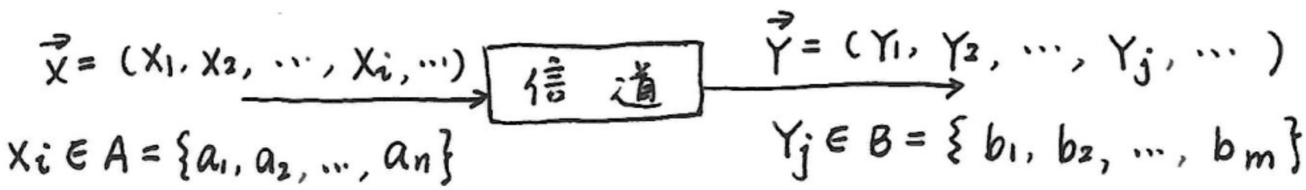
第三章 信道与信道容量

3.1 信道的数学模型

基本数学模型

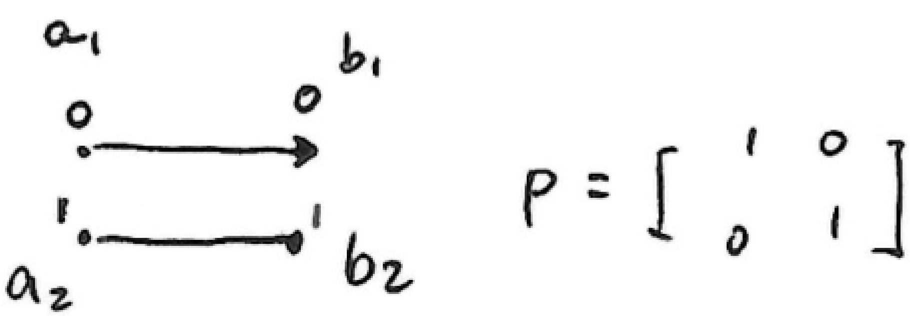
- 

- $\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots)$，$X_i\in A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为输入；
- $\vec{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_j,\cdots)$，$Y_j\in B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$为输出。
- 用条件概率（转移概率）$p(\vec{Y}|\vec{X})$来描述输入、输出之间的依赖关系。

无干扰信道（无噪声）

- $\vec{Y}=f(\vec{X})$，已知$\vec{X}$就能确知$\vec{Y}$

$$p(\vec{Y}|\vec{X})=\begin{cases}1, & \vec{Y}=f(\vec{X})\\ 0, & \vec{Y}\neq f(\vec{X})\end{cases}$$

- 例子：
    - 当输入a_1对应输出b_1，输入a_2对应输出b_2时，转移概率矩阵$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
    - 

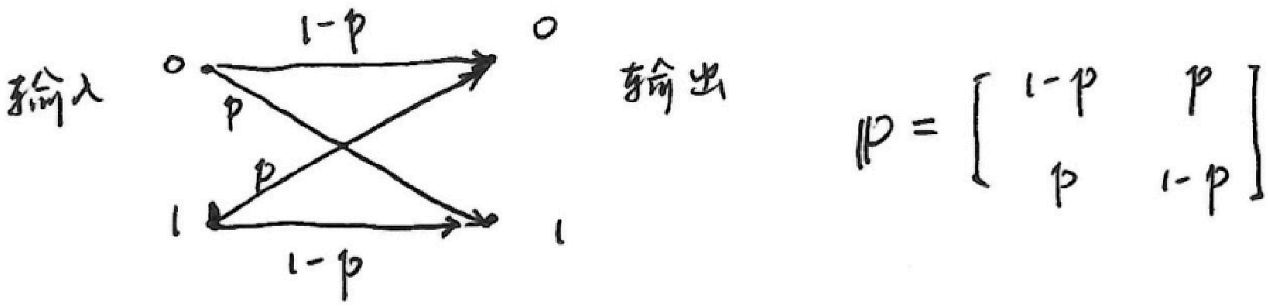
有干扰无记忆信道

- 无记忆：

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)\cdots p(y_l|x_l)$$

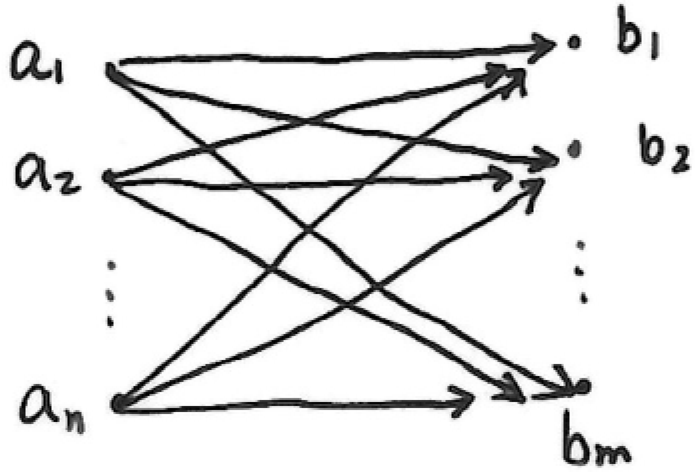
- 只需分析单个符号的转移概率$p(y_j|x_i)$

二进制离散对称信道（Binary Symmetric Channel，BSC）

- 输入$X \in A = \{0, 1\}$
- 输出$Y \in B = \{0, 1\}$
- $BSC \begin{cases} p(Y=0|X=1) = p(Y=1|X=0) = p \\ p(Y=1|X=1) = p(Y=0|X=0) = 1-p \end{cases}$
- 其中p为错误概率，其转移关系和转移概率矩阵如下：
- 

离散无记忆信道（Discrete Memoryless Channel，DMC）

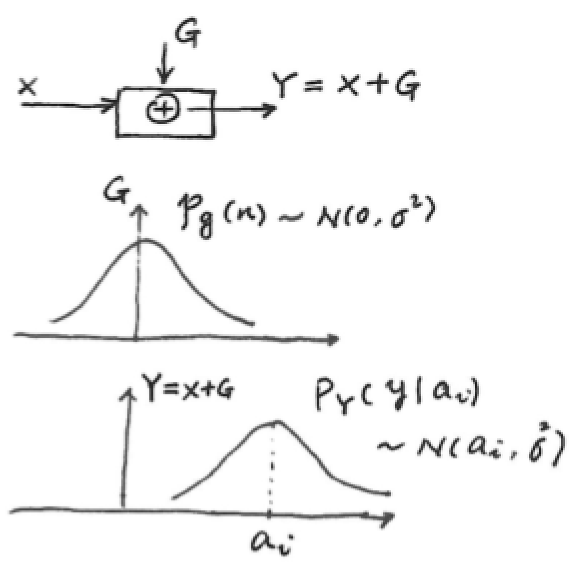
- 输入$X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$
- 转移概率矩阵$P = [p(b_j|a_i)] = [p_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$
- 并且满足$\sum_{j=1}^{m} p(b_j|a_i) = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$

- 

- 二进制离散对称信道（BSC）是离散无记忆信道（DMC）的特例

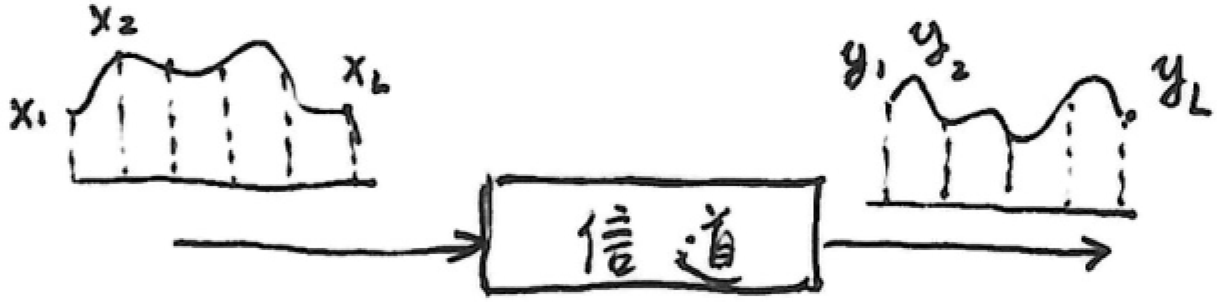
离散输入、连续输出信道

- 输入$X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in \{-\infty, +\infty\}$
- 信道模型为$Y = X + G$，其中$G \in \{-\infty, +\infty\}$，$p_G(n) \sim N(0, \sigma^2)$
- 条件概率密度$p_Y(y|a_i) \sim N(a_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-a_i)^2}{2\sigma^2}}$
- 图例:



波形信道

- 当 t_B、f_m 受限，$L = 2t_B f_m$ 时
- 输入 $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_L)$
- 输出 $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_L)$

- 

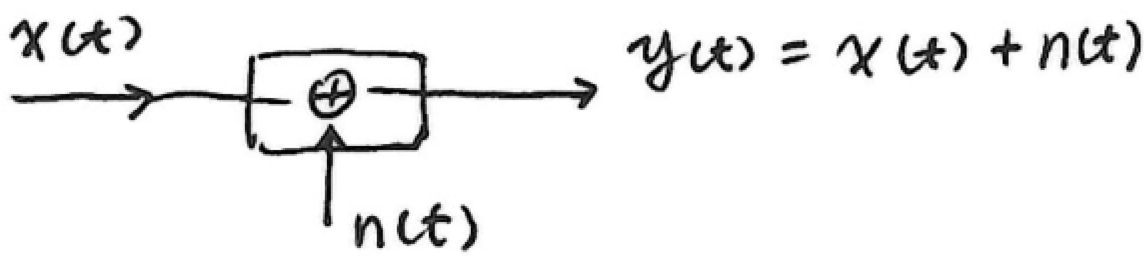
- **时间离散，取值连续的多维连续信道**，信道转移概率密度函数为：

$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1, y_2, \cdots, y_L|x_1, x_2, \cdots, x_L)$$

- **连续无记忆信道**：

$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1|x_1)p_y(y_2|x_2)\cdots p_y(y_L|x_L) = \prod_{l=1}^{L} p_Y(y_l|x_l)$$

因此无记忆时重点讨论单符号信道！

- 信道模型为 $y(t) = x(t) + n(t)$
- 其中 $n(t)$ **为加性噪声，与信号 $x(t)$ 相互独立**
- 

- 根据概率关系有：

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X,n}(x, n) = p_X(x)p_n(n)$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_{X,n}(x, n)}{p_X(x)} = p_n(n)$$

- 进一步考虑条件熵：

$$
\begin{aligned}
H_c(Y|X) &= -\iint_R p_{X,Y}(x,y)\log p_Y(y|x)dxdy \\
&= -\int_R p_X(x)dx\int_R p_Y(y|x)\log p_Y(y|x)dy \\
&= -\int_R p_n(n)\log p_n(n)dn \\
&= H_c(n)
\end{aligned}
$$

条件熵 $H_c(Y|X)$ 称为**噪声熵**

- 在加性多维连续信道中
  - $$\vec{y}=\vec{x}+\vec{n}$$
  - 同理有 $p_{\vec{Y}}(\vec{y}|\vec{x})=p_n(\vec{n})$，$H_c(\vec{y}|\vec{x})=H_c(\vec{n})$

有干扰有记忆信道

> 略

信道容量的定义

- 定义信道的**信息传输率** R 为信道中平均每个符号所传输的信息量：

$$
\begin{aligned}
R = I(X;Y) &= H(X)-H(X|Y) \quad \text{bit/信道符号} \\
&= H(Y)-H(Y|X)
\end{aligned}
$$

- 设 T 为信道中符号的平均传输时间，定义**信息传输速率**：

$$R_t=\frac{R}{T}=\frac{I(X;Y)}{T} \quad \text{bit/秒}$$

  - $I(X;Y)$ 是输入符号分布概率 $p(a_i)$ 和信道转移概率 $p(b_j|a_i)$ 的函数，即

$$I(X;Y)=f(p(a_i),p(b_j|a_i))$$

- 对于某特定信道，$p(b_j|a_i)$ 确定，则 $I(X;Y)$ 是关于 $p(a_i)$ 的凹函数（∩型上凸函数），也即可以找到某种概率分布 $p(a_i)$，使 $I(X;Y)$ 达到最大，该最大值为**信道容量**：

$$C=\max_{p(a_i)} I(X;Y) \quad \text{bit/符号}$$

  - 若符号传送时间周期为 T 秒，则**单位时间信道容量**为：

$$C_t = C/T \quad \text{bit/秒}$$

- 对于固定信道参数信道，信道容量是个定值。实际传输时能否提供最大传输能力，取决于输入端的概率分布，定义**信道绝对冗余度和相对冗余度**:

$$\text{信道绝对冗余度} = C - I(X;Y)$$

$$\text{信道相对冗余度} = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$$

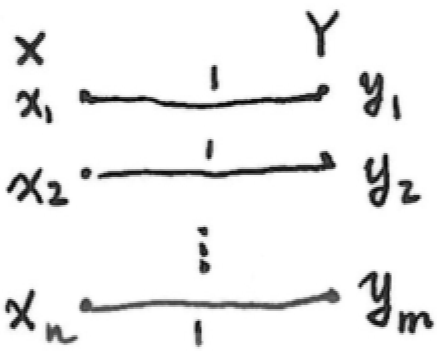
3.2 离散单个符号信道及其容量

无干扰离散信道

- 信道输入$X \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

无噪无损信道：n = m，X、Y一一对应

- 输入输出关系:



- 转移概率矩阵$P = \{p(y_j|x_i)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$，$p(x_i|y_j) \in \{0, 1\}$。
- **噪声熵与疑义度**:

$$H(Y|X) = H(X|Y) = 0$$

- **互信息**:

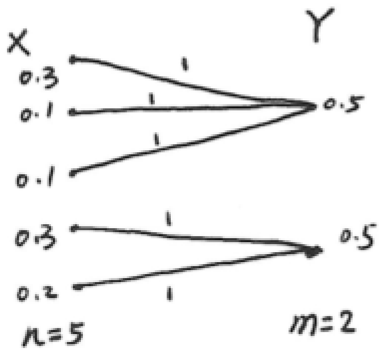
$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) = H(Y)$$

当输入符号等概率分布时，$I(X;Y)$最大。
- **信道容量**:

$$C=\max_{p(a_i)} I(X;Y)=\max_{p(a_i)} H(X)=\log n$$

无噪有损信道：n > m，多个X对应一个Y

- 输入输出关系：



- 多个输入对应一个输出，即$n>m$
- **噪声熵**:

$$H(Y|X)=\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log p(b_j|a_i)=0$$

- **疑义度**:

$$H(X|Y)=\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log p(a_i|b_j)\neq 0$$

- **互信息**:

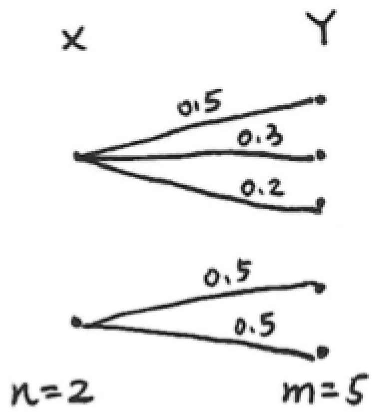
$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)\neq 0$$

  其中$H(Y|X)=0$，$H(X|Y)\neq 0$
  由此可得$H(X)=H(Y)+H(X|Y)$，所以$H(X)\geq H(Y)$ 。
- **信道容量**:

$$C=\max_{p(a_i)} I(X;Y)=\max_{p(a_i)} H(Y)\stackrel{?}{=}\log m$$

有噪无损信道：n < m，一个X对应多个Y

- 输入输出关系：



- 信道噪声使一个输入对应多个输出，$n < m$
- **噪声熵**：

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) \neq 0$$

- **疑义度**：

$$H(X|Y) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) = 0$$

- **互信息**：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) \neq 0$$

  其中$H(X|Y) = 0$，$H(Y|X) \neq 0$
  由此可得$H(Y) = H(X) + H(Y|X)$，所以$H(Y) \geq H(X)$ 。
- **信道容量**：

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(X) = \log n$$

对称离散无记忆信道

- 以下是两个转移概率矩阵示例：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- **对称特性判断**：
  - 若每一行包含相同元素，称为输入对称
  - 若每一列包含相同元素，称为输出对称

- 当行列都对称时，为**对称DMC（离散无记忆信道）**。

- **相关信息论公式**:
  - **互信息**:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

  - **条件熵**:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) \\ &= -\sum_{i,j} p(a_i) p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i) \\ &= -\sum_{i} p(a_i) \sum_{j} p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i) \\ &= \sum_{i} p(a_i) H(Y|a_i) \text{（输入对称）} \\ &= H(Y|a_i)\text{，} \ i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

  - **信道容量**:

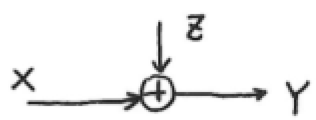
$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|X) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|a_i)$$

- 当**输入符号等概率分布**，即$p(a_i) = \frac{1}{n}$时，设m为输出符号数目，则有:
  - $p(b_j) = \sum_i p(a_i) p(b_j|a_i) = \frac{1}{n} \sum_i p(b_j|a_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{m}$
  - $H(Y) = -\sum_j p(b_j) \log p(b_j) = \sum_j \frac{1}{m} \log m = m \frac{1}{m} \log m = \log m$
  - **信道容量**

$$C = \log m - H(Y|a_i)$$

  - 其中m为输出符号Y数目，$i = 1, \cdots, n$

- **一般离散无记忆模k加性噪声信道**
  - 信道模型: $Y = X \oplus Z \bmod k$，其中 $X, Y, Z \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$
  - 图例:



  - **加性噪声**，有 $p(y|x) = p(z)$
    - **条件熵**:

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_{x,y} p(x)p(y|x)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x,z} p(x)p(z)\log p(z) \\
&= -\sum_{x} p(x)\sum_{z} p(z)\log p(z) \\
&= H(Z)
\end{aligned}
$$

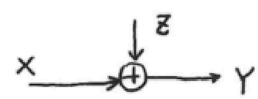
- **信道容量**:

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) \\
&= \max_{p(x)} H(Y) - H(Z) \\
&= \log k - H(Z) \quad (\text{对称性})
\end{aligned}
$$

- 例题:

例3-3 离散无记忆模K加性噪声信道 $Y = X \oplus Z \mod K$ ，$X, Y \in \{0, 1, \cdots, K-1\}$.

$\begin{bmatrix} Z \\ p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$，求该信道容量.



$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \end{array}
\begin{array}{c} X \backslash Y \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \cdots \\
\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
\cdots & & & & & \\
 & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{K\times K}
\end{array}
$$

对称DMC信道.

$C = \log k - H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \log k - \log 3$

准对称离散无记忆信道

- 以下是两个转移概率矩阵示例:

$$
P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}_{2\times 3}
$$

- **信道特性**:
  - 矩阵中**各行元素相同，但各列元素不同**，这种信道称为**准对称DMC（离散无记忆信道）。**
- **相关信息论公式**:
  - 因为各行元素相同，所以 $H(Y|X) = H(Y|a_i)$ ，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$
    - 这表明在给定不同输入符号 a_i 时，输出的条件熵是相同的
  - 由于各列元素不同，信道的输入和输出分布概率可以不同，并且 $H(Y) \le \log m$ （m为输出符号的数目）

- **信道容量**:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y|X)] \\ &\leq \log m - H(Y|a_i) \\ &= \log m + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij} \end{aligned}$$

  其中$i = 1, 2, \cdots, n$，p_{ij} 是转移概率矩阵中的元素
    - 这给出了准对称离散无记忆信道容量的一个**上限估计**
    - 求解：**矩阵分解法**

矩阵分解法

- **转移矩阵分解**:
  - 将**准对称**转移概率矩阵**按概率列**分成若干个互不相交的**对称的子集**。例如：
    - $$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

      可分解成$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
    - $$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

      可分解成$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$。
- **信道容量**:
  - 可以证明，当**输入等概率分布**时，可达到信道容量。

$$C = \log n - H(P_1', P_2', \cdots, P_m') - \sum_{k=1}^{r} N_k \log M_k$$

  - 其中：
    - n为输入符号个数。
    - $P_1', P_2', \cdots, P_m'$ 是原转移概率矩阵P中一行的元素。
    - N_k是第k个子矩阵中行元素之和。
    - M_k是第k个子矩阵中列元素之和。
    - r是子矩阵个数。

一般离散无记忆信道

- **转移概率**$p(y|x)$**固定**
- **信道容量**：

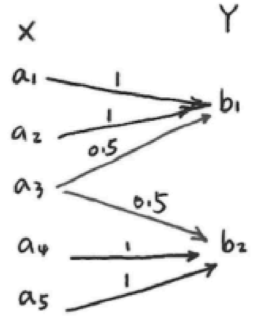
  $$C=\max_{p(x)} I(X;Y)=\max_{p(x)} I(p(x),p(y|x))$$

  即求互信息$I(X;Y)$关于输入概率分布$p(x)$的极大值。
- **互信息**：

  $$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_i p(a_i)I(a_i;Y) \\ &= \sum_i p(a_i)\sum_j p(b_j|a_i)\log\frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)} \end{aligned}$$

- 为使$I(X;Y)$达到最大，输入符号概率集$\{p(a_i)\}$必须满足的**充分和必要条件**是：
  - 对于所有$p(a_i)>0$ 的符号a_i ，有$I(a_i;Y)=C$
  - 对于所有$p(a_i)=0$ 的符号a_i ，有$I(a_i;Y)\le C$
  - 这意味着除概率为0的符号a_i外，每个符号a_i 对Y提供相同的互信息
- 注意：**最佳输入分布不唯一！**
- 例题：

例3-8 如图所示离散信道，输入符号集为$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，输出符号集为$\{b_1, b_2\}$。求信道容量和最佳输入符号分布概率。



$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I(a_i;Y)=\sum_j p(b_j|a_i)\,I(a_i;b_j)$$
$$=\sum_j p(b_j|a_i)\log\frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)}=\sum_j p(b_j|a_i)\log\frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)}$$

$$I(a_1;Y)=\log\frac{1}{p(b_1)}$$
$$I(a_2;Y)=\log\frac{1}{p(b_1)}$$
$$I(a_3;Y)=0.5\log\frac{0.5}{p(b_1)}+0.5\log\frac{0.5}{p(b_2)}$$
$$I(a_4;Y)=\log\frac{1}{p(b_2)}$$
$$I(a_5;Y)=\log\frac{1}{p(b_2)}$$

① $I(a_i;Y)$ 相同 $\Rightarrow$ $p(b_1)=p(b_2)=\frac{1}{2}$

② $I(a_3;Y)=0 \Rightarrow p(a_3)=0$

③ $C=I(a_1;Y)=I(a_2;Y)=I(a_4;Y)$
$=I(a_5;Y)=1$ bit/符号

④ 最佳输入符号分布：

$$\begin{cases} p(a_1)+p(a_2)+p(a_3)=0.5 \\ p(a_4)+p(a_5)+p(a_3)=0.5 \\ p(a_3)=0 \\ p(a_1)+p(a_2)+p(a_3)+p(a_4)+p(a_5)=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$p(a_1)=p(a_2)=p(a_4)=p(a_5)=\frac{1}{4}$
$p(a_3)=0$

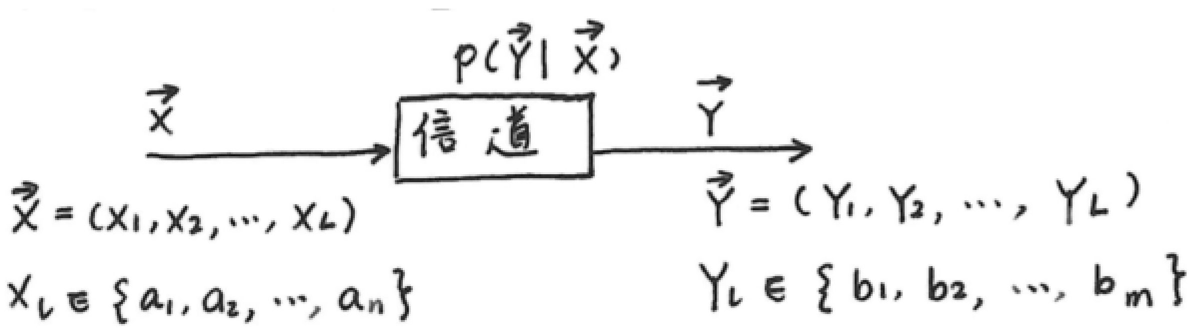
或

$p(a_1)=p(a_5)=\frac{1}{2}$
$p(a_2)=p(a_3)=p(a_4)=0$

最佳输入分布不唯一。

3.3 离散序列信道及其容量

信道模型与符号定义

- 

- 输入矢量为$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_L)$，其中$X_l \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出矢量为$\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_L)$，其中$Y_l \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$
- 条件概率表示为$p(\vec{Y}|\vec{X})$，即给定输入$\vec{X}$时输出$\vec{Y}$的概率。

无记忆离散序列信道

- 对于无记忆离散序列信道：

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = p(Y_1, \cdots, Y_L|X_1, \cdots, X_L) = \prod_{l=1}^{L} p(Y_l|X_l)$$

  - 若信道是平稳的：

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = (p(y|x))^L = p^L(y|x)$$

- **互信息与信道容量**:

$$\begin{aligned} I(\vec{X};\vec{Y}) &= H(\vec{X}) - H(\vec{X}|\vec{Y}) = \sum p(\vec{X},\vec{Y}) \log \frac{p(\vec{X}|\vec{Y})}{p(\vec{X})} \\ &= H(\vec{Y}) - H(\vec{Y}|\vec{X}) = \sum p(\vec{X},\vec{Y}) \log \frac{p(\vec{Y}|\vec{X})}{p(\vec{Y})} \end{aligned}$$

  - **信道无记忆时**:

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

        - 由于变量之间可能存在的依赖关系等因素，整体的条件不确定性 $H(\vec{Y}|\vec{X})$ 不会小于各个分量条件不确定性$H(Y_l|X_l)$之和，即 $H(\vec{Y}|\vec{X}) \geq \sum_{l=1}^{L} H(Y_l|X_l)$，而$H(\vec{Y}) = \sum_{l=1}^{L} H(Y_l)$，所以$I(\vec{X};\vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$。
    - **输入矢量$\vec{X}$中各分量相互独立时**:

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

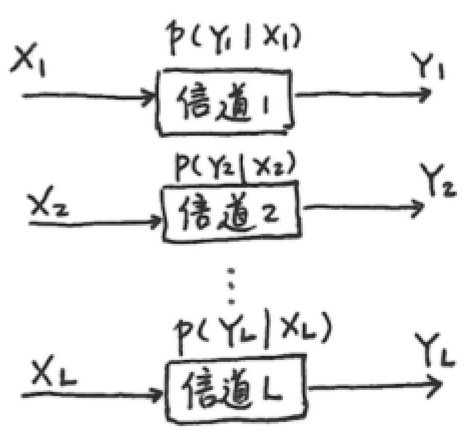
        - 根据互信息的链式法则有：$I(\vec{X};\vec{Y}) = I(X_1,\cdots,X_L;\vec{Y}) = I(X_1;\vec{Y}) + I(X_2;\vec{Y}|X_1) + \cdots + I(X_L;\vec{Y}|X_1,\cdots,X_{L-1})$，其中$I(X_l;\vec{Y}|X_1,\cdots,X_{l-1}) = H(X_l|X_1,\cdots,X_{l-1}) - H(X_l|\vec{Y},X_1,\cdots,X_{l-1})$，其中因为 X_l 与 $X_1,\cdots,X_{l-1}$ 独立，$H(X_l|X_1,\cdots,X_{l-1}) = H(X_l)$，而增加 $\vec{Y}$ 相关条件后，条件越多不确定性可能越小，$H(X_l|\vec{Y},X_1,\cdots,X_{l-1}) \leq H(X_l|Y_l)$，所以 $I(X_l;\vec{Y}|X_1,\cdots,X_{l-1}) \geq I(X_l;Y_l)$，因此有：$I(\vec{X};\vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$。
    - **当输入矢量$\vec{X}$独立且信道无记忆时**，上述两个性质统一取等号，此时**信道容量**:

$$\begin{aligned} C_L &= \max_{p(x)} I(\vec{X};\vec{Y}) = \max_{p(x)} \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l) \\ &= \sum_{l=1}^{L} \max_{p(x)} I(X_l;Y_l) = \sum_{l=1}^{L} C_l \end{aligned}$$

        - 当信道平稳时$C_L = LC_1$
        - 一般情况下，$I(\vec{X};\vec{Y}) \leq LC_1$，其中$C_1$是单个时刻的信道容量
- 输入矢量独立且信道无记忆时，相当于对单个信道进行L次扩展的信道，也相当于L个独立的信道并联在一起。

独立并联信道

- 图例:



- 每个信道输出Y_l只与本信道的输入X_l有关，即：

$$p(Y_1,Y_2,\cdots,Y_L|X_1,X_2,\cdots,X_L)=p(Y_1|X_1)p(Y_2|X_2)\cdots p(Y_L|X_L)$$

信道无记忆, 并且有

$$I(\vec{X};\vec{Y})\le\sum_{l=1}^{L}I(X_l;Y_l)$$

- 并联信道容量

$$C_{12\cdots L}=\max I(\vec{X};\vec{Y})\le\sum_{l=1}^{L}C_l$$

- 当输入符号X_l相互独立，且$p(X_1,X_2,\cdots,X_L)$达到最佳分布时，容量最大，此时：

$$C_{12\cdots L}=\sum_{l=1}^{L}C_l$$

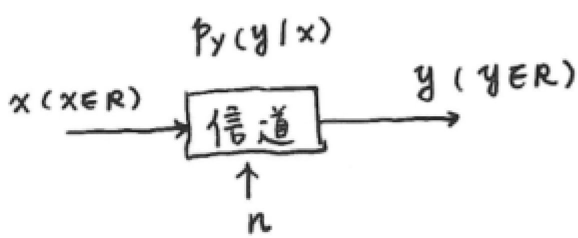
有记忆离散序列信道

> 有记忆的离散序列信道复杂得多，不作介绍。

3.4 连续信道及其容量

连续单符号加性信道

加性高斯信道

- **信道模型**：
  - 

  - $y=x+n$
  - n：加性噪声，$P_n(n)\sim N(0,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$。
- **微分熵**：

$$H_c(n) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(n) \log P_n(n) dn = \frac{1}{2}\log(2\pi e \sigma^2)$$

- **互信息**:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H_c(X) - H_c(X|Y) \\ &= H_c(Y) - H_c(Y|X) \end{aligned}$$

- **信道容量**:

$$\begin{aligned} C = \max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{p(x)}[H_c(Y) - H_c(Y|X)] \\ &= \max_{p(x)} H_c(Y) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \end{aligned}$$

  其中 $H_c(Y|X)$ 是噪声熵，由于x与n相独立，所以$p(y|x) = p(x+n|x) = p(n)$，所以 $H_c(Y|X) = H_n(n) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$。
- **求 $H_c(Y)$ 最大值**:

$$\begin{aligned} &y = x+n, y \in (-\infty, +\infty)，y\text{是功率受限信号} \\ &\Rightarrow Y\text{正态分布时熵最大} \\ &\Rightarrow Y\text{正态分布时信道容量最大} \end{aligned}$$

- y 的功率 P（其中S是输入信号 x 的平均功率，σ^2是噪声功率）

$$P = S + \sigma^2$$

  - 若 $P_Y(y) \sim N(0,P)$，$P_n(n) \sim N(0,\sigma^2)$，$x = y - n$，则 $P_X(x) \sim N(0,S)$。
  - 当输入 X 是均值为 0，方差为 S 的高斯分布时，**信息传输率**达最大，等于**信道容量**:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\log(2\pi eP) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{P}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{S}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log(1+SNR) \quad bit/\text{符号} \end{aligned}$$

    其中 $SNR = \frac{S}{\sigma^2}$，$SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR$。

加性非高斯信道

- 对于加性、均值为 0、平均功率为 σ^2 的非高斯信道:

$$C = \max(H_c(Y) - H_c(n))$$

- 高斯分布时：

$$H_c(Y)_{max} = \frac{1}{2}\log(2\pi eP)$$

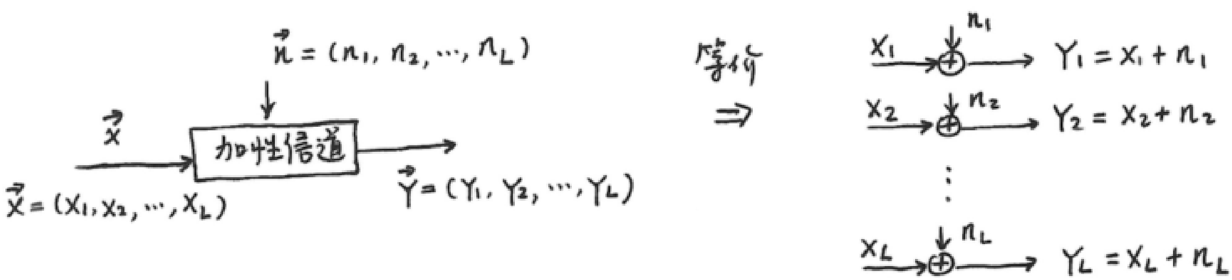
$$H_c(n)_{max} = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

- 满足：

$$\frac{1}{2}\log(2\pi eP) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \le C \le \frac{1}{2}\log(2\pi eP) - H_c(n)$$

多维无记忆加性连续信道

- **信道模型**：



  -
    - 输入X的总功率$P = \sum_{l=1}^{L} P_l$，P_l是第l个输入信号的功率
    - σ_l^2是第l个噪声的功率
  - 信道无记忆

$$p(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^{L} p(y_l|x_l)$$

  - 加性噪声各时刻独立

$$p_n(\vec{n}) = p_y(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^{L} p_n(n_l) \quad n_l \sim N(0, \sigma_l^2)$$

- **互信息**：

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l) \le \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2})$$

- **信道容量**：

$$C=\max_{p(x)} I(\vec{X};\vec{Y})=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})\quad \text{bit}/L\text{ 序列}$$

当且仅当输入随机变量 $\vec{X}$ 中各分量统计独立，且均值为0，方差为 P_l 的高斯分布时，才能达到此容量。

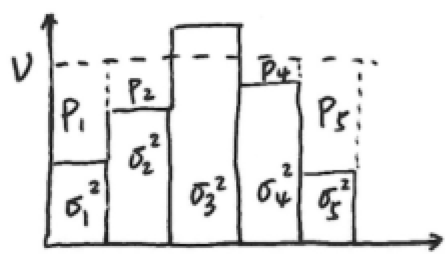
1. L **个高斯噪声每个单元时刻噪声功率相等**，$\sigma_l^2=\sigma^2$，$l\in\{1,2,\cdots,L\}$，有

$$C=\frac{L}{2}\log(1+\frac{S}{\sigma^2})\quad,\quad S=\frac{P}{L}$$

$\vec{X}$ 的各分量满足 $N(0,S)$ 分布时，达到信道容量。

2. L **个高斯噪声均值为0，方差不同且为** σ_l^2 **时**，若输入信号的总平均功率受限，即

$$E\left[\sum_{l=1}^{L}x_l^2\right]=\sum_{l=1}^{L}E[x_l^2]=\sum_{l=1}^{L}P_l=P$$

- 

- **怎样合理分配各单元时刻的信号平均功率，才能使信道传输率最大?**
用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$f(P_1,P_2,\cdots,P_L)=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})+\lambda\sum_{l=1}^{L}P_l$$

对第一项求最大，第二项为约束条件
令 $\frac{\partial f()}{\partial P_l}=0$，$l=1,2,\cdots,L$
得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P_l+\sigma_l^2}+\lambda=0\quad,\quad l=1,2,\cdots,L$$
$$\Rightarrow P_l+\sigma_l^2=-\frac{1}{2\lambda}\quad,\quad l=1,2,\cdots,L$$

令各时刻信道输出总功率（信号功率 P_l + 噪声功率 σ_l^2）相等，设为 V

$$V=\frac{P+\sum_{l=1}^{L}\sigma_l^2}{L}$$

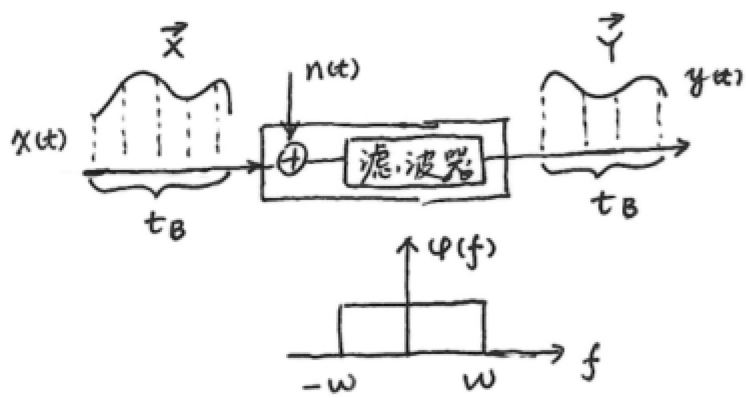
当 $P_l = V - \sigma_l^2 = \frac{P+\sum_{l=1}^L \sigma_l^2}{L} - \sigma_l^2$，$l = 1, 2, \cdots, L$ 时，**信道传输率达到最大**

$$C = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L} \log \frac{P + \sum_{l=1}^{L} \sigma_l^2}{L\sigma_l^2}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L} \log \frac{V}{\sigma_l^2}$$

若 σ_l^2 太大，大于 V，则置 $P_l = 0$，然后重新调整功率分配，直到 P_l 不再出现负值。

限时限频限功率加性高斯白噪声信道

波形信道，限时 t_B，限频 W

- **信道模型**:
  - 

- **互信息**:

$$\begin{aligned} I(x(t); y(t)) &= \lim_{L\to\infty} I(\vec{X}; \vec{Y}) \\ &= \lim_{L\to\infty} [H_c(\vec{X}) - H_c(\vec{X}|\vec{Y})] \\ &= \lim_{L\to\infty} [H_c(\vec{Y}) - H_c(\vec{Y}|\vec{X})] \quad \text{bit/波形} \end{aligned}$$

- **单位时间内的信息传输率** R_t 为:

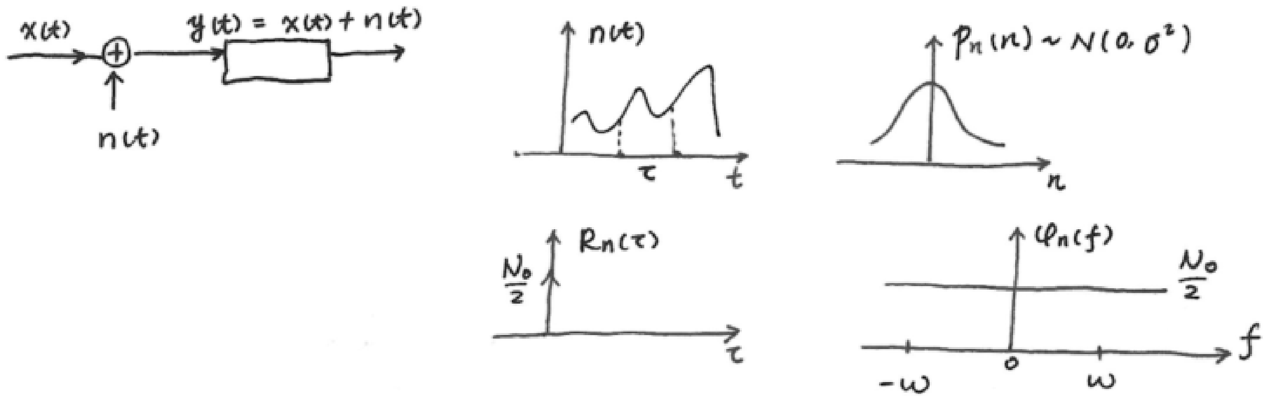
$$R_t = \lim_{t_B\to\infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X}; \vec{Y}) \quad \text{bit/秒} \quad (t_B\text{：秒/波形})$$

- **信道容量**:

$$C_t = \max_{p(x)} [\lim_{t_B\to\infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X}; \vec{Y})] \quad \text{bit/秒}$$

- 带宽受限加性高斯白噪声 $n(t)$，均值为0，功率谱密度 $\frac{N_0}{2}$

加性高斯白噪声

- **模型**:
  - 

  - $y(t) = x(t) + n(t)$
  - 相关函数:
    - $P_n(n) \sim N(0, \sigma^2)$
    - $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
    - 功率谱密度 $\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}$
    - 总噪声功率 $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \cdot 2W = N_0 W$
    - $N_0 = kT$
    - 波茨曼常数 k
    - 绝对温度 T

低频带宽受限通信系统

- 在 $[0, t_B]$ 内，采样个数 $L = 2Wt_B$，各样本值彼此独立。
- 通信带宽为 $2W$，噪声功率为 $2W \cdot \frac{N_0}{2} = N_0 W$

$$
C = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\log(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2})
$$

$$
\sigma_l^2 = P_n = \frac{\frac{N_0}{2} \cdot 2W \cdot t_B}{L} = \frac{\frac{N_0}{2} \cdot 2W \cdot t_B}{2W \cdot t_B} = \frac{N_0}{2}
$$

$$
P_l = \frac{P_s t_B}{2W t_B} = \frac{P_s}{2W}
$$

- 对于平稳系统

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{L}{2}\log(1+\frac{P_s}{2W}\cdot\frac{2}{N_0}) \\
&= \frac{L}{2}\log(1+\frac{P_s}{N_0 W}) \\
&= W t_B \log(1+\frac{P_s}{N_0 W}) \quad \text{bit}/L\text{维符号序列}
\end{aligned}
$$

- 单位时间的信道容量

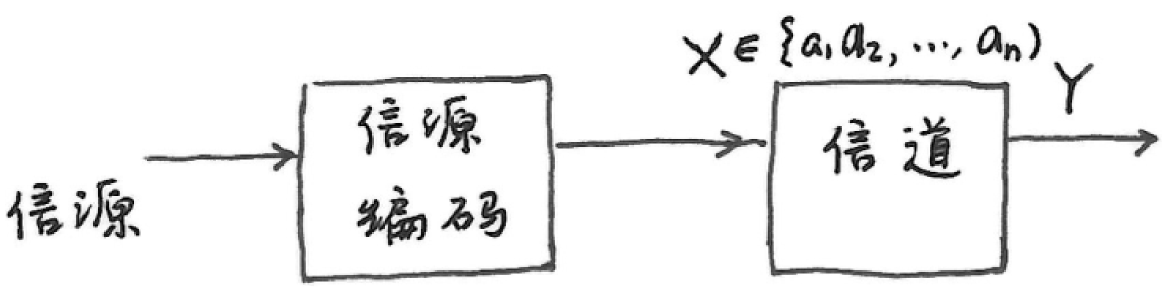
$$
\begin{aligned}
C_t &= \lim_{t_B\to\infty}\frac{C}{t_B} \\
&= W\log(1+\frac{P_s}{N_0 W}) \quad \text{bit/秒} \\
&= W\log(1+SNR) \quad \text{bit/秒}
\end{aligned}
$$

  其中:
  - P_s：信号平均功率
  - $N_0 W$：噪声在系统中的平均功率（$\frac{N_0}{2}\cdot 2W = N_0 W$）
  - $SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR$

3.5 多输入多输出信道及其容量

> 略

3.6 信源与信道的匹配

- **符号匹配**
  - 

  - 信源编码：将信源符号转换为信道符号
- **信息匹配**
  - 信道绝对冗余度 $R_a = C - I(X;Y)$
  - 信道相对冗余度 $R_r = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$

- 信道效率 $E = \frac{I(X;Y)}{C}$