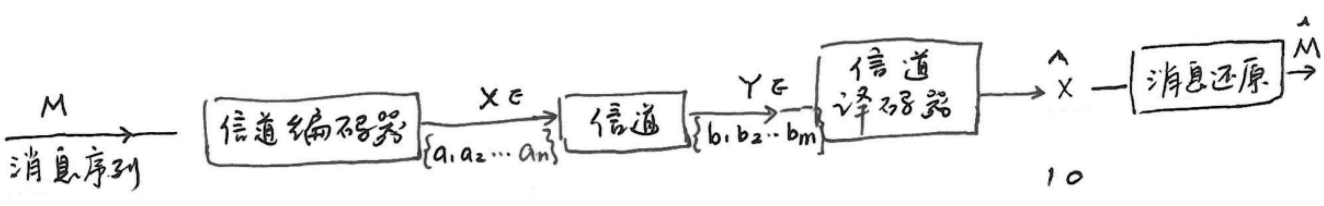
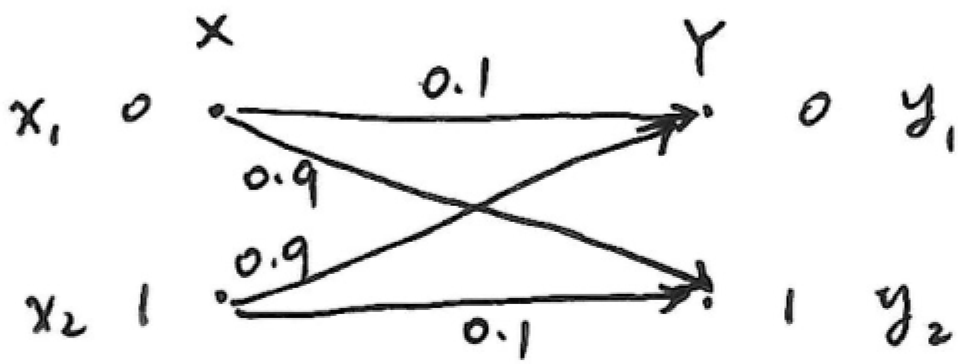
第六章补充 信道编码



译码规则和译码错误概率

- 已知信道转移错误概率 $p=0.9$，转移情况如下：



- 若规定：
  - $Y=0\rightarrow\hat{X}=0$
  - $Y=1\rightarrow\hat{X}=1$
  - 即 $F(y_1)=x_1$，$F(y_2)=x_2$，则译码错误概率 $P_e=0.9$。
- 反之若：
  - $Y=0\rightarrow\hat{X}=1$
  - $Y=1\rightarrow\hat{X}=0$
  - 即 $F(y_1)=x_2$，$F(y_2)=x_1$，则译码错误概率 $P_e=0.1$。

译码规则

- **定义译码规则**：

$$F(y_j)=x_i\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m$$

- 示例：
  - 设转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$，共有$n^m$种译码规则，如：
    - 译码规则 A：$F(y_1)=x_1$；$F(y_2)=x_2$；$F(y_3)=x_3$。
    - 译码规则 B：$F(y_1)=x_1$；$F(y_2)=x_3$；$F(y_3)=x_2$。
    - $\cdots$

错误概率

- 若 $F(y_j)=x_i^*$，则：
  - **正确概率**：

$$p(F(y_j)|y_j)=p(x_i^*|y_j)$$

  - **错误概率**：

$$p(e|y_j) = 1 - p(x_i^*|y_j)$$

- **平均错误概率**：

$$\begin{aligned}
P_e &= E[p(e|y_j)] \\
&= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(e|y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)(1 - p(x_i^*|y_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p(y_j) - \sum_{j=1}^{m} p(x_i^*, y_j) \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{m} p(x_i^*, y_j) \\
&= \sum_{Y, X-X^*} p(x, y)
\end{aligned}$$

最佳译码规则

- 最佳译码就是使平均错误概率最小

$$P_e = \sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(e|y_j) = 1 - p(F(y_j)|y_j)$$

只需使 $p(e|y_j)$ 最小（$j = 1, 2, \cdots, m$），而 $p(e|y_j) = 1 - p(x_i|y_j)$。
因此，**最佳译码**规则 $F(y_j) = x^*$，满足

$$p(x^*|y_j) \geq p(x_i|y_j) \quad 对所有 i = 1, 2, \cdots, n$$

最大后验概率译码

- 最大后验概率译码：

$$x^* = \arg\max_{1 \leq i \leq n} p(x_i|y_j)$$

- $$F : \begin{cases} F(b_j) = a_j^* \in A, b_j \in B \\ P(a_j^*|b_j) \geq P(a_i|b_j), a_i \in A \end{cases}$$

最大联合概率译码

- 根据贝叶斯公式$p(x_i|y_j) = \frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)}$：

$$\max_{x_i} p(x_i|y_j) = \max_{x_i} \frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)}$$

- 则**最大联合概率译码**为：

$$x^* = \arg\max_{1\le i\le n} p(y_j|x_i)p(x_i)$$

- $$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, b_j\in B \\ P(a_j^*,b_j)\ge P(a_i,b_j), a_i\in A \end{cases}$$

最大似然译码

- 当$p(x_i)=\frac{1}{n}$时，即**信源符号等概率分布时**，有**最大似然译码**：

$$x^* = \arg\max_{1\le i\le n} p(y_j|x_i)$$

- $$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, b_j\in B \\ P(b_j|a_j^*)\ge P(b_j|a_i), a_i\in A \end{cases}$$

- **示例**：已知转移概率矩阵$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，且$p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=\frac{1}{3}$，则：
  - $F(y_1)=\arg\max(p(y_1|x_1),p(y_1|x_2),p(y_1|x_3))=x_1$
  - $F(y_2)=\arg\max(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6})=x_2$
  - $F(y_3)=x_3$
  - **译码规则A**：$\begin{cases} F(y_1)=x_1 \\ F(y_2)=x_2 \\ F(y_3)=x_3 \end{cases}$，为最佳译码规则

    此时$P_e=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}$
  - **译码规则B**：$\begin{cases} F(y_1)=x_1 \\ F(y_2)=x_3 \\ F(y_3)=x_2 \end{cases}$

    此时$P_e=\frac{1}{3}(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$
  - **结论：最佳译码规则的错误概率最小**

最小汉明距离译码

- $$\hat{C}_i = \arg\max_{1\le i\le M} p(\vec{r}|\vec{C}_0)p(\vec{C}_0), \quad M=q^k$$

- 在二进制对称信道（BSC）中：

- $p(\vec{r}|\vec{C}_0)=\prod_{j=1}^{n}p(r_j|c_{ij})$，且 $p(r_j|c_{ij})=\begin{cases}p, & c_{ij}\neq r_j\\ 1-p, & c_{ij}=r_j\end{cases}$
- 进一步推导可得

$$p(\vec{r}|\vec{C}_0)=\prod_{j=1}^{n}p(r_j|c_{ij})=p^d(1-p)^{n-d}=(\frac{p}{1-p})^d(1-p)^n$$

- 其中

$$d=dis(\vec{r},\vec{C}_0)=w(\vec{r}\oplus\vec{C}_0)=\sum_{j=1}^{n}r_j\oplus c_{ij}$$

  即 $\vec{r}$ 与 $\vec{C}_0$ 的汉明距离。
- 由于 $\frac{p}{1-p}\leq 1$，$(1-p)^n$ 是常数，所以 d 越大，$p(\vec{r}|\vec{C}_0)$ 越小。求 $\max p(\vec{r}|\vec{C}_0)$ 的问题就转化成求最小汉明距离问题。

译码错误与信道条件的关系

- 译码时发生的错误是由信道中噪声引起的，错误概率 P_e 与信道疑义度 $H(X|Y)$ 满足以下关系（**费诺不等式**）：

$$H(X|Y)\leq H(P_e)+P_e\log(n-1)$$

- **证明**：

$$\begin{aligned}\text{右式 }=&H(P_e,1-P_e)+P_e\log(n-1)\\=&P_e\log\frac{1}{P_e}+(1-P_e)\log\frac{1}{1-P_e}+P_e\log(n-1)\\=&\sum_{Y,X-X^*}p(x,y)\log\frac{n-1}{P_e}+\sum_{Y}p(x^*,y)\log\frac{1}{1-P_e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{左式 }=&H(X|Y)\\=&\sum_{x,y}p(x,y)\log\frac{1}{p(x|y)}\\=&\sum_{Y,X-X^*}p(x,y)\log\frac{1}{p(x|y)}+\sum_{Y}p(x^*,y)\log\frac{1}{p(x^*|y)}\end{aligned}$$

因此：

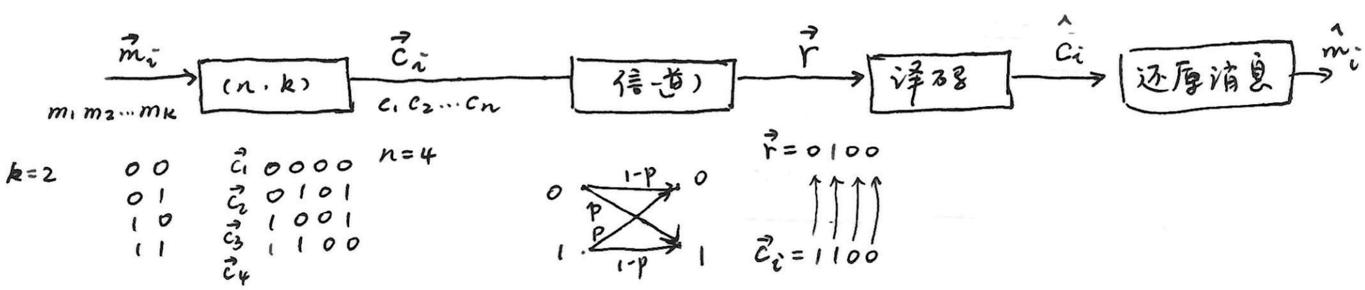
$$
\begin{aligned}
& H(X|Y)-H(P_e)-P_e\log(n-1) \\
=& \sum_{Y,X-X^*} p(x,y)\log\frac{P_e}{(n-1)p(x|y)}+\sum_{Y} p(x^*,y)\log\frac{1-P_e}{p(x^*|y)} \\
\le& \sum_{Y,X-X^*} p(x,y)\left[\frac{P_e}{(n-1)p(x|y)}-1\right]+\sum_{Y} p(x^*,y)\left[\frac{1-P_e}{p(x^*|y)}-1\right] \\
& (\text{利用}\log x\le x-1\text{放缩}) \\
=&\frac{P_e}{n-1}\underbrace{\sum_{Y,X-X^*}p(y)}_{=n-1}-\underbrace{\sum_{Y,X-X^*}p(x,y)}_{=P_e}+(1-P_e)\sum_{Y}p(y)-(1-P_e) \\
=&P_e-P_e+(1-P_e)-(1-P_e) \\
=&0
\end{aligned}
$$

由此可得：

$$H(X|Y)\le H(P_e)+P_e\log(n-1)$$

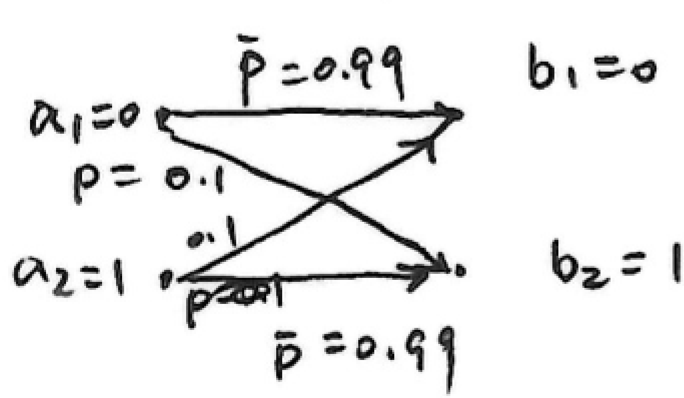
$$P_e\ge\frac{H(X|Y)-1}{\log(n-1)}$$

信道编码定理



错误概率与编码方法

- 转移概率如图：



- 采用**简单重复编码**，$k=1$，$n=3$，则$0 \rightarrow 000$（$\vec{C}_1$），$1 \rightarrow 111$（$\vec{C}_2$）
- 已知信道转移概率 $p=0.01$，$\overline{p}=1-p=0.99$，转移概率矩阵：

$$P=\begin{bmatrix} & 000(r_1) & 001(r_2) & 010(r_3) & 011(r_4) & 100(r_5) & 101(r_6) & 110(r_7) & 111(r_8) \\ 000 & (1-p)^3 & (1-p)^2p & (1-p)^2p & p^2(1-p) & (1-p)^2p & p^2(1-p) & p^2(1-p) & p^3 \\ 111 & p^3 & p^2(1-p) & p^2(1-p) & (1-p)^2p & p^2(1-p) & (1-p)^2p & (1-p)^2p & (1-p)^3 \end{bmatrix}$$

- 译码规则为 $F(\vec{r}_1)=\vec{C}_1$，$F(\vec{r}_2)=\vec{C}_2$，$F(\vec{r}_3)=\vec{C}_1$，$F(\vec{r}_4)=\vec{C}_2$，$F(\vec{r}_5)=\vec{C}_1$，$F(\vec{r}_6)=\vec{C}_2$，$F(\vec{r}_7)=\vec{C}_1$，$F(\vec{r}_8)=\vec{C}_2$。
- 错误概率 $P_e=\frac{1}{2}[p^3+p^2(1-p)+(1-p)p^2+p^2(1-p)+p(1-p)^2+p^2(1-p)+p(1-p)^2+p^3] \approx 3\times 10^{-4}$
- 增大 n，会继续降低平均错误概率 P_e：
  - $n=1$，$P_e=0.01$；
  - $n=3$，$P_e \approx 3\times 10^{-4}$；
  - $n=5$，$P_e \approx 10^{-5}$；
  - $n=6$，$P_e \approx 4\times 10^{-7}$；
  - $n=9$，$P_e \approx 10^{-8}$；
  - $n=11$，$P_e \approx 5\times 10^{-10}$。
- 信息传输率 $R=\frac{H(X)}{n}=\frac{\log M}{n}=\frac{k}{n}$ bit/符号。随着 n 增大，信息传输率减小。思考是否能找到一种编码方法，使 P_e 充分小，且 R 维持在一定水平?

有噪信道编码定理（香农第二定理）

信道编码正定理

- **定理**：设有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为 C，只要待传送的信息率 $R<C$，则存在一种编码，当输入长度 n 足够大时，译码错误概率任意小。
- **证明**：
  - 消息序列长度为 k，个数为 $M=2^k$，码长为 n。当 $n \rightarrow \infty$ 时，记信息传输率 $R=\frac{\log M}{n}=\frac{\log 2^k}{n}=\frac{k}{n}=C-\varepsilon$（$\varepsilon>0$），可使 $P_e \rightarrow 0$。
    - 假设 $R=\frac{k}{n}=C-\varepsilon$，则 $k=n(C-\varepsilon)$，$M=2^{n(C-\varepsilon)}$ 为信息序列数量。

- **编码**：从 2^n 个矢量集中找出 $2^{n(C-\varepsilon)}$ 个码字组成一组码。
- **BSC信道**：错误概率 $p < \frac{1}{2}$ ，信道容量 $C = 1 - H(p)$ 。
- 设发送码字 $\vec{C}_0$ ，接收到 $\vec{r}$ ，$\vec{C}_0$ 与 $\vec{r}$ 之间的平均汉明距离为 np 。
- **译码方法**：以 $\vec{r}$ 为球心，以 np 为半径的球体内寻找码字 $\vec{C}_0$ 。为保证译码可靠，将球体稍微扩大，令半径为 $n(p+\varepsilon) = np_\varepsilon$ ，$\varepsilon > 0$ 任意小，用 $S(np_\varepsilon)$ 表示这个球体。如果球体内只有一个唯一的码字，则判定这个码字为发送的码字 $\vec{C}_0$ 。
- **译码错误概率 P_e 表达式**：

$$\begin{aligned} P_e &= P\{\vec{C}_0 \notin S(np_\varepsilon)\} + P\{\vec{C}_0 \in S(np_\varepsilon)\} \cdot P\{\text{找到一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\} \\ &\le P\{\vec{C}_0 \notin S(np_\varepsilon)\} + P\{\text{找到一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\} \end{aligned}$$

- 根据大数定理，$\vec{C}_0$ 与 $\vec{r}$ 之间的汉明距离（即 $\vec{C}_0$ 在信道传输中错误比特数）超过平均值 $n(p+\varepsilon)$ 的概率很小。因此当 n 足够大时：

$$P\{\vec{C}_0 \notin S(np_\varepsilon)\} < \delta$$

$$\begin{aligned} P\{\text{至少有一个其他码字} \in S(np_\varepsilon)\} &\le \sum_{\vec{C}_i \neq \vec{C}_0} P\{\vec{C}_i \in S(np_\varepsilon)\} \\ &\le (M-1)P\{\vec{C}_* \in S(np_\varepsilon)\} \end{aligned}$$

  其中 $P\{\vec{C}_i \in S(np_\varepsilon)\} = \max_{\vec{C}_i \neq \vec{C}_0} P\{\vec{C}_i \in S(np_\varepsilon)\}$ 。
- 由此可得：

$$P_e \le \delta + (M-1)P\{\vec{C}_* \in S(np_\varepsilon)\}$$

  其中$\vec{C}_* \neq \vec{C}_0$，$\vec{C}_*$ 为与 $\vec{C}_0$ 距离最近的码字
  右式前一项与编码无关，后一项依赖于码字的选择。
- **随机编码**：从 2^n 个可能的序列中，随机选取 M 个作为有效码字。每次选一个码字有 2^n 种可能，选 M 个码字，共有 2^{nM} 种不同的编码方式。
  - 对于每一种编码方式都有：

$$P_e \le \delta + (M-1)P\{\vec{C}_* \in S(np_\varepsilon)\}, \quad \vec{C}_* \neq \vec{C}_0$$

  - 对 2^{nM} 种可能的编码取平均：

$$E[P_e] \le \delta + (M-1)E[P\{\vec{C}_* \in S(np_\varepsilon)\}]$$

  - 于是，所有可能落在 $S(np_\varepsilon)$ 内的序列总数为：

$$N(np_\varepsilon) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{np_\varepsilon} = \sum_{k=0}^{np_\varepsilon} C_n^k$$

- 则

$$E[P\{\vec{C}_* \in S(np_\varepsilon)\}] = \frac{N(np_\varepsilon)}{2^n} = \sum_{k=0}^{np_\varepsilon} C_n^k / 2^n$$

- 引用二项式系数不等式 $\sum_{k=0}^{np_\varepsilon} C_n^k \le 2^{nH(p_\varepsilon)}$ （$p_\varepsilon < \frac{1}{2}$），可得：

$$E[P_e] \le \delta + M 2^{-n[1-H(p_\varepsilon)]} \quad (p_\varepsilon < \frac{1}{2})$$

  - 式中

$$\begin{aligned} 1 - H(p_\varepsilon) &= 1 - H(p+\varepsilon) \\ &= 1 - H(p) + H(p) - H(p+\varepsilon) \\ &= C - [H(p+\varepsilon) - H(p)] \end{aligned}$$

  - 因为 $H(p)$ 是 p 的上凸函数，所以有：

$$\begin{aligned} H(p+\varepsilon) &\le H(p) + \varepsilon \frac{dH(p)}{dp} \\ &\le H(p) + \varepsilon \log \frac{1-p}{p} \quad (p < \frac{1}{2}, \log \frac{1-p}{p} > 0) \end{aligned}$$

  - 进而可得 $1 - H(p_\varepsilon) \ge C - \varepsilon \log \frac{1-p}{p}$ 。
  - 令 $\varepsilon_1 = \varepsilon \log \frac{1-p}{p}$ ，$M = 2^{n(C-\varepsilon_2)}$ ，则：

$$E[P_e] \le \delta + 2^{n(C-\varepsilon_2) - n(C-\varepsilon_1)} = \delta + 2^{-n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

  - 式中 $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon \log \frac{1-p}{p}$ ，只要 ε 足够小，总能满足 $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$ 。当 $n \to \infty$ 时，$E[P_e] \to 0$ 。
- 因为 $E[P_e]$ 是对所有 2^{nM} 种随机编码求导的平均值，所以必然存在一些码字错误概率 $< E[P_e]$ 。故必存在一种编码，当 $n \to \infty$ 时， $P_e \to 0$ 。

信道编码逆定理

- **逆定理**：设有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为 C 。对于任意 $\varepsilon > 0$ ，若选用码字总数 $M = 2^{n(C+\varepsilon)}$（信息传输率 $R > C$），则无论 n 取多大，也找不到一种码，使译码错误概率 P_e 任意小。
- **证明**：
  - 已知信息传输率 $R = \frac{\log M}{n} = C + \varepsilon$ ，其中 $M = 2^{n(C+\varepsilon)}$ 为码字总数。

- 假设 M 个码字等概率分布

$$H(X^n)=\log M=n(C+\varepsilon)$$

  - n 次扩展信道的平均互信息为

$$I(X^n;Y^n)=H(X^n)-H(X^n|Y^n)\leq nC$$

  - 由此可得

$$H(X^n|Y^n)\geq H(X^n)-nC=n\varepsilon$$

  - 根据费诺不等式：

$$\begin{aligned}H(X^n|Y^n)&\leq H(P_e,1-P_e)+P_e\log(M-1)\\&\leq 1+P_e\log M\\&=1+P_en(C+\varepsilon)\end{aligned}$$

  - 由于 $n\varepsilon\leq H(X^n|Y^n)\leq 1+P_en(C+\varepsilon)$，所以有：

$$\begin{aligned}n\varepsilon&\leq 1+P_en(C+\varepsilon)\\P_e&\geq\frac{n\varepsilon-1}{n(C+\varepsilon)}=\frac{\varepsilon+\frac{1}{n}}{C+\varepsilon}\end{aligned}$$

  - 当 $n\to\infty$ 时， P_e 不会趋于 0 。
- 因此，当信息传输率 $R>C$ 时，无法完成消息的无错误传输。香农第二定理和它的逆定理表明：在任何信道中，信道容量等于进行可靠传输的最大信息传输率。