

数值分析编程实验七

2018011324

计82

尤艺霖

实验题目：（截取自下发文件）

实验七

第七章上机题4: 用数值积分方法近似计算

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

及圆周率

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算, 要求绝对误差限小于 $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$, 试根据积分余项估计步长 h 的取值范围. 按要求选择一个步长进行计算, 观察数值结果与误差要求是否相符.

(提示: 可利用 MATLAB 的符号运算工具箱求函数的高阶导数表达式, 详见命令 diff、syms 的帮助文档.)

(2) 用下面的复合 Gauss 公式计算近似积分

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right] + \frac{(b-a)h^4}{4320} f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a, b),$$

其中, $h = (b-a)/n$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$. 复合 Gauss 积分的思想是: 将 $[a, b]$ 做等距划分, 即

$x_i = a + ih$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 然后在每个子区间内应用两点 Gauss 公式. 试对步长 h 做先验估计 (误差要求与 (1) 同), 并计算近似积分.

思路:

直接按照公式完成即可, 复合 Gauss 公式在题目中已经给出, Simpson 积分公式在课本第七章中也有给出。

对步长的先验估计:

首先考察 Simpson 积分公式的余项: $\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi)$

然后是复合 Gauss 公式的余项: $\frac{(b-a)h^4}{4320} f^{(4)}(\xi)$

然后考察两个式子的四阶导数：

对于第一问的 $\frac{1}{x}$ ，四阶导数为 $\frac{24}{x^5}$ ，考虑区间 $[1, 2]$ ，在 $x = 1$ 时，有最大值24

对于第二问的 $\frac{1}{1+x^2}$ ，四阶导数为 $\frac{120x^4-240x^2+24}{(1+x^2)^5}$ ，考虑区间 $[0, 1]$ ，在 $x = 0$ 时，有最大值24

故将24带入上面的余项式子，可以解得：

对于Simpson积分公式的余项，有 $h^4 \leq \frac{2880 \times 10^{-8}}{48}$ ，得 $h \leq 0.027832$ ，即 $n \geq 35.93$ ，取 $n = 36$

对于复合Gauss公式的余项，有 $h^4 \leq \frac{4320 \times 10^{-8}}{48}$ ，得 $h \leq 0.030801$ ，即 $n \geq 32.47$ ，取 $n = 33$

实验结果：

目标	方法	结果	误差
π	Simpson	3.1415926535895	2.86438×10^{-13}
π	复合Gauss	3.1415926535901	3.41061×10^{-13}
$\ln(2)$	Simpson	0.693147182	1.16228×10^{-9}
$\ln(2)$	复合Gauss	0.693147179	1.09728×10^{-9}

可以看到误差是符合之前的先验估计的。

同时可以发现计算 π 的误差相比之下要小很多，这应该是由于在估计步长时对导数值的估计更好一些。

代码：

以下是计算 π 的代码，置于src目录下的problem74pi.m中：

```
format long;
ss=0;
lb=0;%积分下界
ub=1;%积分上界
n=36;%选择步长
h=(ub-lb)/n;
for i=1:n%simpson积分
    x1=lb+h*(i-1);
    x3=lb+h*i;
    x2=(x1+x3)/2;
    f1=1/(x1*x1+1);%计算1/(1+x^2)
    f2=1/(x2*x2+1);
    f3=1/(x3*x3+1);
    ss=ss+(f1+f3+4*f2);
end
ss=ss*h*4/6
err=abs(ss-pi)
ss=0;
n=33;
h=(ub-lb)/n;
for i=1:n%复合gauss积分
    x1=lb+h*(i-1)+h/2-h/(2*sqrt(3));
    x2=lb+h*(i-1)+h/2+h/(2*sqrt(3));
```

```

f1=1/(1+x1*x1);%计算1/(1+x^2)
f2=1/(1+x2*x2);
ss=ss+(f1+f2);
end
ss=ss*h*2
err=abs(ss-pi)

```

以下是计算 $\ln(2)$ 的代码，置于src目录下的problem74ln.m中：

```

format long;
ss=0;
lb=1;%积分下界
ub=2;%积分上界
n=36;%选择步长
h=(ub-lb)/n;
for i=1:n;%simpson积分
    x1=lb+h*(i-1);
    x3=lb+h*i;
    x2=(x1+x3)/2;
    f1=1/x1;%计算1/x
    f2=1/x2;
    f3=1/x3;
    ss=ss+(f1+f3+4*f2);
end
ss=ss*h/6
err=abs(ss-log(2))
ss=0;
n=33;
h=(ub-lb)/n;
for i=1:n;%复合gauss积分
    x1=lb+h*(i-1)+h/2-h/(2*sqrt(3));
    x2=lb+h*(i-1)+h/2+h/(2*sqrt(3));
    f1=1/x1;%计算1/x
    f2=1/x2;
    ss=ss+(f1+f2);
end
ss=ss*h/2
err=abs(ss-log(2))

```