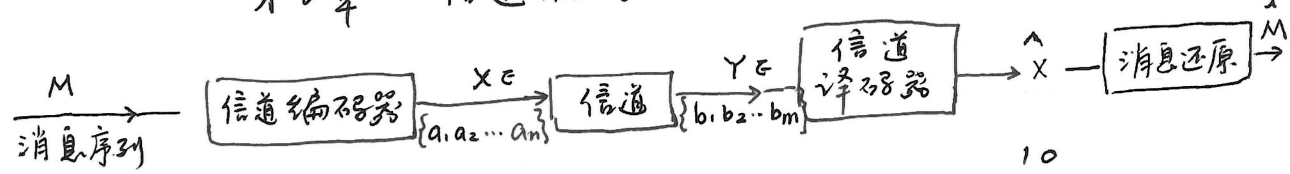
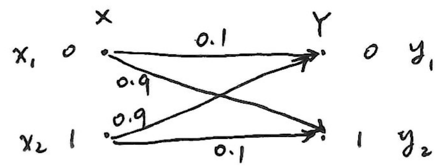
第6章 信道编码



一、译码规则和译码错误概率



信道符号错误概率 $p=0.9$

若规定 $Y=0 \rightarrow \hat{X}=0$

$Y=1 \rightarrow \hat{X}=1$，

$F(y_1)=x_1$

$F(y_2)=x_2$

则译码错误概率 $P_e=0.9$

反之若 $Y=0 \rightarrow \hat{X}=1$

$Y=1 \rightarrow \hat{X}=0$，译码错误概率 $P_e=0.1$

$F(y_1)=x_2$

$F(y_2)=x_1$

二、译码规则

$$F(y_j)=x_i,\quad i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m$$

例：$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$，

译码规则A：$F(y_1)=x_1$，$F(y_2)=x_2$，$F(y_3)=x_3$

B：$F(y_1)=x_1$，$F(y_2)=x_3$，$F(y_3)=x_2$

共 n^m 种译码方法。

(1) 错误概率：若 $F(y_j)=x_i$，则

正确概率：$p(F(y_j)|y_j)=p(x_i|y_j)$

错误概率：$p(e|y_j)=1-p(x_i|y_j)$

平均错误概率：$P_e=E[p(e|y_j)]=\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\,p(e|y_j)$

(2) 最佳译码规则.

使平均错误概率最小

$$P_e=\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\,p(e|y_j) \qquad =1-p(F(y_j)|y_j)$$

只需使 $p(e|y_j)$ 最小 $(j=1,2,\dots,m)$，而 $p(e|y_j)=1-p(x_i|y_j)$

因此，最佳译码规则 $F(y_j)=x^*$，满足

$$p(x^*|y_j) \geq p(x_i|y_j) \quad 对所有\ i=1,2,\dots,n$$

也常写成

$$x^*=\arg\max_{1\le i\le n} p(x_i|y_j) \qquad (最大后验概率译码)$$

$$\max_{x_i} p(x_i|y_j) = \max_{x_i} \frac{p(y_j|x_i)\, p(x_i)}{p(y_j)}$$

$$x^* = \arg\max_{1\le i\le n} p(y_j|x_i)\, p(x_i)$$ 最大似然译码规则

当 $p(x_i)=\frac{1}{n}$ 时， $x^* = \arg\max_{1\le i\le n} p(y_j|x_i)$ ， $j=1,2,\dots,m$

例
$$P = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ x_2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ x_3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} ,$$

$F(y_1) = \arg\max(\,p(y_1|x_1),\ p(y_1|x_2),\ p(y_1|x_3)\,) = x_1$

$F(y_2) = \cancel{\arg}\max(\,\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\,) = x_2$

$F(y_3) = x_3$

(3) 平均译码错误概率

$$P_e = \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, p(e|y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (1 - p(F(y_j)|y_j))\, p(y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j) - \sum_{j=1}^{m} p(F(y_j), y_j)$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{m} p(x_j^*, y_j)$$
$$= \sum_{xy} p(x, y) - \sum_{j=1}^{m} p(x_j^*, y_j)$$
$$= \sum_{Y,\, X-x^*} p(x, y)$$

例. $P = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \boxed{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$

译码A: $\begin{cases} F(y_1) = x_1 \\ F(y_2) = x_2 \\ F(y_3) = x_3 \end{cases}$ $P_e = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$

译码B: $\begin{cases} F(y_1) = x_1 \\ F(y_2) = x_3 \\ F(y_3) = x_2 \end{cases}$, $P_e = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

最佳译码规则错误概率最小。

(4) 译码时发生的错误是由信道中噪声引起的，错误概率 P_e 与信道疑义度 $H(X|Y)$ 满足以下关系（费诺不等式）

$$H(X|Y) \le H(P_e) + P_e \log(n-1)$$

证明：

$$H(P_e, 1-P_e) + P_e \log(n-1)$$

$$= P_e \log \frac{1}{P_e} + (1-P_e)\log\frac{1}{1-P_e} + P_e \log(n-1)$$

$$= \sum_{Y, X-X^*} p(x,y) \log \frac{n-1}{P_e} + \sum_{Y} p(x^*, y) \log \frac{1}{1-P_e}$$

条件熵 $H(X|Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{1}{p(x|y)}$

$$= \sum_{Y, X-X^*} p(x,y) \log \frac{1}{p(x|y)} + \sum_{Y} p(x^*, y) \log \frac{1}{p(x^*|y)}$$

因此： $H(X|Y) - H(P_e) - P_e \log(n-1)$

$$= \sum_{Y, X-X^*} p(x,y) \log \frac{P_e}{(n-1)\, p(x|y)} + \sum_{Y} p(x^*, y) \log \frac{1-P_e}{p(x^*|y)}$$

应用不等式 $\log x \le x-1$

$$\le \sum_{Y, X-X^*} p(x,y) \left[\frac{P_e}{(n-1)\, p(x|y)} - 1 \right] + \sum_{Y} p(x^*, y) \left[\frac{1-P_e}{p(x^*|y)} - 1 \right]$$

$$= \frac{P_e}{n-1} \underbrace{\sum_{Y, X-X^*} p(y)}_{=n-1} - \underbrace{\sum_{Y, X-X^*} p(x,y)}_{=P_e} + (1-P_e) \sum_{Y} p(y) - (1-P_e)$$

$$= P_e - P_e + (1-P_e) - (1-P_e)$$

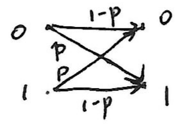
$$= 0$$

因此： $H(X|Y) \le H(P_e) + P_e \log(n-1)$

$$P_e \ge \frac{H(X|Y) - 1}{\log(n-1)}$$

三、信道编码定理

$k=2$ 00, 01, 10, 11 $n=4$: $\vec{c}_1$ 0000, $\vec{c}_2$ 0101, $\vec{c}_3$ 1001, $\vec{c}_4$ 1100



$\vec{r} = 0100$

$\vec{c}_i = 1100$

(1) 最小汉明距离译码

$$\hat{c}_i = \arg\max_{1 \le i \le M} p(\vec{r} \mid \vec{c}_i)\, p(\vec{c}_i) \qquad M = q^k$$

BSC 信道中

$$p(\vec{r} \mid \vec{c}_i) = \prod_{j=1}^{n} p(r_j \mid c_{ij}), \quad \text{而 } p(r_j \mid c_{ij}) = \begin{cases} p & c_{ij} \ne r_j \\ 1-p & c_{ij} = r_j \end{cases}$$

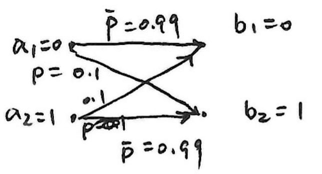
$$= p^d (1-p)^{n-d} \qquad d = dis(\vec{r}, \vec{c}_i) = W(\vec{r} \oplus \vec{c}_i) = \sum_{j=1}^{n} r_j \oplus c_{ij}$$

$\vec{r}$ 与 $\vec{c}_i$ 的汉明距离

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^d (1-p)^n$$

由于 $\frac{p}{1-p} \ll 1$，$(1-p)^n$ 是常数，因此 d 越大，$p(\vec{r} \mid \vec{c}_i)$ 越小，求最大似然函数 $\max p(\vec{r} \mid \vec{c}_i)$ 的问题转化成求最小汉明距离问题。

(2) 错误概率与编码方法



采用简单重复编码，$k=1$，$n=3$。 $0 \to 000$ $\vec{c}_1$ $1 \to 111$ $\vec{c}_2$

$$P = \begin{array}{c|cccccccc} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \\ & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \hline 000 & (1-p)^3 & (1-p)^2 p & (1-p)^2 p & p^2(1-p) & (1-p)^2 p & p^2(1-p) & p^2(1-p) & p^3 \\ 111 & p^3 & p^2(1-p) & (1-p)p^2 & p(1-p)^2 & p^2(1-p) & (1-p)^2 p & (1-p)^2 p & (1-p)^3 \end{array}$$

$F(\vec{r}_1) = \vec{c}_1$ $F(\vec{r}_2) = \vec{c}_1$ $F(\vec{r}_3) = \vec{c}_1$ $F(\vec{r}_4) = \vec{c}_2$ $F(\vec{r}_5) = \vec{c}_1$ $F(\vec{r}_6) = \vec{c}_2$

$F(\vec{r}_7) = \vec{c}_2$ $F(\vec{r}_8) = \vec{c}_2$

$$P_e = \frac{1}{2}[p^3 + p^2(1-p) + (1-p)p^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^3)$$

$$\approx 3 \times 10^{-4}$$

增大 n，会继续降低平均错误概率 P_e。

$n=5$，$P_e \approx 10^{-5}$

$n=6$，$P_e \approx 4 \times 10^{-7}$

$n=9$ $P_e \approx 10^{-8}$

$n=11$ $P_e \approx 5 \times 10^{-10}$

$$R = \frac{H(X)}{n} = \frac{\log M}{n} \ \text{bit/符号}$$

n 增大，信息传输率减小。能否找到一种编码方法，使 P_e 充分小，且 R 保持在一定水平？

(3) 有噪信道编码定理（香农第二定理）

定理：设有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为 C，只要待传送的信息率 $R < C$，则存在一种编码，当输入长度 n 足够大，则译码错误概率任意小。

证明：消息序列长度为 k，个数为 $M = 2^k$，码长为 n。

如下结论

信息传输率 $R = \frac{\log M}{n} = \frac{\log 2^k}{n} = \frac{k}{n} = C - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$，可使 $P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$

假设 $R = \frac{k}{n} = C - \varepsilon$，$k = n(C-\varepsilon)$，$M = 2^{n(C-\varepsilon)}$ 为信息序列数量

编码：从 2^n 个矢量集中找出 $2^{n(C-\varepsilon)}$ 个码字组成一组码。

BSC 信道错误概率 $p < \frac{1}{2}$，信道容量 $C = 1 - H(p)$

设发送码字 $\vec{C_0}$，接收到 $\vec{r}$，$\vec{C_0}$ 与 $\vec{r}$ 之间的平均汉明距离为 np

译码方法：以 $\vec{r}$ 为球心，以 np 为半径的球体内寻找码字 $\vec{C_0}$。为保证译码可靠，将球体稍微扩大，令球半径为 $n(p+\varepsilon) = np_\varepsilon$，$\varepsilon > 0$ 任意小。用 $S(np_\varepsilon)$ 表示这个球体。如果球体内只有一个唯一的码字，则判定这个码字为发送的码字 $\vec{C_0}$。

译码错误概率 P_e 为

$$P_e = P\{\vec{C_0} \notin S(np_\varepsilon)\} + P\{\vec{C_0} \in S(np_\varepsilon)\} \cdot P\{\text{至少有一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\}$$

$$\le P\{\vec{C_0} \notin S(np_\varepsilon)\} + P\{\text{至少有一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\}$$

根据大数定理，$\vec{C_0}$ 与 $\vec{r}$ 之间的汉明距离（即 $\vec{C_0}$ 在信道传输中错误比特数）超过平均值 $n(p+\varepsilon)$ 的概率很小，因此当 n 足够大时，

$$P\{\vec{C_0} \notin S(np_\varepsilon)\} < \delta$$

$$P\{\text{至少有一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\} \le \sum_{\vec{C_i} \ne \vec{C_0}} P\{\vec{C_i} \in S(np_\varepsilon)\}$$

$$\le (M-1) P\{\vec{C_*} \in S(np_\varepsilon)\}$$

$$P\{\vec{C_*} \in S(np_\varepsilon)\} = \max_{\vec{C_i} \ne \vec{C_0}} P\{\vec{C_i} \in S(np_\varepsilon)\}$$

因此：

$$P_e \le \underbrace{\delta}_{\text{与编码无关}} + \underbrace{(M-1) P\{\vec{C_*} \in S(np_\varepsilon)\}}_{\text{依赖于码字的选择}}$$

（$\vec{C_*} \ne \vec{C_0}$，$\vec{C_*}$ 为与 $\vec{C_0}$ 距离最近的码字）

随机编码：从 2^n 个可能的序列中，随机选取 M 个作为有效码字。

每次选一个码字有 2^n 种可能，选 M 个码字，共有 2^{nM} 种不同的编码方式。

对每一种编码方式都有

$$P_e \leq \delta + (M-1)P\{\vec{C_*} \in S(nP_\varepsilon)\} \qquad \vec{C_*} \neq \vec{C_0}$$

对 2^{nM} 种可能的编码取平均

$$E[P_e] \leq \delta + (M-1)E[P\{\vec{C_*} \in S(nP_\varepsilon)\}]$$

于是，所有可能落在 $S(nP_\varepsilon)$ 内的序列总数为：

$$N(nP_\varepsilon) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{nP_\varepsilon} = \sum_{k=0}^{nP_\varepsilon} C_n^k$$

$$E[P\{\vec{C_*} \in S(nP_\varepsilon)\}] = \frac{N(nP_\varepsilon)}{2^n} = \sum_{k=0}^{nP_\varepsilon} C_n^k / 2^n$$

引用二项式系数不等式 $\sum_{k=0}^{nP_\varepsilon} C_n^k \leq 2^{nH(P_\varepsilon)}$，$P_\varepsilon < \frac{1}{2}$

有

$$E[P_e] \leq \delta + M 2^{-n[1-H(P_\varepsilon)]} \qquad P_\varepsilon < \frac{1}{2}$$

式中
$$\begin{aligned} 1-H(P_\varepsilon) &= 1-H(p+\varepsilon) \\ &= 1-H(p) + H(p) - H(p+\varepsilon) \\ &= C - [H(p+\varepsilon) - H(p)] \end{aligned}$$

因为 $H(p)$ 是 p 的上凸函数，所以有

$$\begin{aligned} H(p+\varepsilon) &\leq H(p) + \varepsilon \frac{dH(p)}{dp} \\ &\leq H(p) + \varepsilon \cdot \log\frac{1-p}{p} \end{aligned} \qquad \left(p < \tfrac{1}{2},\ \log\frac{1-p}{p} > 0\right)$$

$$1-H(P_\varepsilon) \geq C - \varepsilon \log\frac{1-p}{p}$$

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon \log\frac{1-p}{p}$，$M = 2^{n(C-\varepsilon_2)}$

$$E[P_e] \leq \delta + 2^{n(C-\varepsilon_2) - n(C-\varepsilon_1)} = \delta + 2^{-n(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

式中 $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon\log\frac{1-p}{p}$，只要 ε 足够小，总能满足 $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$，当 $n \to \infty$ 时

当 $n \to \infty$ 时，$E[P_e] \to 0$

因为 $E[P_e]$ 是对所有 2^{Mn} 种随机编码求得的平均值，因而必存在一些码错误概率 $< E[P_e]$。故必存在一种编码，当 $n \to \infty$ 时，$P_e \to 0$。

定理：信道编码逆定理.

设有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为C. 对任意 $\varepsilon>0$，若选用码字总数 $M=2^{n(C+\varepsilon)}$（信息传输率 $R>C$），则无论n取多大，也找不到一种码，使译码错误概率 P_e 任意小。

证明 $R=\frac{\log M}{n}=C+\varepsilon$，$M=2^{n(C+\varepsilon)}$ 为码字总数.

假设M个码字等概率分布

$$H(X^n)=\log M=n(C+\varepsilon)$$

n次扩展信道的平均互信息为

$$I(X^n;Y^n)=H(X^n)-H(X^n|Y^n)\le nC$$

$$\therefore\quad H(X^n|Y^n)\ge H(X^n)-nC=n\varepsilon$$

根据费诺不等式.

$$\begin{aligned}H(X^n|Y^n)&\le H(P_e,1-P_e)+P_e\log(M-1)\\&\le 1+P_e\log M\\&=1+P_e\,n(C+\varepsilon)\end{aligned}$$

由于 $$n\varepsilon\le H(X^n|Y^n)\le 1+P_e\,n(C+\varepsilon)$$

有 $$n\varepsilon\le 1+P_e\,n(C+\varepsilon)$$

$$P_e\ge\frac{n\varepsilon-1}{n(C+\varepsilon)}=\frac{\varepsilon+\frac{1}{n}}{C+\varepsilon}$$

当 $n\to\infty$ 时 P_e 不会趋于0。

因此，当信息传输率 $R>C$ 时，无法完成消息的无错误传输。

香农第二定理和它的逆定理表明：在任何信道中，信道容量等于进行可靠传输的最大信息传输率。