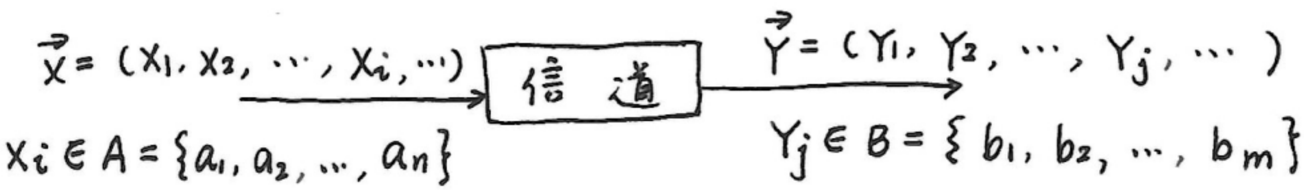
第三章 信道与信道容量

- 第三章 信道与信道容量
  - 3.1 信道的数学模型
    - 基本数学模型
    - 无干扰信道（无噪声）
    - 有干扰无记忆信道
      - 二进制离散对称信道（Binary Symmetric Channel，BSC）
      - 离散无记忆信道（Discrete Memoryless Channel，DMC）
      - 离散输入、连续输出信道
      - 波形信道
      - 因此无记忆时重点讨论单符号信道！
    - 有干扰有记忆信道
    - 信道容量的定义
  - 3.2 离散单个符号信道及其容量
    - 无干扰离散信道
      - 无噪无损信道：n = m，X、Y一一对应
      - 无噪有损信道：n > m，多个X对应一个Y
      - 有噪无损信道：n < m，一个X对应多个Y
    - 对称离散无记忆信道
    - 准对称离散无记忆信道
    - 矩阵分解法
    - 一般离散无记忆信道
  - 3.3 离散序列信道及其容量
    - 信道模型与符号定义
    - 无记忆离散序列信道
    - 独立并联信道
    - 有记忆离散序列信道
  - 3.4 连续信道及其容量
    - 连续单符号加性信道
      - 加性高斯信道
      - 加性非高斯信道
    - 多维无记忆加性连续信道
    - 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

        - 波形信道，限时 (t_B)，限频 (\omega)
        - 加性高斯白噪声
        - 低频带宽受限通信系统
    - 3.5 多输入多输出信道及其容量
    - 3.6 信源与信道的匹配

3.1 信道的数学模型

基本数学模型

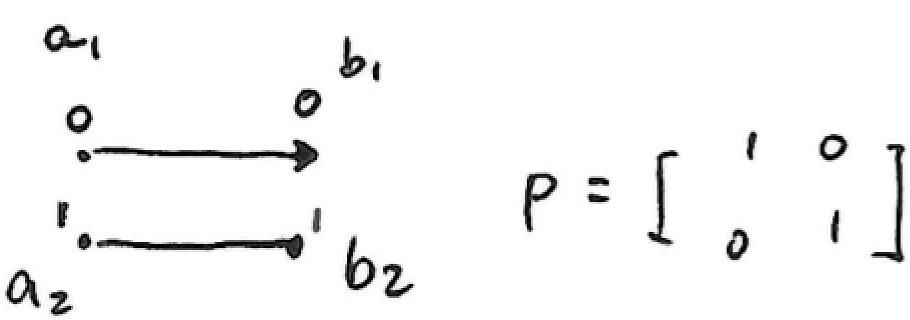
- 

- $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots)$，$X_i \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$为输入；
- $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_j, \cdots)$，$Y_j \in B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$为输出。
- 用条件概率（转移概率）$p(\vec{Y}|\vec{X})$来描述输入、输出之间的依赖关系。

无干扰信道（无噪声）

- $\vec{Y} = f(\vec{X})$，已知$\vec{X}$就能确知$\vec{Y}$

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \vec{Y} = f(\vec{X}) \\ 0, & \vec{Y} \neq f(\vec{X}) \end{cases}$$

- 例子：
    - 当输入a_1对应输出b_1，输入a_2对应输出b_2时，转移概率矩阵$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
    - 

有干扰无记忆信道

- 无记忆：

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)\cdots p(y_l|x_l)$$

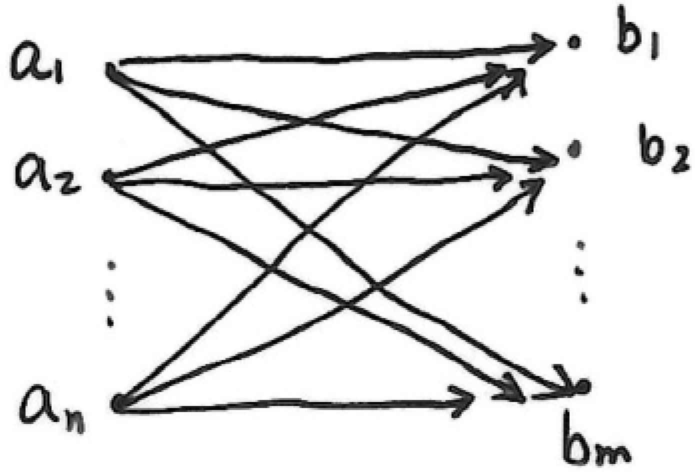
- 只需分析单个符号的转移概率$p(y_j|x_i)$

二进制离散对称信道（Binary Symmetric Channel，BSC）

- 输入$X \in A = \{0,1\}$
- 输出$Y \in B = \{0,1\}$
- $BSC \begin{cases} p(Y=0|X=1) = p(Y=1|X=0) = p \\ p(Y=1|X=1) = p(Y=0|X=0) = 1-p \end{cases}$
- 其中p为错误概率，其转移关系和转移概率矩阵如下：
- 

离散无记忆信道（Discrete Memoryless Channel，DMC）

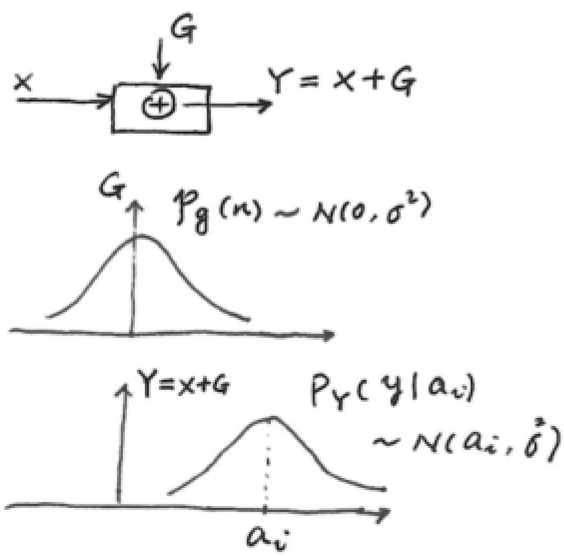
- 输入$X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$
- 转移概率矩阵$P = [p(b_j|a_i)] = [p_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$
- 并且满足$\sum_{j=1}^{m} p(b_j|a_i) = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$

- 

- 二进制离散对称信道（BSC）是离散无记忆信道（DMC）的特例

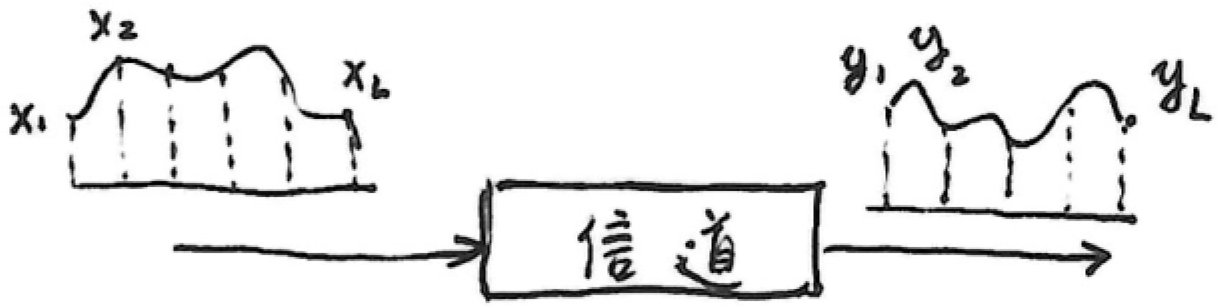
离散输入、连续输出信道

- 输入$X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in \{-\infty, +\infty\}$
- 信道模型为$Y = X + G$，其中$G \in \{-\infty, +\infty\}$，$p_G(n) \sim N(0, \sigma^2)$
- 条件概率密度$p_Y(y|a_i) \sim N(a_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-a_i)^2}{2\sigma^2}}$
- 图例:



波形信道

- 当 t_B、f_m 受限，$L = 2t_Bf_m$ 时
- 输入 $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_L)$
- 输出 $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_L)$

- 

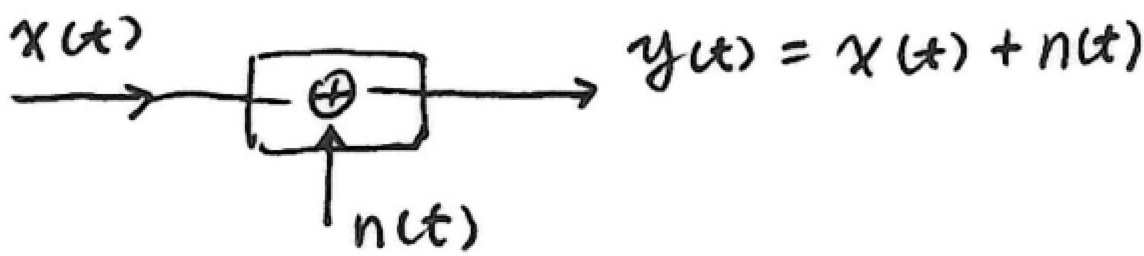
- **时间离散，取值连续的多维连续信道**，信道转移概率密度函数为：

$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1, y_2, \cdots, y_L|x_1, x_2, \cdots, x_L)$$

- **连续无记忆信道**：

$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1|x_1)p_y(y_2|x_2)\cdots p_y(y_L|x_L) = \prod_{l=1}^{L} p_Y(y_l|x_l)$$

因此无记忆时重点讨论单符号信道！

- 信道模型为 $y(t) = x(t) + n(t)$
- 其中 $n(t)$ **为加性噪声，与信号 $x(t)$ 相互独立**
- 

- 根据概率关系有：

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X,n}(x, n) = p_X(x)p_n(n)$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_{X,n}(x, n)}{p_X(x)} = p_n(n)$$

- 进一步考虑条件熵：

$$
\begin{aligned}
H_c(Y|X) &= -\iint_R p_{X,Y}(x,y)\log p_Y(y|x)dxdy \\
&= -\int_R p_X(x)dx\int_R p_Y(y|x)\log p_Y(y|x)dy \\
&= -\int_R p_n(n)\log p_n(n)dn \\
&= H_c(n)
\end{aligned}
$$

条件熵 $H_c(Y|X)$ 称为**噪声熵**

- 在加性多维连续信道中
  - $$\vec{y}=\vec{x}+\vec{n}$$
  - 同理有 $p_{\vec{Y}}(\vec{y}|\vec{x})=p_n(\vec{n})$，$H_c(\vec{y}|\vec{x})=H_c(\vec{n})$

有干扰有记忆信道

> 略

信道容量的定义

- 定义信道的**信息传输率** R 为信道中平均每个符号所传输的信息量：

$$
\begin{aligned}
R = I(X;Y) &= H(X)-H(X|Y) \quad \text{bit/信道符号} \\
&= H(Y)-H(Y|X)
\end{aligned}
$$

- 设 T 为信道中符号的平均传输时间，定义**信息传输速率**：

$$R_t=\frac{R}{T}=\frac{I(X;Y)}{T} \quad \text{bit/秒}$$

  - $I(X;Y)$ 是输入符号分布概率 $p(a_i)$ 和信道转移概率 $p(b_j|a_i)$ 的函数，即

$$I(X;Y)=f(p(a_i),p(b_j|a_i))$$

- 对于某特定信道，$p(b_j|a_i)$ 确定，则 $I(X;Y)$ 是关于 $p(a_i)$ 的凹函数（∩型上凸函数），也即可以找到某种概率分布 $p(a_i)$，使 $I(X;Y)$ 达到最大，该最大值为**信道容量**：

$$C=\max_{p(a_i)} I(X;Y) \quad \text{bit/符号}$$

  - 若符号传送时间周期为 T 秒，则**单位时间信道容量**为：

$$C_t = C/T \quad \text{bit/秒}$$

- 对于固定信道参数信道，信道容量是个定值。实际传输时能否提供最大传输能力，取决于输入端的概率分布，定义**信道绝对冗余度和相对冗余度**：

$$\text{信道绝对冗余度} = C - I(X;Y)$$

$$\text{信道相对冗余度} = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$$

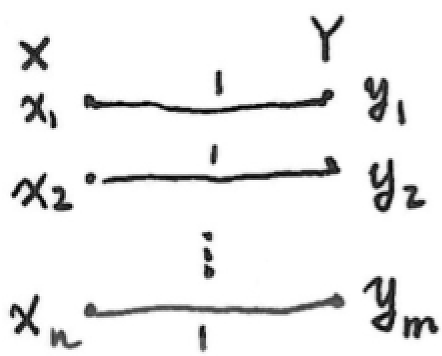
3.2 离散单个符号信道及其容量

无干扰离散信道

- 信道输入$X \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出$Y \in B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

无噪无损信道：n = m，X、Y一一对应

- 输入输出关系：



- 转移概率矩阵$P = \{p(y_j|x_i)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$，$p(x_i|y_j) \in \{0, 1\}$。
- **噪声熵与疑义度**：

$$H(Y|X) = H(X|Y) = 0$$

- **互信息**：

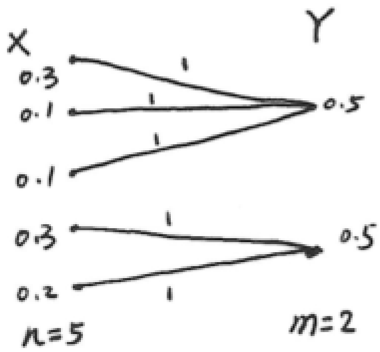
$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) = H(Y)$$

  当输入符号等概率分布时，$I(X;Y)$最大。
- **信道容量**:

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(X) = \log n$$

无噪有损信道：n > m，多个X对应一个Y

- 输入输出关系：



- 多个输入对应一个输出，即$n > m$
- **噪声熵**:

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) = 0$$

- **疑义度**:

$$H(X|Y) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) \neq 0$$

- **互信息**:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) \neq 0$$

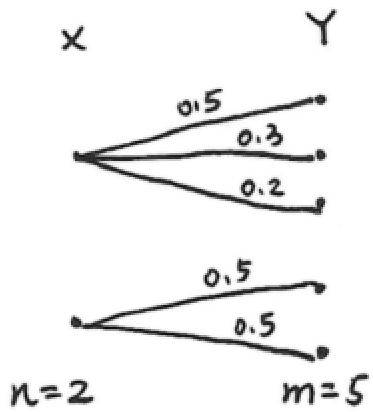
其中$H(Y|X) = 0$，$H(X|Y) \neq 0$
由此可得$H(X) = H(Y) + H(X|Y)$，所以$H(X) \geq H(Y)$ 。

- **信道容量**:

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) \overset{?}{=} \log m$$

有噪无损信道：n < m，一个X对应多个Y

- 输入输出关系：



- 信道噪声使一个输入对应多个输出，$n < m$
- **噪声熵**：

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) \neq 0$$

- **疑义度**：

$$H(X|Y) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) = 0$$

- **互信息**：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) \neq 0$$

  其中$H(X|Y) = 0$，$H(Y|X) \neq 0$
  由此可得$H(Y) = H(X) + H(Y|X)$，所以$H(Y) \geq H(X)$ 。
- **信道容量**：

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(X) = \log n$$

对称离散无记忆信道

- 以下是两个转移概率矩阵示例：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2\times4} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

- **对称特性判断**：
  - 若每一行包含相同元素，称为输入对称
  - 若每一列包含相同元素，称为输出对称

- 当行列都对称时，为**对称DMC（离散无记忆信道）**。
- **相关信息论公式**:
  - **互信息**:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

  - **条件熵**:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log p(b_j|a_i) \\ &= -\sum_{i,j} p(a_i)p(b_j|a_i)\log p(b_j|a_i) \\ &= -\sum_{i} p(a_i)\sum_{j} p(b_j|a_i)\log p(b_j|a_i) \\ &= \sum_{i} p(a_i)H(Y|a_i)\text{（输入对称）} \\ &= H(Y|a_i),\ \ i = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

  - **信道容量**:

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|X) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|a_i)$$

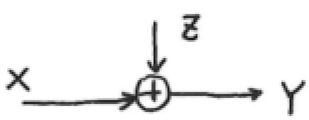
- 当**输入符号等概率分布**，即$p(a_i) = \frac{1}{n}$时，设m为输出符号数目，则有:
  - $p(b_j) = \sum_i p(a_i)p(b_j|a_i) = \frac{1}{n}\sum_i p(b_j|a_i) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{m} = \frac{1}{m}$
  - $H(Y) = -\sum_j p(b_j)\log p(b_j) = \sum_j \frac{1}{m}\log m = m\frac{1}{m}\log m = \log m$
  - **信道容量**

$$C = \log m - H(Y|a_i)$$

  - 其中m为输出符号Y数目，$i = 1,\cdots,n$
- 例题:

例3-1 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $C = \log 4 - H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}) = 0.082$ bit/符号

- **一般离散无记忆模k加性噪声信道**
  - 信道模型: $Y = X \oplus Z \bmod k$，其中 $X,Y,Z \in \{0,1,\cdots,k-1\}$
  - 图例:



- **加性噪声**，有 $p(y|x)=p(z)$
  - **条件熵**:

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_{x,y} p(x)p(y|x)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x,z} p(x)p(z)\log p(z) \\
&= -\sum_{x} p(x)\sum_{z} p(z)\log p(z) \\
&= H(Z)
\end{aligned}
$$

  - **信道容量**:

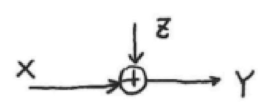
$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} H(Y)-H(Y|X) \\
&= \max_{p(x)} H(Y)-H(Z) \\
&= \log k - H(Z) \quad \text{(对称性)}
\end{aligned}
$$

- 例题：

例3-3

离散无记忆模K加性噪声信道 $Y = X \oplus Z \bmod K$ ， $X, Y \in \{0, 1, \cdots, K-1\}$.

$\begin{bmatrix} Z \\ p(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ ，求该信道容量。



$$
P = \begin{array}{c|cccccc}
X \backslash Y & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \cdots \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
2 & \cdots & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
K-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0
\end{array}_{K\times K}
$$

对称DMC信道.

$C = \log k - H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \log k - \log 3$

准对称离散无记忆信道

- 以下是两个转移概率矩阵示例：

$$
P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}_{2\times 3}
$$

- **信道特性**:
  - 矩阵中**各行元素相同，但各列元素不同**，这种信道称为**准对称DMC（离散无记忆信道）。**
- **相关信息论公式**:
  - 因为各行元素相同，所以 $H(Y|X)=H(Y|a_i)$ ，其中 $i=1,2,\cdots,n$

        - 这表明在给定不同输入符号 a_i 时，输出的条件熵是相同的
    - 由于各列元素不同，信道的输入和输出分布概率可以不同，并且 $H(Y) \leq \log m$ （m为输出符号的数目）
    - **信道容量**：

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y|X)] \\
&\leq \log m - H(Y|a_i) \\
&= \log m + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij}
\end{aligned}
$$

      其中$i = 1, 2, \cdots, n$ ，p_{ij} 是转移概率矩阵中的元素
        - 这给出了准对称离散无记忆信道容量的一个**上限估计**
        - 求解：**矩阵分解法**、极值求导法
    - 例题：

例3-5 信道转移矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$，求该信道容量。

由P得 $n=2$，$m=3$，设输入 $p(a_1)=\alpha$，$p(a_2)=1-\alpha$，输出为 b_1，b_2，b_3

$p(a_i, b_j) = p(a_i)\, p(b_j|a_i)$

$$
\begin{bmatrix} 0.5\alpha & 0.3\alpha & 0.2\alpha \\ 0.3(1-\alpha) & 0.5(1-\alpha) & 0.2(1-\alpha) \end{bmatrix}
$$

$p(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j)$，
$p(b_1) = 0.5\alpha + 0.3(1-\alpha) = 0.3 + 0.2\alpha$
$p(b_2) = 0.5 - 0.2\alpha$
$p(b_3) = 0.2$

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= -\sum_j p(b_j)\log p(b_j) + \sum_i p(a_i) \sum_j p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i) \\
&= -(0.3+0.2\alpha)\log(0.3+0.2\alpha) - (0.5-0.2\alpha)\log(0.5-0.2\alpha) - 0.2\log 0.2 \\
&\quad + 0.5\log 0.5 + 0.3\log 0.3 + 0.2\log 0.2
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \alpha} = 0$，得 $\alpha = \frac{1}{2}$，$C = \max I(X;Y) = 0.036$ bit/符号.

此时 $p(a_1) = p(a_2) = \frac{1}{2}$

$p(b_1) = p(b_2) = 0.4$，$p(b_3) = 0.2$

矩阵分解法

- **转移矩阵分解**：
  - 将**准对称**转移概率矩阵**按概率列**分成若干个互不相交的**对称的子集**。例如：
    - $$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

      可分解成$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
    - $$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

      可分解成$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$。
- **信道容量**：
  - 可以证明，当**输入等概率分布**时，可达到信道容量。

$$C = \log n - H(P_1', P_2', \cdots, P_m') - \sum_{k=1}^{r} N_k \log M_k$$

  - 其中：
    - n为输入符号个数。
    - $P_1', P_2', \cdots, P_m'$ 是原转移概率矩阵P中一行的元素。
    - N_k是第k个子矩阵中行元素之和。
    - M_k是第k个子矩阵中列元素之和。
    - r是子矩阵个数。
- **例题**：

例3-6 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$，分成 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$，$n=2$，$r=2$，$N_1=0.8$，$M_1=0.8$，$N_2=0.2$，$M_2=0.4$

$$C = \log 2 - H(0.5, 0.3, 0.2) - 0.8\log 0.8 - 0.2\log 0.4 = 0.036 \text{ bit/符号}$$

例3-7 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，分成 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

$$C = \log_2 2 - H(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}) - (\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6})\log(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{3}\log\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6}\log\tfrac{2}{6}$$

$$= 0.041 \text{ bit/符号}$$

一般离散无记忆信道

- **转移概率**$p(y|x)$**固定**
- **信道容量**:

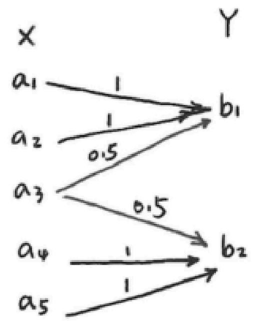
  $$C=\max_{p(x)} I(X;Y)=\max_{p(x)} I(p(x),p(y|x))$$

  即求互信息$I(X;Y)$关于输入概率分布$p(x)$的极大值。
- **互信息**:

  $$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_i p(a_i)I(a_i;Y) \\ &= \sum_i p(a_i)\sum_j p(b_j|a_i)\log\frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)} \end{aligned}$$

- 为使$I(X;Y)$达到最大，输入符号概率集$\{p(a_i)\}$必须满足的**充分和必要条件**是:
  - 对于所有$p(a_i)>0$ 的符号a_i，有$I(a_i;Y)=C$
  - 对于所有$p(a_i)=0$ 的符号a_i，有$I(a_i;Y)\le C$
  - 这意味着除概率为0的符号a_i外，每个符号a_i 对Y提供相同的互信息
- 注意：**最佳输入分布不唯一！**
- 例题:

例3-8 如图所示离散信道，输入符号集为$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，输出符号集为$\{b_1, b_2\}$。求信道容量和最佳输入符号分布概率。



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I(a_i;Y) = \sum_j p(b_j|a_i)\, I(a_i;b_j)$$
$$= \sum_j p(b_j|a_i) \log \frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)} = \sum_j p(b_j|a_i) \log \frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)}$$

$$I(a_1;Y) = \log \frac{1}{p(b_1)}$$
$$I(a_2;Y) = \log \frac{1}{p(b_1)}$$
$$I(a_3;Y) = 0.5 \log \frac{0.5}{p(b_1)} + 0.5 \log \frac{0.5}{p(b_2)}$$
$$I(a_4;Y) = \log \frac{1}{p(b_2)}$$
$$I(a_5;Y) = \log \frac{1}{p(b_2)}$$

① $I(a_i;Y)$ 相同 $\Rightarrow$ $p(b_1) = p(b_2) = \frac{1}{2}$

② $I(a_3;Y) = 0 \Rightarrow p(a_3) = 0$

③ $C = I(a_1;Y) = I(a_2;Y) = I(a_4;Y) = I(a_5;Y) = 1$ bit/符号

④ 最佳输入符号分布：

$$\begin{cases} p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) = 0.5 \\ p(a_4) + p(a_5) + p(a_3) = 0.5 \\ p(a_3) = 0 \\ p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + p(a_4) + p(a_5) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$p(a_1) = p(a_2) = p(a_4) = p(a_5) = \frac{1}{4}$

$p(a_3) = 0$

或

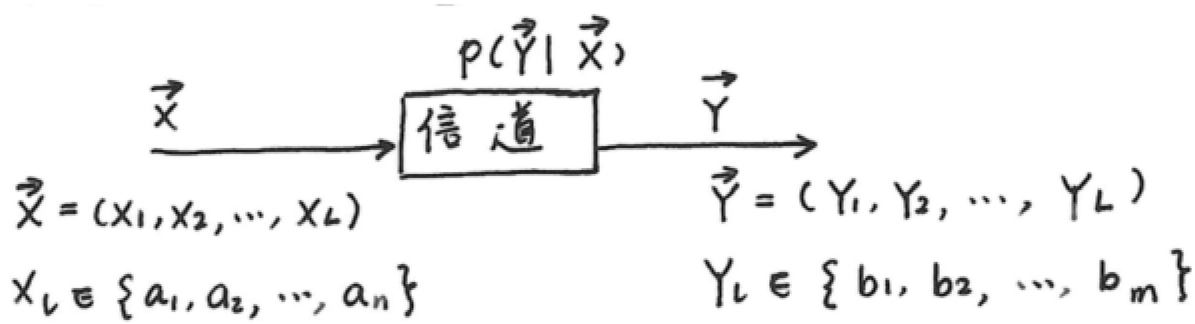
$p(a_1) = p(a_5) = \frac{1}{2}$

$p(a_2) = p(a_3) = p(a_4) = 0$

最佳输入分布不唯一。

3.3 离散序列信道及其容量

信道模型与符号定义

- 

- 输入矢量为$\vec{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_L)$，其中$X_l \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
- 输出矢量为$\vec{Y}=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_L)$，其中$Y_l \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$
- 条件概率表示为$p(\vec{Y}|\vec{X})$，即给定输入$\vec{X}$时输出$\vec{Y}$的概率。

无记忆离散序列信道

- 对于无记忆离散序列信道：

$$p(\vec{Y}|\vec{X})=p(Y_1, \cdots, Y_L|X_1, \cdots, X_L)=\prod_{l=1}^{L} p(Y_l|X_l)$$

  - 若信道是平稳的：

$$p(\vec{Y}|\vec{X})=(p(y|x))^L=p^L(y|x)$$

- **互信息与信道容量**:

$$\begin{aligned} I(\vec{X};\vec{Y}) &= H(\vec{X})-H(\vec{X}|\vec{Y})=\sum p(\vec{X},\vec{Y})\log\frac{p(\vec{X}|\vec{Y})}{p(\vec{X})} \\ &= H(\vec{Y})-H(\vec{Y}|\vec{X})=\sum p(\vec{X},\vec{Y})\log\frac{p(\vec{Y}|\vec{X})}{p(\vec{Y})} \end{aligned}$$

  - **信道无记忆时**:

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

    - 证明：
      由定义有：$I(\vec{X};\vec{Y})=H(\vec{Y})-H(\vec{Y}|\vec{X})$和$I(X_l;Y_l)=H(Y_l)-H(Y_l|X_l)$，利用

$H(X)$的链式法则有：
①$H(\vec{Y}) = H(Y_1, Y_2, \cdots, Y_L) = H(Y_1) + H(Y_2|Y_1) + \cdots + H(Y_L|Y_1, Y_2, \cdots, Y_{L-1}) \leq \sum_{l=1}^{L} H(Y_l)$
②$H(\vec{Y}|\vec{X}) = H(Y_1|\vec{X}) + H(Y_2|Y_1, \vec{X}) + \cdots + H(Y_L|Y_1, Y_2, \cdots, Y_{L-1}, \vec{X}) = \sum_{l=1}^{L} H(Y_l|X_l)$（无记忆信道下，给定 X_l 后，其他时刻的输入输出对确定 Y_l 的不确定性没有额外帮助）
所以有：$I(\vec{X};\vec{Y}) = H(\vec{Y}) - H(\vec{Y}|\vec{X}) \leq \sum_{l=1}^{L} H(Y_l) - \sum_{l=1}^{L} H(Y_l|X_l) = \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$。

- **输入矢量$\vec{X}$中各分量相互独立时**：

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

  - 证明：
    由定义有：$I(\vec{X};\vec{Y}) = H(\vec{X}) - H(\vec{X}|\vec{Y})$和$I(X_l;Y_l) = H(X_l) - H(X_l|Y_l)$，利用$H(X)$的链式法则有：
    ①$H(\vec{X}) = H(X_1, X_2, \cdots, X_L) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \cdots + H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}) = \sum_{l=1}^{L} H(X_l)$（由于各分量相互独立）
    ②$H(\vec{X}|\vec{Y}) = H(X_1|\vec{Y}) + H(X_2|X_1, \vec{Y}) + \cdots + H(X_L|X_1, X_2, \cdots, X_{L-1}, \vec{Y}) = \sum_{l=1}^{L} H(X_l|\vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^{L} H(X_l|Y_l)$（已知更多信息 $\vec{Y}$ 时，X_l 的不确定性不会比仅知道 Y_l 时更大）
    所以有：$I(\vec{X};\vec{Y}) = H(\vec{X}) - H(\vec{X}|\vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^{L} H(X_l) - \sum_{l=1}^{L} H(X_l|\vec{Y}) = \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$。

- **当输入矢量$\vec{X}$独立且信道无记忆时**，上述两个性质统一取等号，此时**信道容量**：

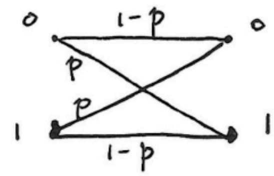
$$\begin{aligned} C_L &= \max_{p(x)} I(\vec{X};\vec{Y}) = \max_{p(x)} \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l) \\ &= \sum_{l=1}^{L} \max_{p(x)} I(X_l;Y_l) = \sum_{l=1}^{L} C_l \end{aligned}$$

  - 当信道平稳时$C_L = LC_1$
  - 一般情况下，$I(\vec{X};\vec{Y}) \leq LC_1$，其中$C_1$是单个时刻的信道容量

- 输入矢量独立且信道无记忆时，相当于对单个信道进行L次扩展的信道，也相当于L个独立的信道并联在一起。
- 示例：

例3-9

对右图的BSC信道二次扩展，



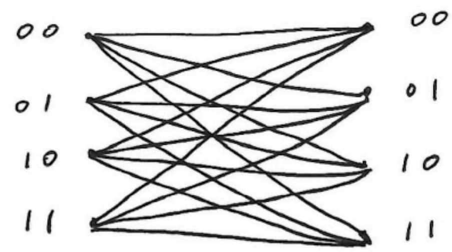
$$p(00|00)=p(0|0)p(0|0)=(1-p)^2$$

$$p(01|00)=p(0|0)p(1|0)=p(1-p)$$

$$p(10|00)=p(1|0)p(0|0)=p(1-p)$$

$$p(11|00)=p(1|0)p(1|0)=p^2$$

⇓ 二次扩展



$$P=\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2 \\ p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 & p(1-p) \\ p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 & p(1-p) \\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

对称DMC，

$$C_2=\log_2 4-H\left[(1-p)^2,\ p(1-p),\ p(1-p),\ p^2\right]$$

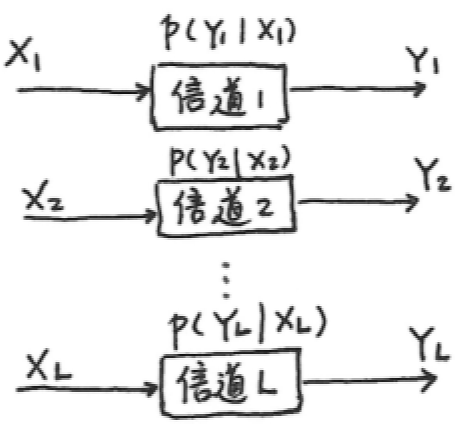
若 $p=0.1$， $C_2=2-0.938=1.062$ bit/序列

BSC单符号信道容量 $C_1=1-H(0.1,0.9)=0.531$ bit/符号

$C_2=2C_1$

独立并联信道

- 图例:



- 每个信道输出Y_l只与本信道的输入X_l有关，即:

$$p(Y_1,Y_2,\cdots,Y_L|X_1,X_2,\cdots,X_L)=p(Y_1|X_1)p(Y_2|X_2)\cdots p(Y_L|X_L)$$

信道无记忆, 并且有

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l)$$

- 并联信道容量

$$C_{12\cdots L} = \max I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} C_l$$

- 当输入符号X_l相互独立，且$p(X_1,X_2,\cdots,X_L)$达到最佳分布时，容量最大，此时:

$$C_{12\cdots L} = \sum_{l=1}^{L} C_l$$

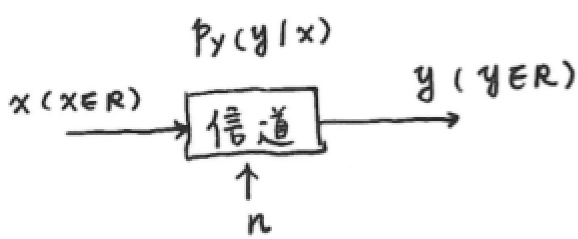
有记忆离散序列信道

> 有记忆的离散序列信道复杂得多，不作介绍。

3.4 连续信道及其容量

连续单符号加性信道

加性高斯信道

- **信道模型**:
  - 

  - $y = x + n$
  - n：加性噪声，$P_n(n) \sim N(0,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$。
- **微分熵**:

$$H_c(n) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(n) \log P_n(n) dn = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

- **互信息**:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H_c(X) - H_c(X|Y) \\
&= H_c(Y) - H_c(Y|X)
\end{aligned}
$$

- **信道容量**:

$$
\begin{aligned}
C = \max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{p(x)}[H_c(Y) - H_c(Y|X)] \\
&= \max_{p(x)} H_c(Y) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)
\end{aligned}
$$

  其中 $H_c(Y|X)$ 是噪声熵，由于x与n相独立，所以$p(y|x) = p(x+n|x) = p(n)$，所以 $H_c(Y|X) = H_n(n) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$。

- **求 $H_c(Y)$ 最大值**:

$$
\begin{aligned}
& y = x + n, y \in (-\infty, +\infty)，y\text{是功率受限信号} \\
& \Rightarrow Y\text{正态分布时熵最大} \\
& \Rightarrow Y\text{正态分布时信道容量最大}
\end{aligned}
$$

- y 的功率 P（其中S是输入信号 x 的平均功率，σ^2是噪声功率）

$$
P = S + \sigma^2
$$

  - 若 $P_Y(y) \sim N(0,P)$，$P_n(n) \sim N(0,\sigma^2)$，$x = y - n$，则 $P_X(x) \sim N(0,S)$。
  - 当输入 X 是均值为 0，方差为 S 的高斯分布时，**信息传输率**达最大，等于**信道容量**:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\log(2\pi eP) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{P}{\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{S}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log(1 + SNR) \quad bit/\text{符号}
\end{aligned}
$$

    其中 $SNR = \frac{S}{\sigma^2}$，$SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR$。

加性非高斯信道

- 对于加性、均值为 0、平均功率为 σ^2 的非高斯信道:

$$
C = \max(H_c(Y) - H_c(n))
$$

- 高斯分布时:

$$H_c(Y)_{max} = \frac{1}{2}\log(2\pi eP)$$

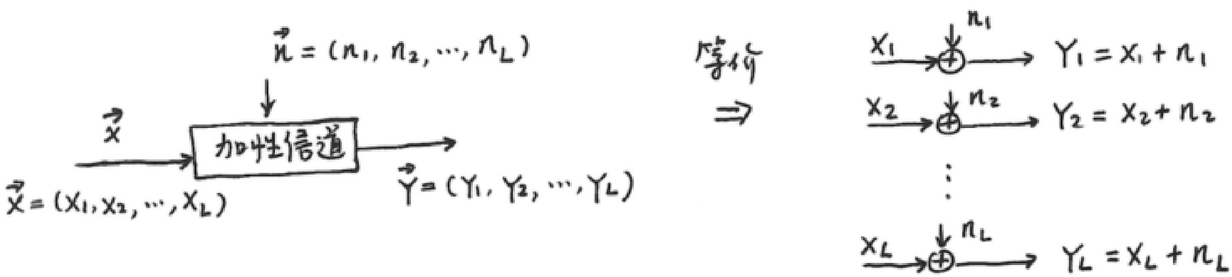
$$H_c(n)_{max} = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

- 满足：

$$\frac{1}{2}\log(2\pi eP) - \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \le C \le \frac{1}{2}\log(2\pi eP) - H_c(n)$$

多维无记忆加性连续信道

- **信道模型**：



  -
    - 输入X的总功率$P = \sum_{l=1}^{L} P_l$，P_l是第l个输入信号的功率
    - σ_l^2是第l个噪声的功率
  - 信道无记忆

$$p(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^{L} p(y_l|x_l)$$

  - 加性噪声各时刻独立

$$p_n(\vec{n}) = p_y(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^{L} p_n(n_l) \quad n_l \sim N(0, \sigma_l^2)$$

- **互信息**：

$$I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{l=1}^{L} I(X_l;Y_l) \le \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})$$

- **信道容量**：

$$C = \max_{p(x)} I(\vec{X};\vec{Y}) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2}) \quad \text{bit}/L\text{ 序列}$$

当且仅当输入随机变量 $\vec{X}$ 中各分量统计独立，且均值为0，方差为 P_l 的高斯分布时，才能达到此容量。

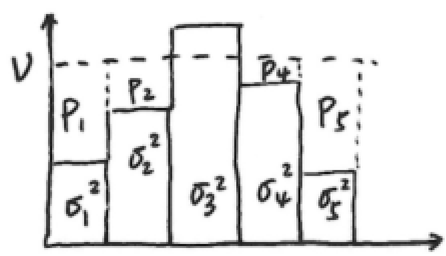
1. L **个高斯噪声每个单元时刻噪声功率相等**，$\sigma_l^2=\sigma^2$，$l\in\{1,2,\cdots,L\}$，有

$$C=\frac{L}{2}\log(1+\frac{S}{\sigma^2})\quad,\quad S=\frac{P}{L}$$

   $\vec{X}$ 的各分量满足 $N(0,S)$ 分布时，达到信道容量。

2. L **个高斯噪声均值为0，方差不同且为 σ_l^2 时**，若输入信号的总平均功率受限，即

$$E\left[\sum_{l=1}^{L}x_l^2\right]=\sum_{l=1}^{L}E[x_l^2]=\sum_{l=1}^{L}P_l=P$$

   - 

   - **怎样合理分配各单元时刻的信号平均功率，才能使信道传输率最大？**
     用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$f(P_1,P_2,\cdots,P_L)=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})+\lambda(\sum_{l=1}^{L}P_l-P)$$

     对第一项求最大，第二项为约束条件
     令 $\frac{\partial f()}{\partial P_l}=0$，$l=1,2,\cdots,L$
     得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P_l+\sigma_l^2}+\lambda=0\quad,\quad l=1,2,\cdots,L$$
$$\Rightarrow P_l+\sigma_l^2=-\frac{1}{2\lambda}\quad,\quad l=1,2,\cdots,L$$

     令各时刻信道输出总功率（信号功率 P_l + 噪声功率 σ_l^2）相等，设为 V

$$V=\frac{P+\sum_{l=1}^{L}\sigma_l^2}{L}$$

     当 $P_l=V-\sigma_l^2=\frac{P+\sum_{l=1}^{L}\sigma_l^2}{L}-\sigma_l^2$，$l=1,2,\cdots,L$ 时，**信道传输率达到最大**

$$C=\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\log\frac{P+\sum_{l=1}^{L}\sigma_l^2}{L\sigma_l^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\log\frac{V}{\sigma_l^2}$$

若 σ_l^2 太大，大于 V，则置 $P_l=0$，然后重新调整功率分配，直到 P_l 不再出现负值。

- **例题**:

例3-10 有一并联高斯加性信道，各子信道噪声方差为 $\sigma_1^2=0.1$, $\sigma_2^2=0.2$, $\sigma_3^2=0.3$, $\sigma_4^2=0.4$, $\sigma_5^2=0.5$, $\sigma_6^2=0.6$, $\sigma_7^2=0.7$, $\sigma_8^2=0.8$, $\sigma_9^2=0.9$, $\sigma_{10}^2=1.0$。

(1) 若输入的信号功率 $P=5$，则

$$V=\frac{P+\sum_{l=1}^{10}\sigma_l^2}{L}=\frac{5+5.5}{10}=1.05$$

$$P_l=V-\sigma_l \qquad (l=1,2,\dots,10)$$

$$C=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{10}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2})=6.1\ \text{bit}/10\text{维序列}$$

(2) 若 $P=1$，

$$V=\frac{1+5.5}{10}=0.65$$

$$P_7=P_8=P_9=P_{10}=0$$

$$V=\frac{1+\sum_{l=1}^{6}\sigma_l^2}{6}=\frac{1+2.1}{6}=\frac{3.1}{6}=0.517 \qquad P_6=0$$

$$V=\frac{1+\sum_{l=1}^{5}\sigma_l^2}{5}=\frac{1+1.5}{5}=\frac{2.5}{5}=0.5,$$

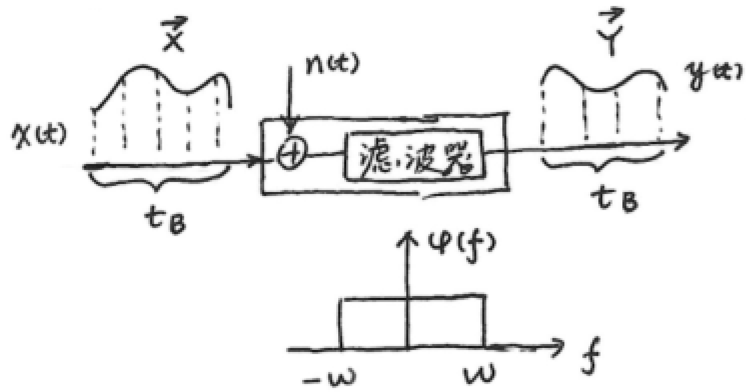
此时 $P_5=0$, $P_4=0.1$, $P_3=0.2$, $P_2=0.3$, $P_1=0.4$

4个信道可用，$C=2.4\ \text{bit}/10\text{维序列}$

限时限频限功率加性高斯白噪声信道

波形信道，限时 t_B，限频 ω

- **信道模型**:

  - 

- **互信息**:

$$
\begin{aligned}
I(x(t);y(t)) &= \lim_{L\to\infty} I(\vec{X};\vec{Y}) \\
&= \lim_{L\to\infty}[H_c(\vec{X}) - H_c(\vec{X}|\vec{Y})] \\
&= \lim_{L\to\infty}[H_c(\vec{Y}) - H_c(\vec{Y}|\vec{X})] \quad \text{bit/波形}
\end{aligned}
$$

- **单位时间内的信息传输率** R_t 为:

$$R_t = \lim_{t_B\to\infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X};\vec{Y}) \quad \text{bit/秒} \quad (t_B\text{：秒/波形})$$

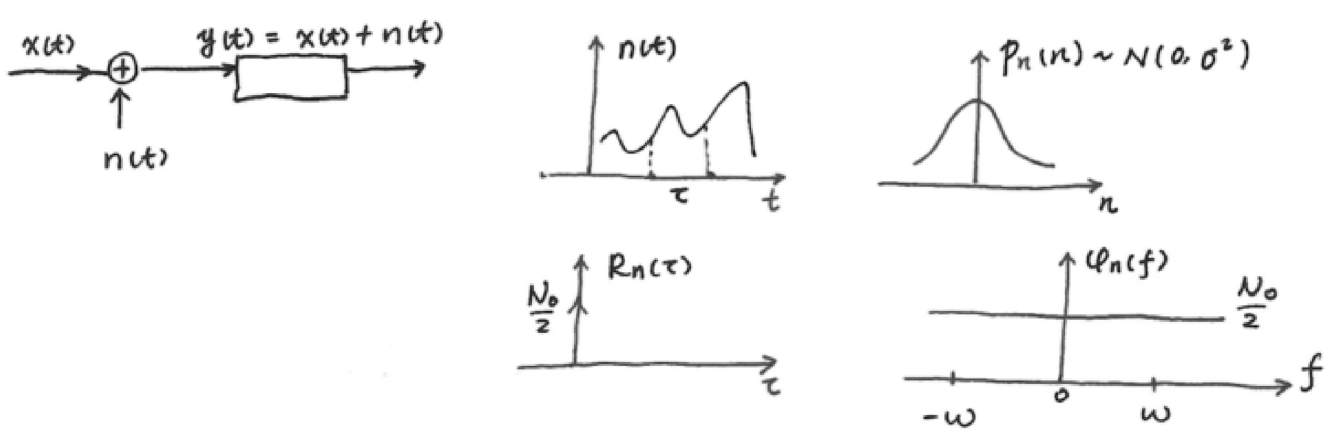
- **信道容量**:

$$C_t = \max_{p(x)}[\lim_{t_B\to\infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X};\vec{Y})] \quad \text{bit/秒}$$

- 带宽受限加性高斯白噪声 $n(t)$，均值为0，功率谱密度 $\frac{N_0}{2}$

加性高斯白噪声

- **模型**:



  - $y(t) = x(t) + n(t)$

- 相关函数:
    - $P_n(n) \sim N(0, \sigma^2)$
    - $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
    - 功率谱密度 $\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}$
    - 总噪声功率 $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \cdot 2\omega = N_0\omega$
    - $N_0 = kT$
    - 波茨曼常数 k
    - 绝对温度 T

低频带宽受限通信系统

- 在 $[0, t_B]$ 内，采样个数 $L = 2\omega t_B$，各样本值彼此独立。
- 通信带宽为 2ω，噪声功率为 $2\omega \cdot \frac{N_0}{2} = N_0\omega$

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\log(1+\frac{P_l}{\sigma_l^2}) \\
\sigma_l^2 &= P_n = \frac{\frac{N_0}{2}\cdot 2\omega \cdot t_B}{L} = \frac{\frac{N_0}{2}\cdot 2\omega \cdot t_B}{2\omega \cdot t_B} = \frac{N_0}{2} \\
P_l &= \frac{P_s t_B}{2\omega t_B} = \frac{P_s}{2\omega}
\end{aligned}
$$

- 对于平稳系统

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{L}{2}\log(1+\frac{P_s}{2\omega}\cdot\frac{2}{N_0}) \\
&= \frac{L}{2}\log(1+\frac{P_s}{N_0\omega}) \\
&= \omega t_B \log(1+\frac{P_s}{N_0\omega}) \quad \text{bit}/L\text{维符号序列}
\end{aligned}
$$

- 单位时间的信道容量

$$
\begin{aligned}
C_t &= \lim_{t_B\to\infty}\frac{C}{t_B} \\
&= \omega\log(1+\frac{P_s}{N_0\omega}) \quad \text{bit/秒} \\
&= \omega\log(1+SNR) \quad \text{bit/秒}
\end{aligned}
$$

  其中:
    - P_s：信号平均功率

- $N_0\omega$：噪声在系统中的平均功率（$\frac{N_0}{2}\cdot 2\omega = N_0\omega$）
- $SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR$

- 例题：

例 3-11 电话信道的带宽为 $W=3.3KHZ$，信噪比 $SNR_{dB} = 20dB$，

$$SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR = 20$$

$$SNR = 10^2 = 100$$

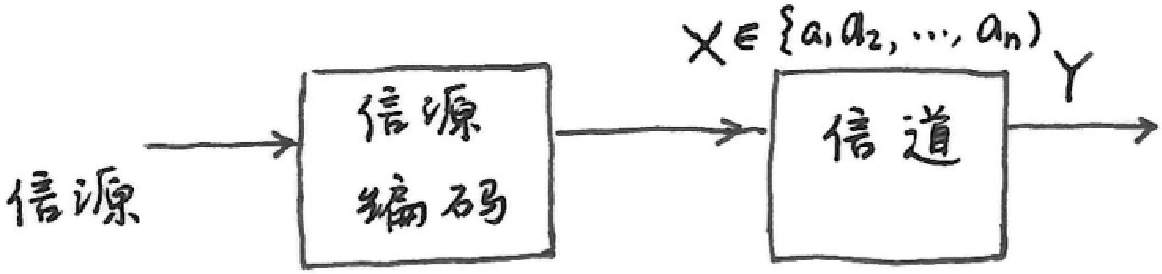
$$C_t = W\log_2(1+SNR) = 3.3\times10^3 \times \log_2 101 \doteq 22\ k\ bit/s$$

实际信道可达到的信道传输率为 19.2 k bit/s。

3.5 多输入多输出信道及其容量

> 略

3.6 信源与信道的匹配

- **符号匹配**
  - 

  - 信源编码：将信源符号转换为信道符号
- **信息匹配**
  - 信道绝对冗余度 $R_a = C - I(X;Y)$
  - 信道相对冗余度 $R_r = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$
  - 信道效率 $E = \frac{I(X;Y)}{C}$