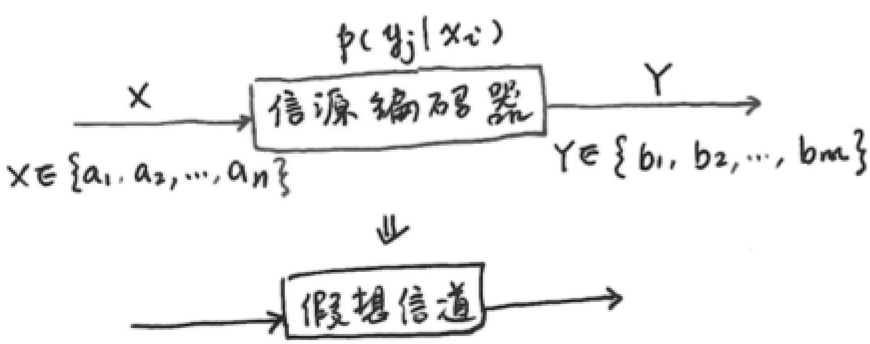
第四章 信息率失真函数

4.1 信息率失真函数的概念和性质

失真函数

- **信源编码器模型**:
    - 

    - 信源 $X \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
    - 经信源编码器输出 $Y \in \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$
- **失真函数** $d(x_i, y_j)$ 定义为:

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & x_i = y_j \\ \alpha, & \alpha > 0, x_i \neq y_j \end{cases}$$

- **失真矩阵** d 定义为:

$$d = [d(x_i, y_j)]_{n \times m} = \begin{bmatrix} d(a_1, b_1) & d(a_1, b_2) & \cdots & d(a_1, b_m) \\ \cdots \\ d(a_n, b_1) & d(a_n, b_2) & \cdots & d(a_n, b_m) \end{bmatrix}$$

- $d(x_i, y_j)$ 的函数形式可任意选择，常用的有:
    - **均方失真**: $d(x_i, y_j) = (x_i - y_j)^2$ （连续信源）
    - **绝对失真**: $d(x_i, y_j) = |x_i - y_j|$ （连续信源）
    - **相对失真**: $d(x_i, y_j) = |x_i - y_j| / |x_i|$ （连续信源）
    - **误码失真**: $d(x_i, y_j) = \delta(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & x_i = y_j \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$ （离散信源）

平均失真

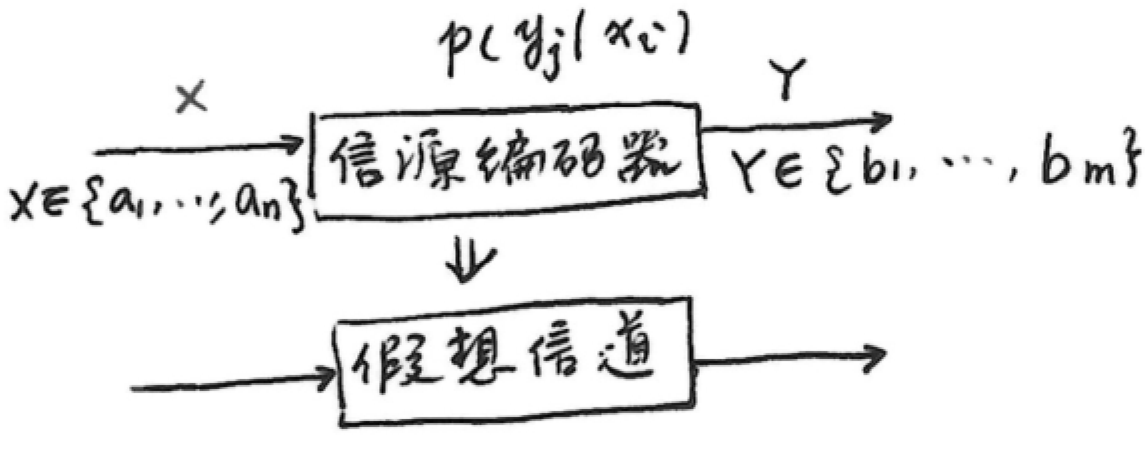
- 对于离散随机变量，**平均失真** $\overline{D}$ 的计算公式为:

$$\begin{aligned} \overline{D} = E(d(x_i, y_j)) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(a_i, b_j) d(a_i, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(a_i) p(b_j | a_i) d(a_i, b_j) \end{aligned}$$

  其中:
    - $p(a_i)$ 是信源符号分布
    - $p(b_j | a_i)$ 是有失真编码器转移概率分布
    - $d(a_i, b_j)$ 是离散随机变量失真函数

信息率失真函数 $R(D)$

- 将信源编码器看作信道:



- 编码的目的：
  - 使传输率 R 尽量小
  - 但是R 越小，$\overline{D}$ 越大
  - 在满足 $\overline{D} \leq D$ 条件下，选择一种编码方法使 R 尽量小
- **信息传输率** $R=I(X;Y)$，计算公式为：

$$
\begin{aligned}
R=I(X;Y) &= \sum_{i,j} p(x_i,y_j)\log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \\
&= \sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i)\log\frac{p(y_j|x_i)}{\sum_i p(x_i)p(y_j|x_i)}
\end{aligned}
$$

- 对于某特定信源，$p(x_i)$ 确定，$I(X;Y)$ 是关于 $p(y_j|x_i)$ 的凸函数（∪型下凸函数），可以从信道集合 P_D 中找到一种信道 $p(y_j|x_i)$，使 $I(X;Y)$ 最小。
  - **信道集合** P_D（D允许试验信道）定义为：

$$
P_D=\{p(b_j|a_i) \quad | \quad \overline{D} \leq D, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m\}
$$

  - **信息率失真函数** $R(D)$ 为：

$$
R(D)=\min_{P_D} I(X;Y)
$$

  - 对于**离散无记忆信道**，$R(D)$ 可写成：

$$
R(D)=\min_{P_{ij}\in P_D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i)p(b_j|a_i)\log\frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)}
$$

- 例题：

例 4-2 信源符号集为 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\}$，概率分布为 $p(a_i)=\frac{1}{2n}$，$i=1,2,\cdots,2n$。

规定失真函数为 $d(a_i, a_j)=\begin{cases}1, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases}$，研究一定编码条件下信息压缩程度。

a) 无失真编码：

以 $n=2$ 为例．$X\in A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$p(a_i)=\frac{1}{4}$，$i=1,2,3,4$

$H(X)=\log 4=2$ bit/符号

编码

a_1 — 00 b_1

a_2 — 01 b_2

a_3 — 10 b_3

a_4 — 11 b_4

$p(b_j|a_i)$

$$\begin{array}{c} \\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}00 & 01 & 10 & 11\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$d(a_i, b_j)$

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$p(a_i, b_j)=p(a_i)p(b_j|a_i)$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$\bar{D}=\sum_{i,j}p(a_i,b_j)\,d(a_i,b_j)=0$$

每个符号需要 2 个二进制码元，即平均码长为 $\log_2 2n=H(X)$

b) 对码长进行压缩，允许失真限制值 $D=\frac{1}{2}$

a_1 — b_1

a_2 — b_2 (b_n)

a_3 — b_2

(a_{2n}) a_4 — b_2

$p(b_j|a_i)$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$d(a_i, b_j)$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$p(a_i, b_j)$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$\bar{D}=\sum_{i,j}p(a_i,b_j)\,d(a_i,b_j)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=D$$，满足 $\bar{D}\leq D$

信息率 R 为多少？

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=H(X)-H(X|Y)\\&=H(Y)-\underbrace{H(Y|X)}_{=0}\\&=H(Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(Y)&=H(\underbrace{\tfrac{1}{2n},\cdots,\tfrac{1}{2n}}_{n-1\text{项}},\tfrac{n+1}{2n})\\&=\underbrace{\tfrac{1}{2n}\log 2n+\tfrac{1}{2n}\log 2n+\cdots+\tfrac{1}{2n}\log 2n}_{n-1\text{项}}+\tfrac{n+1}{2n}\log\tfrac{2n}{n+1}\\&=\log 2n-\tfrac{n+1}{2n}\log(n+1)\end{aligned}$$

经过信源编码，信源需要传输的信息率由 $\log 2n$ bit/符号，压缩到

$\log 2n - \frac{n+1}{2n}\log(n+1)$，信息率压缩了 $\frac{n+1}{2n}\log(1+n)$。

信息率失真函数的性质

$R(D)$函数的定义域

1. D_{min}**和**$R(D_{min})$
   - 平均失真D是失真函数$d(x,y)$的数学期望，因此D也是非负实数，所以$D_{min}=0$。
   - $$R(D_{min})=R(0)=H(X)$$

     等式成立的条件：
     - $D_{min}=0$：失真矩阵中每行至少有一个零，令条件概率在该行该处为1
     - $R_0=H(X)$：每一列最多只有一个零，否则多个X对应一个Y，$R(0)=H(Y)<H(X)$。
   - 对于连续信源，$R(D_{min})=R(0)=H_c(X)=\infty$。
2. D_{max}**和**$R(D_{max})$
   - $$D_{max}=\min_{R(D)=0} D$$

     其中$R(D)$的定义域为$[0,D_{max}]$
   - 当$R(D)=0$，即$I(X;Y)=0$，X、Y互相独立，$p(y_j|x_i)=p(y_j)=p_j$
   - $$\overline{D}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_ip_jd_{ij}$$

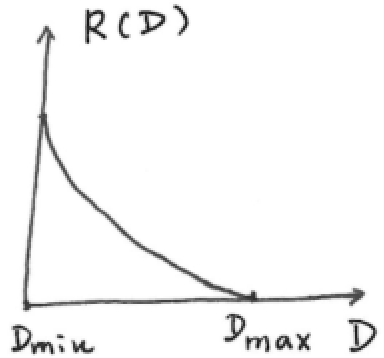
     其中p_i、d_{ij}已知，D_{max}为满足$\sum_j p_j=1$条件下$\overline{D}$的最小值。
   - $$\begin{aligned}D_{max}&=\min\sum_{j=1}^{m}p_j\sum_{i=1}^{n}p_id_{ij}\\&=\min_{j=1,2,\cdots,m}\sum_{i=1}^{n}p_id_{ij}\end{aligned}$$

     即在$j=1,\cdots,m$中，找到$\sum_{i=1}^{n}p_id_{ij}$值最小的一列j，此时取$p_j=1$，其余置0
3. $R(D)$**函数的定义域和值域**
   - $R(D)$函数的最大定义域为

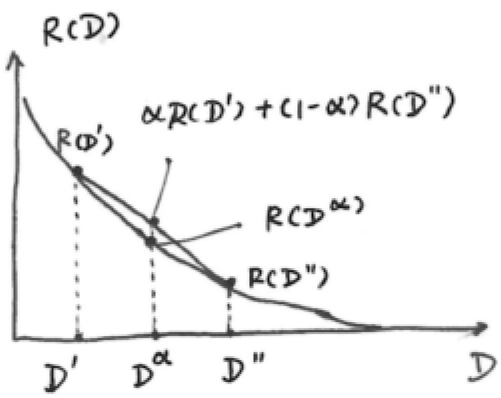
     $$[0\quad,\min_{j=1,2,\cdots,m}\sum_{i=1}^{n}p_id_{ij}]$$

- $R(D)$函数的最大值域为

$$[0, H(X)]$$

- 

$R(D)$函数的下凸性和连续性

- 

- **下凸性**:

$$D^\alpha = \alpha D' + (1-\alpha)D'' \quad 0 \le \alpha \le 1$$

有

$$R(D^\alpha) \le \alpha R(D') + (1-\alpha)R(D'')$$

- **连续性**:
设 $D' = D + \delta$，当 $\delta \to 0$ 时，$P_{D'} \to P_D$ ，$R(D') \to R(D)$ 。

$R(D)$函数的单调递减性

- 允许的失真度越大，所要求的信息率就越小。

- 规定了允许失真 D，及失真函数 $d(i,j)$，可以找到 $R(D)$，作为衡量信源编码压缩难度的一把尺子。

信息率失真函数与信道容量

	信道容量 C	**信息率失真函数** $R(D)$
研究对象	信道	信源
给定条件	$p(y_j\|x_i)$	$p(x_i)$
选择参数	$p(x_i)$	$p(y_j\|x_i)$
结论	$C=\max_{p(x)} I(X;Y)$	$R(D)=\min_{P_D} I(X;Y)$
$H(X\|Y)=H(X)-I(X;Y)$	噪声干扰丢失的信息量	编码压缩损失的信息量

4.2 信息率失真函数$R(D)$的计算（参量表示法）

例题

1. **例题1**：

   已知$X,Y\in\{0,1\}$，$p(X)=\begin{cases}p, & X=0\\ 1-p, & X=1\end{cases}$，$0<p\le\frac{1}{2}$，$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\ne y\\ 0, & x=y\end{cases}$

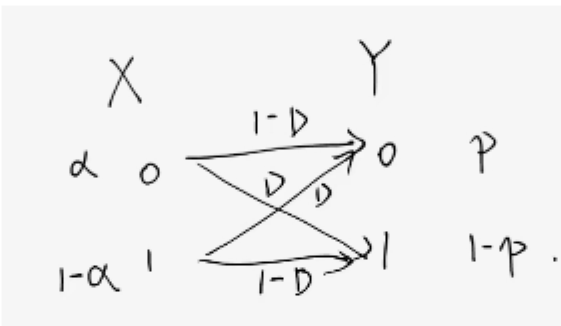
   证明：$R(D)=\begin{cases}H_b(p)-H_b(D), & 0\le D\le p\\ 0, & D>p\end{cases}$，其中$H_b(p)=H(p,1-p)$，$H_b(D)=H(D,1-D)$

   - 由$R(D)$性质可得**定义域**：
     失真矩阵 $d=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，令转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
     $D_{min}=0$，$R(0)=H(X)=H_b(p)$
     $D_{max}=\min[p,1-p]$ = p
   - **求**$R(D)$：
     $R(D)=\min I(X;Y)$，限制条件$P_D=\{\overline{D}=E(d(X,Y))\le D\le D_{max}=p\}$
     令 $Z=d(X,Y)=\begin{cases}1, & x\ne y\\ 0, & x=y\end{cases}$
     $p(x|y)=p(z|y)$，$H(X|Y)=H(Z|Y)$
     又$p(z=1)=p_r(x\ne y)=E(d(X,Y))\le D\le p\le\frac{1}{2}$

且$H_b(x)$函数关于$\frac{1}{2}$对称，在$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$范围内，$H_b(x)$函数单调递增。
则$H(Z) = H_b(p_r(x \neq y)) \leq H_b(D)$

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= H_b(p) - H(X|Y) \\
&= H_b(p) - H(Z|Y)\text{（令}z = d(x,y)\text{）} \\
&\geq H_b(p) - H(Z)\text{（}H(Z|Y) \leq H(Z)\text{）} \\
&\geq H_b(p) - H_b(D)\text{（}H(Z) \leq H_b(D)\text{）}
\end{aligned}
$$

所以$R(D) \geq H_b(p) - H_b(D)$

- **证明下界可达**：
  构造反向BSC信道如图：
  

  令$X,Y \in \{0,1\}$，$p(Y) = \begin{cases} p, & Y=0 \\ 1-p, & Y=1 \end{cases}$，$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
  转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1-D & D \\ D & 1-D \end{bmatrix}$
  则$R = I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H_b(p) - H_b(D)$，达到下界
  只需证明存在α满足$0 \leq \alpha \leq 1$，使得$p(X) = \begin{cases} \alpha, & X=0 \\ 1-\alpha, & X=1 \end{cases}$
  易知$p = \alpha(1-D) + D(1-\alpha)$，即$\alpha = \frac{p-D}{1-2D}$
  因为$0 \leq D \leq p \leq \frac{1}{2}$，$p + D \leq 1$
  由此可得$0 \leq \alpha = \frac{p-D}{1-2D} \leq 1$，即存在$\alpha$满足条件

2. **例题2**：

例： $X, Y \in \{0, 1\}$， $d(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ， $p(x=0) = p(x=1) = \frac{1}{2}$

计算 $R(D)$

$$R(D) = \min_{P_D} I(X;Y)$$

$$P_D : \left\{ p(y|x) : \sum p(x) p(y|x) d(x,y) \le D \right\}$$

未知量 $p(y|x)$，设 $p(0|0) = \alpha$， $p(1|1) = \beta$.

$$p = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \qquad p(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\beta) & \frac{1}{2}\beta \end{bmatrix}, \quad d(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} a (1-\alpha) + \frac{1}{2} b (1-\beta) \le D \quad \text{（约束条件）}$$

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \qquad \text{（极值）} \\ &= H\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}, \frac{1+\beta-\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\alpha \log \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \log(1-\alpha) \\ &\qquad + \frac{1-\beta}{2} \log(1-\beta) + \frac{\beta}{2} \log \beta \\ &= H\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}, \frac{1+\beta-\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} H(\alpha) - \frac{1}{2} H(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \lambda) &= H\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}, \frac{1+\beta-\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} H(\alpha) - \frac{1}{2} H(\beta) \\ &\qquad + \lambda \left(\frac{b}{2}(1-\beta) + \frac{a}{2}(1-\alpha) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \\ \dfrac{1-\beta}{2} b + \dfrac{1-\alpha}{2} a = D \end{cases}$$

3. **结论**：**二元信源失真函数**$R(D) = \begin{cases} H_b(p) - H_b(D), & 0 \le D \le p \\ 0, & D > p \end{cases}$

参量表示法

1. **条件与记号**
   设离散信源的输入序列为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

   输出序列为

$$\begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

   字符传输的失真函数为 $d(x_i, y_j)$， $i = 1, 2, \cdots, n$； $j = 1, 2, \cdots, m$ 。
   为了书写方便，引入记号：

$$\begin{gathered} d_{ij} = d(x_i, y_j), \quad p_{ij} = p(y_j \mid x_i) \\ p_i = p(x_i), \quad q_j = p(y_j) \end{gathered}$$

   式中

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) p(y_j \mid x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}$$

2. **问题转换**
   信息率失真函数 $R(D)$ 的计算为在约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} = D \\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \quad ①$$

   下，求下式极小值问题。

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{q_j} \quad ②$$

   应用拉格朗日乘法，引入乘子 s 和 μ_i， $i = 1, 2, \cdots, n$ 将上述条件极值问题化成无条件极值问题：

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}} \left[I(X;Y) - sD - \mu_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right] = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad ③$$

3. **求解**
   由上式 ③ 解出 p_{ij}，代入式 ② 中得到在约束条件式 ① 下的 $I(X;Y)$ 极小值，即 $R(D)$ 。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{q_j}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \ln p_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij}\right) \ln q_j\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \ln p_{ij} - \sum_{j=1}^{m} q_j \ln q_j\right] \\
&= \left[p_i p_{ij} \frac{1}{p_{ij}} + p_i \ln p_{ij}\right] - \left[q_j \frac{1}{q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial q_j}{\partial p_{ij}} \ln q_j\right] \\
&= [p_i + p_i \ln p_{ij}] - [p_i + p_i \ln q_j] \\
&= p_i \ln \frac{p_{ij}}{q_j} \\
\frac{\partial [sD]}{\partial p_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\left[s \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij}\right] = s p_i d_{ij} \\
\frac{\partial}{\partial p_{ij}}&\left[\mu_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right] = \mu_i
\end{aligned}
$$

所以式 ③ 化为:

$$
p_i \ln \frac{p_{ij}}{q_j} - s p_i d_{ij} - \mu_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m \quad ④
$$

由式 ④ 解出 p_{ij} :

$$
p_{ij} = q_j \exp\{s d_{ij}\} \exp\left\{\frac{\mu_i}{p_i}\right\} \quad i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m \quad ⑤
$$

令 $\lambda_i = \exp\left\{\frac{\mu_i}{p_i}\right\}$ ，代入式 ⑤ 中得到:

$$
p_{ij} = \lambda_i q_j \exp\{s d_{ij}\} \quad i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m \quad ⑥
$$

由 $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ ，将式 ⑥ 对 j 求和可得到

$$
1 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i q_j \exp\{s d_{ij}\} \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad ⑦
$$

由式 ⑦ 可解出 λ_i 的值

$$
\lambda_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} q_j \exp\{s d_{ij}\}} \quad ⑧
$$

由 $q_j=\sum_{i=1}^{n}p_ip_{ij}$ ，将式 ⑥ 两边同乘 p_i ，并对 i 求和可得到

$$q_j=\sum_{i=1}^{n}p_ip_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ip_iq_j\exp\{sd_{ij}\}\quad j=1,2,\cdots,m$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_ip_i\exp\{sd_{ij}\}=1\quad j=1,2,\cdots,m\quad ⑨$$

将式 ⑧ 代入式 ⑨ 中，可得到关于 q_j 的 m 个方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\exp\{sd_{ij}\}}{\sum_{l=1}^{m}q_l\exp\{sd_{il}\}}=1\quad j=1,2,\cdots,m\quad ⑩$$

由式 ⑩ 中可以解出以 s 为参量的 m 个 q_j 值，将这 m 个 q_j 值代入式 ⑧ 中可以解出以 s 为参量的 n 个 λ_i 值，再将解得的 m 个 q_j 值和 n 个 λ_i 值代入式 ⑥ 中，可以解出以 s 为参量的 mn 个 p_{ij} 值。

将解出的 mn 个 p_{ij} 值代入定义式中求出以 s 为参量的平均失真度 $D(s)$

$$D(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_ip_iq_jd_{ij}\exp\{sd_{ij}\}\quad ⑪$$

其中， λ_i 和 q_j 由式 ⑦ 和 ⑩ 求得。

将解出的 mn 个 p_{ij} 值代入式 ② 中得到在约束条件 ① 下的 $I(X,Y)$ 的极小值，即以 s 为参量的信息率失真函数 $R(s)$

$$\begin{aligned}R(s)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_ip_iq_j\exp\{sd_{ij}\}\ln\frac{\lambda_iq_j\exp\{sd_{ij}\}}{q_j}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_ip_iq_j\exp\{sd_{ij}\}(\ln\lambda_i+sd_{ij})\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i\ln\lambda_i\left[\sum_{j=1}^{m}\lambda_iq_j\exp\{sd_{ij}\}\right]+s\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_ip_iq_jd_{ij}\exp\{sd_{ij}\}\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i\ln\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)+sD(s)\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i\ln\lambda_i+sD(s)\quad ⑫\end{aligned}$$

一般情况下，参量 s 无法消去，因此得不到 $R(D)$ 的闭式解，只有在某些特定的简单问题中才能消去参量 s ，得到 $R(D)$ 的闭式解。若无法消去参量 s ，就需要进行逐点计算。下面分析一下参量 s 的意义。

将 $R(D)$ 看成 $D(s)$ 和 s 的隐函数，而 λ_i 又是 s 的函数，利用全微分公式对 $R(D)$ 求导，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R(D)}{\mathrm{d}D} &= \frac{\partial R(s)}{\partial D(s)} + \frac{\partial R(s)}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}D}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R(s)}{\partial \lambda_i}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}D}\right) \\ &= s + D(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}D} + \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\lambda_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}D} \\ &= s + \left[D(s) + \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\lambda_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s}\right]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}D} \quad ⑬\end{aligned}$$

为求出 $\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s}$ ，将式 ⑦ 对 s 求导，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\exp\{sd_{ij}\}\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s} + \lambda_i p_i d_{ij}\exp\{sd_{ij}\}\right] = 0$$

将上式两边同乘以 q_j ，并对 j 求和，可得

$$\sum_{j=1}^{m}q_j\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\exp\{sd_{ij}\}\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s} + \lambda_i p_i d_{ij}\exp\{sd_{ij}\}\right] = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\left[\sum_{j=1}^{m}q_j\exp\{sd_{ij}\}\right]\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i p_i q_j d_{ij}\exp\{sd_{ij}\} = 0$$

将式 ⑧ 和 ⑫ 代入上式，可得

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{1}{\lambda_i}\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}s} + D(s) = 0 \quad ⑭$$

将式 ⑭ 代入式 ⑬ 中，可得

$$\frac{\mathrm{d}R(D)}{\mathrm{d}D} = s \quad ⑮$$

式 ⑮ 表明，参量 s 是信息率失真函数 $R(D)$ 的斜率。由 $R(D)$ 在 $0 < D < D_{max}$ 之间是严格单调减函数可知， s 是负值，且是 D 的递增函数，即 s 将随 D 的增加而增加。

由 $R(D)$ 的性质可知，在 $D = 0$ 处， $R(D)$ 的斜率有可能为 $-\infty$ ；当 $D > D_{max}$ 时，

$R(D)=0$，其斜率为零。所以参量 s 的取值为 $(-\infty,0)$。

进一步还可以证明：信息率失真函数 $R(D)$ 是参量 s 的连续函数； $R(D)$ 的斜率，即参量 s 是失真度 D 的连续函数，在 $D=D_{max}$ 处， $R(D)$ 的斜率可能是不连续的。