

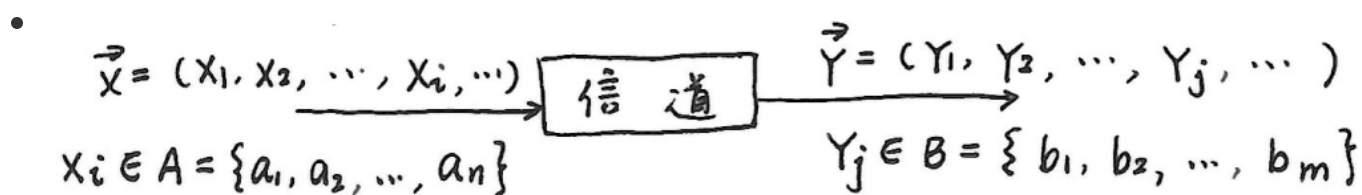
第三章 信道与信道容量

- 第三章 信道与信道容量
 - 3.1 信道的数学模型
 - 基本数学模型
 - 无干扰信道（无噪声）
 - 有干扰无记忆信道
 - 二进制离散对称信道（Binary Symmetric Channel, BSC）
 - 离散无记忆信道（Discrete Memoryless Channel, DMC）
 - 离散输入、连续输出信道
 - 波形信道
 - 因此无记忆时重点讨论单符号信道！
 - 有干扰有记忆信道
 - 信道容量的定义
 - 3.2 离散单个符号信道及其容量
 - 无干扰离散信道
 - 无噪无损信道： $n = m$ ， X 、 Y ——对应
 - 无噪有损信道： $n > m$ ，多个 X 对应一个 Y
 - 有噪无损信道： $n < m$ ，一个 X 对应多个 Y
 - 对称离散无记忆信道
 - 准对称离散无记忆信道
 - 矩阵分解法
 - 一般离散无记忆信道
 - 3.3 离散序列信道及其容量
 - 信道模型与符号定义
 - 无记忆离散序列信道
 - 独立并联信道
 - 有记忆离散序列信道
 - 3.4 连续信道及其容量
 - 连续单符号加性信道
 - 加性高斯信道
 - 加性非高斯信道
 - 多维无记忆加性连续信道
 - 限时限频限功率加性高斯白噪声信道

- 波形信道, 限时 (t_B), 限频 (W)
- 加性高斯白噪声
- 低频带宽受限通信系统
- 3.5 多输入多输出信道及其容量
- 3.6 信源与信道的匹配

3.1 信道的数学模型

基本数学模型



- $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots)$, $X_i \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为输入;
- $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots)$, $Y_j \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 为输出。
- 用条件概率 (转移概率) $p(\vec{Y}|\vec{X})$ 来描述输入、输出之间的依赖关系。

无干扰信道 (无噪声)

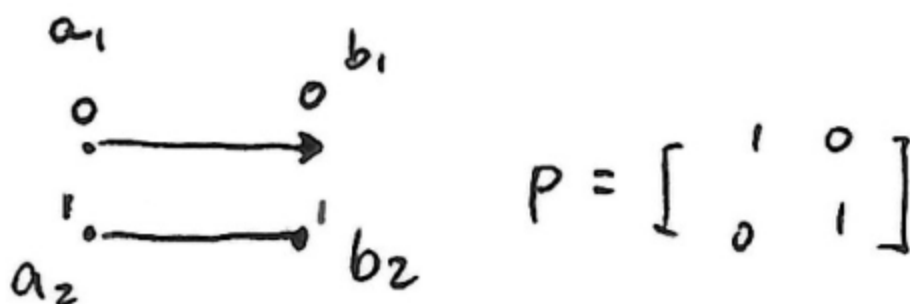
- $\vec{Y} = f(\vec{X})$, 已知 \vec{X} 就能确知 \vec{Y}

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \vec{Y} = f(\vec{X}) \\ 0, & \vec{Y} \neq f(\vec{X}) \end{cases}$$

- 例子:

- 当输入 a_1 对应输出 b_1 , 输入 a_2 对应输出 b_2 时, 转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

○



有干扰无记忆信道

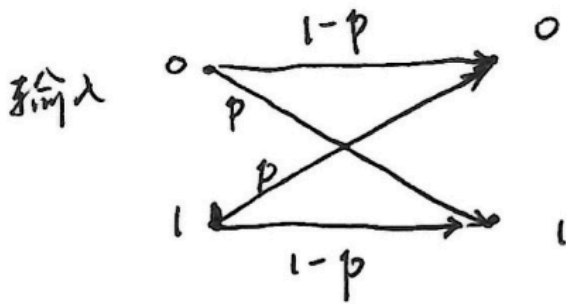
- 无记忆:

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = p(y_1|x_1)p(y_2|x_2) \cdots p(y_l|x_l)$$

- 只需分析单个符号的转移概率 $p(y_j|x_i)$

二进制离散对称信道 (Binary Symmetric Channel, BSC)

- 输入 $X \in A = \{0, 1\}$
- 输出 $Y \in B = \{0, 1\}$
- $BSC \begin{cases} p(Y=0|X=1) = p(Y=1|X=0) = p \\ p(Y=1|X=1) = p(Y=0|X=0) = 1-p \end{cases}$
- 其中 p 为错误概率, 其转移关系和转移概率矩阵如下:



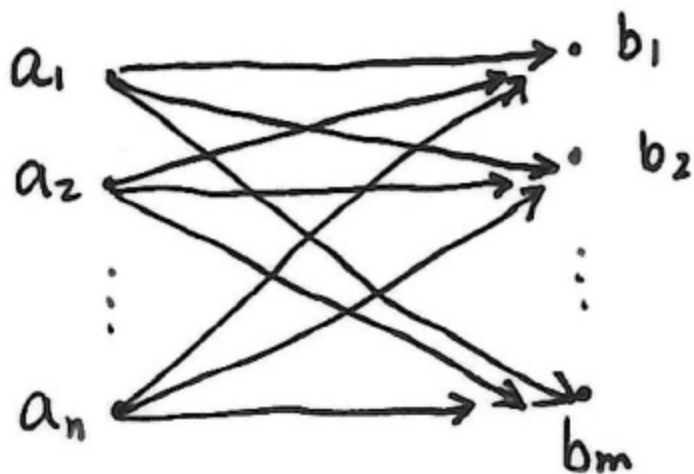
$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

离散无记忆信道 (Discrete Memoryless Channel, DMC)

- 输入 $X \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- 输出 $Y \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

- 转移概率矩阵 $P = [p(b_j|a_i)] = [p_{ij}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$

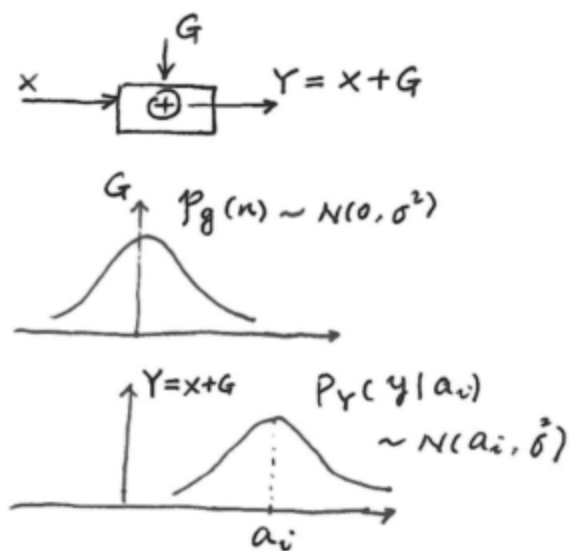
- 并且满足 $\sum_{j=1}^m p(b_j|a_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n$



- 二进制离散对称信道 (BSC) 是离散无记忆信道 (DMC) 的特例

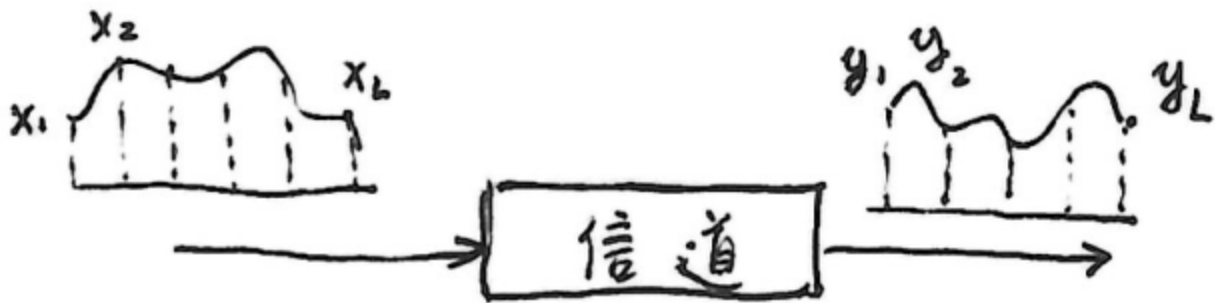
离散输入、连续输出信道

- 输入 $X \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- 输出 $Y \in \{-\infty, +\infty\}$
- 信道模型为 $Y = X + G$, 其中 $G \in \{-\infty, +\infty\}$, $p_G(n) \sim N(0, \sigma^2)$
- 条件概率密度 $p_Y(y|a_i) \sim N(a_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-a_i)^2}{2\sigma^2}}$
- 图例:



波形信道

- 当 t_B 、 f_m 受限, $L = 2t_B f_m$ 时
- 输入 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_L)$
- 输出 $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_L)$



- 时间离散，取值连续的多维连续信道，信道转移概率密度函数为：

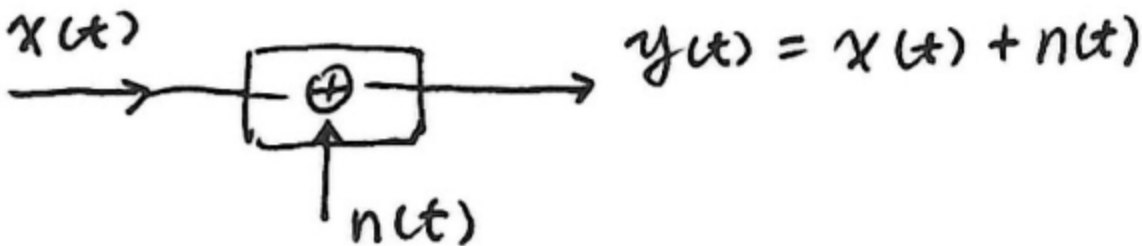
$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1, y_2, \dots, y_L | x_1, x_2, \dots, x_L)$$

- 连续无记忆信道：

$$p_Y(\vec{y}|\vec{x}) = p_y(y_1|x_1)p_y(y_2|x_2)\cdots p_y(y_L|x_L) = \prod_{l=1}^L p_Y(y_l|x_l)$$

因此无记忆时重点讨论单符号信道！

- 信道模型为 $y(t) = x(t) + n(t)$
- 其中 $n(t)$ 为加性噪声，与信号 $x(t)$ 相互独立
-



- 根据概率关系有：

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X,n}(x, n) = p_X(x)p_n(n)$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_{X,n}(x, n)}{p_X(x)} = p_n(n)$$

- 进一步考虑条件熵：

$$\begin{aligned}
H_c(Y|X) &= - \iint_R p_{X,Y}(x,y) \log p_Y(y|x) dx dy \\
&= - \int_R p_X(x) dx \int_R p_Y(y|x) \log p_Y(y|x) dy \\
&= - \int_R p_n(n) \log p_n(n) dn \\
&= H_c(n)
\end{aligned}$$

条件熵 $H_c(Y|X)$ 称为**噪声熵**

- 在加性多维连续信道中

- $$\vec{y} = \vec{x} + \vec{n}$$

- 同理有 $p_{\vec{y}}(\vec{y}|\vec{x}) = p_n(\vec{n})$, $H_c(\vec{y}|\vec{x}) = H_c(\vec{n})$

有干扰有记忆信道

略

信道容量的定义

- 定义信道的**信息传输率** R 为信道中平均每个符号所传输的信息量：

$$\begin{aligned}
R &= I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad \text{bit/信道符号} \\
&= H(Y) - H(Y|X)
\end{aligned}$$

- 设 T 为信道中符号的平均传输时间，定义**信息传输速率**：

$$R_t = \frac{R}{T} = \frac{I(X;Y)}{T} \quad \text{bit/秒}$$

- $I(X;Y)$ 是输入符号分布概率 $p(a_i)$ 和信道转移概率 $p(b_j|a_i)$ 的函数，即

$$I(X;Y) = f(p(a_i), p(b_j|a_i))$$

- 对于某特定信道， $p(b_j|a_i)$ 确定，则 $I(X;Y)$ 是关于 $p(a_i)$ 的凹函数（ \cap 型上凸函数），也即可以找到某种概率分布 $p(a_i)$ ，使 $I(X;Y)$ 达到最大，该最大值为**信道容量**：

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) \quad \text{bit/符号}$$

- 若符号传送时间周期为 T 秒，则**单位时间信道容量**为：

$$C_t = C/T \quad \text{bit/秒}$$

- 对于固定信道参数信道，信道容量是个定值。实际传输时能否提供最大传输能力，取决于输入端的概率分布，定义**信道绝对冗余度**和**相对冗余度**：

$$\text{信道绝对冗余度} = C - I(X; Y)$$

$$\text{信道相对冗余度} = 1 - \frac{I(X; Y)}{C}$$

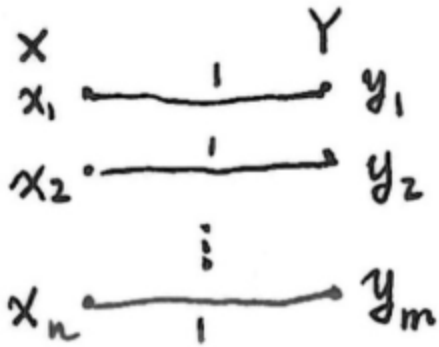
3.2 离散单个符号信道及其容量

无干扰离散信道

- 信道输入 $X \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- 输出 $Y \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

无噪无损信道：n = m, X、Y一一对应

- 输入输出关系：



- 转移概率矩阵 $P = \{p(y_j|x_i)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$, $p(x_i|y_j) \in \{0, 1\}$ 。

- 噪声熵与疑义度：

$$H(Y|X) = H(X|Y) = 0$$

- 互信息：

$$I(X; Y) = I(Y; X) = H(X) = H(Y)$$

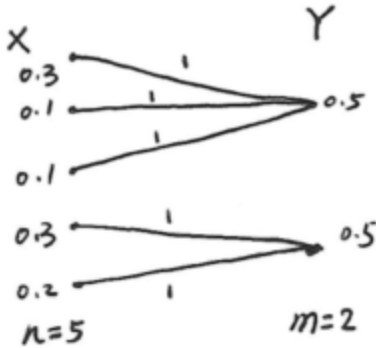
当输入符号等概率分布时， $I(X; Y)$ 最大。

- 信道容量：

$$C = \max_{p(a_i)} I(X; Y) = \max_{p(a_i)} H(X) = \log n$$

无噪有损信道：n > m, 多个X对应一个Y

- 输入输出关系：



- 多个输入对应一个输出，即 $n > m$
- 噪声熵：

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) = 0$$

- 疑义度：

$$H(X|Y) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) \neq 0$$

- 互信息：

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) \neq 0$$

其中 $H(Y|X) = 0$, $H(X|Y) \neq 0$

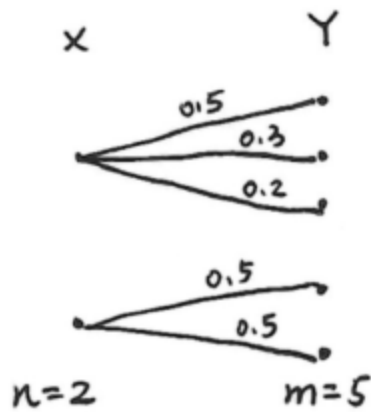
由此可得 $H(X) = H(Y) + H(X|Y)$, 所以 $H(X) \geq H(Y)$ 。

- 信道容量：

$$C = \max_{p(a_i)} I(X; Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) \stackrel{?}{=} \log m$$

有噪无损信道：n < m, 一个X对应多个Y

- 输入输出关系：



- 信道噪声使一个输入对应多个输出, $n < m$
- 噪声熵:

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) \neq 0$$

- 疑义度:

$$H(X|Y) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) = 0$$

- 互信息:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) \neq 0$$

其中 $H(X|Y) = 0$, $H(Y|X) \neq 0$

由此可得 $H(Y) = H(X) + H(Y|X)$, 所以 $H(Y) \geq H(X)$ 。

- 信道容量:

$$C = \max_{p(a_i)} I(X;Y) = \max_{p(a_i)} H(X) = \log n$$

对称离散无记忆信道

- 以下是两个转移概率矩阵示例:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

- 对称特性判断:

- 若每一行包含相同元素, 称为输入对称
- 若每一列包含相同元素, 称为输出对称

- 当行列都对称时，为**对称DMC（离散无记忆信道）**。

- **相关信息论公式：**

- **互信息：**

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

- **条件熵：**

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) \\ &= - \sum_{i,j} p(a_i) p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i) \\ &= - \sum_i p(a_i) \sum_j p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i) \\ &= \sum_i p(a_i) H(Y|a_i) \quad (\text{输入对称}) \\ &= H(Y|a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- **信道容量：**

$$C = \max_{p(a_i)} I(X; Y) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|X) = \max_{p(a_i)} H(Y) - H(Y|a_i)$$

- 当**输入符号等概率分布**，即 $p(a_i) = \frac{1}{n}$ 时，设 m 为输出符号数目，则有：

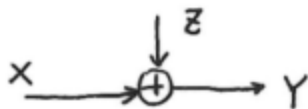
- $p(b_j) = \sum_i p(a_i) p(b_j|a_i) = \frac{1}{n} \sum_i p(b_j|a_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{m}$
- $H(Y) = - \sum_j p(b_j) \log p(b_j) = \sum_j \frac{1}{m} \log m = m \frac{1}{m} \log m = \log m$
- **信道容量**

$$C = \log m - H(Y|a_i)$$

- 其中 m 为输出符号 Y 数目， $i = 1, \dots, n$

- **一般离散无记忆模 k 加性噪声信道**

- 信道模型: $Y = X \oplus Z \bmod k$, 其中 $X, Y, Z \in \{0, 1, \dots, k-1\}$
- 图例:



- **加性噪声**，有 $p(y|x) = p(z)$

- **条件熵：**

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= - \sum_{x,y} p(x)p(y|x) \log p(y|x) \\
 &= - \sum_{x,z} p(x)p(z) \log p(z) \\
 &= - \sum_x p(x) \sum_z p(z) \log p(z) \\
 &= H(Z)
 \end{aligned}$$

■ 信道容量:

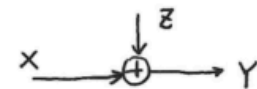
$$\begin{aligned}
 C &= \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) \\
 &= \max_{p(x)} H(Y) - H(Z) \\
 &= \log k - H(Z) \quad (\text{对称性})
 \end{aligned}$$

○ 例题:

例 3-3 离散无记忆模 k 加性噪声信道 $Y = X \oplus Z \pmod k$, $X, Y \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

$\begin{bmatrix} z \\ p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, 求该信道容量.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} X \backslash Y \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} k \times k \end{matrix} \end{matrix}$$



对称 DMC 信道.

$$C = \log k - H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \log k - \log 3$$

准对称离散无记忆信道

• 以下是两个转移概率矩阵示例:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

• 信道特性:

○ 矩阵中**各行元素相同**, 但**各列元素不同**, 这种信道称为**准对称DMC (离散无记忆信道)**。

• 相关信息论公式:

○ 因为各行元素相同, 所以 $H(Y|X) = H(Y|a_i)$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$

■ 这表明在给定不同输入符号 a_i 时, 输出的条件熵是相同的

○ 由于各列元素不同, 信道的输入和输出分布概率可以不同, 并且 $H(Y) \leq \log m$ (m 为输出符号的数目)

◦ **信道容量：**

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y|X)] \\ &\leq \log m - H(Y|a_i) \\ &= \log m + \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p_{ij} \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, p_{ij} 是转移概率矩阵中的元素

- 这给出了准对称离散无记忆信道容量的一个**上限估计**
- 求解：**矩阵分解法**

矩阵分解法

• **转移矩阵分解：**

◦ 将**准对称**转移概率矩阵**按概率列**分成若干个互不相交的**对称的子集**。例如：

▪
$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

可分解成 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

▪
$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

可分解成 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ 。

• **信道容量：**

◦ 可以证明，当**输入等概率分布**时，可达到信道容量。

$$C = \log n - H(P'_1, P'_2, \dots, P'_m) - \sum_{k=1}^r N_k \log M_k$$

◦ 其中：

- n 为输入符号个数。
- P'_1, P'_2, \dots, P'_m 是原转移概率矩阵 P 中一行的元素。
- N_k 是第 k 个子矩阵中行元素之和。
- M_k 是第 k 个子矩阵中列元素之和。
- r 是子矩阵个数。

一般离散无记忆信道

- 转移概率 $p(y|x)$ 固定
- 信道容量：

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) = \max_{p(x)} I(p(x), p(y|x))$$

即求互信息 $I(X; Y)$ 关于输入概率分布 $p(x)$ 的极大值。

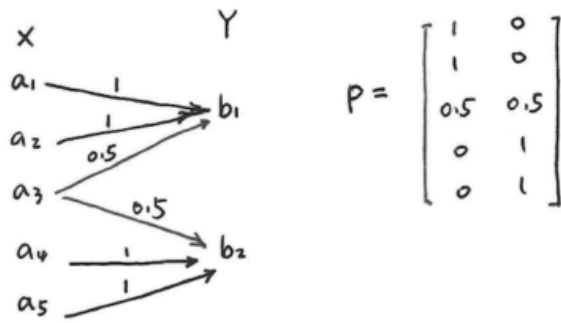
- 互信息：

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_i p(a_i) I(a_i; Y) \\ &= \sum_i p(a_i) \sum_j p(b_j|a_i) \log \frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)} \end{aligned}$$

- 为使 $I(X; Y)$ 达到最大，输入符号概率集 $\{p(a_i)\}$ 必须满足的**充分和必要条件**是：
 - 对于所有 $p(a_i) > 0$ 的符号 a_i ，有 $I(a_i; Y) = C$
 - 对于所有 $p(a_i) = 0$ 的符号 a_i ，有 $I(a_i; Y) \leq C$
 - 这意味着除概率为0的符号 a_i 外，每个符号 a_i 对 Y 提供相同的互信息
- 注意：**最佳输入分布不唯一！**
- 例题：

例 3-8 如图所示离散信道, 输入符号集为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 输出符号集为 $\{b_1, b_2\}$ 。

求信道容量和最佳输入符号分布概率。



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I(a_i; Y) &= \sum_j p(b_j|a_i) I(a_i; b_j) \\ &= \sum_j p(b_j|a_i) \log \frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)} = \sum_j p(b_j|a_i) \log \frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)} \end{aligned}$$

$$I(a_1; Y) = \log \frac{1}{p(b_1)}$$

$$I(a_2; Y) = \log \frac{1}{p(b_1)}$$

$$I(a_3; Y) = 0.5 \log \frac{0.5}{p(b_1)} + 0.5 \log \frac{0.5}{p(b_2)}$$

$$I(a_4; Y) = \log \frac{1}{p(b_2)}$$

$$I(a_5; Y) = \log \frac{1}{p(b_2)}$$

$$\left. \begin{aligned} &① I(a_i; Y) \text{ 相同} \Rightarrow p(b_1) = p(b_2) = \frac{1}{2} \\ &② I(a_3; Y) = 0 \Rightarrow p(a_3) = 0 \\ &③ C = I(a_1; Y) = I(a_2; Y) = I(a_4; Y) \\ &\quad = I(a_5; Y) = 1 \text{ bit/symbol} \end{aligned} \right\}$$

④ 最佳输入符号分布:

$$\begin{cases} p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) = 0.5 \\ p(a_4) + p(a_5) + p(a_3) = 0.5 \\ p(a_3) = 0 \\ p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + p(a_4) + p(a_5) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p(a_1) = p(a_2) = p(a_4) = p(a_5) = \frac{1}{4} \\ p(a_3) = 0$$

或

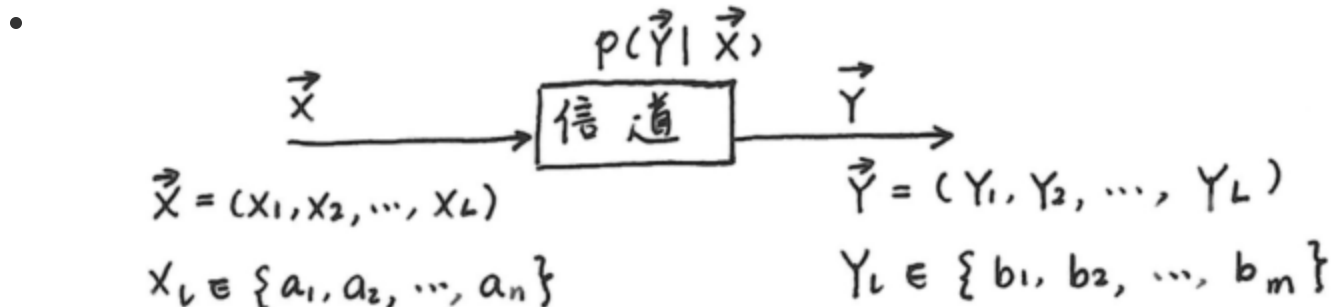
$$p(a_1) = p(a_5) = \frac{1}{2}$$

$$p(a_2) = p(a_3) = p(a_4) = 0$$

最佳输入分布不唯一。

3.3 离散序列信道及其容量

信道模型与符号定义



- 输入矢量为 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_L)$, 其中 $X_l \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- 输出矢量为 $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_L)$, 其中 $Y_l \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
- 条件概率表示为 $p(\vec{Y}|\vec{X})$, 即给定输入 \vec{X} 时输出 \vec{Y} 的概率。

无记忆离散序列信道

- 对于无记忆离散序列信道:

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = p(Y_1, \dots, Y_L | X_1, \dots, X_L) = \prod_{l=1}^L p(Y_l | X_l)$$

- 若信道是平稳的:

$$p(\vec{Y}|\vec{X}) = (p(y|x))^L = p^L(y|x)$$

- 互信息与信道容量:

$$\begin{aligned} I(\vec{X}; \vec{Y}) &= H(\vec{X}) - H(\vec{X}|\vec{Y}) = \sum p(\vec{X}, \vec{Y}) \log \frac{p(\vec{X}, \vec{Y})}{p(\vec{X})} \\ &= H(\vec{Y}) - H(\vec{Y}|\vec{X}) = \sum p(\vec{X}, \vec{Y}) \log \frac{p(\vec{Y}|\vec{X})}{p(\vec{Y})} \end{aligned}$$

- 信道无记忆时:

$$I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$$

- 由于变量之间可能存在的依赖关系等因素，整体的条件不确定性 $H(\vec{Y}|\vec{X})$ 不会小于各个分量条件不确定性 $H(Y_l|X_l)$ 之和，即 $H(\vec{Y}|\vec{X}) \geq \sum_{l=1}^L H(Y_l|X_l)$ ，而 $H(\vec{Y}) = \sum_{l=1}^L H(Y_l)$ ，所以 $I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$ 。

◦ 输入矢量 \vec{X} 中各分量相互独立时：

$$I(\vec{X}; \vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$$

- 利用互信息的链式法则有： $I(\vec{X}; \vec{Y}) = I(X_1, \dots, X_L; \vec{Y}) = I(X_1; \vec{Y}) + I(X_2; \vec{Y}|X_1) + \dots + I(X_L; \vec{Y}|X_1, \dots, X_{L-1})$ ，由于输入矢量 \vec{X} 中各分量相互独立，所以根据互信息和条件互信息的性质，有： $I(X_l; \vec{Y}|X_1, \dots, X_{l-1}) \geq I(X_l; Y_l)$ ，因此有： $I(\vec{X}; \vec{Y}) \geq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$ 。

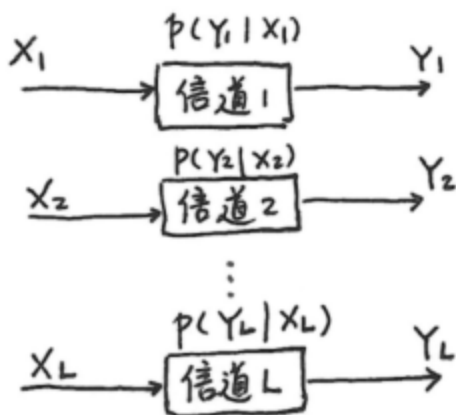
◦ 当输入矢量 \vec{X} 独立且信道无记忆时，上述两个性质统一取等号，此时信道容量：

$$\begin{aligned} C_L &= \max_{p(x)} I(\vec{X}; \vec{Y}) = \max_{p(x)} \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l) \\ &= \sum_{l=1}^L \max_{p(x)} I(X_l; Y_l) = \sum_{l=1}^L C_l \end{aligned}$$

- 当信道平稳时 $C_L = LC_1$
- 一般情况下， $I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq LC_1$ ，其中 C_1 是单个时刻的信道容量
- 输入矢量独立且信道无记忆时，相当于对单个信道进行 L 次扩展的信道，也相当于 L 个独立的信道并联在一起。

独立并联信道

• 图例：



- 每个信道输出 Y_l 只与本信道的输入 X_l 有关，即：

$$p(Y_1, Y_2, \dots, Y_L | X_1, X_2, \dots, X_L) = p(Y_1 | X_1) p(Y_2 | X_2) \cdots p(Y_L | X_L)$$

信道无记忆, 并且有

$$I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l)$$

- 并联信道容量

$$C_{12 \dots L} = \max I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^L C_l$$

- 当输入符号 X_l 相互独立, 且 $p(X_1, X_2, \dots, X_L)$ 达到最佳分布时, 容量最大, 此时:

$$C_{12 \dots L} = \sum_{l=1}^L C_l$$

有记忆离散序列信道

有记忆的离散序列信道复杂得多, 不作介绍。

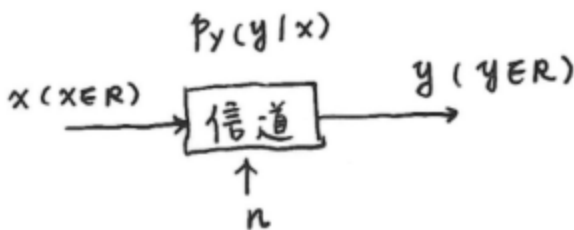
3.4 连续信道及其容量

连续单符号加性信道

加性高斯信道

- 信道模型:

◦



◦ $y = x + n$

◦ n : 加性噪声, $P_n(n) \sim N(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$.

- 微分熵:

$$H_c(n) = - \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(n) \log P_n(n) dn = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2)$$

- 互信息:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H_c(X) - H_c(X|Y) \\ &= H_c(Y) - H_c(Y|X) \end{aligned}$$

• **信道容量:**

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X; Y) = \max_{p(x)} [H_c(Y) - H_c(Y|X)] \\ &= \max_{p(x)} H_c(Y) - \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2) \end{aligned}$$

其中 $H_c(Y|X)$ 是噪声熵, 由于 x 与 n 相独立, 所以 $p(y|x) = p(x+n|x) = p(n)$, 所以 $H_c(Y|X) = H_n(n) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2)$ 。

• **求 $H_c(Y)$ 最大值:**

$y = x + n, y \in (-\infty, +\infty)$, y 是功率受限信号
 $\Rightarrow Y$ 正态分布时熵最大
 $\Rightarrow Y$ 正态分布时信道容量最大

• y 的功率 P (其中 S 是输入信号 x 的平均功率, σ^2 是噪声功率)

$$P = S + \sigma^2$$

- 若 $P_Y(y) \sim N(0, P)$, $P_n(n) \sim N(0, \sigma^2)$, $x = y - n$, 则 $P_X(x) \sim N(0, S)$ 。
- 当输入 X 是均值为 0, 方差为 S 的高斯分布时, **信息传输率达最大, 等于信道容量:**

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \log(2\pi e P) - \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{P}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{\sigma^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log(1 + SNR) \quad \text{bit/符号} \end{aligned}$$

其中 $SNR = \frac{S}{\sigma^2}$, $SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR$ 。

加性非高斯信道

• 对于加性、均值为 0、平均功率为 σ^2 的非高斯信道:

$$C = \max(H_c(Y) - H_c(n))$$

• 高斯分布时:

$$H_c(Y)_{max} = \frac{1}{2} \log(2\pi e P)$$

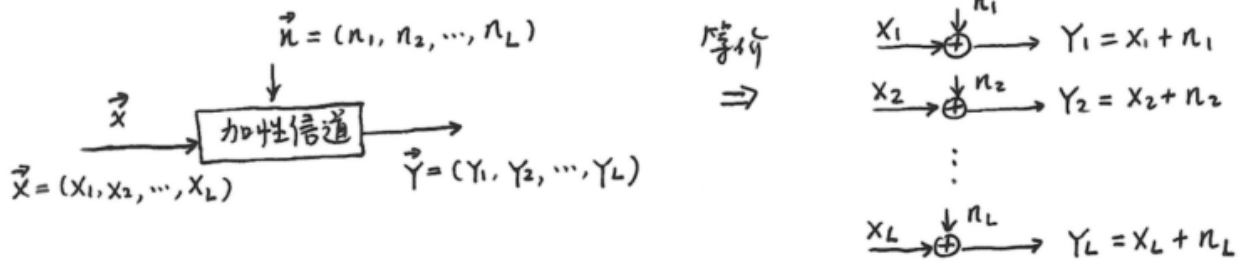
$$H_c(n)_{max} = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2)$$

- 满足：

$$\frac{1}{2} \log(2\pi e P) - \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2) \leq C \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e P) - H_c(n)$$

多维无记忆加性连续信道

- 信道模型：



- 输入 X 的总功率 $P = \sum_{l=1}^L P_l$, P_l 是第 l 个输入信号的功率
- σ_l^2 是第 l 个噪声的功率
- 信道无记忆

$$p(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^L p(y_l|x_l)$$

- 加性噪声各时刻独立

$$p_n(\vec{n}) = p_y(\vec{y}|\vec{x}) = \prod_{l=1}^L p_n(n_l) \quad n_l \sim N(0, \sigma_l^2)$$

- 互信息：

$$I(\vec{X}; \vec{Y}) \leq \sum_{l=1}^L I(X_l; Y_l) \leq \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2})$$

- 信道容量：

$$C = \max_{p(x)} I(\vec{X}; \vec{Y}) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2}) \quad \text{bit}/L \text{ 序列}$$

当且仅当输入随机变量 \vec{X} 中各分量统计独立，且均值为0，方差为 P_l 的高斯分布时，才能达到此容量。

1. L 个高斯噪声每个单元时刻噪声功率相等， $\sigma_l^2 = \sigma^2$, $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, 有

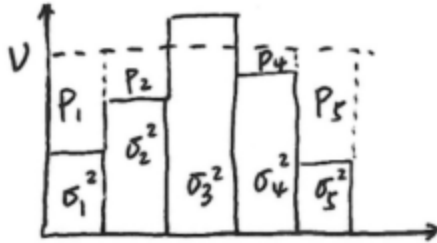
$$C = \frac{L}{2} \log\left(1 + \frac{S}{\sigma^2}\right) \quad , \quad S = \frac{P}{L}$$

\vec{X} 的各分量满足 $N(0, S)$ 分布时，达到信道容量。

2. L 个高斯噪声均值为0，方差不同且为 σ_l^2 时，若输入信号的总平均功率受限，即

$$E\left[\sum_{l=1}^L x_l^2\right] = \sum_{l=1}^L E[x_l^2] = \sum_{l=1}^L P_l = P$$

•



• 怎样合理分配各单元时刻的信号平均功率，才能使信道传输率最大？

用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$f(P_1, P_2, \dots, P_L) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2}\right) + \lambda \sum_{l=1}^L P_l$$

对第一项求最大，第二项为约束条件

令 $\frac{\partial f()}{\partial P_l} = 0$, $l = 1, 2, \dots, L$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{P_l + \sigma_l^2} + \lambda &= 0 \quad , \quad l = 1, 2, \dots, L \\ \Rightarrow P_l + \sigma_l^2 &= -\frac{1}{2\lambda} \quad , \quad l = 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

令各时刻信道输出总功率（信号功率 P_l + 噪声功率 σ_l^2 ）相等，设为 V

$$V = \frac{P + \sum_{l=1}^L \sigma_l^2}{L}$$

当 $P_l = V - \sigma_l^2 = \frac{P + \sum_{l=1}^L \sigma_l^2}{L} - \sigma_l^2$, $l = 1, 2, \dots, L$ 时，信道传输率达到最大

$$C = \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \log \frac{P + \sum_{l=1}^L \sigma_l^2}{L \sigma_l^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \log \frac{V}{\sigma_l^2}$$

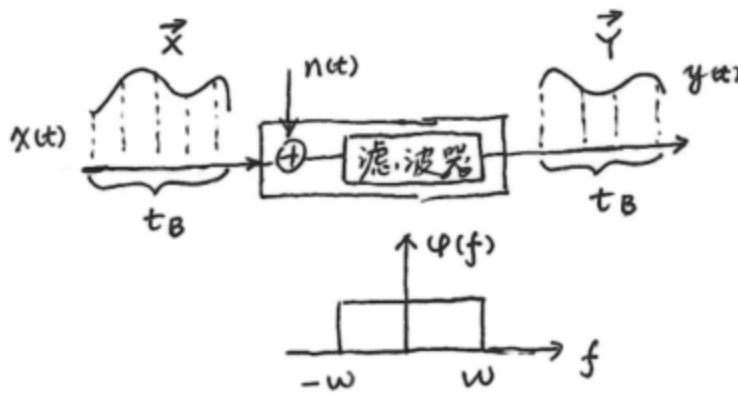
若 σ_l^2 太大, 大于 V , 则置 $P_l = 0$, 然后重新调整功率分配, 直到 P_l 不再出现负值。

限时限频限功率加性高斯白噪声信道

波形信道, 限时 t_B , 限频 W

- 信道模型:

○



- 互信息:

$$I(x(t); y(t)) = \lim_{L \rightarrow \infty} I(\vec{X}; \vec{Y})$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} [H_c(\vec{X}) - H_c(\vec{X}|\vec{Y})]$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} [H_c(\vec{Y}) - H_c(\vec{Y}|\vec{X})] \quad \text{bit/波形}$$

- 单位时间内的信息传输率 R_t 为:

$$R_t = \lim_{t_B \rightarrow \infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X}; \vec{Y}) \quad \text{bit/秒} \quad (t_B: \text{秒/波形})$$

- 信道容量:

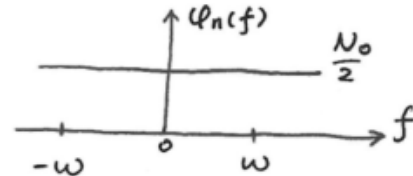
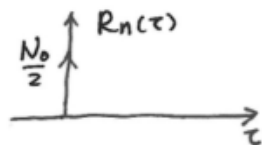
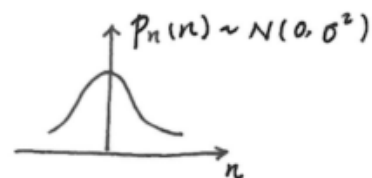
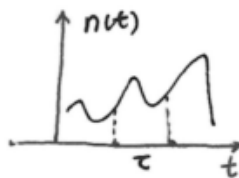
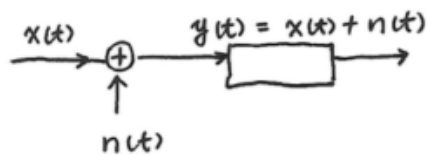
$$C_t = \max_{p(x)} \left[\lim_{t_B \rightarrow \infty} \frac{1}{t_B} I(\vec{X}; \vec{Y}) \right] \quad \text{bit/秒}$$

- 带宽受限加性高斯白噪声 $n(t)$, 均值为0, 功率谱密度 $\frac{N_0}{2}$

加性高斯白噪声

- 模型:

-



- $y(t) = x(t) + n(t)$

- 相关函数:

- $P_n(n) \sim N(0, \sigma^2)$
- $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
- 功率谱密度 $\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}$
- 总噪声功率 $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \cdot 2W = N_0 W$
- $N_0 = kT$
- 波茨曼常数 k
- 绝对温度 T

低频带宽受限通信系统

- 在 $[0, t_B]$ 内, 采样个数 $L = 2W t_B$, 各样本值彼此独立。
- 通信带宽为 $2W$, 噪声功率为 $2W \cdot \frac{N_0}{2} = N_0 W$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \log\left(1 + \frac{P_l}{\sigma_l^2}\right)$$

$$\sigma_l^2 = P_n = \frac{\frac{N_0}{2} \cdot 2W \cdot t_B}{L} = \frac{\frac{N_0}{2} \cdot 2W \cdot t_B}{2W \cdot t_B} = \frac{N_0}{2}$$

$$P_l = \frac{P_s t_B}{2W t_B} = \frac{P_s}{2W}$$

- 对于平稳系统

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{L}{2} \log\left(1 + \frac{P_s}{2W} \cdot \frac{2}{N_0}\right) \\
 &= \frac{L}{2} \log\left(1 + \frac{P_s}{N_0 W}\right) \\
 &= W t_B \log\left(1 + \frac{P_s}{N_0 W}\right) \quad \text{bit}/L\text{维符号序列}
 \end{aligned}$$

- 单位时间的信道容量

$$\begin{aligned}
 C_t &= \lim_{t_B \rightarrow \infty} \frac{C}{t_B} \\
 &= W \log\left(1 + \frac{P_s}{N_0 W}\right) \quad \text{bit/秒} \\
 &= W \log(1 + SNR) \quad \text{bit/秒}
 \end{aligned}$$

其中:

- P_s : 信号平均功率
- $N_0 W$: 噪声在系统中的平均功率 ($\frac{N_0}{2} \cdot 2W = N_0 W$)
- $SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR$

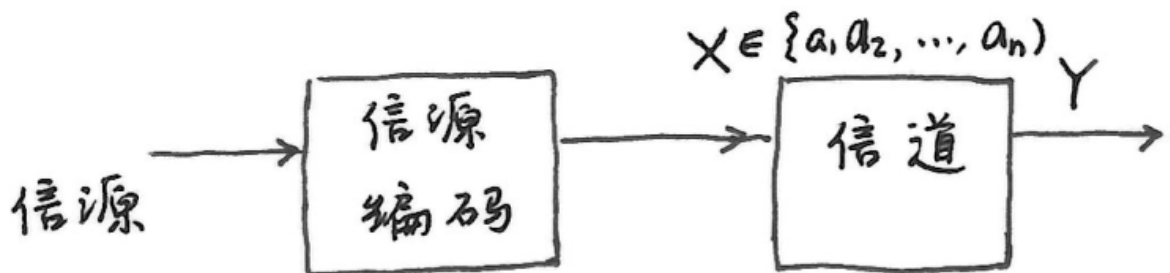
3.5 多输入多输出信道及其容量

略

3.6 信源与信道的匹配

- 符号匹配

◦



- 信源编码: 将信源符号转换为信道符号

- 信息匹配

- 信道绝对冗余度 $R_a = C - I(X; Y)$
- 信道相对冗余度 $R_r = 1 - \frac{I(X; Y)}{C}$

- 信道效率 $E = \frac{I(X;Y)}{C}$