单纯形法例题：某工厂生产 I、II 两种商品,已知生产单位商品所需的设备台时、A、B 两种原材料的消耗、设备使用台时限额以及原材料的限额如下表所示。该工厂每生产一件商品 I 可获利 3 元，每生产一件商品 II 可获利 4 元。写出使该工厂所获利润最大的线性规划模型，并用单纯形法求解。

	产品 I	产品 II	限额
设备	2	1	40 台时
原材料	1	3	30KG

解：设生产产品 I 的数量为 x_1，生产产品 II 的数量为 x_2，所获利润为 z，相应的模型为：

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准型}} \max z = 3x_1 + 4x_2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解。

（1）建立初始单纯形表，即将目标函数和约束条件填入表格中。

			3	4	0	0	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	
		40	2	1	1	0	
		30	1	3	0	1	

（2）挑选单位阵为初始基。在本题中初始基 $B_1 = [P_3, P_4]$，相应的，基变矢 $X_{B1} = [x_3, x_4]^T$。

（3）将初始基 $B_1 = [P_3, P_4]$ 对应的基变量按顺序填入单纯形表中的 X_B 一列。

			3	4	0	0	
	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_3	40	2	1	1	0	
	x_4	30	1	3	0	1	

这时，我们可以得到初始基 $B_1 = [P_3, P_4]$ 对应的基可行解。

即令非基变量 $x_1 = 0, x_2 = 0$，根据表中的约束条件可得 $x_3 = 40, x_4 = 30$（这两个值正好是表中基变量对应的资源向量 b 对应的分量，为什么？）

第一个基可行解为 $X_1 = [0,0,40,30]^T$。

（4）找到了第一个基可行解，接下来的任务就是判断该基可行解是否为最优解，检验其是否为最优解的标准是：非基变量 x_j 对应的检验数 $\sigma_j = c_j - C_B \cdot B^{-1} \cdot P_j$ 是否 ≤ 0。如果所有

非基变量的检验数σ_j均≤ 0，那么该基可行解为最优解，如果有一个或若干个非基变量的检验数$\sigma_j > 0$，那么该基可行解不是最优解，需要继续找另一个基可行解。

因为我们选择的初始基$B_1 = I$，所以其逆矩阵$B_1^{-1} = I$。

相应的，检验数$\sigma_j = c_j - C_B \cdot B^{-1} \cdot P_j$，$\Rightarrow \sigma_j = c_j - C_B \cdot P_j$。

在计算检验数时需用到C_B（基变量在目标函数中的系数向量），将C_B填入表格最左一列中。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	

接下来就是计算非基变量的检验数（基变量的检验数均等于 0，为什么?）

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	
$\sigma_j^{(1)} = c_j - C_B \cdot P_j$					0	0	

这时，非基变量的检验数：

$\sigma_1 = c_1 - C_B \cdot P_1 = 3 - (0,\quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$，$\sigma_2 = c_2 - C_B \cdot P_2 = 4 - (0,\quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$；均>0,

所以该基可行解还不是最优解。接下来，我们的任务就是找另一个基可行解。当然，我们希望接下来的这第二个基可行解X_2对应的目标函数值比第一个基可行解X_1对应的目标函数值更接近 max 值。

（5）找另一个基可行解。

由非基变量$\rightarrow$基变量的决策变量，我们称之为进基变量，挑选原则：$\max\{\sigma_j | \sigma_j > 0\} = \sigma_k$，那么$x_k$进基（即由非基变量变为基变量）。

由基变量$\rightarrow$非基变量的决策变量，我们称之为出基变量，挑选原则：$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$，那么原来的第$l$个基变量出基（即由基变量变为非基变量）。

我们称 a_{lk} 为主元素，简称主元，在单纯形表中用 [ ] 表示。题中，进基变量：

$\max\{\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4\} = \sigma_k = \sigma_2$，即 x_2 进基成为基变量。

出基变量：$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \min\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{40}{1} = 40, \frac{30}{3} = 10\right\} = \frac{b_2}{a_{22}}$，即第 2 个基变量出基，第 2 个基变量是 x_4，所以是 x_4 出基成为非基变量。主元为 a_{22}。

总结：x_2 进基成为基变量，x_4 出基成为非基变量。也就是说 x_2 代替 x_4 成为基变量，即：

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1} = 40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3} = 10$
$\sigma_j^{(1)} = c_j - C_B \cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3						
4	x_2						

这时的基变矢 $X_{B2} = [x_3, x_2]^T$。这两个基变量对应的系数列向量组成的矩阵即为 B_2。

因为在计算非基变量的检验数的计算过程中会用到 B_2^{-1},计算逆矩阵是一件麻烦事，我们当然不想干，怎么办呢？为了计算简便，我们期待 $B_2 = [P_3, P_2] = I$，目前我们只是期待而已。下面先把我们的“期待”填入单纯形表中。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3			0	1		
4	x_2			1	0		
$\sigma_j^{(2)}=c_j-C_B\cdot P_j$							

先来看 X_1 对应的主元 a_{22} 所在的行。行的系数表示的是约束条件：$30=x_1+3x_2+x_4$②。

对应于 X_2，我们期待的是：在这个约束条件中，x_2 的系数＝1，x_3 的系数＝0。要做到这一点，只需在等式左右同除以 3（主元 a_{22} 本身），得 $10=\frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4$②'，式②'与式②等价。

接着看另一行。即第一行，该行的系数表示的是约束条件：$40=2x_1+x_2+x_3$①。

对应于 X_2，我们期待的是：在这个约束条件中，x_2 的系数＝0，x_3 的系数＝1。要做到这一点，需要将①－1×②' $\Rightarrow 30=\frac{5}{3}x_1+x_3-\frac{1}{3}x_4$①'，式①'与式①等价。

为实现我们的期待，将约束条件 $\begin{cases}40=2x_1+x_2+x_3\\30=x_1+3x_2+x_4\end{cases}$ 就等价的代换成 $\begin{cases}30=\frac{5}{3}x_1+x_3-\frac{1}{3}x_4\\10=\frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4\end{cases}$

将这两个与原约束条件等价的约束条件填入表格中。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	
4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	
$\sigma_j^{(2)}=c_j-C_B\cdot P_j$							

这时，我们可以得到基 $B_2=[P_3,P_2]$ 对应的基可行解。

即令非基变量 $x_1=0,x_4=0$，根据表中的约束条件可得 $x_3=30,x_2=10$（这两个值正好是表中基变量对应的资源向量 b 对应的分量）

那么，第 2 个基可行解为 $X_2=[0,10,30,0]^T$。

（6）找到了第 2 个基可行解，接下来的任务就是判断该基可行解是否为最优解，检验其是否为最优解的标准前面已经详细讲述，这里就不啰唆了。即转回到步骤（4）。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	

4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	
$\sigma_j^{(2)} = c_j - C_B \cdot P_j$			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	

这时，非基变量的检验数$\sigma_1 = \frac{5}{3}, \sigma_4 = -\frac{4}{3}$，其中$\sigma_1 > 0$，所以该基可行解不是最优解。

（7）接下来，我们的任务就是找另一个基可行解。即转回到步骤（5）。

选择进基变量：$\max\left\{\sigma_1 = \frac{5}{3}\right\} = \sigma_k = \sigma_1$，即$x_1$进基成为基变量。

出基变量：$\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}\right\} = \min\left\{30 \times \frac{3}{5} = 18, 10 \times 3 = 30\right\} = \frac{b_1}{a_{11}}$，即第 1 个基变量出基，第 1 个基变量是$x_3$，所以是$x_3$出基成为非基变量。主元为$a_{11}$。

总结：x_1进基成为基变量，x_3出基成为非基变量。也就是说x_1代替x_3成为基变量，即：

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1} = 40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3} = 10$
$\sigma_j^{(1)} = c_j - C_B \cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$[\frac{5}{3}]$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$30 \times \frac{3}{5} = 18$
4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$10 \times 3 = 30$
$\sigma_j^{(2)} = c_j - C_B \cdot P_j$			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	
3	x_1						
4	x_2						
$\sigma_j^{(3)} = c_j - C_B \cdot P_j$							

这时的基变矢$X_{B3} = [x_1, x_2]^T$。这两个基变量对应的系数列向量组成的矩阵即为B_3。

同样的，我们期待 $B_3=[P_1,P_2]=I$ 。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$[\frac{5}{3}]$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$30\times\frac{3}{5}=18$
4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$10\times3=30$
$\sigma_j^{(2)}=c_j-C_B\cdot P_j$			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	
3	x_1		1	0			
4	x_2		0	1			
$\sigma_j^{(3)}=c_j-C_B\cdot P_j$							

先来看主元 a_{11} 所在的行。行的系数表示的是约束条件：$30=\frac{5}{3}x_1+x_3-\frac{1}{3}x_4$ ①’ 。

我们期待的是：在约束条件中，x_1 的系数＝1，x_2 的系数＝0。要做到这一点，只需在等式左右同除以 $\frac{5}{3}$ （主元 a_{11} 本身），得 $18=x_1+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{3}x_4$ ①’’，式①’’与式①’等价。

接着看另一行。即第二行，该行的系数表示的是约束条件：$10=\frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4$ ②’ 。

我们期待的是：在约束条件中，x_1 的系数＝0，x_2 的系数＝1。

要做到这一点，需要将②’ $-\frac{1}{3}\times$①’’ $\Rightarrow 4=x_2-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4$ ②’’，式②’’与式②’

等价。

约束条件$\begin{cases}30=\frac{5}{3}x_1+x_3-\frac{1}{3}x_4\\10=\frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4\end{cases}$就等价的代换成$\begin{cases}18=x_1+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4\\4=x_2-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4\end{cases}$

将这些系数填入表格中。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$[\frac{5}{3}]$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$30\times\frac{3}{5}=18$
4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$10\times3=30$
$\sigma_j^{(2)}=c_j-C_B\cdot P_j$			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	
3	x_1	18	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
4	x_2	4	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\sigma_j^{(3)}=c_j-C_B\cdot P_j$							

这时，我们可以得到基$B_3=[P_1,P_2]$对应的基可行解。

即令非基变量$x_3=0,x_4=0$，根据表中的约束条件可得$x_1=18,x_2=4$（这两个值正好是表中基变量对应的资源向量b对应的分量）

那么，第 3 个基可行解为$X_3=[18,4,0,0]^T$。

（8）找到了第 3 个基可行解，接下来的任务就是判断该基可行解是否为最优解，检验其是否为最优解的标准前面已经详细讲述，这里就不啰唆了。即转回到步骤（4）。

			3	4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	x_3	40	2	1	1	0	$\frac{40}{1}=40$
0	x_4	30	1	[3]	0	1	$\frac{30}{3}=10$
$\sigma_j^{(1)}=c_j-C_B\cdot P_j$			3	4	0	0	
0	x_3	30	$[\frac{5}{3}]$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$30\times\frac{3}{5}=18$
4	x_2	10	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$10\times 3=30$
$\sigma_j^{(2)}=c_j-C_B\cdot P_j$			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	
3	x_1	18	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
4	x_2	4	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\sigma_j^{(3)}=c_j-C_B\cdot P_j$			0	0	-1	-1	

这时，非基变量的检验数$\sigma_3=-1,\sigma_4=-1$，均<0，所以该基可行解就是最优解。

即 $X^*=[18,4,0,0]^T$， $z^*=C_B\cdot b=3\times18+4\times4=70$ 。