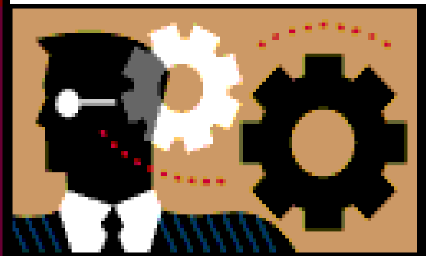
《离散数学》

第二讲



数理逻辑之等值式

李昊
信息楼312

一、等价公式定义

- 定义：给定两个命题公式A和B，设$P_1, P_2, \cdots$，P_n为所有出现在A、B中的原子命题，若给$P_1, P_2, \cdots$，P_n任一组真值指派，A和B的真值都相同，则称A和B是等价的，记A $\Leftrightarrow$ B或
- A＝B。
- 等值定理：A$\Leftrightarrow$B当且仅当A$\leftrightarrow$B是永真式。

证明：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

证明：列真值表如下：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	T	T

利用真值表证明：

$p \to q$ 和 $\neg p \lor q$ 逻辑等值，是等值式.

TABLE 3

Truth Tables for $\neg p \lor q$ and $p \to q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

TABLE 4

A Demonstration That $p \vee (q \vee r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Are Logically Equivalent.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

二、等价公式

对合律 $\neg\neg P = P$

幂等律 $P \vee P = P, P \wedge P = P$

结合律 $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R), (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

交换律 $P \vee Q = Q \vee P, P \wedge Q = Q \wedge P$

分配律 $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

分配律 $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

吸收律 $P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P$

德·摩根律 $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q, \neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

同一律 $P \vee F = P, P \wedge T = P$

零律 $P \vee T = T, P \wedge F = F$

否定律 $P \vee \neg P = T, P \wedge \neg P = F$

二、等价公式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg P$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

三、等价公式的证明方法

- 方法1：用列真值表。
- 方法2：用公式的等价变换.
- **置换定律:** A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果X $\Leftrightarrow$ Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A $\Leftrightarrow$ B。

证明：$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$

证明：

$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \to (\neg Q \vee R)$（化归）

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$（化归）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$（结合律）

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R$（德.摩根律）

$\Leftrightarrow P \wedge Q \to R$（化归）

证明：¬ (p∨(¬p∧q)) 和¬p∧¬q 逻辑等值

证明

$$\neg\left(p\vee\left(\neg p\wedge q\right)\right)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg\left(\neg p\wedge q\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg p\wedge\left(p\vee\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\neg p\wedge p\right)\vee\left(\neg p\wedge\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow 0\vee\left(\neg p\wedge\neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$$

判断命题公式逻辑等价的方法：

1、真值表

2、命题公式的演算

基本等值定理；

公式的代入不变性；

等值关系的传递性。

四、等价公式的性质

1).有自反性：任何命题公式A，有$A \Leftrightarrow A$。

2).有对称性：若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$

3).有传递性：若$A \Leftrightarrow B$且$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$

4).如果$A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$，则

$A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

五、重言式与矛盾式

- **重言式(永真式)与矛盾式(永假式)**
- **1.例子:**

P	$\neg P \vee P$	$\neg P \wedge P$
F	T	F
T	T	F

例如，证明 $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$ 为重言式。

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$	$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

永真式的真值表的最后一列全是“T”。

EXAMPLE 6

证明 $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ 为永真式

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \vee q) \quad & \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
& \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\
& \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\
& \Leftrightarrow 1 \vee 1 \\
& \Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

永真式的性质

1).如果A是永真式，则¬A是永假式。

2).如果A，B是永真式，则(A∧B)、(A∨B)、(A→B)和(A↔B)也都是永真式。

3).如果A是永真式，则A的置换式也是永真式。

置换式：$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是命题公式，如果用合式公式X替换某个P_i(如果P_i在$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$中多处出现，则各处均用X替换)，其余变元不变，替换后得到新的公式B，则称B是$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的置换式。

应用:

有一个逻辑学家误入某部落，被拘于牢囚。酋长意欲放行。于是他对逻辑学家说：“今有两门，一为自由，一为死亡。你可任意开启一门。为协助你逃脱，加派两名战士负责解答你所提问题。两名战士中，一人说的永远是真话，另一永假。”

逻辑学家沉思片刻，然后向一名战士发问。后从容走出。试问：逻辑学家应如何发问?

应用：

解答：逻辑学家指着一扇门问一名战士："当我问他（另一名战士）这扇门是否是死亡之门时，他将回答'是'，对吗？"

分析：

P：被问战士是诚实人。

q：被问战士回答：是。

r：另一战士回答：是。

s：这扇门死亡之门。

应用：

P	q	r	s
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1

结果说明根据被询战士的回答可选择从哪扇门出去。若回答“是”，说明被指的门非死亡之门。回答“否”，说明该门是死亡之门。

六、重言（永真）蕴含式

1.定义：如果公式A→B是重言式，则称A重言(永真)蕴涵 B，记作A⇒B。

2.重言(永真)蕴涵式A⇒B的证明方法

方法1. 列真值表。

A	B	$A \to B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

方法2.假设前件为真，推出后件也为真。

例如求证：

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

证明: 设前件 $P \wedge (P \to Q)$ 为真，

则 P、 $(P \to Q)$ 均真，

所以 Q 为 T。

$\therefore P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

方法3.假设后件为假，推出前件也为假。

例如求证：

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

证明:假设后件Q为F。

1.如P为F，则前件$P \wedge (P \to Q)$为F

2.如P为T，则$(P \to Q)$为F，所以

前件$P \wedge (P \to Q)$为假。

$\therefore P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

蕴涵式的直观意义

设P：天下雨。　　　Q：马路湿。

则$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$表示：

如果天下雨，则马路湿；

现在天下雨，

所以，马路一定是湿的。

（$Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$？ $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$？）

论证以下推理的正确性。

如果我今天休息，则我进城去；

如果我进城，就到书店买书；

因此，如果我今天休息，就到书店买书。

设P：今天我休息。

Q：我进城。

R：我到书店买书。

3.重要的重言蕴涵式

$P \wedge Q \Rightarrow P$

$P \wedge Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow P \vee Q$

$Q \Rightarrow P \vee Q$

$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$

$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

4. 性质

1).有自反性：对任何命题公式A，有$A \Rightarrow A$

2).有传递性：若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$

3).有反对称性：若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，则$A=B$。

4）若有$A \Rightarrow B$、$A \Rightarrow C$，则有$A \Rightarrow (B \wedge C)$

5）如有$A \Rightarrow C$、$B \Rightarrow C$，则有$A \vee B \Rightarrow C$

七、命题逻辑推理

- **推理**：根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。称已知的判断为**前提**。得到的新的判断为前提的**有效结论**。

- 令H_1，H_2，…，H_n是已知的命题公式（前提），若有

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

则称C是H_1，H_2，…H_n的**有效结论**，简称**结论**。

- **规则P**（引入前提规则）：在推理过程中，可以随时引入前提。

- **规则T**（引入结论规则）：在推理过程中，如果前边有一个或几个公式永真蕴涵公式S，则可将S纳入推理过程中。

- 介绍两种推理方法：

  直接推理和条件论证

重要的重言蕴涵式

$P \land Q \Rightarrow P$　　$P \land Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow P \lor Q$　　$Q \Rightarrow P \lor Q$

$\neg P \Rightarrow P \to Q$　　$Q \Rightarrow P \to Q$

$\neg(P \to Q) \Rightarrow P$　　$\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$

$P, Q \Rightarrow P \land Q$　　$\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$

$P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$　　$\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

$(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$

$A \to B \Rightarrow (A \lor C) \to (B \lor C)$

$A \to B \Rightarrow (A \land C) \to (B \land C)$

等价公式

对合律	$\neg\neg P = P$
幂等律	$P \vee P = P, P \wedge P = P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R), (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q = Q \vee P, P \wedge Q = Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
分配律	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) = P, P \wedge (P \vee Q) = P$
德·摩根律	$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q, \neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F = P, P \wedge T = P$
零律	$P \vee T = T, P \wedge F = F$
否定律	$P \vee \neg P = T, P \wedge \neg P = F$

1. 直接推理

◆格式中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，推理时所用规则，此结论是从哪几步得到的以及所用公式。

- 例题 1 求证　$P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，$P \Rightarrow R$
- 证明

序号　前提或结论　所用规则　从哪几步得到　所用公式

(1)	P	P		
(2)	$P\rightarrow Q$	P		
(3)	Q	T	(1)(2)	I
(4)	$Q\rightarrow R$	P		
(5)	R	T	(3)(4)	I

◆例题 2 求证

$$\neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$$

(1)	$Q \vee R$	P		
(2)	$\neg R$	P		
(3)	Q	T	(1) (2)	I
(4)	$\neg(P \wedge Q)$	P		
(5)	$\neg P \vee \neg Q$	T	(4)	E
(6)	$\neg P$	T	(3) (5)	I

- 例题 3 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：
- 如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩朴克，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩朴克。
- 解设 P：我学习。

  Q：我数学及格。

  R：我热衷于玩朴克。
- 于是符号化为：

  $P \to Q$，$\neg R \to P$，$\neg Q \Rightarrow R$

例题 4 求证 $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明	(1)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P	
	(2)	$\neg P\vee(\neg Q\vee S)$	T (1)	E
	(3)	$\neg P\vee(S\vee\neg Q)$	T (2)	E
	(4)	$(\neg P\vee S)\vee\neg Q$	T (3)	E
	(5)	Q	P	
	(6)	$\neg P\vee S$	T (4) (5)	I
	(7)	$P\rightarrow S$	T (6)	E
	(8)	$\neg R\vee P$	P	
	(9)	$R\rightarrow P$	T (8)	E
	(10)	$R\rightarrow S$	T (7) (9)	I

补充题：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。

2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。

3.如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。

4.如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。

5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。

6.经理有钱且清洁工不富裕。

7.午夜时屋里灯灭了。

令A:清洁工谋害了经理。　B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。　D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

2. 条件论证

- **定理1** 如果$H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land R \Rightarrow S$，则 $H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \Rightarrow R \rightarrow S$
- **证明** 因为$H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land R \Rightarrow S$
  则 $(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land R) \rightarrow S$ 是永真式。
- 根据结合律得 $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \land R) \rightarrow S$ 是永真式。
- 即$H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$是永真式。
- 即 $H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \Rightarrow R \rightarrow S$
- 定理得证。

规则CP(Conditional Proof):

如果$H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land R \Rightarrow S$，则

$$H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \Rightarrow R \rightarrow S$$

例题 5 $P\rightarrow(Q\rightarrow S),\neg R\vee P,Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明	(1)	R	P(附加前提)
	(2)	$\neg R\vee P$	P
	(3)	P	T (1)(2) I
	(4)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P
	(5)	$Q\rightarrow S$	T (3)(4) I
	(6)	Q	P
	(7)	S	T (5)(6) I
	(8)	$R\rightarrow S$	CP

论证以下推理的正确性。

如果我今天休息，则我进城去；

如果我进城，就到书店买书；

因此，如果我今天休息，就到书店买书。

设P：今天我休息。

Q：我进城。

R：我到书店买书。

- 例题 6　用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：
- 如果体育馆有球赛，青年大街交通就拥挤。在这种情况下，如果小王不提前出发，就会迟到。因此，小王没有提前出发也未迟到，则体育馆没有球赛。
- 证明　先将命题符号化。

  设 P：体育馆有球赛。

  Q：青年大街交通拥挤。

  R：小王提前出发。

  S：小王迟到。
- $P \to Q,\ (Q \wedge \neg R) \to S \Rightarrow (\neg R \wedge \neg S) \to \neg P$