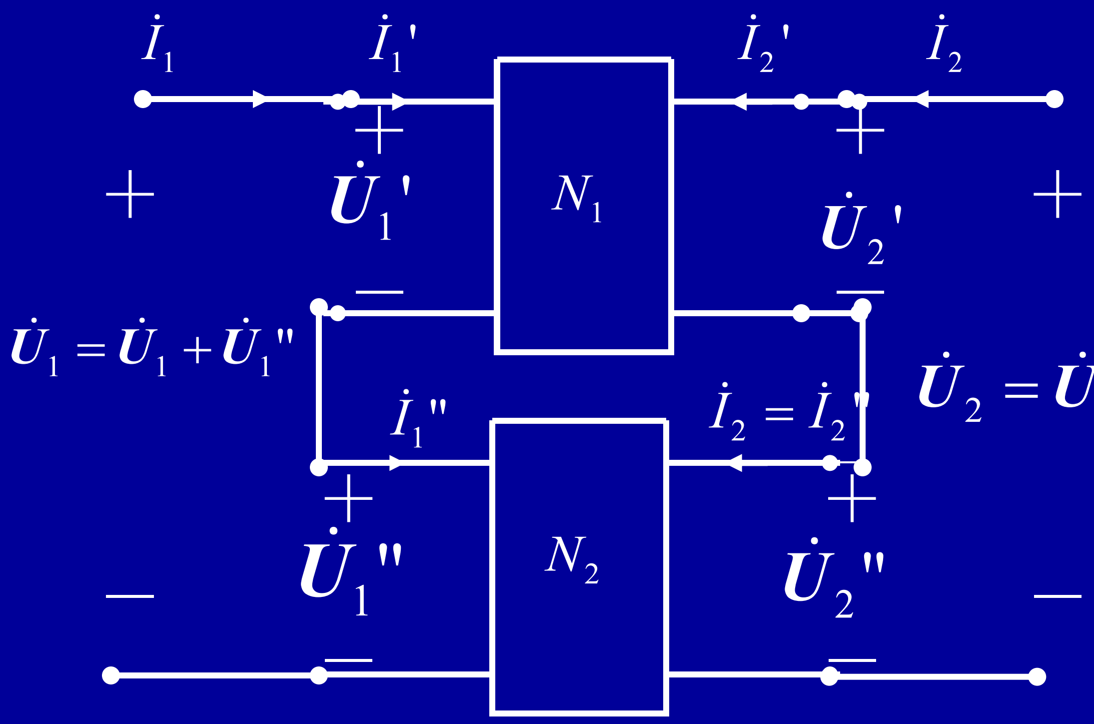
(b) 并联

显然，有

$$Y = Y' + Y''$$

3. 两个二端口网络N_1和N_2串联；设相应的Z参数分别为：

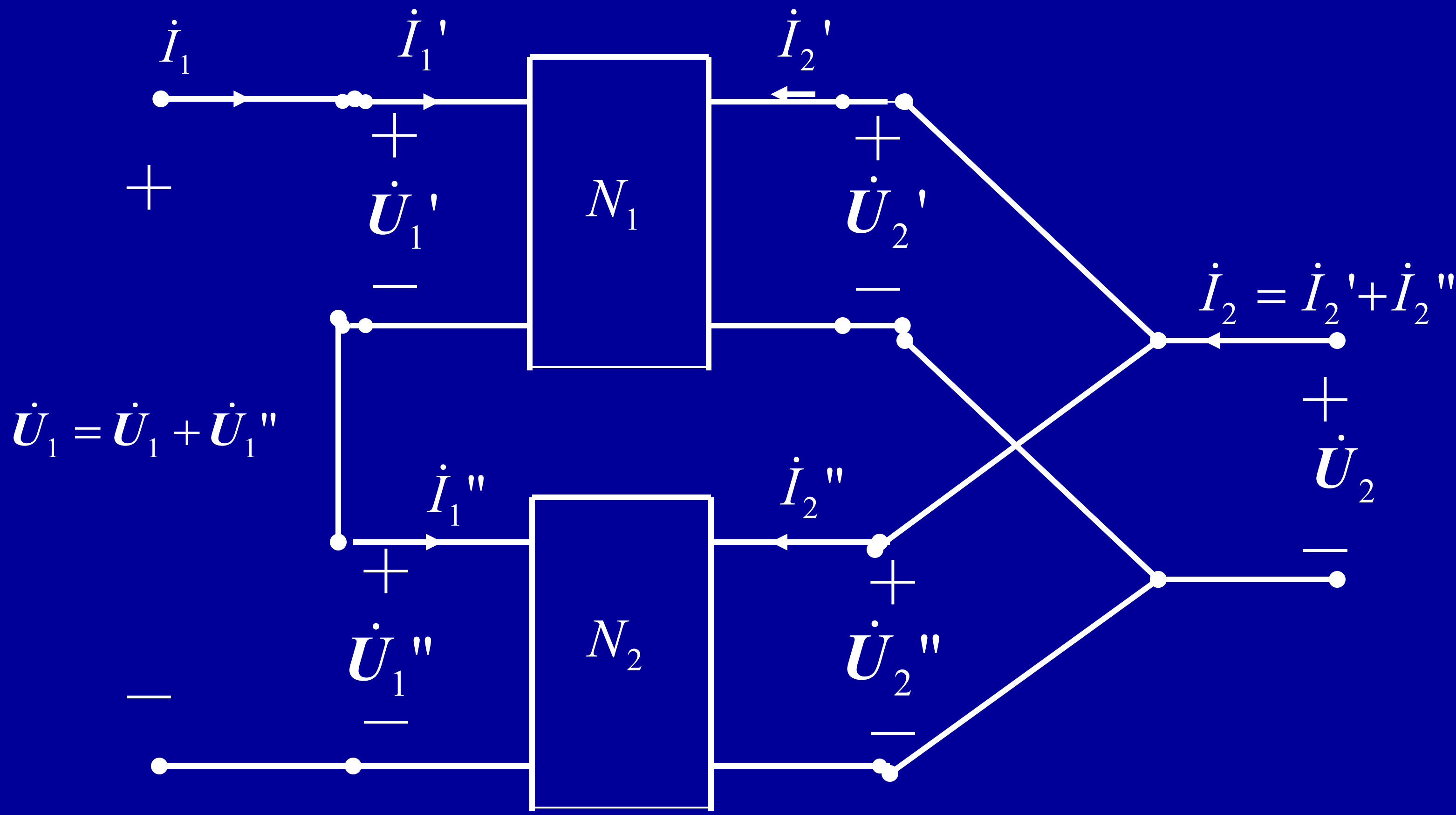
$$Z' = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \qquad Z'' = \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix}$$



$\dot{U}_2 = \dot{U}_2 + \dot{U}_2''$ 同理可得：

$$Z = Z' + Z''$$

4. 混联(a. 串、并联)的情况： $H = H' + H''$



对偶地，(b. 并、串联)的情况： $G = G' + G''$