GRAPHES : REPRESENTATION

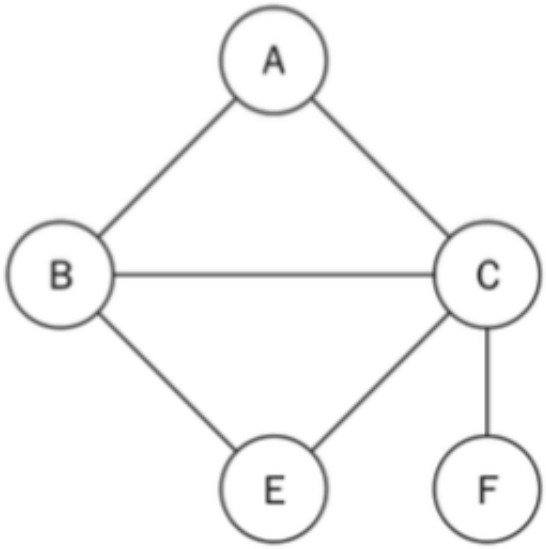
> ***Objet***
>
> Ce document montre comment représenter la structure de donnée **Graphe** en Python.
>
> On utilisera plusieurs formes de représentation:
> - un schéma
> - une liste d'adjacence
> - une matrice d'adjacence

I - DEFINITION DU GRAPHE

Un graphe est donné par son ensemble de sommets `V` (**Vertex**) et son ensemble d'arrêtes `E` (**Edge**).

Chaque sommet est désigné par un identifiant (on prend une lettre pour l'aspect visuel).

Chaque arrête est désignée par un tuple `(id_sommet_départ, id_sommet_arrivée )`.



Exemple de graphe non orienté

II - REPRESENTATION PAR ENSEMBLES

Python

```python
class Graph:

    def __init__(self, vertices=None, edges=None, directed=False ):
        self.vertices = sorted(vertices) or list()  # could be a set !
        self.edges = edges or list()        # could be a set !
        self.directed = directed

    def __str__(self):
        return  "GRAPH : \n"  \
                "  - vertices = {0} \n" \
                "  - edges = {1} \n".format(self.vertices , self.edges)
```

Python

```python
v = [ 'A', 'B', 'E', 'F', 'C' ]  # unsorted
e = [ ('A','B') , ('A','C') , ('B','E') , ('B','C') , ('C','E') , ('C','F') ]

g = Graph(v, e)

print(g)
```

```
GRAPH :
  - vertices = ['A', 'B', 'C', 'E', 'F']
  - edges = [('A', 'B'), ('A', 'C'), ('B', 'E'), ('B', 'C'), ('C', 'E'), ('C', '
```

Problème de doublons d'arrêtes

Un premier problème se présente : ce graphe est non orienté , on aurait pu dénombrer tous les sens des arrêtes pour la liste d'arrêtes .

Python

```python

e = [
    ('A','B') , ('B','A') , ('A','C') , ('C','A') ,
    ('B','E') , ('E','B') , ('B','C') , ('C','B') ,
    ('C','E') , ('E','C') , ('C','F') , ('F','C') ,
]
```

et avoir alors une redondance inutile dans la représentation.

`E1` et `E2` sont deux arrêtes identiques si :

```python
    E1[0] == E2[0] and E1[1] == E2[1]  or  E1[0] == E2[1] and E1[1] == E2[0]
```

en pratique , on peut supposer qu'une arrête n'a pas été inscrite n fois sur la même séquence , donc on ne s'intéresse qu'à la dernière partie du choix

```python
    E1[0] == E2[1] and E1[1] == E2[0]
```

Comment dédoublonner ?

parcourir la collection d'arrête ,
- pour chaque arrête `curr_e` :

- vérifier pour chaque suivante `other_e` qu'elle n'est pas identique
- supprimer cette dernière le cas échéant.

```python
def dedulicate_edges(edges):

    def same_edge(e1,e2):
        return e1[0]==e2[1] and e1[1]==e2[0]

    for idx,current in enumerate(edges):      # tuple (index, value) unpacked
        for other in edges[idx:]:             # slice rest of the list
            if same_edge(current,other):
                edges.remove(other)
                break                         # assume only 1 duplicate

edges_demo =[
    ("A","B") , ("A","D") ,
    ("B","A") , ("D","G") ,
    ("D","E") , ("E","D") ,
    ("G","D") , ("G","K")
]

dedulicate_edges(edges_demo)
edges_demo
```

```
[('A', 'B'), ('A', 'D'), ('D', 'G'), ('D', 'E'), ('G', 'K')]
```

II - REPRESENTATION PAR SCHEMA

1. Le graphe est transformé en dataframe **pandas**
    - dictionnaire origine et fin de deux listes des liaisons
2. Le graphe est instancié par **networkx**
    - l'objet obtenu (graphe networkx) peut être affiché

Python

```python
def graph_to_edgelist(graph):
    edgelist = {"from":list(), "to":list()}
    for edge in graph.edges:
        edgelist["from"].append(edge[0])
        edgelist["to"].append(edge[1])
    return edgelist
```

Python

```python
edge_dict = graph_to_edgelist(g)
edge_dict
```

```
{'from': ['A', 'A', 'B', 'B', 'C', 'C'], 'to': ['B', 'C', 'E', 'C', 'E', 'F']}
```

On peut utiliser les bibliothèques suivantes pour tracer le graphe :

- numpy
- pandas
- networkx
- matplotlib

Python

```python
import pandas as pd

# construction de la DataFrame pandas
df = pd.DataFrame(edge_dict)
display(df)

```

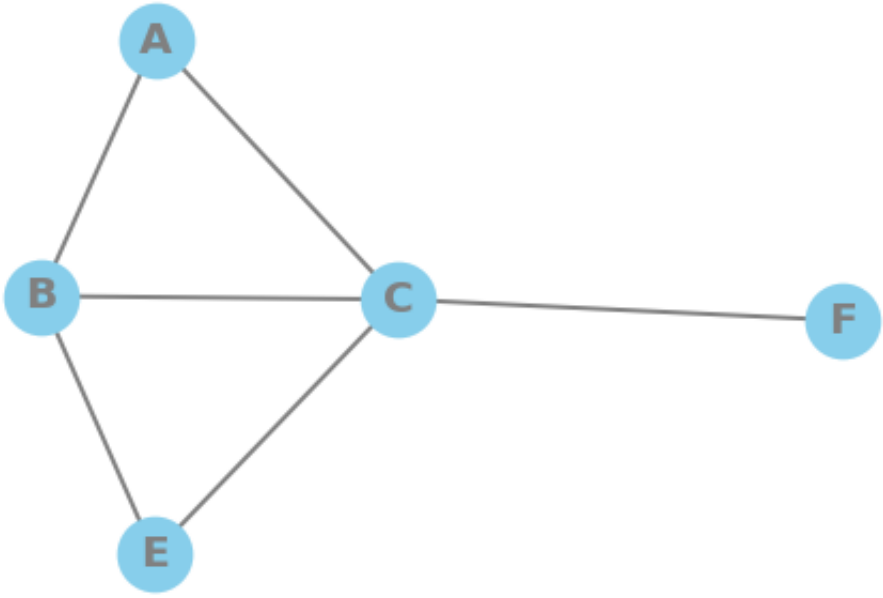
	from	to
0	A	B
1	A	C
2	B	E
3	B	C
4	C	E
5	C	F

Python

```python
import networkx as nx

# construit le graphe d'après la DataFrame
G=nx.from_pandas_edgelist(df, 'from', 'to')

# et trace le graphe avec quelques options
nx.draw(G,
        with_labels=True       ,
        node_size=1000         ,
        node_color="skyblue"   ,
        node_shape="o"         ,
        alpha=1                ,
        linewidths=4           ,
        font_size=20           ,
        font_color="grey"      ,
        font_weight="bold"     ,
        width=2                ,
        edge_color="grey"      ,
       )
```



Graphe exemple

III - REPRESENTATION PAR LISTE D'ADJACENCE

On utilise un dictionnaire :

```python
gal = {
    'A' : ['B','C']      ,
    'B' : ['A','C','E']  ,
    'C' : ['B','E','F']  ,
    'E' : ['B','C']      ,
    'F' : ['C']          ,
}
```

Sens : ensemble -> liste d'adjacence

On doit passer de `G(Vertices,Edges)` à `AdjacencyList(dict)` , mais il nous faut tenir compte des relations réciproques, donc dupliquer les arrêtes en orientation inverse.

Python

```python
# duplication des arrêtes
def full_edges_list(graph):
    fulllist = list()
    for edge in graph.edges:
        t1 = edge
        t2 = edge[1],edge[0]
        fulllist.append(t1)
        fulllist.append(t2)
    return fulllist

fel = full_edges_list(g)
fel
```

```
[('A', 'B'),
 ('B', 'A'),
 ('A', 'C'),
 ('C', 'A'),
 ('B', 'E'),
 ('E', 'B'),
 ('B', 'C'),
 ('C', 'B'),
 ('C', 'E'),
 ('E', 'C'),
 ('C', 'F'),
 ('F', 'C')]
```

Python

```python
def to_adjacency_list(graph):
    gal = {x:list() for x in graph.vertices}
    all_edges = full_edges_list(graph)
    for edge in full_edges_list(graph):
        v1,v2 = edge # unpacked
        gal[v1].append(v2)
    return gal

galdemo = to_adjacency_list(g)
galdemo
```

```
{'A': ['B', 'C'],
 'B': ['A', 'E', 'C'],
 'C': ['A', 'B', 'E', 'F'],
 'E': ['B', 'C'],
 'F': ['C']}
```

Sens : liste d'ajacence -> ensemble

On doit passer de `AdjacencyList(dict)` à `G(Vertices,Edges)`, mais il nous faut supprimer les relations réciproques, donc dédoublonner les arrêtes en orientation inverse.

Python

```python
def from_adjacency_list(al: dict) -> Graph:
    vert_list = [v for v in al.keys()]
    edge_list = list()
    for v in vert_list:
        neighbors = al[v]
        for n in neighbors:
            edge = v,n
            edge_list.append( edge )
    dedulicate_edges(edge_list)
    return Graph(vertices=vert_list,edges=edge_list,directed=False)

g2 = from_adjacency_list(galdemo)
print(g2)
```

```
GRAPH :
  - vertices = ['A', 'B', 'C', 'E', 'F']
  - edges = [('A', 'B'), ('A', 'C'), ('B', 'E'), ('B', 'C'), ('C', 'E'), ('C', '
```

IV - REPRESENTATION PAR MATRICE D'ADJACENCE

On veut représenter le graphe par une matrice de {V}X{V}.

Cette matrice sera symétrique carrée pour un graphe non orienté.

Sans bibliothèque

```python
def to_adjacency_matrix(graph):
    dim = range( len(graph.vertices) )
    matrix_labels = graph.vertices
    m = [[0 for c in dim] for l in dim ]
    all_edges = full_edges_list(graph)
    for edge in all_edges:
        line = matrix_labels.index(edge[0])
        col  = matrix_labels.index(edge[1])
        m[line][col]=1
    return m

mat = to_adjacency_matrix(g)
mat
```

```
[[0, 1, 1, 0, 0],
 [1, 0, 1, 1, 0],
 [1, 1, 0, 1, 1],
 [0, 1, 1, 0, 0],
 [0, 0, 1, 0, 0]]
```

Avec la bibliothèque numpy

```python
import numpy as np

def to_numpy_matrix(graph):
    dim = len(graph.vertices)
    m = np.zeros( (dim,dim),dtype=int )
    all_edges = full_edges_list(graph)
    for edge in all_edges:
        line = graph.vertices.index(edge[0])
        col  = graph.vertices.index(edge[1])
        m[line][col]=1
    return m

nmat = to_numpy_matrix(g)
nmat
```

```
array([[0, 1, 1, 0, 0],
       [1, 0, 1, 1, 0],
       [1, 1, 0, 1, 1],
       [0, 1, 1, 0, 0],
       [0, 0, 1, 0, 0]])
```

Sens : matrice -> ensemble

Python

```python
arr = [ [10,20,30] , [40,50,60] , [70,80,90]] #3X3
lstvert = [chr( ord("A") + x) for x in range(len(arr))]
print(lstvert)
print("value at 0 : " , lstvert[0])

dictedge = {x:list() for x in lstvert}
print(dictedge)
```

```
['A', 'B', 'C']
value at 0 :  A
{'A': [], 'B': [], 'C': []}
```

Python

```python
def from_adjacency_matrix(mat, vert_list):
    dim = len(mat)
    adj_list  = {x:list() for x in vert_list}
    for c in range(dim):
        for l in range(dim):
            if mat[l][c]==1:
                adj_list[vert_list[c]].append(vert_list[l])
    return adj_list

from_adjacency_matrix(mat, ["A","B","C","E","F"])
```

```
{'A': ['B', 'C'],
 'B': ['A', 'C', 'E'],
 'C': ['A', 'B', 'E', 'F'],
 'E': ['B', 'C'],
 'F': ['C']}
```

CONCLUSION

On peut représenter un graphe :

- par un diagramme (en utilisant le logiciel Yed par exemple
- par une liste d'adjacence
- par une matrice d'adjacence

Remarque

sur une matrice d'adjacence , on peut avoir un intérêt à inscrire sur la diagonale le **degré d'un sommet** (son nombre de voisins).

cela peut être uniquement fait si le graphe ne comporte pas de boucle (un sommet en relation avec lui-même - à ne pas confondre avec un cycle ! -)
la matrice obtenue est la **matrice hamiltonienne du graphe**.

> **Références**
>
> - Yed : https://www.yworks.com/products/yed
> - la chaine "à la découverte des graphes" :
> https://www.youtube.com/channel/UCHtJVeNLyR1yuJ1_xCK1WRg
> - Packed : Python Data Structures and Algorithms (Benjamin Baka)