**第一部分数学基础课程**

**(共40分)**

**一、 （共4分）用逻辑符号表达下列语句（论域为包含一切事物的集合）**

1、（2分）集合A的任一元素的元素都是A的元素

2、（2分）天下没有长相完全一样的两个人（要求写出两种形式，一种用全称量词，一种用存在量词）

**二、填空（1-2题每空1分，3-6题每空2分，共16分）**

1、 设A={∅，{∅}}，计算∅-A= \_\_\_\_∅\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，A-P(∅)=\_\_\_\_\_\_**\_**∅\_**\_\_**\_\_\_\_\_\_\_，P(A)-{∅}=\_{∅，{{∅}}，{∅，{∅}}}\_，P(A)⊕A=\_{{{∅}}，{∅，{∅}}}\_\_\_\_.（其中P(A)表示A的幂集）

2、 按照无穷公理表示的自然数以及连续统假设，用最简洁的形式写出下列计算结果，其中N表示自然数集合，R表示实数集合。

∩30=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，∩{18,27}= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，|𝐍𝐍|= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，|𝑹𝑹|=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3、 将函数f(x)=(𝟏+𝒙+𝒙𝟐+𝒙𝟑+⋯)²(𝒙𝟐+𝒙𝟑+𝒙𝟒+⋯)³ 展开后𝒙𝟏𝟒系数是\_\_\_495\_\_\_\_\_

4、 如果平面图和它对偶图是同构的，则称此平面图是自对偶的。若G是有n个顶点，m条边的自对偶图，求n和m满足关系式是\_\_\_m=2n-2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（此关系不含有n和m以外的其他变量）

5、 设图G是共有10个顶点边数最多的三部图，则G有\_\_\_\_24\_\_\_\_\_\_\_\_\_条边。

6、 有六对夫妇坐在一个圆桌旁，其中通过转圈得到的坐法视为相同的坐法，𝑺𝒊表示i对夫妇坐一起，则同时满足𝑺𝟏，𝑺𝟑和𝑺𝟔的坐法有\_ 8\*8!\_\_\_种。

**三、 计算题（要求写出详细运算步骤，共3分）**

1、 有120个学生参加考试，共有A、B、C三道题。已知三道题都做对的有12个学生，作对A、B都有20个学生，做对A、C的有16个学生，做对B、C都有28个学生，做对A的有48个学生，做对B的有56个学僧，有16个学生一道题也没有做对，试求仅做对C的学生有多少个？

答：设做对题A的人数为|A|，做对题B的人数为|B|，做对题C的人数为|C|

根据容斥原理有 （N为全集）

|A∩B∩C|=N-|A|-|B|-|C|+|A∩B|+|A∩C|+|B∩C|-|A∩B∩C|

则有16=120-48-56-|C|+20+16+28-12

得|C|=52

**四、解答题（共6分）**

1、(3分)4名同学同时参加英语和德语面试，要求每门科目只能同时面试1人，2门科目面试时间先后顺序认为是不同的，试问共有多少种不同的面试次序？

2、(3分) 求满足递推关系𝒉𝒏 = 5𝒉𝒏−𝟏− 6𝒉𝒏−𝟐 中𝒉𝒏的表达式，其中初始条件𝒉𝟎=1 ，𝒉𝟏=-2

答：题目给出𝒉𝒏 = 5𝒉𝒏−𝟏− 6𝒉𝒏−2，得出特征方程为

X²-5X+6=0，既（X-2）（X-3）=0

得出X1=2，X2=3

所以hn=C1\*2^n+C2\*3^n

将h0=1,h1=-2带入上式中得

C1+C2=1

2C1+3C2=-2

解得C1=5，C2=-4

所以hn=5\*2^n-4\*3^n

**五、证明题（11分）**

1、（3分）对非空集合A上的关系R，若R是非自反和传递的，证明R是反对称的。

证明：

构造关系R{（1，2），（2，2）}

对应的关系图为 1 2

从关系图中可知，R是非自反的，因为顶点1没有环，顶点2有环。

关系R又是传递的，既（1，2），（2，2）=》（2，2）

但是显然，关系R不是对称的，因为关系图中只有单向边。

所以，若R是非自反的和传递的，R是反对称的。

2、（8分）设𝑲𝒏是n个顶点的完全图，用红、蓝两种颜色给𝑲𝟗的边任意着色。

1）证明𝑲𝟗中至少存在一个顶点v，使得v关联红边个数不是3。

2）证明必有蓝色的𝑲𝟒或红色的𝑲𝟑。

答：

证明：

根据Ramsey定理，同时满足1），2）条件的最小的n=9，不妨这两题都取n=9，设9个顶点为v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9

1）对9个顶点的完全图的边用红，蓝亮色任意着色，其结果必不可能使所有的顶点与之关联的边中都正好有3条边着红色或者蓝色。这是因为如若不然，既每个顶点正好三条边着红色，3\*9=27，是奇数，是不可能的。因为每条红色的边都在两断点各计算一次，所得到的结果应该是偶数，这就证明了9个顶点中至少存在一个顶点，该顶点的8条边中着红色的边数不是3.

2）假设顶点v9的8条边中，着红色的边数多于3，至少有4条，设这四条边为v1v9, v2v9,v3v9,v4v9.只要在v1,v2,v3,v4中任意两点的连线着红色，设ViVj为红色边，则ViVjV9为红色边的三角形，其中i≠j，否则v1，v2,v3,v4是蓝色的边的完全四边形（见下图）

v2

v1 v3

v9

v4

若v9的8条边中着红色的边数少于3条，最多不超过2条，则v9的蓝色边数至少有6条，设为v1v9,v2v9,v3v9,v4v9,v5v9,v6v9，由v1，v2,v3,v4,v5,v6,这6个顶点构成的完全图必有两个同色的三角形，若一个同色三角形是红色三角形，则满足问题的结论。如若是蓝色三角形，ViVjVk，则V9ViVjVk便是蓝色的完全四边形（见下图）

Vi Vj

V9 Vk