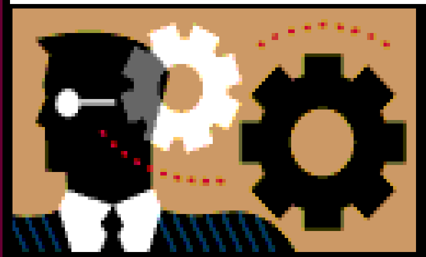


离散数学

李昊
信息楼312

离散数学(Discrete mathematics)是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支。

离散的含义是指不同的连接在一起的元素，主要是研究基于离散量的结构和相互间的关系，其对象一般是有限个或可数个元素。

离散数学在各学科领域，特别在计算机科学与技术领域有着广泛的应用，同时离散数学也是计算机专业的许多专业课程，如程序设计语言、数据结构、操作系统、编译技术、人工智能、数据库、算法设计与分析、理论计算机科学基础等必不可少的先行课程。通过离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础。

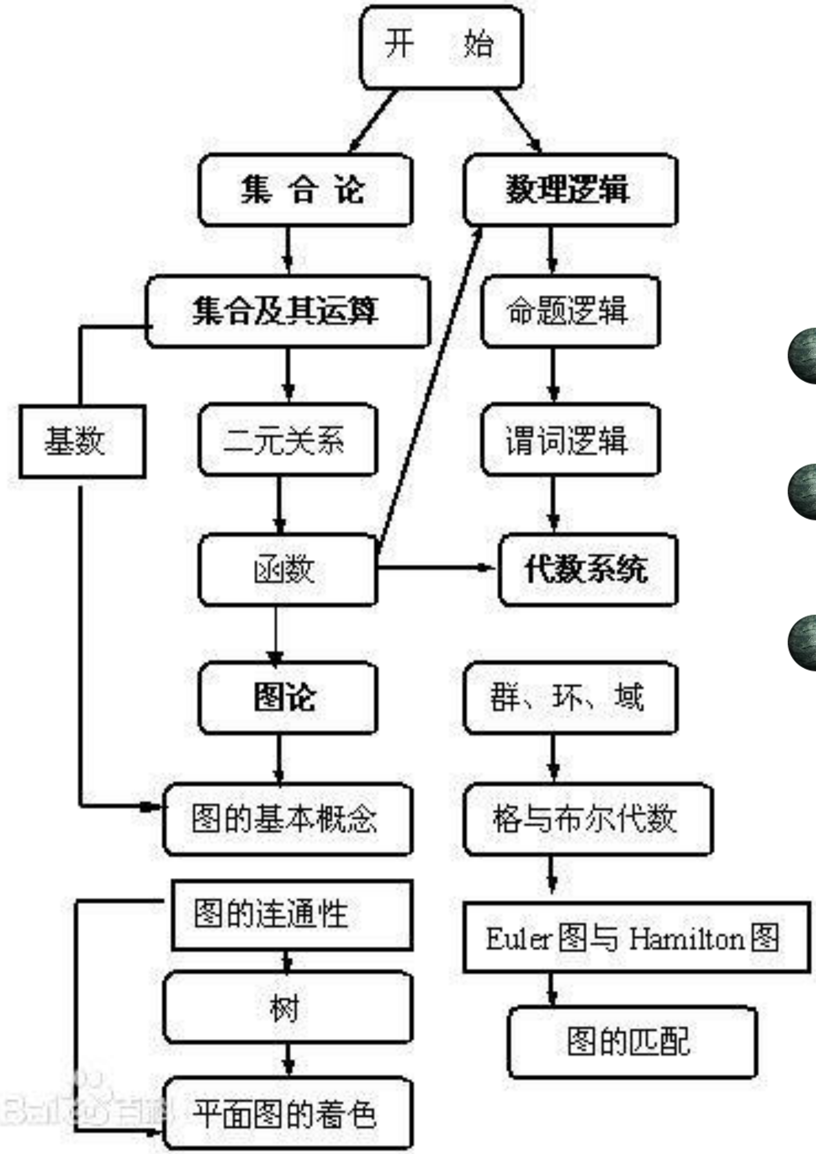
随着信息时代的到来，工业革命时代以微积分为代表的连续数学占主流的地位已经发生了变化，离散数学的重要性逐渐被人们认识。

离散数学课程所传授的思想和方法，广泛地体现在计算机科学技术及相关专业的诸领域，从科学计算到信息处理，从理论计算机科学到计算机应用技术，从计算机软件到计算机硬件，从人工智能到认知系统，无不与离散数学密切相关。

由于数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系， 因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何对离散结构建立相应的数学模型；又如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理。

离散数学可以看成是构筑在数学和计算机科学之间的桥梁，因为离散数学既离不开集合论、图论等数学知识，又和计算机科学中的数据库理论、数据结构等相关，它可以引导人们进入计算机科学的思维领域，促进了计算机科学的发展。

离散数学是传统的逻辑学，集合论（包括函数），数论基础，算法设计，组合分析，离散概率，关系理论，图论与树，抽象代数（包括代数系统，群、环、域等），布尔代数，计算模型（语言与自动机）等汇集起来的一门综合学科。离散数学的应用遍及现代科学技术的诸多领域。



- 第一部分 数理逻辑
- 第二部分 集合论
- 第三部分 代数结构

第一部分 数理逻辑

一、命题逻辑

命题逻辑基本概念
命题逻辑等值演算
命题逻辑推理理论

二、谓词逻辑

一阶逻辑基本概念
一阶逻辑等值演算与推理理论

三、学习要求

深刻理解命题、联结词、复合命题、命题公式、等值式、等值演算、推理及证明等概念熟练进行等值演算与构造证明

第一部分 数理逻辑

- **逻辑**--是研究人的思维的科学。
- **1.辩证逻辑**：是研究人的思维中的辩证法。
- **2.形式逻辑**：是研究人的思维的形式和一 般规律。

- 人的思维过程：
- 概念 ⇒ 判断 ⇒ 推理
- 形式逻辑主要是研究推理的。
- 推理:是由若干个已知的判断(**前提**)，推出新的判断(**结论**)的思维过程。

推理方法

- **类比推理：** 由个别事实推出个别结论。
- **归纳推理：** 由若干个别事实推出一般结论。
- **演绎推理：** 由一般规律、个别事实推出个别结论。

形式逻辑主要是研究演绎推理的。

- 例1：

如果天下雨，则路上有水。(一般规律)
天下雨了。 (个别事实)
推出结论：路上有水。 (个别结论)

- 例2：

(大前提)：所有金属都导电。 (一般规律)
(小前提)：铜是金属。 (个别事实)
推出结论：铜能导电。 (个别结论)

- **数理逻辑：**是用数学的方法研究形式逻辑。

  所谓“数学方法”：是建立一套有严格定义的符号，即建立一套形式语言，来研究形式逻辑。所以数理逻辑也称为“**符号逻辑**”。

逻辑的历史

- 莱布尼茨　（Gottfried Wilhelm von Leibniz，1646-1716）：把数学引入形式逻辑
- 提出将推理的正确性化归于计算，这种演算能使人们的推理不依赖于对推理过程中的命题的含义的思考，将推理的规则变为演算的规则。
- 使用一种符号语言来代替自然语言对演算进行描述，将符号的形式和其含义分开。使得演算从很大程度上取决与符号的组合规律，而与其含义无关。

- 布尔 （George Boole 1815-1864）：实现了命题逻辑，布尔代数
- 将有关研究数学运算的代数系统推广到逻辑领域，布尔代数既是一种代数系统，也是一种逻辑演算。
- 弗雷格 （Gottlob Frege，1848-1925）：建立了第一个谓词演算系统
- 《概念语言——一种按算术的公式语言构成的纯思维公式语言》(1879)的出版标志着数理逻辑的基础部分——命题演算和谓词演算的正式建立。

- 哥德尔 （**Kurt Godel, 1906-1978**）：不完全性定理，递归函数的可计算性
- 不完全性定理：一个足够强大的形式系统，如果是一致的则不是完全的，即有的判断在其中是不可证的，既不能断定其为假，也不能证明其为真。

数理逻辑与计算机

什么是程序？

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

钱学森谈“计算机与数理逻辑”

电子计算机与数理逻辑具有非常密切的关系。正是在数理逻辑中，把人类的推理过程分解成一些非常简单原始的、非常机械的动作，才使得用机器代替人类的推理的设想有了实现的可能。

有了电子计算机，使用它时，必须先进行程序设计，把整个推理、计算过程，丝毫不漏地考虑到，统统编入程序，

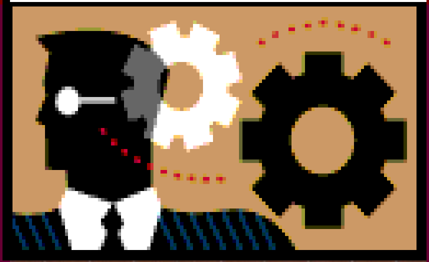
而机器则依次而运行；如稍有错误，将立即得到毫无意义的结果。可见必须有足够的数理逻辑的训练，熟悉推理过程的全部细节，才能从事程序设计。

此外，程序设计是一个很细致又很麻烦的工作，如何从事程序设计，如何防止在计算过程中出错，如何很快地发现这种错误而及时加以改正，都是程序设计理论(软件理)中非常根本又非常重要的内容，大家都认为，这些内容都与数理逻辑息息相关。

正如著名的计算机软件大师戴克斯特拉 (E.W.Dijkstra)曾经说过：我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误。不少东西逻辑学家早就说过了，可是我不知道。要是我能年轻20岁的话，我就会回去学逻辑。

《离散数学》

第一讲



数理逻辑之命题逻辑

李昊
信息楼312

一　命题逻辑基本概念

本章的主要内容：

- 命题、联结词、复合命题
- 命题公式、赋值、命题公式的分类

本章与后续各章的关系

- 本章是后续各章的准备或前提

1.1 命题与联结词

- **一.命题的概念** Proposition
- 命题是一个非真即假（不可兼）的 陈述句。

- **二.命题的真值**
- **真值为真:所作的判断与客观一致,记作T (True)。**
- **真值为假:所作的判断与客观不一致,记作F (False)。**

1.1 命题与联结词

注意：

感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论，判断结果不惟一确定的不是命题

EXAMPLE1

1.华盛顿是美国的首都.

2. 2+2=3.

3.A给所有不能给自己理发的人理发。（前提：所有人都不能给自己理发）

1，2是命题.命题1的真值为真，2的真值为假。3非命题。

EXAMPLE 2

再看几个例子：

1. 现在几点了？
2. 请保持安静.
3. $x+1=2$.
4. $x+y=z$.

1， 2不是命题，因为非陈述句. 3和 4也不是命题，因为既非真也非假。句子的真假和变量的赋值有关系.

例3 下列句子中那些是命题?

（1）$\sqrt{2}$ 是有理数.

（2）$2 + 5 = 7$.

（3）$x + 5 > 3$.

（4）你去教室吗?

（5）这个苹果真大呀!

（6）请不要讲话!

（7）2025年元旦下大雪.

不难看出：（1）是假命题，（2）是真命题.（7）是真命题，它的真值现在不知道，到2025年元旦就知道了. 可见命题的真值是客观存在的，不以我们是否知道而改变

- (3)无确定的真值；（4）是疑问句，（5）（6）是感叹句 都不是命题

- （8）我正在说假话。

- 若（8）的真值为真，即“我正在说假话”为真，则（8）的真值应该为假，反之，若（8）的真值为假，即“我正在说假话”为假，也就是“我正在说真话”为真，则又推出（8）的真值应为真，于是（8）的真值无法确定，它显然不是命题。

判定下面这些句子哪些是命题。

（1）2是个素数。

（2）雪是黑色的。

（3） x=10。

（4）如果 a>b且b>c，则a>c。

（5）x+y<5。

（6）请打开书！

（7）您去吗？

（8）明天上午十点左右下雨。

（9）我正在说谎。

- 命题标识符（命题变元）：表示命题的符号。
- 约定：用英文大写字母表示命题。
- P：雪是白的。

- 命题与命题变元的区别：命题指具体的陈述句，有确定的真值，而命题变元的真值不定。

原子命题与复合命题

- 原子命题：由最简单的陈述句构成的命题．
- 复合命题：由若干个原子命题构成的命题。
- 例：如果f(x)在[a，b]上连续，而且f(a)f(b)<0，则存在a<c<b，使得f(c)=0。
- 复合命题=原子命题+联结词。

二、联结词复合命题

- 复合命题的构成：“联结词”＋原子命题。
- 归纳自然语言中的联结词，定义了六个逻辑联结词，分别是：
- (1) 否定“$\neg$” (2) 合取“$\wedge$”
- (3) 析取“$\vee$” (4) 异或“$\bar{\vee}$”
  (5) 蕴涵“$\rightarrow$” (6) 等价“$\leftrightarrow$”

1. 否定“¬”（一元联结词）

- 表示：“...不成立”，“不...”。
- 用于：对一个命题P的否定，写成¬P.
- 例1　P：2是素数。

　　¬P：2不是素数。

P	¬P
F	T
T	F

含义：否定被否定命题的全部，而不是一部分。

EXAMPLE 4.2

P：上海是个大城市。

$\neg p$ 上海不是个大城市。

$\neg p$ 上海是个不大的城市。

P：今天星期五。

$\neg p$ 今天不是星期五。

2. 合取“∧”（二元联结词）

- 表示：“并且”、“不但...而且...”、“既...又 ...”“尽管...还... ”
- 例2 P：小王能唱歌。
- Q：小王能跳舞。
- P∧Q：小王能歌善舞。

P	Q	P∧Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

EXAMPLE 5₂

P：今天星期五。

q：今天下雨

p∧q：今天星期五且今天下雨

P：我去看电影。

q：山上有只兔子。

p∧q：我去看电影与山上有只兔子

3. 析取“$\vee$”、异或“$\overline{\vee}$”

- 表示“或者”

- 例3. 灯泡或者线路有故障。

- 例4. 第一节课上数学或者上英语。

3.1 析取“∨”（二元联结词）

- **P：** 灯泡有故障。
- **Q：** 线路有故障。
- 例3:灯泡或者线路有故障。
- 表示为：**P∨Q.**

P	Q	P∨Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

3.2 异或“$\overline{\vee}$ ”（二元联结词）

- **P：第一节上数学。**
- **Q：第一节上英语。**
- **例4:第一节课上数学**

  或者上英语。

  可写成P $\overline{\vee}$Q

P	Q	P $\overline{\vee}$Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

3.3 异或的另一种表示

- 异或是表示两个命题不可能同时都成立。
- 第一节课上数学或者上英语。
- $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ 。

例 将下列命题符号化

（1）2或4是素数.

（2）2或3是素数.

（3）4或6是素数.

（4）小元元只能拿一个苹果或一个梨.

（5）王小红生于1975年或1976年.

（1）—（3）为相容或

（4）—（5）为异或

4. 蕴涵(条件)“→”

- 表示“如果… 则 …”，
- 例5： P表示：缺少水分。

  Q表示：植物会死亡。
- P→Q：如果缺少水分，植物就会死亡。
- P→Q：也称之为蕴涵式。称P是P→Q 的前件，Q是P→Q的后件。
- P是Q的充分条件(有P一定有Q，但没有P也可能有Q)，Q是P的必要条件(只有Q成立，才可能有P)。

P→Q的真值：

P 小王借钱不还	Q 我替他还	P→Q （我给小王担保）
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

EXAMPLE 7[2]

“你可以上校园网，仅当你是计算机专业的学生或者你非新生”

a：你可以上校园网

c：你是计算机专业的学生；

f：你是新生

Solution:

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$.

一定要注意前件和后件，也就是条件和结论，根据逻辑关系（q是p的必要条件来确定）。

令：P：天气好。　Q：我去公园。

1.如果天气好，我就去公园。

2.只要天气好，我就去公园。

3.天气好，我就去公园。

4.仅当天气好，我才去公园。

5.只有天气好，我才去公园。

6.我去公园，仅当天气好。

p→q逻辑关系：p为q的充分条件；q为p的必要条件。（不管用什么样的自然语言来描述）

p→q和¬q→¬p是等价的，即他们表示同一个意思

例8 设p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化

（1）只要天冷，小王就穿羽绒服.

（2）因为天冷，所以小王穿羽绒服.

（3）若小王不穿羽绒服，则天不冷.

（4）只有天冷，小王才会穿羽绒服.

（5）除非天冷，小王才会穿羽绒服.

（6）如果天不冷，则小王不穿羽绒服.

（7）小王穿羽绒服仅当天冷的时候.

注意： $p\rightarrow q$与$\neg q\rightarrow\neg p$等值（真值相同）

- （1），（2），（3）符号化为$p\rightarrow q$
- 其余的符号化为$q\rightarrow p$

5. 等价(双条件) “⇄” 或 “$\boxed{\leftrightarrow}$”

- 表示“当且仅当”、“充分且必要”
- 例6:

P：⊿ABC是等边三角形。

Q：⊿ABC是等角三角形。

P↔Q ：⊿ABC是等边三角形当且仅当

它是等角三角形。

$P \leftrightarrow Q$的真值:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

本节小结：

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

- 特别要注意“或者”的二义性。
- 特别要注意“→”的用法。
- 命题联结词是命题间的联结词，而不是名词或形容词的联结词。
- 例：张三和李四一起做作业。

  张三和李四是表兄弟。

P：2+2=4；　　Q：雪是黑的。

P∨Q　：2+2=4或者雪是黑的。

P∧Q：　2+2=4并且雪是黑的。

P→Q：　若2+2=4，则雪是黑的。

P↔Q：　2+2=4当且仅当雪是黑的。

- 练习：填空
- 已知$P\wedge Q$为T，则P为(　)，Q为(　)。
- 已知$P\vee Q$为F，则P为(　)，Q为(　)。
- 已知P为F，则$P\wedge Q$为(　)。
- 已知P为T，则$P\vee Q$为(　)。
- 已知$P\vee Q$为T，且P为F，则Q为(　)。
- 已知$P\rightarrow Q$为F，则P为(　)，Q为(　)。
- 已知P为F，则$P\rightarrow Q$为(　)。
- 已知Q为T，则$P\rightarrow Q$为(　)。
- 已知 $\neg P\rightarrow\neg Q$为F，则P为(　)，Q为(　)。

- 已知P为T， $P \to Q$为T，则Q为(   )。
- 已知$\neg Q$为T， $P \to Q$为T，则P为(   )。
- 已知$P \leftrightarrow Q$为T，P为T，则Q为(   ).
- 已知$P \leftrightarrow Q$为F，P为T，则Q为(   ).
- $P \leftrightarrow P$ 的真值为(   ).
- $P \to P$ 的真值为(   )。

三　复合命题（合式公式）

合式公式 (wff) (well formed formulas)

- **1.定义：**

(1) 单个命题变元是合式公式。

(2) 若**A**是合式公式，则¬**A**是合式公式。

(3) 若**A**和**B**是合式公式，则**(A∧B)**，**(A∨B)**，**(A→B)**和**(A↔B)**都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的含有命题变元、联结词和括号的符号串是**合式公式**。

- 判断下面的式子是否是合式公式：

$P\wedge Q$，$(P\wedge Q)$，$P\neg\rightarrow R$，$(\neg P\rightarrow R)$，$P\vee Q\wedge R$，$((P\vee Q)\wedge R)$

- 约定：
- 运算次序优先级：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，相同的运算符按从左至右次序计算，否则要加上括号，括号最外层圆括号可省去，上面的合式公式可以写成：
- $P\wedge Q$，$\neg P\rightarrow R$，$(P\vee Q)\wedge R$

性质1：

如果一个命题公式有n个互异的命题变项，则命题公式对应的真值有2的n次幂种可能分布。

真值表：

所有赋值下的取值情况对应成表，称为**真值表**。

列真值表的步骤：

1。写出全部命题变项，共有 2^n种赋值方式；

2。从低到高写出所有的层；

3。计算真值。

例如命题 公式 $(\neg P \to Q) \vee Q$ 的真值表如下所示：

P	Q	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$(\neg P \to Q) \vee Q$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	F	T	T

- 例如列出P→(Q→R)的真值表

	P	Q	R	Q→R	P→(Q→R)
000	F	F	F	T	T
001	F	F	T	T	T
010	F	T	F	F	T
011	F	T	T	T	T
100	T	F	F	T	T
101	T	F	T	T	T
110	T	T	F	F	F
111	T	T	T	T	T

例：列出 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ 的真值表。

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

例：列出 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$ 的真值表。

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

永真命题公式（重言式）

公式中的命题变量无论怎样代入，公式对应的真值恒为T。

永假命题公式（矛盾式)

公式中的命题变量无论怎样代入，公式对应的真值恒为F。

可满足命题公式（即非永假式）

公式中的命题变量无论怎样代入，公式对应的真值总有一种情况为T。

一般命题公式（Contingency）

既不是永真公式也不是永假公式。

可以通过真值表来判断一个命题是永真式、永假式还是可满足式

列出下式的真值表

$$p \to (p \vee q \vee r)$$

永真式

$$(p \to q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$$

可满足式

性质2：

（1）设P是永真命题公式，则P的否定公式是永假命题公式；

（2）设P是永假命题公式，则P的否定公式是永真命题公式；

（3）设P、Q是永真命题公式，则（$P \wedge Q$）、（$P \vee Q$）、（$P \rightarrow Q$）、（$P \leftrightarrow Q$）也是永真命题公式

小 结

1、命题的概念：定义、逻辑值、 符号化表示

2、从简单命题到复合命题：

逻辑联结词：运算方法、运算优先级

3、从命题常量到命题变量，

从复合命题到命题公式：

命题公式的真值描述：真值表

4、命题公式的分类：

永真公式、永假公式、可满足公式 、一般公式

练习1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

练习2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- **例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。**
  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。
  该命题可写成： $R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$

例4 .若天不下雨，我就上街；否则在家。
P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。
该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

练习3

- 除非你陪伴我或代我叫辆车，否则我不出去。
- 如果我下班早，就去商店看看，除非我很累。
- 如果明天上午7点不是雨夹雪，则我将去学校。
- 如果明天上午7点不下雨并且不下雪，则我将去学校。
- 如果明天上午7点下雨或下雪，则我将不去学校。
- 明天上午我将雨雪无阻一定去学校。