《离散数学》

第三讲

数理逻辑之范式

李昊
信息楼312

一、范式

范式就是命题公式形式的规范形式。这里约定在范式中**只含有联结词¬、∨和∧。**

一.析取范式与合取范式

1. *合取式与析取式*

（简单）合取式：是用“∧”联结命题变元或变元的否定构成的式子。

（简单）析取式：是用“∨” 联结命题变元或变元的否定构成的式子。

析取范式和合取范式

- **2.** *析取范式*

  公式A如果写成如下形式：

  $A_1 \lor A_2 \lor \ldots \lor A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个A_i $(i=1,2,\ldots,n)$是合取式，称之为A的**析取范式**。

- **3.** *合取范式*

  公式A如果写成如下形式：

  $A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个A_i $(i=1,2,\ldots,n)$是析取式，称之为A的**合取范式**。

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$----析取范式

  $(\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$----合取范式

析取范式与合取范式的求法

范式定理：任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

析取范式和合取范式的求法：

(1)先用相应的公式去掉→和↔。

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

(2)用德-摩根定律将¬后移到命题变元之前。

德-摩根定律 $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

(3)用分配律、结合律、幂等律等公式进行整理，使之成为所要求的形式。

例如求$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$的析取范式与合取范式

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$

$=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee R$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$ ------析取范式

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$

$=\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee R$

$=((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee R$

$=(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ ---合取范式

例 求下面式子的析取范式以及合取范式。

$$\left(p\wedge(q\rightarrow r)\right)\rightarrow s \Leftrightarrow \left(p\wedge(\neg q\vee r)\right)\rightarrow s$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(p\wedge(\neg q\vee r)\right)\vee s$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee\neg(\neg q\vee r)\right)\vee s$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee(q\wedge\neg r)\right)\vee s \Leftrightarrow \neg p\vee(q\wedge\neg r)\vee s$$

即析取范式

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee s)\vee(q\wedge\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee s\vee q)\wedge(\neg p\vee s\vee\neg r)$$

即合取范式

定理2.3：任意一个命题公式都存在与之等价的合取范式和析取范式。

定理2.3的作用与局限：

1、标准化但仅仅是初步的

标准化的形式

不唯一性（规范化要求：主范式）

2、能够判定是否为永真或永假公式但不方便

二、主合取范式和主析取范式

㈠主析取范式

1.小项

(1)定义：在一个有**n**个命题变元的合取式中，每个变元或该变元的否定必出现且仅出现一次，称这个合取式是个**小项**。

例如，有两个变元的小项：

P∧Q、P∧¬Q、¬P∧Q、¬P∧¬Q

(2)小项的性质

	m_{11}	m_{10}	m_{01}	m_{00}
P Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
00 F F	F	F	F	T
01 F T	F	F	T	F
10 T F	F	T	F	F
11 T T	T	F	F	F

a).有n个变元，则有2^n个小项。

b).每一组指派有且只有一个小项为T。

2. 主析取范式定义

析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$，其中每个 A_i (i=1,2,…,n)都是小项，称之为**主析取范式**。

3. 主析取范式的求法

方法I：列真值表

定理：在真值表中，一个公式的真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

例如求 P→Q和P↔Q的主析取范式

P	Q	P→Q	P↔Q
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$P\rightarrow Q= m_{00}\vee m_{01}\vee m_{11}$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)$

$P\leftrightarrow Q=m_{00}\vee m_{11}$

$= (\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

思考题:永真式的主析取范式是什么样？

方法II：用公式的等价变换

(1)先写出给定公式的析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ 。

(2)为使每个A_i都变成小项，对缺少变元的A_i补全变元，比如缺变元R，就用∧联结永真式$(R \vee \neg R)$形式补R。

(3)用分配律等公式加以整理。

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

$$= (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$$

$$= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

㈡主合取范式

1.大项

(1)定义:在有n个命题变元的析取式中，每个变元必出现且仅出现一次,称之为**大项**。

例如，有两个变元的大项及其真值表:

		M_{00}	M_{01}	M_{10}	M_{11}
P	Q	$P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee\neg Q$
F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	F

(2)大项的性质

a).有n个变元，则有2^n个大项。

b).每一组指派有且只有一个大项为**F**。

◆2.主合取范式定义

合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$，其中每个 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$都是大项，称之为**主合取范式**。

◆3.主合取范式的求法

方法I：列真值表

定理：在真值表中，一个公式的真值为F的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

例如求 $P\rightarrow Q$和$P\leftrightarrow Q$的主合取范式

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$$P\rightarrow Q= M_{10} = \neg P\vee Q$$

$$P\leftrightarrow Q= M_{01}\wedge M_{10} = (P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$$

练习：

1.已知A(P,Q,R)的真值表如图：

求它的主析取和主合取范式。

P	Q	R	A(P,Q,R)
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

实际上，可以通过主析取范式求主合取范式；

也可以通过主合取范式求主析取范式；

例：已知

$$p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg\neg(\boldsymbol{m_0} \vee \boldsymbol{m_1} \vee \boldsymbol{m_3})$$

$$\Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{m_2})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{M_2}$$

方法II：用公式的等价变换

(1)先写出给定公式的合取范式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ 。

(2)为使每个A_i变成大项，对缺少变元的析取式A_i补全变元，比如缺变元R，就用∨联结永假式(R∧¬R)形式补R。

(3)用分配律等公式加以整理。

例如，求$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$的主合取范式

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$$
$$=\neg(\neg P\vee Q)\vee R$$
$$=(P\wedge\neg Q)\vee R$$
$$=(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$$
$$= (P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$$
$$= (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge$$
$$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

定理2.4：令A（a1、a2、……、an）包含有n个变量的公式，则有：

1、如果A存在与之等价的主析取范式，则必唯一；

2、如果A存在与之等价的主合取范式，则必唯一；

定理2.3：任意一个命题公式都存在与之等价的合取范式和析取范式。

三、逻辑联结词的完备集

- 定义3：可以表示所有可能的真值函数的联结词集合，称为**联结词的完备集。**
- 定义4：若一联结词完备集的任意真子集不再是联结词的完备集，则称其为**极小联结词完备集。**
- 定理2：{¬，∧}{¬，∨}，{¬，→}是联结词的完备集。
- $P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q)$

与非和或非

- 定义1：设P和Q是两个命题公式，复合命题$P\uparrow Q$称为P和Q的**与非**，当且仅当P和Q的真值都是T时， $P\uparrow Q$的真值为F，否则其真值为T，即$P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q)$。

- 定义2：设P和Q是两个命题公式，复合命题$P\downarrow Q$称为P和Q的**或非**，当且仅当P和Q的真值都是F时，$P\downarrow Q$的真值为T，否则其真值为F，即$P\downarrow Q=\neg(P\vee Q)$.

P	q	与非p↑q	或非p↓q
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

{↑}也是联结词完备集。

证明：已知：否定，析取，合取联接词是完备的，

$$\neg p \Leftrightarrow \neg\left(p \vee p\right) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg\left(p \wedge q\right) \Leftrightarrow \neg\left(\neg p \vee \neg q\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow \left(p \downarrow p\right) \downarrow \left(q \downarrow q\right)$$

{↑}也是联结词完备集。

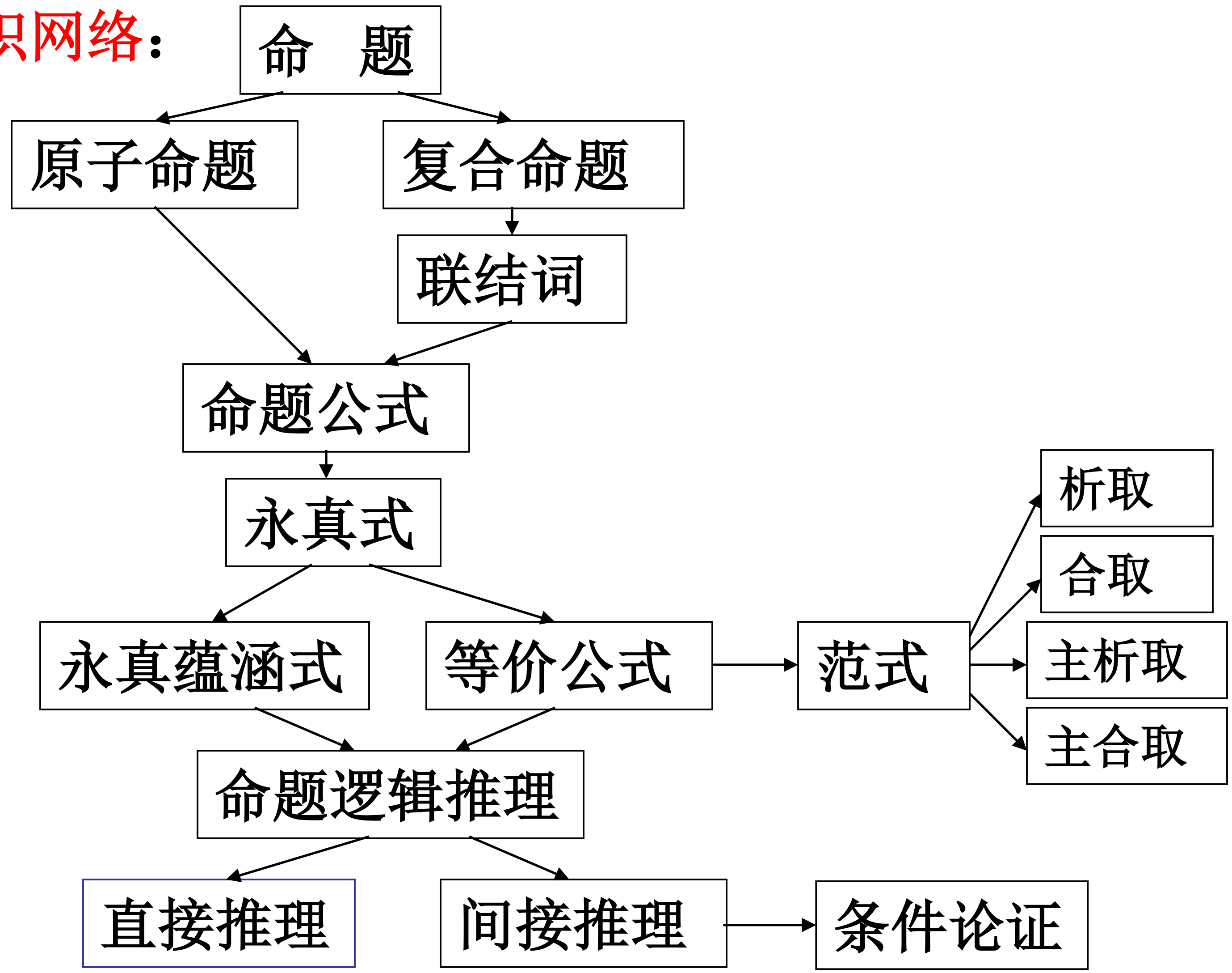
证明：已知：否定，析取，合取联接词是完备的，

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

第一部分　小结

知识网络：


命　题
原子命题
复合命题
联结词
命题公式
永真式
永真蕴涵式
等价公式
范式
析取
合取
主析取
主合取
命题逻辑推理
直接推理
间接推理
条件论证