第二章 信源与信息熵

2.1 信源的分类及数学模型

$$\text{信源}\begin{cases}\text{无记忆信源}\begin{cases}\text{发出单个符号的无记忆信源}\\ \text{发出符号序列的无记忆信源}\end{cases}\\ \text{有记忆信源}\begin{cases}\text{发出符号序列的有记忆信源}\\ \text{发出符号序列的马尔可夫信源}\end{cases}\end{cases}$$

无记忆的单符号

- **离散**
  - 信源输出单个符号的消息，出现的消息数是有限的，且只可能是符号集中的一种
  - 各符号出现的概率与信源相互确定
  - **数学表示**：

$$\begin{bmatrix}X\\P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n)\end{bmatrix}$$

    其中符号集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$X\in A$。显然有 $p(a_i)\geq 0$，$\sum_{i=1}^{n}p(a_i)=1$。
- **连续**
  - 信源输出单个符号的消息，出现的消息数是无限的
  - **数学表示**：

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a,b) \\ p_X(x) \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} R \\ p_X(x) \end{bmatrix}$$

显然应满足 $p_X(x) \geq 0$，$\int_a^b p_X(x)\mathrm{d}x = 1$ 或 $\int_R p_X(x)\mathrm{d}x = 1$。

无记忆的符号序列

- 每次发出一组含2个以上符号的符号序列来代表一个消息
- 需要用随机序列（或随机矢量）$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_l, \cdots, X_L)$来描述信源输出的消息，用联合概率分布来表示信源特性。
- 最简单的符号序列信源是L为2的情况，此时信源$\mathbf{X} = (X_1, X_2)$，其信源的概率空间为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1, a_1 & a_1, a_2 & \cdots & a_n, a_n \\ p(a_1, a_1) & p(a_1, a_2) & \cdots & p(a_n, a_n) \end{bmatrix}$$

  显然有 $p(a_i, a_j) \geq 0$，$\sum_{i,j=1}^{n} p(a_i, a_j) = 1$。
- ***无记忆***
  - 符号序列的各维相独立（**有放回取球**）
  - $p(X_1, X_2, \cdots, X_l, \cdots, X_L) = p(X_1)p(X_2)\cdots p(X_l)\cdots p(X_L)$
- ***平稳***
  - 信源发出的序列的统计性质与时间的推移无关，是平稳的随机序列。
  - 强：各维概率分布都不随时间推移而发生变化
  - 弱：序列均值与起始时刻无关、协方差函数也与起始时刻无关而仅与时间间隔有关
- ***独立同分布(i.i.d.)***
  - 离散、平稳、无记忆、具有相同概率空间
  - $p(X_1) = p(X_2) = \cdots = p(X_l) = \cdots = p(X_L)$
  - $p(X_1, X_2, \cdots, X_L) = \prod_{l=1}^{L} p(X_l) = [p(X)]^L$
  - 其中 $X \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$\mathbf{X}$有$n^L$种可能性，$\sum_{i=1}^{n^L} p(\mathbf{X} = \mathbf{X_i}) = 1$。

有记忆的符号序列

- 信源在不同时刻发出的符号之间是相互依赖的。（**不放回取球**）

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_L) &= p(x_L \mid x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{L-1})p(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{L-1}) \\ &= \cdots \\ &= p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_2, x_1)\cdots p(x_L|x_{L-1}, \cdots, x_1) \end{aligned}$$

- 表述的复杂度将随着序列长度的增加而增加。

马尔可夫信源

- **m阶马尔可夫信源**
  - 当信源的记忆长度为m十1时，该时刻发出的符号与前m个符号有关联性，而与更前面的符号无关

- $$\begin{aligned} p(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_L) &= p(x_L \mid x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{L-1})p(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{L-1}) \\ &= p(x_L \mid x_{L-m},\cdots,x_{L-1})p(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{L-1}) \\ &= p(x_L \mid x_{L-m},\cdots,x_{L-1})p(x_{L-1} \mid x_{L-m-1},\cdots,x_{L-2})p(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{L-2}) \\ &= \cdots \end{aligned}$$
  - **齐次马尔可夫信源**：条件概率与时间起点无关
- **状态S_i**
  - 对于 m 阶马尔可夫信源，将该时刻以前出现的 m 个符号组成的序列定义为状态 s_i
  - $s_i=(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}) \quad x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m} \in A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
  - s_i 共有 $Q=n^m$ 种可能取值，即状态集 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_Q\}$
  - 则上述条件概率 $p(x_j \mid x_{j-m},\cdots,x_{j-1})$ 中的条件 $x_{j-m},\cdots,x_{j-1}$ 就可以用状态 s_i 来代表，表示信源在某一时刻出现符号 x_j 的概率与信源此时所处的状态 s_i 有关
  - 用符号条件概率表示为 $p(x_j \mid s_i)$，$i=1,2,\cdots,Q$；$j=1,2,\cdots,n$
- **状态转移概率**
  - 在时刻 m 系统处于状态 s_i（即 $S_m=s_i$）的条件下，经 $n-m$ 步后转移到状态 s_j （即 $S_n=sj$）的概率用状态转移概率 $p_{ij}(m,n)$ 表示：
  - $$p_{ij}(m,n)=P\{S_n=s_j \mid S_m=s_i\}=P\{s_j \mid s_i\} \quad s_i,s_j \in S$$
  - 性质：
    a. $p_{ij}(m,n) \geq 0$，$i,j \in S$
    b. $\sum_{j\in S} p_{ij}(m,n)=1$，$i \in S$
- **一步转移概率**
  - $n-m=1$时，即 $p_{ij}(t,t+1)$,记为 $p_{ij}(t)$，$t \geq 0$，并称为基本转移概率，也可称为一步转移概率。
  - $$p_{ij}(t)=p_{ij}(t,t+1)=P\{S_{t+1}=j \mid S_t=i\} \overset{\text{齐次}}{=} p_{ij} \quad i,j \in S$$
  - 性质：
    a. $p_{ij} \geq 0$，$i,j \in S$
    b. $\sum_{j\in S} p_{ij}=1$，$i \in S$
- **k步转移概率**
  - $$p_{ij}^{(k)}(t)=p_{ij}(t,t+k)=P\{S_{t+k}=j \mid S_t=i\}=p_{ij}^{(k)} \quad i,j \in S$$
  - 切普曼 - 柯尔莫戈洛夫方程$p_{ij}^{(k)}=\sum_r p_{ir}^{(l)}p_{rj}^{(k-l)}$，特别地，当 $l=1$ 时，有
    $$p_{ij}^{(k)}=\sum_r p_{ir}p_{rj}^{(k-1)}=\sum_r p_{ir}^{k-1}p_{rj}$$
  - 若用矩阵表示，则
    $$\mathbf{P}^{(k)}=\mathbf{P}\mathbf{P}^{(k-1)}=\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{P}^{(k-2)}=\cdots=\mathbf{P}^k$$
  - 一步转移概率完全决定了k步转移概率，引入初始概率$p_{0i}=P(S_0=s_i)$

$$
\begin{aligned}
P(S_k = s_j) &= \sum_i P(S_k = s_j, S_0 = s_i) \\
&= \sum_i P(S_0 = s_i) P(S_k = s_j \mid S_0 = s_i) \\
&= \sum_i p_{0i} p_{ij}^{(k)}
\end{aligned}
$$

- **转移矩阵**
  - k步转移矩阵$\mathbf{P} = \{p_{ij}^{(k)}(m), i, j \in S\}$
  - 一步转移矩阵$\mathbf{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1Q} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{Q1} & p_{Q2} & \cdots & p_{QQ} \end{bmatrix}
$$

- **马尔可夫链的稳定**
  - **定义**：$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{(k)} = W_j = P(S_k = s_j)$
  - **求取**：

$$
\begin{cases} \mathbb{W}\mathbf{P} = \mathbb{W} \\ \sum_i W_j = 1 \end{cases}
$$

    其中$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_Q \end{bmatrix}$，$W_j = \lim_{k \to \infty} p_{ij}^{(k)} = P(S_k = s_j)$
  - **条件**
    - 必要不充分：上式有唯一解，则$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{(k)}$ 存在
    - **不可约性**
      - 对任意一对 i 和 j，都存在至少一个 k，使 $p_{ij}^{(k)} > 0$，这就是说从 s_i 开始，总有可能到达 s_j
      - 反之若对所有 k，$p_{ij}^{(k)} = 0$，就意味着一旦出现 s_i 以后不可能到达 s_j，也就是不能各态遍历
        - 此时状态中把 s_j 取消就成为可约的了
    - **非周期性**
      - 在所有 $p_{ii}^{(n)} > 0$ 的 n 中没有比 1 大的公因子

状态图

- 状态转移图/马尔科夫状态图/香农线图
- 元素
  - 状态S_i
  - 箭头：转移
  - 箭头旁标数字：转移概率

2.2 离散信源熵和互信息

自信息量

- 信源 X，概率空间

$$\begin{bmatrix} X \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

- 定义具有概率 $p(x_i)$ 的符号 x_i 的自信息量为

$$I(x_i) = -\log p(x_i) = \log \frac{1}{p(x_i)}$$

  - 底数为 2，信息量单位比特（bit）
  - 底数为自然常数 e，单位为奈特（nat）
  - 底数为 10，单位为笛特（det）
    - $1\text{nat} = \log_2 e \approx 1.433\text{bit}$
    - $1\text{det} = \log_2 10 \approx 3.322\text{bit}$
  - 性质：
    a. $p(x_i) = 1$，$I(x_i) = 0$
    b. $p(x_i) = 0$，$I(x_i) = \infty$
    c. 非负性：$I(x_i) \geq 0$
    d. 单调递减性：若 $p(x_2) > p(x_1)$ 则 $I(x_2) < I(x_1)$
    e. 可加性
      - 两符号 x_i, y_j 同时出现，$p(x_i, y_j)$，$I(x_i, y_j) = -\log p(x_i, y_j)$
      - x_i, y_j 相互独立，$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$
        $I(x_i, y_j) = -\log p(x_i)p(y_j) = I(x_i) + I(y_j)$
      - x_i, y_j 不独立，定义**条件自信息量** $I(x_i|y_j) = -\log p(x_i|y_j)$
        - $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j|x_i) = p(y_j)p(x_i|y_j)$
        - $I(x_i, y_j) = I(x_i) + I(y_j|x_i) = I(y_j) + I(x_i|y_j)$
  - 单位：bit
- **自信息量与信源符号不确定度**
  - 自信息量：符号出现后，提供给收信者的信息量，**是接收者获得的。**
  - 信源符号不确定度：具有某种概率的信源符号在发出之前，存在不确定度，不确定度表征了该符号的特性，**是信源本身固有的。**
  - **二者在数量上相等**

离散信源熵 - 熵的定义

- 给定概率空间
  $\begin{bmatrix} X \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$，自信息量$I(x_i) = -\log p(x_i) = \log \frac{1}{p(x_i)}$
- **信源 X 的熵 $H(X)$ 定义为**：

$$H(X) \overset{\text{数量}}{=} E[I(X)] = \sum_i p(x_i) I(x_i) = -\sum_i p(x_i) \log p(x_i)$$

  信源 X 的熵也被称为平均自信息量、总体平均不确定度。
- 性质：
  - $H(X)$ 非负，因为 $0 \leq p(x_i) \leq 1$，$\log p(x_i) \leq 0$，所以 $H(X) \geq 0$。
  - 若 $p(x_i) = 0$，规定 $p(x_i) \log p(x_i)$ 为 0。
  - 若 $p(x_i) = 1$，$H(X) = 0$，即确定信源熵为 0。

- 单位：bit/符号

二元信源

- 二元信源概率空间 $\begin{bmatrix} X \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{bmatrix}$，其中 $p+q=1$
- 则 $H(X) = -p\log p - q\log q = -p\log p - (1-p)\log(1-p) = H_2(p) = H(p)$
- 性质：
  - 当 $p=1$ 或 $q=1$（$p=0$）时，该信源不提供任何信息，即H(0)=0。
  - 当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，符号等概率发生，熵最大，为 $H(\frac{1}{2}) = 1\text{bit}/\text{符号}$。

条件熵

- 给定 y_j 的条件下，x_i 的**条件自信息量**为 $I(x_i|y_j) = -\log p(x_i|y_j)$。
- X **集合的条件熵** $H(X|y_j)$**定义为**：

$$H(X|y_j) = \sum_i p(x_i|y_j) I(x_i|y_j)$$

- 给定 Y（即各个 y_j）条件下，X **集合的条件熵** $H(X|Y)$ **定义为**：

$$H(X|Y) = -\sum_{ij} p(x_i, y_j) \log p(x_i|y_j)$$

  即条件熵是联合符号集合 (X, Y) 上的条件自信息量的**联合概率加权统计平均值**。条件熵 $H(X|Y)$ 表示已知 Y 后，X 的不确定度。
- 推导：

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_j p(y_j) H(X|y_j) \\ &= \sum_j p(y_j) \sum_i p(x_i|y_j) I(x_i|y_j) \\ &= \sum_i \sum_j p(y_j) p(x_i|y_j) I(x_i|y_j) \\ &= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) I(x_i|y_j) \\ &= -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i|y_j) \end{aligned}$$

- **同理**，$H(Y|X) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) I(y_j|x_i) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(y_j|x_i)$

联合熵

- 联合熵是联合符号集合 (X, Y) 上的每个元素对 (x_i, y_j) 的自信息量的**概率加权统计平均值**，定义为：

$$H(X, Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) I(x_i, y_j) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

- 联合熵 $H(X,Y)$ 表示 X 和 Y 同时发生的不确定度。
- 联合熵 $H(X,Y)$ 与熵 $H(X)$ 及条件熵 $H(Y|X)$ 之间存在下列**关系**:

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y)$$

  - 推导:

$$\begin{aligned}H(X,Y)&=-\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\log p(x_i,y_j)\\&=-\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\log[p(x_i)p(y_j|x_i)]\\&=-\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\log p(x_i)-\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\log p(y_j|x_i)\\&=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)+H(Y|X)\\&=H(X)+H(Y|X)\end{aligned}$$

  - 同理可得 $H(X,Y)=H(Y)+H(X|Y)$

互信息

- 未收到消息时，信源 X 的不确定度为 $H(X)$，收到消息 Y 后关于 x_i 的不确定度为 $H(X|Y)$ 。
- **定义**:
  - X 和 Y 的互信息为接收者通过通信信道接收到的信源 X 的信息量
  - **平均互信息**: $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=\sum_{ij}p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$
- **平均互信息的推导**
  - **定义单符号之间的互信息** $I(x_i;y_j)$ 为

$$\begin{aligned}I(x_i;y_j)&=I(x_i)-I(x_i|y_j)\\&=\log\frac{1}{p(x_i)}-\log\frac{1}{p(x_i|y_j)}\\&=\log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}=\log\frac{\text{后验概率}}{\text{先验概率}}\end{aligned}$$

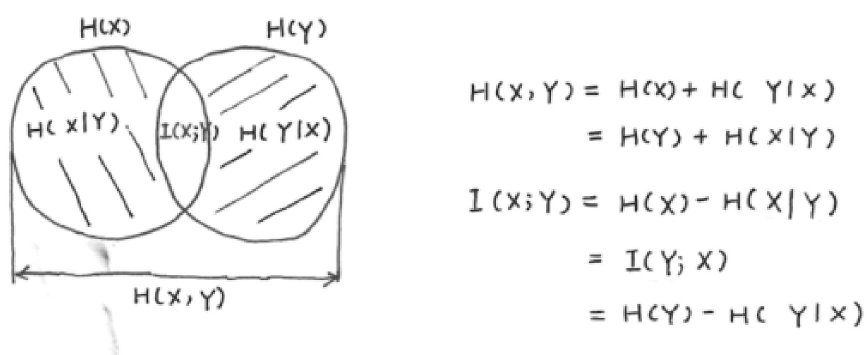
  - 在 X 集合上**统计平均值，即平均条件互信息量** $I(X;y_j)$ 为

$$I(X;y_j)=\sum_i p(x_i|y_j)I(x_i;y_j)=\sum_i p(x_i|y_j)\log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$$

  - $I(X;y_j)$ 在 Y 集合的**概率加权统计平均值，即平均互信息** $I(X;Y)$ 为

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_j p(y_j) I(X;y_j) = \sum_j p(y_j) \sum_i p(x_i|y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log p(x_i|y_j) - \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log p(x_i) \\
&= H(X) - H(X|Y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)p(y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \\
\therefore I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) = I(Y;X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)
\end{aligned}
$$

- **性质**:
  - $I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$
    - 

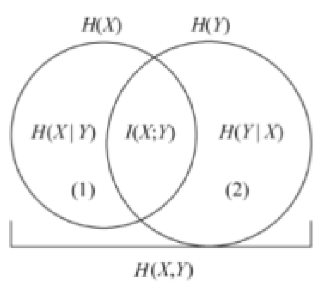
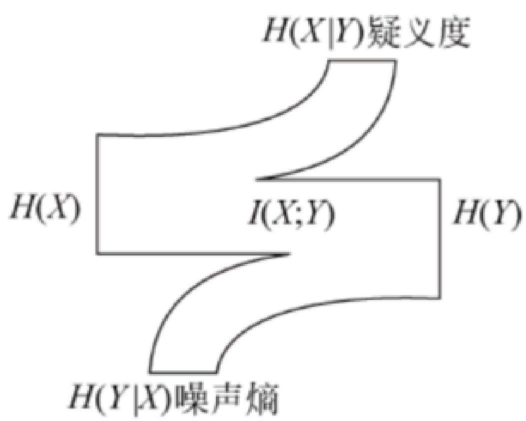
    - 

      图 2-10 互信息量与熵之间的关系
  - $0 \le I(X;Y) \le H(X)$（非负性证明见互信息的非负性）
  - **若X，Y相互独立时**
    - $H(X|Y) = H(X)$
    - $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0$，对应**全损离散信道**
  - **若Y是由X确定的一一对应函数**，即$p(y_j|x_i) = 0$或1
    - $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$
    - $I(X;Y) = H(X) = H(Y)$，对应**无损信道**
  - **一般情况下**，X与Y既非相互独立，也不是一一对应

$$I(X;Y) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$
$$= \sum_i \sum_j p(x_i)p(y_j|x_i) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$
$$p(y_j) = \sum_i p(x_i)p(y_j|x_i)$$
$$I(X;Y) = f\left[p(x_i), p(y_j|x_i)\right]$$

- **结论**：（证明见互信息的凹凸性）
  a. $p(x_i)$ 一定时，$I(X;Y)$是 $p(y_j|x_i)$ 的∪型凸函数，存在极小值。
  b. $p(y_j|x_i)$ 一定时，$I(X;Y)$是关于 $p(x_i)$ 的∩型凸函数，存在极大值。

- **收发两端的熵关系**
  - 条件熵 $H(X|Y)$ 又可以看作由于信道上的干扰和噪声，使接收端获得 Y 后还剩余的对信源符号 X 的平均不确定度，故又称为**疑义度**。
  - 条件熵 $H(Y|X)$ 可看作唯一地确定信道噪声所需要的平均信量，故又称**噪声熵或散布度。**
  - 

相对熵

- p,q为同一信源两个不同的概率分布，**相对熵**$D(p||q)$**是两个随机分布之间距离的度量**，p**相对于**q**的相对熵定义**为：

$$D(p||q) = \sum_i p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

- 约定 $0\log\frac{0}{0} = 0$，$0\log\frac{0}{q} = 0$，$p\log\frac{p}{0} = \infty$
- **性质**：
  - $D(p||q) \neq D(q||p)$
  - 互信息可定义为联合分布$p(x,y)$与乘积分布$p(x)p(y)$之间的相对熵

$$I(X;Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = D(p(x,y)||p(x)p(y))$$

  - $D(p||q) \geq 0$（证明见信息不等式/相对熵的非负性）
  - 信源符号 $x_1, x_2, \cdots, x_n$
    概率分布 $p_1, p_2, \cdots, p_n$

编码方案1：$-\log p_1, -\log p_2, \cdots, -\log p_n$ （按照码长 $I(x_i) = -\log p_i$ 进行编码）
编码方案2：$-\log q_1, -\log q_2, \cdots, -\log q_n$
编码1平均码长 $K_p = -\sum_i p_i \log p_i$
编码2平均码长 $K_q = -\sum_i p_i \log q_i$

$$K_q - K_p = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} = D(p||q) \geq 0$$

- **结论**：按概率分布编码最短

熵、相对熵与互信息的链式法则

熵的链式法则

- **熵的链式法则**：
  - 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则

$$H(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \cdots, X_1)$$

- **证明**：重复利用两个随机变量情形时熵的展开法则，有

$$H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1)$$

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, X_3) &= H(X_1) + H(X_2, X_3|X_1) \\ &= H(X_1) + H(X_2|X_1) + H(X_3|X_2, X_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, \cdots, X_n) &= H(X_1) + H(X_2|X_1) + \cdots + H(X_n|X_{n-1}, \cdots, X_1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \cdots, X_1) \end{aligned}$$

- **另一证明**：由 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1)$，可得

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, \cdots, X_n) &= -\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \log p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= -\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \log \prod_{i=1}^{n} p(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1) \\ &= -\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} \sum_{i=1}^{n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \log p(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \log p(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \cdots, X_1) \end{aligned}$$

互信息的链式法则

- **条件互信息定义**:
  - 随机变量 X 和 Y 在给定随机变量 Z 时的条件互信息（conditional mutual information）定义为

$$
\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\
&= E_{p(x,y,z)} \log \frac{p(X,Y|Z)}{p(X|Z)p(Y|Z)} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i,y_j,z_k) \log \frac{p(x_i,y_j|z_k)}{p(x_i|z_k)p(y_j|z_k)} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i,y_j,z_k) \log \frac{p(x_i,y_j,z_k)p(z_k)}{p(x_i,z_k)p(y_j,z_k)}
\end{aligned}
$$

- **互信息的链式法则**

$$
I(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y|X_{i-1},X_{i-2},\cdots,X_1)
$$

- **证明**:

$$
\begin{aligned}
I(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y) &= H(X_1,X_2,\cdots,X_n) - H(X_1,X_2,\cdots,X_n|Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1},\cdots,X_1) - \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1},\cdots,X_1,Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y|X_1,X_2,\cdots,X_{i-1})
\end{aligned}
$$

相对熵的链式法则

- **条件相对熵定义**:
  - 对于联合概率密度函数 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$，条件相对熵（conditional relative entropy $D(p(y|x)\|q(y|x))$ ）定义为条件概率密度函数 $p(y|x)$ 和 $q(y|x)$ 之间的平均相对熵，其中取平均是关于概率密度函数 $p(x)$ 而言的。

$$
\begin{aligned}
D(p(y|x)\|q(y|x)) &= \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\
&= E_{p(x,y)} \log \frac{p(Y|X)}{q(Y|X)} \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log \frac{p(y_j|x_i)}{q(y_j|x_i)}
\end{aligned}
$$

- **相对熵的链式法则**

$$
D(p(x,y)\|q(x,y)) = D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x))
$$

- **证明**:

$$
\begin{aligned}
D(p(x,y)\|q(x,y)) &= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{q(x,y)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x)p(y|x)}{q(x)q(y|x)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x)}{q(x)} + \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\
&= \sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} + \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\
&= D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x))
\end{aligned}
$$

Jensen不等式

凸函数与凹函数

- **凸函数(Convex)定义**
  - 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 及 $0 \le \lambda \le 1$，满足

    $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

    则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸的（convex）。
  - 如果仅当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$，上式等号成立，则称函数 f 是严格凸的（strictly convex）
  - 如果函数总是位于任何一条弦的下面，则该函数是凸的
- **凹函数(Concave)定义**
  - 如果 $-f$ 为凸函数，则称函数 f 是凹的
  - 如果函数总是位于任何一条弦的上面，则该函数是凹的
- **定理**：如果函数 f 在某个区间上存在非负（正）的二阶导数，则 f 为该区间的凸函数（严格凸函数）。
  - **证明**：
    根据泰勒公式，$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x^*)}{2}(x-x_0)^2$，其中 $x \le x^* \le x_0$。根据假设 $f''(x^*) \ge 0$，上式末项非负。
    设 $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，
    - 取 $x = x_1$，可得 $f(x_1) \ge f(x_0) + f'(x_0)((1-\lambda)(x_1-x_2))$ ①；
    - 取 $x = x_2$，可得 $f(x_2) \ge f(x_0) + f'(x_0)(\lambda(x_2-x_1))$ ②。

    ①×λ+②×$(1-\lambda)$：

    $$
    \begin{aligned}
    \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) &\ge \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)((1-\lambda)(x_1-x_2)) \\
    &\quad + (1-\lambda) f(x_0) + (1-\lambda) f'(x_0)\lambda(x_2-x_1) \\
    &= f(x_0) \\
    &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)
    \end{aligned}
    $$

Jensen不等式

- **Jensen不等式**：若给定凸函数 f 和一个随机变量 X，则

$$E(f(X)) \ge f(E(X))$$

- 若 f 是严格凸的，上式等号成立时 $X=E(X)$，即 X 是个常量。
    - **证明**：
      对于两点分布 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}$，$f$ 是凸函数，因此有$p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)\geq f(p_1 x_1+p_2 x_2)$，即满足 $E(f(X))\geq f(E(X))$
      假定当分布点数为 $k-1$ 时，定理成立，此时记 $p'_i=\frac{p_i}{1-p_k}\ (i=1,2,\cdots,k-1)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) &= p_k f(x_k)+(1-p_k)\sum_{i=1}^{k-1} p'_i f(x_i)\\ &\geq p_k f(x_k)+(1-p_k) f(\sum_{i=1}^{k-1} p'_i x_i)\\ &\geq f(p_k x_k+(1-p_k)\sum_{i=1}^{k-1} p'_i x_i)\\ &= f(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i)\end{aligned}$$

        - 其中，“分布点数为 $k-1$ 时定理成立”用于推导第二步；“f 的下凸性”用于推导第三步
- **对凹函数**：
    - 若 $f(x)$ 是凹函数，则有 $E(f(X))\leq f(E(X))$
    - 取 $f(x)=\log(x)$，有 $E[\log(X)]\leq \log(E(X))$

信息不等式/相对熵的非负性

- **信息不等式**：设 $p(x)$、$q(x)$（$x\in X$）为两个概率密度函数，则

$$D(p||q)\geq 0$$

  当且仅当对任意 x，$p(x)=q(x)$，等号成立。
    - **证明**：
      设 $A=\{x:p(x)>0\}$ 为 $p(x)$ 的支撑集，则

$$\begin{aligned}-D(p||q) &= -\sum_{x\in A} p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}=\sum_{x\in A} p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}\\ &\leq \log\sum_{x\in A} p(x)\frac{q(x)}{p(x)}\ \text{（由}Jensen\text{不等式）}\\ &= \log\sum_{x\in A} q(x)\\ &\leq \log\sum_{x\in X} q(x)\\ &= \log 1=0\end{aligned}$$

      $\therefore D(p||q)\geq 0$，当 $p(x)=q(x)$ 时，等号成立。

互信息的非负性

- **互信息的非负性**：任意两个随机变量 X，Y，

$$I(X;Y) \geq 0$$

当且仅当 X，Y 相互独立，等号成立。

  - **证明**：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \\ &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)p(y)} \\ &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\ &= D(p(x,y)\|p(x)p(y)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- **推论**：
  - $D(p(y|x)\|q(y|x)) \geq 0$，当且仅当对任意的 y 以及满足 $p(x) > 0$ 的 x，有 $p(y|x) = q(y|x)$，等号成立。
  - $I(X;Y|Z) \geq 0$，当且仅当 $p(x,y|z) = p(x|z)p(y|z)$ 时，等号成立。

熵的性质

1. **非负性**
   - $$H(X) = \sum_i p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)} \geq 0$$
2. **确定性**
   - $$H(0,1) = H(1,0,\cdots,0) = 0$$
   - 只要有一个事件概率为1，熵就为0。
3. **对称性**
   - $$H(p_1,p_2,\cdots,p_n) = H(p_2,p_1,\cdots,p_n)$$
4. **香农辅助定理**
   - 任意n维概率矢量 $P = (p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$Q = (q_1,q_2,\cdots,q_n)$
   - $$H(p_1,p_2,\cdots,p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{q_i}$$
   - **证明**：$D(P\|Q) = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geq 0$
5. **最大熵定理**

- $$H(X) \le H(\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \cdots, \frac{1}{M}) = \log M$$
- M：信源符号个数
- 符号等概率出现时，熵最大。
- **证明**：X 的两种概率分布 P、u，$u(x) = \frac{1}{M}$

$$\begin{aligned}
D(P\|u) &= \sum p(x) \log \frac{p(x)}{u(x)} \\
&= \sum p(x) \log p(x) + \sum p(x) \log M \\
&= -H(X) + \log M \\
&\ge 0 \\
&\therefore H(X) \le \log M
\end{aligned}$$

6. **条件熵小于无条件熵**
   - $$H(X|Y) \le H(X)$$
   - **证明**：$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \ge 0$，$H(X) \ge H(X|Y)$。
7. **扩展性**
   - $$\lim_{\varepsilon \to 0} H_{n+1}(p_1, p_2, \cdots, p_n - \varepsilon, \varepsilon) = H_n(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$
   - $$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$$
   - 信源取值增多时，若这些取值概率很小($\varepsilon \to 0$)，信源熵不变。
8. **可加性**
   - $$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$
   - 当 X，Y 相互独立时，$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$。
   - **证明**：

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= \sum p(x,y) \log p(x,y) = \sum p(x,y) \log(p(x)p(y|x)) \\
&= \sum p(x,y) \log p(x) + \sum p(x,y) \log p(y|x) \\
&= H(X) + H(Y|X)
\end{aligned}$$

9. **递增性**
   - $$\begin{gathered} H_{n+m-1}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, q_1, q_2, \cdots, q_m) \\ = H_n(p_1, p_2, \cdots, p_n) + p_n H_m\left(\frac{q_1}{p_n}, \frac{q_2}{p_n}, \cdots, \frac{q_m}{p_n}\right) \end{gathered}$$
   - 其中$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，$\sum_{j=1}^{m} q_j = p_n$
   - 利用上式：

$$H_n(p_1, p_2, \cdots, p_n) = H_{n-1}(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1} + p_n) + \\ (p_{n-1} + p_n) H_2 \left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + p_n}, \frac{p_n}{p_{n-1} + p_n} \right)$$

对数和不等式及其应用

对数和不等式

- 非负数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ，约定 $0 \log 0 = 0$，$a \log \frac{a}{0} = \infty$，$0 \log \frac{0}{b} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \log \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

  当且仅当 $\frac{a_i}{b_i} =$ 常数时，等号成立。
  - **证明**:
    假定 $a_i > 0$，$b_i > 0$ ，$f(t) = t \log t$ 是严格下凸，因为 $f''(t) = \frac{1}{t} \log e > 0$。
    因此，由Jensen不等式，有 $\sum \alpha_i f(t_i) \geq f(\sum \alpha_i t_i)$，其中 $\alpha_i \geq 0$，$\sum \alpha_i = 1$。
    令 $\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$ ，$t_i = \frac{a_i}{b_i}$ ，可得

$$\sum \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \cdot \frac{a_i}{b_i} \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum \alpha_i t_i \right) \log \left(\sum \alpha_i t_i \right) \\ = \sum \left(\frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \cdot \frac{a_i}{b_i} \right) \log \left(\sum \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \cdot \frac{a_i}{b_i} \right)$$

$$\sum_i a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_i a_i \right) \log \left(\sum_i \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \right)$$

$$\sum_i a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_i a_i \right) \log \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_j}$$

相对熵的下凸性

- $D(p||q)$ 关于 (p, q) 是下凸的
- 即如果 (p_1, q_1)，(p_2, q_2) 为两对概率密度函数，则对所有的 $0 \leq \lambda \leq 1$，有

$$D(\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2 \| \lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2) \leq \lambda D(p_1 \| q_1) + (1 - \lambda) D(p_2 \| q_2)$$

  - **证明**:
    已知 $\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i) \log \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$
    令 $a_1 = \lambda p_1(x)$ ，$b_1 = \lambda q_1(x)$
    $a_2 = (1 - \lambda) p_2(x)$ ，$b_2 = (1 - \lambda) q_2(x)$

$$
\begin{aligned}
&\lambda p_1(x)\log\frac{\lambda p_1(x)}{\lambda q_1(x)}+(1-\lambda)p_2(x)\log\frac{(1-\lambda)p_2(x)}{(1-\lambda)q_2(x)}\\
\geq{}&(\lambda p_1(x)+(1-\lambda)p_2(x))\log\frac{\lambda p_1(x)+(1-\lambda)p_2(x)}{\lambda q_1(x)+(1-\lambda)q_2(x)}\\
&\sum_x\left[\lambda p_1(x)\log\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+(1-\lambda)p_2(x)\log\frac{p_2(x)}{q_2(x)}\right]\\
\geq{}&\sum_x(\lambda p_1(x)+(1-\lambda)p_2(x))\log\frac{\lambda p_1(x)+(1-\lambda)p_2(x)}{\lambda q_1(x)+(1-\lambda)q_2(x)}\\
&\lambda D(p_1\|q_1)+(1-\lambda)D(p_2\|q_2)\\
\geq{}&D(\lambda p_1+(1-\lambda)p_2\|\lambda q_1+(1-\lambda)q_2)
\end{aligned}
$$

熵的凹性

- $H(p)$ 是关于 p 的凹函数。
  - **证明**:
    均匀分布 $u(x_i)=\frac{1}{M}$

$$
\begin{aligned}
D(p\|u)&=\sum_i p(x_i)\log\frac{p(x_i)}{u(x_i)}\\
&=\sum_i p(x_i)\log p(x_i)-\sum_i p(x_i)\log u(x_i)\\
&=-H(p)+\log M
\end{aligned}
$$

$\therefore H(p)=\log M-D(p\|u)$，因为 $D(p\|u)$ 是凸函数，所以 $H(p)$ 是凹函数。

互信息的凹凸性

- **互信息的凹凸性**
  - 设 $(X,Y)\sim p(x,y)=p(x)p(y|x)$。
  - 如果固定 $p(y|x)$，则互信息 $I(X;Y)$ 是关于 $p(x)$ 的凹函数;
  - 如果固定 $p(x)$，则互信息 $I(X;Y)$ 是关于 $p(y|x)$ 的凸函数。
- **证明**:
  i. **证明第一部分**

$$
I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)-\sum_x p(x)H(Y|X=x)
$$

如果固定 $p(y|x)$，$p(y)=\sum_x p(x,y)=\sum_x p(x)p(y|x)$ 是 $p(x)$ 的线性函数。
$H(Y)$ 是关于 $p(y)$ 的凹函数，因而也是关于 $p(x)$ 的凹函数。上式第二项是关于 $p(x)$ 的线性函数，因此它们的差仍是关于 $p(x)$ 的凹函数。

  ii. **证明第二部分**
  - **方法1**:
    固定 $p(x)$，考虑两个不同的条件分布 $p_1(y|x)$ 和 $p_2(y|x)$。相应的联合分布分别为 $p_1(x,y)=p(x)p_1(y|x)$ 和 $p_2(x,y)=p(x)p_2(y|x)$，且各自的边际分布为 $p(x),p_1(y)$ 和 $p(x),p_2(y)$。
    考虑条件分布

$$p_\lambda(y|x) = \lambda p_1(y|x) + (1-\lambda)p_2(y|x)$$

它是 $p_1(y|x)$ 和 $p_2(y|x)$ 的组合，其中 $0 \le \lambda \le 1$。
相应的联合分布也是对应的两个联合分布的线性组合

$$p_\lambda(x,y) = \lambda p_1(x,y) + (1-\lambda)p_2(x,y)$$

Y 的分布也是一个组合

$$p_\lambda(y) = \lambda p_1(y) + (1-\lambda)p_2(y)$$

因此，如果设 $q_\lambda(x,y) = p(x)p_\lambda(y)$ 为边际分布的乘积，则有

$$q_\lambda(x,y) = \lambda q_1(x,y) + (1-\lambda)q_2(x,y)$$

由于互信息是联合分布和边际分布乘积的相对熵，有

$$I(X;Y) = D(p_\lambda(x,y)\|q_\lambda(x,y))$$

因为相对熵 $D(p\|q)$ 是关于 (p,q) 的凸函数，因此 $I(X;Y)$ 是 (p_λ, q_λ) 的凸函数，由于 p_λ, q_λ 都是 $p(y|x)$ 的线性组合，所以 $I(X;Y)$ 是条件分布 $p(y|x)$ 的凸函数。

- **方法2**：
  设 $p(x)$ 为固定信源分布，令 $p_1(y|x)$ 和 $p_2(y|x)$ 为两条不同信道，相应的互信息分别记为 $I[p_1(y|x)]$ 和 $I[p_2(y|x)]$。
  令 $p(y|x) = \lambda p_1(y|x) + (1-\lambda)p_2(y|x)$，$0 \le \lambda \le 1$，相应的互信息为 $I[p(y|x)]$

$$\begin{aligned}
&① \ I[p(y|x)] - \lambda I[p_1(y|x)] - (1-\lambda)I[p_2(y|x)] \\
&= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(y|x)}{p(y)} - \sum_{x,y}\lambda p_1(x,y)\log\frac{p_1(y|x)}{p_1(y)} - \\
&\quad \sum_{x,y}(1-\lambda)p_2(x,y)\log\frac{p_2(y|x)}{p_2(y)} \\
&= \sum_{x,y}[\lambda p_1(x,y) + (1-\lambda)p_2(x,y)]\log\frac{p(y|x)}{p(x)} - \\
&\quad \sum_{x,y}\lambda p_1(x,y)\log\frac{p_1(y|x)}{p(x)} - \sum_{x,y}(1-\lambda)p_2(x,y)\log\frac{p_2(y|x)}{p(x)} \\
&= \lambda\underbrace{\sum_{x,y}p_1(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p_1(x|y)}}_{(②)} + (1-\lambda)\underbrace{\sum_{x,y}p_2(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p_2(x|y)}}_{(③)}
\end{aligned}$$

应用Jensen不等式

$$
\begin{aligned}
② \ \lambda \sum_{x,y} p_1(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p_1(x|y)} &\le \lambda \log\left[\sum_{x,y} p_1(x,y)\frac{p(x|y)}{p_1(x|y)}\right] \\
&= \lambda\log\left[\sum_y p_1(y)\sum_x p(x|y)\right] \\
&= \lambda\log\left[\sum_y p_1(y)\sum_x \frac{p(x)p(y|x)}{p(y)}\right] \\
&= \lambda \log 1 = 0
\end{aligned}
$$

同理 $③ = 0$，则 $① \le 0$

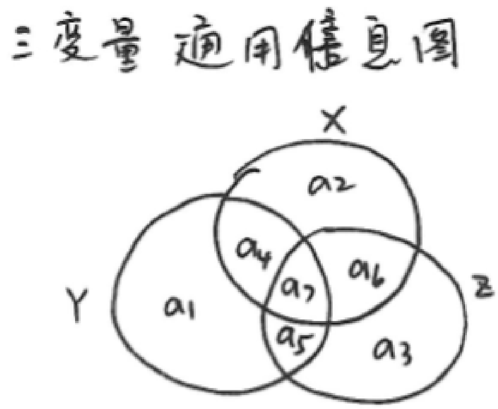
$$
I(\lambda p_1(y|x) + (1-\lambda)p_2(y|x)) \le \lambda I[p_1(y|x)] + (1-\lambda)I[p_2(y|x)]
$$

$I(X;Y)$ 关于 $p(y|x)$ 下凸。

2.3 数据处理不等式

三变量互信息

- **定义**：
  1. x_i**与符号对**(y_j, z_k)**间的互信息量**
     - $I(x_i; y_j, z_k) = \log\frac{p(x_i|y_j,z_k)}{p(x_i)}$
  2. **条件互信息量**
     - $$
\begin{aligned}
I(x_i;y_j|z_k) &= \log\frac{p(x_i|y_j,z_k)}{p(x_i|z_k)} = \log(\frac{p(x_i|y_j,z_k)}{p(x_i)}\frac{p(x_i)}{p(x_i|z_k)}) \\
&= \log\frac{p(x_i|y_j,z_k)}{p(x_i)} - \log\frac{p(x_i|z_k)}{p(x_i)} \\
&= I(x_i;y_j,z_k) - I(x_i;z_k)
\end{aligned}
$$
     - $I(x_i;y_j,z_k) = I(x_i;z_k) + I(x_i;y_j|z_k)$
     - 对其求平均可得
       - $I(X;Y,Z) = I(X;Z) + I(X;Y|Z)$
       - $I(X;Y,Z) = I(X;Z,Y) = I(X;Y) + I(X;Z|Y)$ ①
  3. x_i，y_j**与符号对**(z_k)**间的互信息量**
     - $$
\begin{aligned}
I(x_i,y_j;z_k) &= \log\frac{p(x_iy_j|z_k)}{p(x_iy_j)} = \log\frac{p(x_i|z_k)p(y_j|x_iz_k)}{p(x_i)p(y_j|x_i)} \\
&= \log\frac{p(x_i|z_k)}{p(x_i)} + \log\frac{p(y_j|x_iz_k)}{p(y_j|x_i)} \\
&= I(x_i;z_k) + I(y_j;z_k|x_i)
\end{aligned}
$$
     - 对其求平均可得

- $I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X)$
    - $I(X,Y;Z) = I(Y,X;Z) = I(Y;Z) + I(X;Z|Y)$ ②
- **互信息操作**:
  - 由①、②:
    - $I(X;Z|Y) = I(X;Y,Z) - I(X;Y)$
      - 把条件Y移到分号后面，然后减去该条件与分号前面的变量之间的互信息
      - Y的条件下X和Z+ X和Y = X和(Y,Z)
    - $I(X;Z|Y) = I(X,Y;Z) - I(Y;Z)$
      - 把条件Y移到分号前面，然后减去该条件与分号后面的变量之间的互信息
  - $I(X;Z|Y,W) = I(X;Z,Y|W) - I(X;Y|W) = I(X,Y;Z|W) - I(Y;Z|W)$
  - $$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &= \sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log\frac{p(x_i|y_j,z_k)}{p(x_i|z_k)} \\ &= \sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log p(x_i|y_j,z_k) - \sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log p(x_i|z_k) \\ &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\ &= H(Y|Z) - H(Y|X,Z) \\ &= I(Y;X|Z) \end{aligned}$$
- **三变量通用信息图**:
  - 信息图表示:
    - $H/I \Longleftrightarrow$区域
    - $, \Longleftrightarrow \bigcup$(并集)
    - $; \Longleftrightarrow \bigcap$(交集)
    - $| \Longleftrightarrow -$ (减)
  - 

  - 不相变的7个区域分别表示
    - $a_1 : H(Y|X,Z)$
    - $a_2 : H(X|Y,Z)$
    - $a_3 : H(Z|X,Y)$
    - $a_4 : I(X;Y|Z)$
    - $a_5 : I(Y;Z|X)$
    - $a_6 : I(X;Z|Y)$

        - $a_7: I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z)$
    - 一般情况下，a_7可能为负，即$I(X;Y;Z)$可能小于0 。

一阶马尔可夫链

定义

1. **定义（两变量独立）**

- 两个随机变量 X 和 Y 独立，记为 $X \perp Y$，有

$$p(x,y) = p(x)p(y)$$

2. **定义（相互独立）**

- 设 $n \geq 3$，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，有

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

3. **定义（条件独立）**

- 随机变量 X，Y 和 Z，若 X 与 Z 关于 Y 条件独立，记为 $X \perp Z|Y$
- 有 $p(x,y,z)p(y) = p(x,y)p(y,z)$ 或 $p(x,z|y) = p(x|y)p(z|y)$
- 等价地

$$p(x,y,z) = p(x)p(y|x)p(z|y)$$

4. **定义（马尔可夫链）**

- 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（$n \geq 3$）构成一个马尔可夫链，记作 $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n$，则有

$$p(X_1, X_2, \cdots, X_n)p(X_2)p(X_3)\cdots p(X_{n-1}) = p(X_1, X_2)p(X_2, X_3)\cdots p(X_{n-1}, X_n)$$

- 或等价地

$$p(X_1, X_2, \cdots, X_n) = p(X_1)p(X_2|X_1)p(X_3|X_2)\cdots p(X_n|X_{n-1})$$

- 即系统在时刻n 的状态只取决于时刻$n-1$ 的状态，而与时刻$n-1$ 之前的状态无关
- 可见：$X \to Y \to Z$ 等价于 $X \perp Z|Y$

结论

1. $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n$ 构成一个马尔可夫链，则有 $X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1$ 也构成一个马尔可夫链。（可由马尔可夫链定义的对称性直接得到）。
2. $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n$ 构成一个马尔可夫链，则有

$$\begin{aligned} & X_1 \to X_2 \to X_3 \\ & (X_1, X_2) \to X_3 \to X_4 \\ & \vdots \\ & (X_1, X_2, \cdots, X_{n-2}) \to X_{n-1} \to X_n \end{aligned}$$

构成马尔可夫链。

- **证明**:

$$
\begin{aligned}
&\text{若} X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \text{构成马尔可夫链，则有}\\
&\sum_{x_4} p(x_1,x_2,x_3,x_4)p(x_2)p(x_3) = \sum_{x_4} p(x_1,x_2)p(x_2,x_3)p(x_3,x_4)\\
&\therefore p(x_1,x_2,x_3)p(x_2)p(x_3) = p(x_1,x_2)p(x_2,x_3)p(x_3)\\
&\therefore p(x_1,x_2,x_3)p(x_2) = p(x_1,x_2)p(x_2,x_3)\\
&\Rightarrow X_1 \to X_2 \to X_3 \text{构成马尔可夫链}\\
&\text{又有} p(x_1,x_2,x_3,x_4)p(x_2)p(x_3) = p(x_1,x_2)p(x_2,x_3)p(x_3,x_4)\\
&\text{代入得} p(x_1,x_2,x_3,x_4)p(x_2)p(x_3) = p(x_1,x_2,x_3)p(x_2)p(x_3,x_4)\\
&\therefore p(x_1,x_2,x_3,x_4)p(x_3) = p(x_1,x_2,x_3)p(x_3,x_4)\\
&\Rightarrow (X_1,X_2) \to X_3 \to X_4 \text{构成马尔可夫链}
\end{aligned}
$$

3. $X \to Y \to Z \to W$ 构成马尔可夫链，则有
   - $H(X|Y) = H(X|YZ) = H(X|YZW)$
     - **证明**:

       由马尔可夫链性质:

$$
\begin{aligned}
&p(x,y,z)p(y) = p(x,y)p(y,z)\\
&\Rightarrow \frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} = \frac{p(x,y)}{p(y)}\\
&\Rightarrow p(x|yz) = p(x|y)\\
&\Rightarrow \mathop{\mathbb{E}}_{x,y} p(x|yz) = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y} p(x|y)\\
&\text{即} H(X|YZ) = H(X|Y)
\end{aligned}
$$

       类似地:

$$
\begin{aligned}
&p(x,y,z,w)p(y)p(z) = p(x,y)p(y,z)p(z,w)\\
&\Rightarrow p(x,y,z,w) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \cdot \frac{p(y,z)p(z,w)}{p(z)} = p(x|y)p(y,z,w)\\
&\Rightarrow p(x|yzw) = p(x|y)\\
&\text{即} H(X|Y) = H(X|YZW)
\end{aligned}
$$

   - $I(X;Z|Y) = H(X|Y) - H(X|YZ) = 0$
   - $I(Y;W|Z) = 0$
   - $I(Y;Z) = I(XY;Z) = I(X;ZW) = I(XY;ZW)$
     - **证明**:

       $I(XY;Z) = I(Y;Z) + I(X;Z|Y) = I(Y;Z)$

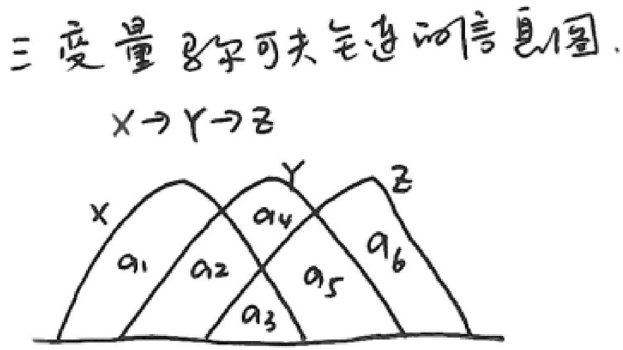
       $I(Y;ZW) = I(Y;Z) + I(Y;W|Z) = I(Y;Z)$
   - $I(XY;Z|W) - I(X;Z|W) = I(Y;Z|XW) \geq 0$

     $\Rightarrow I(XY;Z|W) \geq I(X;Z|W)$

数据处理不等式

- **定理**：若 $X \to Y \to Z$ 构成马尔可夫链，则有 $I(X;Y) \geq I(X;Z)$。
  - **证明**：

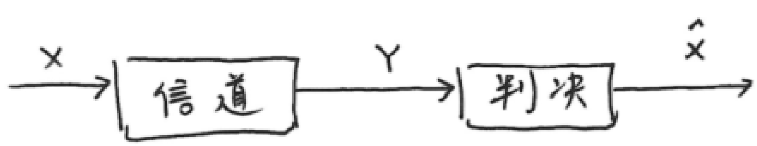
$$
\begin{aligned}
&\because I(X;YZ) = I(X;Y) + I(X;Z|Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) \\
&\therefore I(X;Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) - I(X;Z|Y) \\
&\text{又} \because \text{马尔可夫链} X \to Y \to Z \text{中，} I(X;Z|Y) = 0 \text{且} I(X;Y|Z) \geq 0 \\
&\therefore I(X;Y) \geq I(X;Z)\text{，同理} I(Y;Z) \geq I(X;Z)
\end{aligned}
$$

- **三变量马尔可夫链的信息图**
  - 对于马尔可夫链 $X \to Y \to Z$，其信息图及相关性质如下：
    - 

  - **相关等式与性质**：
    - a_1：条件熵 $H(X|Y) = H(X|Y,Z)$。
    - a_2：条件互信息 $I(X;Y|Z)$。
    - a_3：互信息$I(X;Z) = I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z) \geq 0$。
    - a_4：条件熵 $H(Y|X,Z)$。
    - a_5：条件互信息 $I(Y;Z|X)$。
    - a_6：条件熵 $H(Z|Y) = H(Z|Y,X)$。
  - 由此可见，在马尔可夫链的信息图中，每个不相交的区域值都大于等于 0。

费诺不等式

定义



-
  - 信源发出X，信宿收到Y，作出判决：认为X传出的是$\hat{X}$
  - 已知 $p(X,Y)$，$\hat{X}$ 是 Y 的函数

$$\begin{aligned}\hat{X}(y) &= \arg\max_{x_i} p(x_i|y) \\ &= \arg\max_{x_i} \frac{p(x_i|y)p(y)}{p(y)} \\ &= \arg\max_{x_i} p(x_i, y)\end{aligned}$$

  - 设 X 和 $\hat{X}$ 取值空间同为 $\mathcal{X}$，$|\mathcal{X}|$ 表示取值个数。
- **定义错误概率** $P_e = \Pr\{X \neq \hat{X}\}$。
  - 若 $P_e = 0$，即 $X = \hat{X}$ 以概率 1 成立，$H(X|\hat{X}) = 0$。
  - 这里讨论 $P_e \neq 0$ 时，P_e 和 $H(X|\hat{X})$ 之间的关系。

费诺不等式

- 设 X 和 $\hat{X}$ 取值空间同为 $\mathcal{X}$ 的随机变量，则有

$$H(X|\hat{X}) \leq H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1)$$

  其中 $H(P_e) = H(P_e, 1 - P_e)$ 为二元熵函数，$|\mathcal{X}|$ 为 X 和 $\hat{X}$ 的取值数量。
- **证明**:
  定义随机变量 $Z = \begin{cases} 0, & 若 X = \hat{X} \\ 1, & 若 X \neq \hat{X} \end{cases}$，则 $P_r(Z) = \begin{cases} 1 - P_e, & 若 Z = 0 \\ P_e, & 若 Z = 1 \end{cases}$，则$H(Z) = H(P_e, 1 - P_e) = H(P_e)$
  由于 Z 是 X 和 $\hat{X}$ 的函数，有 $H(Z|X\hat{X}) = 0$，则

$$\begin{aligned}H(X|\hat{X}) &= H(X|\hat{X}) + H(Z|X\hat{X}) \\ &= H(XZ|\hat{X}) \\ &= H(Z|\hat{X}) + H(X|Z\hat{X}) \\ &\leq H(Z) + H(X|\hat{X}Z) \\ &= H(Z) + \Pr(Z = 0)H(X|\hat{X}, Z = 0) + \Pr(Z = 1)H(X|\hat{X}, Z = 1) \\ &= H(Z) + \Pr(Z = 1)H(X|\hat{X}, Z = 1) \\ &\leq H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1)（其中H(X|\hat{X}, Z = 1) \leq \log(|\mathcal{X}| - 1)）\end{aligned}$$

  因为 $X \to Y \to \hat{X}$ 构成马尔可夫链，
  所以 $I(X;Y) \geq I(X;\hat{X})$，
  进而 $H(X) - H(X|Y) \geq H(X) - H(X|\hat{X})$，
  即 $H(X|Y) \leq H(X|\hat{X})$。

费诺不等式（一般形式）

- 对于任何满足 $X \to Y \to \hat{X}$ 的估计量 $\hat{X}$，设 $P_e = \Pr(X \neq \hat{X})$，有:

$$H(X|Y) \leq H(X|\hat{X}) \leq H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1)$$

  其中 $\mathcal{X}$ 为 X 的取值空间。
- 上述不等式可以减弱为:

$$H(X|Y) \leq 1 + P_e \log|\mathcal{X}|$$

或者

$$P_e \geq \frac{H(X|Y)-1}{\log|\mathcal{X}|}$$

- **推论**：对于任意两个随机变量 X 和 Y，设 $p=\Pr(X\neq Y)$，有

$$H(X|Y) \leq H(p) + p\log|\mathcal{X}|$$

在费诺不等式中令 $\hat{X}=Y$，即可得到上式。

其他不等式

- 设 X 和 X' 为两个独立同分布的随机变量，有相同的熵 $H(X)$，那么 $X=X'$ 的概率为 $\Pr(X=X')=\sum_x p^2(x)$，则有如下不等式：

1. 如果 X 和 X' 独立同分布，具有熵 $H(X)$，则 $\Pr(X=X')\geq 2^{-H(X)}$，当且仅当 X 服从均匀分布，等号成立。
    - **证明**：
      假定 $X\sim p(x)$，由Jensen不等式，令 $f(y)=2^y$ 为下凸函数。
      则 $f(E(Y))\leq E(f(Y))$ ，令 $y=\log p(x)$，则有：

$$\begin{aligned} 2^{\sum_x p(x)\log p(x)} &\leq \sum_x p(x) 2^{\log p(x)} \\ &= \sum_x p(x)p(x) \\ &= \sum_x p^2(x) \end{aligned}$$

      因为 $H(X)=-\sum_x p(x)\log p(x)$，所以 $2^{-H(X)}\leq \Pr(X=X')$ 。
2. 设 X 和 X' 相互独立，且 $X\sim p(x)$，$X'\sim r(x)$，$x,x'\in\mathcal{X}$，则

$$\begin{aligned} \Pr(X=X') \geq 2^{-H(p)-D(p||r)} \\ Pr(X=X') \geq 2^{-H(r)-D(r||p)} \end{aligned}$$

    - **证明**：

$$\begin{aligned} 2^{-H(p)-D(p||r)} &= 2^{\sum p(x)\log p(x)+\sum p(x)\log\frac{r(x)}{p(x)}} \\ &= 2^{\sum p(x)\log r(x)} \\ &\leq \sum p(x) 2^{\log r(x)} \\ &= \sum p(x) r(x) \\ &= \Pr(X=X') \end{aligned}$$

2.4 离散序列信源的熵

离散无记忆信源的序列熵

- 随机序列$\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_L)$，其中$X_l\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$l=1,2,\cdots,L$
- $p(\vec{X}=\vec{x}_i)=p(X_1=x_{i1},X_2=x_{i2},\cdots,X_L=x_{iL})$，这里$i=1,2,\cdots,n^L$，$i_l=1,2,\cdots,n$
- **定义信息熵$H(\vec{X})$为**:

$$
\begin{aligned}
H(\vec{X}) &= -\sum_{i=1}^{n^L} p(\vec{x}_i)\log p(\vec{x}_i) \\
&= -\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_L=1}^{n} p(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iL})\log p(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iL})
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
p(\vec{X}=\vec{x}_i) &= p(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iL}) \\
&= p(x_{i1})p(x_{i2}|x_{i1})p(x_{i3}|x_{i1}x_{i2})\cdots p(x_{iL}|x_{i1}x_{i2}\cdots x_{iL-1}) \\
&\overset{\text{无记忆}}{=} p(x_{i1})p(x_{i2})\cdots p(x_{iL})
\end{aligned}
$$

  则

$$
\begin{aligned}
H(\vec{X}) = &-\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_L=1}^{n} p(x_{i1})p(x_{i2})\cdots p(x_{iL})[\log p(x_{i1})+\log p(x_{i2}) \\
&+\cdots+\log p(x_{iL})] \\
= &-\sum_{i_1=1}^{n}p(x_{i1})\sum_{i_2=1}^{n}p(x_{i2})\cdots\sum_{i_L=1}^{n}p(x_{iL})\log p(x_{i1}) \quad \leftarrow H(X_1) \\
&-\sum_{i_1=1}^{n}p(x_{i1})\sum_{i_2=1}^{n}p(x_{i2})\cdots\sum_{i_L=1}^{n}p(x_{iL})\log p(x_{i2}) \quad \leftarrow H(X_2) \\
&-\cdots \\
= &\, H(X_1)+H(X_2)+\cdots+H(X_L) \\
= &\sum_{l=1}^{L} H(X_l)
\end{aligned}
$$

- 若信源是平稳的，即$H(X_1)=H(X_2)=\cdots=H(X_L)=H(X)$，则

$$
H(\vec{X})=LH(X)
$$

  用 $H_L(\vec{X})$ 表示长度为 L 的序列平均每个符号的熵，则

$$
H_L(\vec{X})=\frac{1}{L}H(\vec{X})=H(X)
$$

离散有记忆信源的序列熵

- 长度为 L 的符号序列 $\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_L)$

$$\begin{aligned}H(\vec{X})&=H(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_L)\\&=H(X_1)+H(X_2|X_1)+H(X_3|X_1X_2)+\cdots+H(X_L|X_1X_2,\cdots,X_{L-1})\end{aligned}$$

- 记作

$$H(\vec{X})=H(X^L)=\sum_{l=1}^{L}H(X_l|X^{l-1})$$

- 平均每个符号的熵

$$H_L(\vec{X})=\frac{1}{L}H(X^L)$$

离散平稳信源序列熵

定义

- **离散平稳信源**：联合概率具有时间推移不变性。

$$p\{X_{i1}=x_1,X_{i2}=x_2,\cdots,X_{iL}=x_L\}=p\{X_{i1+k}=x_1,X_{i2+k}=x_2,\cdots,X_{iL+kh}=x_L\}$$

结论

1. $H(X_L|X^{L-1})$ 是 L 的单调非增函数
   - 依据：条件多的熵小于等于条件少的熵，平稳信源联合/条件概率时间推移不变
   - **证明**：

$$\begin{aligned}H(X_L|X_1X_2\cdots X_{L-1})&\le H(X_L|X_2X_3\cdots X_{L-1})\\&=H(X_{L-1}|X_1X_2\cdots X_{L-2})\text{（平稳性）}\\&\le H(X_{L-1}|X_2\cdots X_{L-2})\\&=H(X_{L-2}|X_1\cdots X_{L-3})\\&\vdots\\&\le H(X_2|X_1)\end{aligned}$$

2. $H_L(\vec{X})\ge H(X_L|X^{L-1})$
   - **证明**：

$$
\begin{aligned}
H_L(\vec{X}) &= \frac{1}{L} H(X_1, X_2, \cdots, X_L) \\
&= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} H(X_l | X^{l-1}) \\
&= \frac{1}{L} (H(X_1) + H(X_2|X_1) + H(X_3|X_1, X_2) + \cdots + H(X_L|X_1 X_2, \cdots, X_{L-1})) \\
&\geq \frac{1}{L} \cdot L \cdot H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) \\
&= H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1})
\end{aligned}
$$

3. $H_L(\vec{X})$ 是 L 的单调非增函数
   - **证明**:

$$
\begin{aligned}
LH_L(\vec{X}) &= H(X_1, X_2, \cdots, X_L) \\
&= H(X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) + H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) \\
&= (L-1)H_{L-1}(\vec{X}) + H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) \\
&\leq (L-1)H_{L-1}(\vec{X}) + H_L(\vec{X}) \\
\therefore (L-1)H_L(\vec{X}) &\leq (L-1)H_{L-1}(\vec{X}) \\
H_L(\vec{X}) &\leq H_{L-1}(\vec{X})
\end{aligned}
$$

4. 当 $L \to \infty$ 时，定义$H_\infty(\vec{X})$为极限熵，有

$$
H_\infty(\vec{X}) \triangleq \lim_{L \to \infty} H_L(\vec{X}) = \lim_{L \to \infty} H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1})
$$

   - **证明**:

$$
\begin{aligned}
H_{L+k}(\vec{X}) = \frac{1}{L+k} & [H(X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) + H(X_L|X_1 X_2 \cdots X_{L-1}) + \\
& \cdots + H(X_{L+k}|X_1 X_2 \cdots X_{L+k-1})] \\
\leq & \frac{1}{L+k} [H(X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) + H(X_L|X_1 X_2 \cdots X_{L-1}) + \\
& H(X_L|X_1 X_2, \cdots, X_{L-1}) + \cdots + H(X_L|X_1 \cdots X_{L-1})] \\
= & \frac{1}{L+k} H(X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) + \frac{k+1}{L+k} H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1})
\end{aligned}
$$

当 $k \to \infty$ 时，$\lim_{k \to \infty} H_{L+k}(\vec{X}) \leq H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) \leq H_L(\vec{X})$
当 $L \to \infty$ 时，$H_L(\vec{X}) = H_{L+k}(\vec{X})$，得到

$$
\lim_{L \to \infty} H_L(\vec{X}) = \lim_{L \to \infty} H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1})
$$

若$H_0(X)$ 为等概率无记忆信源单个符号熵，有

$$
H_0(X) \geq H_1(X) \geq H_2(\vec{X}) \geq H_3(\vec{X}) \cdots \geq H_\infty(\vec{X})
$$

只有极限熵最真实地反映信源的实际情况。

马尔可夫信源的极限熵

- **定义**：

$$H_\infty(\vec{X}) = \lim_{L\to\infty} H_L(\vec{X}) = \lim_{L\to\infty} H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1})$$

- 实际常取有限长度 L 下的条件熵 $H(X_L|X^{L-1})$ 作为 $H_\infty(\vec{X})$ 的近似值。
- **m阶马尔可夫信源（齐次）的推导**

$$p(X_t|X_1, X_2, \cdots, X_{t-1}) = p(X_t|X_{t-m}, \cdots, X_{t-1})$$

$$\begin{aligned} H_\infty(\vec{X}) &= \lim_{L\to\infty} H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) \\ &= \lim_{L\to\infty} H(X_L|X_{L-m}, \cdots, X_{L-1}) \\ &= H(X_{m+1}|X_1, X_2, \cdots, X_m) \end{aligned}$$

对于齐次、稳定马尔可夫链，其状态 s_i 由 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ 唯一确定，所以

$$p(x_{i_{m+1}}|x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}) = p(x_{i_{m+1}}|s_i)$$

上式两边同时取对数，并对 $x_{i1}, \cdots, x_{im}, x_{i_{m+1}}$ 和 s_i 取统计平均，再取负，得到：

$$\begin{aligned} \textbf{Left} &= -\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}} p(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}, x_{i_{m+1}}, s_i) \log p(x_{i_{m+1}}|x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}) \\ &= -\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}} p(x_{i1}, \cdots, x_{i_{m+1}}) \log p(x_{i_{m+1}}|x_{i1}, \cdots, x_{im}) \\ &= H(X_{m+1}|X_1, X_2, \cdots, X_m) \\ &= H_\infty(\vec{X}) \\ \textbf{Right} &= -\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1};i} p(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{i_{m+1}}, s_i) \log p(x_{i_{m+1}}|s_i) \\ &= -\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1};i} p(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}, s_i) p(x_{i_{m+1}}|x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}, s_i) \log p(x_{i_{m+1}}|s_i) \\ &= -\sum_{i_{m+1}} \sum_i p(s_i) p(x_{i_{m+1}}|s_i) \log p(x_{i_{m+1}}|s_i) \\ &= \sum_i p(s_i) \sum_{i_{m+1}} p(x_{i_{m+1}}|s_i) \log \frac{1}{p(x_{i_{m+1}}|s_i)} \\ &= \sum_i p(s_i) H(X|s_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore H_\infty(\vec{X}) &= \sum_i p(s_i) H(X|s_i) \\ H(X|s_i) &= -\sum_j p(x_j|s_i) \log p(x_j|s_i) \\ &= -\sum_j p(s_j|s_i) \log p(s_j|s_i) \end{aligned}$$

- 例题

例2-14　三状态马尔可夫信源，其转移概率矩阵为 $P=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0.9\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$

设稳态分布的概率矢量为 $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$.

$$\begin{cases}\vec{w}P=\vec{w}\\ \sum_{i=1}^{3} w_i=1\end{cases}\qquad \begin{cases}0.1w_1+0.5w_2=w_1\\ 0.2w_3=w_2\\ 0.9w_1+0.5w_2+0.8w_3=w_3\\ w_1+w_2+w_3=1\end{cases}\qquad \Rightarrow \quad w_1=\frac{5}{59},\ w_2=\frac{9}{59},\ w_3=\frac{45}{59}$$

$$H(X|S_1)=-0.1\log 0.1-0.9\log 0.9=0.469\ \text{bit/符号}$$

$$H(X|S_2)=-0.5\log 0.5-0.5\log 0.5=1\ \text{bit/符号}$$

$$H(X|S_3)=-0.2\log 0.2-0.8\log 0.8=0.722\ \text{bit/符号}$$

$$H_\infty(\vec{X})=\frac{5}{59}H(X|S_1)+\frac{9}{59}H(X|S_2)+\frac{45}{59}H(X|S_3)=0.743\ \text{bit/符号}$$

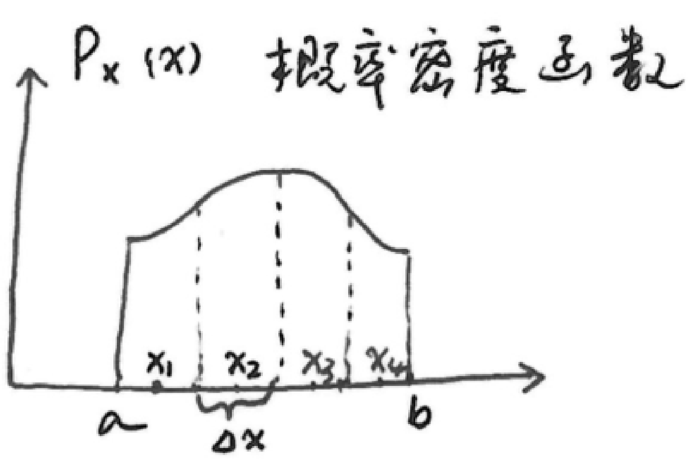
2.5 连续信源的熵和互信息

微分熵（连续信源熵）

- 详见 **第二章补充微分熵**
- 微分熵即连续信源熵，记作 $h(X)$ 或 $H_c(X)$ 。

幅度连续的单符号信源

连续信源熵

- **定义**：
  - 用n个离散变量逼近连续变量，概率密度函数为 $P_X(x)$
    - 

- 设 $p(x_i)=\int_{a+(i-1)\Delta x}^{a+i\Delta x}P_X(x)dx=P_X(x_i)\Delta x$
- 离散熵

$$H_n(X)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log p(x_i)=-\sum_{i=1}^{n}P_X(x_i)\Delta x\log(P_X(x_i)\Delta x)$$

- 当 $n\to\infty$，$\Delta x\to 0$ 时:

$$H(X)=\lim_{n\to\infty}H_n(X)=-\int_a^b P_X(x)\log P_X(x)dx-\lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x\int_a^b P_X(x)dx$$

其中 $\int_a^b P_X(x)dx=1$ ，后一项趋于无穷大。

- **定义连续信源熵为**

$$H_c(X)=-\int_{-\infty}^{\infty}P_X(x)\log P_X(x)dx$$

- **性质**:
  - 连续信源不确定度为无穷大，熵为无穷大，需要无限多位二进制数表示。
  - 连续信源的熵具有相对性（只有相对意义），在取两熵之差时才具有信息的所有特征。

联合熵、条件熵和互信息

- **联合熵**:

$$H_c(X,Y)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{X,Y}(x,y)\log P_{X,Y}(x,y)dxdy$$

- **条件熵**:

$$H_c(Y|X)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{X,Y}(x,y)\log P_Y(y|x)dxdy$$

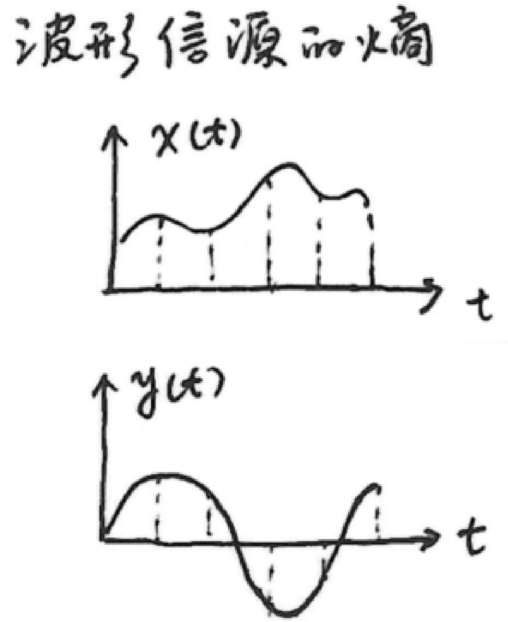
$$H_c(X,Y)=H_c(X)+H_c(Y|X)=H_c(Y)+H_c(X|Y)$$

- **互信息**:

$$\begin{aligned}I(X;Y)=I(Y;X)&=H_c(X)-H_c(X|Y)\\&=H_c(Y)-H_c(Y|X)\\&=H_c(X)+H_c(Y)-H_c(X,Y)\end{aligned}$$

波形信源的熵

- 平稳随机过程通过采样变换可得到平稳随机序列，例如:
  - 随机过程 $x(t)$ 变换为 $\vec{X}(X_1,X_2,\cdots,X_L)$ 。
  - 随机过程 $y(t)$ 变换为 $\vec{Y}(Y_1,Y_2,\cdots,Y_L)$ 。

- 

- 相关熵的计算公式如下：
  - $H_c(\vec{X})=H_c(X_1,X_2,\cdots,X_L)=-\int_{\vec{R}}P_{\vec{X}}(\vec{x})\log P_{\vec{X}}(\vec{x})d\vec{x}$
  - $H_c(\vec{Y}|\vec{X})=H_c(Y_1,Y_2,\cdots,Y_L|X_1,X_2,\cdots,X_L)=-\int_{\vec{R}}\int_{\vec{R}}P_{\vec{X}\vec{Y}}(\vec{x},\vec{y})\log P_{\vec{Y}}(\vec{y}|\vec{x})d\vec{x}d\vec{y}$
- 波形信源熵由上述各项的极限表达式（$L\to\infty$ ）给出：
  - $H_c(x(t))\triangleq\lim_{L\to\infty}H_c(\vec{X})$
  - $H_c(y(t)|x(t))\triangleq\lim_{L\to\infty}H_c(\vec{Y}|\vec{X})$
- 对于**限频 f_m，限时 t_B** 的平稳随机过程，可用 $L=2f_mt_B$ 随机矢量表示，且有：

$$\begin{aligned}H_c(\vec{X})=&H_c(X_1,X_2,\cdots,X_L)\\=&H_c(X_1)+H_c(X_2|X_1)+H_c(X_3|X_1X_2)+\\&\cdots+H_c(X_L|X_1,X_2,\cdots,X_{L-1})\\\le&H_c(X_1)+H_c(X_2)+\cdots+H_c(X_L)\end{aligned}$$

最大熵定理(连续信源)

1. **无限制条件时**：**最大熵为无穷大。**
2. **限峰功率最大熵定理**
   - **对于定义域为有限的随机变量 X，当它是均匀分布时，具有最大熵。**
   - X 幅度取值限制在 $[a,b]$，有 $\int_a^bP_X(x)dx=1$ 。
   - 当 $P_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\0, & 其他\end{cases}$ 时，信息熵最大，

$$H_c(X)=-\int_a^b\frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}=\log(b-a)$$

3. **限平均功率最大熵定理**
   - **对于相关矩阵一定的随机变量 X，当它是正态分布时具有最大熵。**
   - 概率密度函数 $P_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - 其中 μ 为均值，σ^2 为方差，$\sigma^2=\int(x-\mu)^2P_X(x)dx$ 。

- 信息熵 $H_c(X)$ 的计算过程如下:

$$\begin{aligned} H_c(X) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x)\log P_X(x)dx \\ &= E[-\log P_X(x)] = E\left[-\log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \log e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\log e\right] \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) + \frac{\log e}{2} \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \end{aligned}$$

- **证明**:
设 $\varphi(x) \sim N(0,\sigma^2)$，$g(x)$ 满足 $\int x^2 g(x)dx = \sigma^2$ ，因为 $D(g(x)\|\varphi(x)) \geq 0$，即:

$$\begin{aligned} & D(g(x)\|\varphi(x)) \geq 0 \\ & \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\frac{g(x)}{\varphi(x)}dx \geq 0 \\ & \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\varphi(x)dx \geq 0 \\ & \Rightarrow -H_c(g(x)) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\varphi(x)dx \\ & \Rightarrow H_c(g(x)) \leq -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\varphi(x)dx \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\varphi(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\left[-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2}\log e\right]dx \\ &= -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx - \frac{\log e}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \end{aligned}$$

所以 $H_c(g(x)) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) = H_c(\varphi(x))$ 。

2.6 信源的冗余度

- 冗余度也称多余度或剩余度，表示给定信源在实际发出消息时所包含的多余信息。
- **例子**:
英文字母26个，加上空格共27个符号，则**单符号最大熵**为

$$H_0(X) = \log_2 27 \approx 4.76 \text{ bit/符号}$$

对英文书中各符号出现的概率加以统计，可得一组数值。若字母间无记忆，有

$$H_1(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = 4.03\ \text{bit/符号}$$

若考虑2阶、3阶直至高阶平稳信源，有

$$\begin{aligned} &H_2(X) = 3.32\ \text{bit/符号} \\ &H_3(X) = 3.1\ \text{bit/符号} \\ &\cdots \\ &H_\infty(X) = 1.4\ \text{bit/符号} \end{aligned}$$

且满足 $H_\infty < \cdots < H_3(X) < H_2(X) < H_1(X) < H_0(X)$
若发送消息时用 $H_0(X) = 4.76\ \text{bit}$ 表示一个信源符号，则信源效率为

$$\eta = \frac{H_\infty(X)}{H_0(X)} = \frac{1.4}{4.76} \approx 0.29$$

冗余度

$$\gamma = 1 - \eta = 0.71$$

这是因为符号间的相关性、分布不均匀性

- **信源编码**：压缩冗余，提高传输效率
- **信道编码**：加入特殊的冗余，抗干扰，提高可靠性