

MỤC LỤC

1	Đề số 1	2
2	$ ext{D} \hat{\mathbb{e}} s \hat{\mathbb{o}} 2 \dots \dots$	6
3	$\mathrm{D} \hat{\mathrm{e}} \mathrm{s} \hat{\mathrm{o}} 3 \ldots$	10
4	$\mathrm{D} \grave{\hat{\mathrm{e}}} \mathrm{s} \acute{\mathrm{o}} 4 \ldots$	14
5	Đề số 5	20
6	Đề số 6	23
7	Đề số 7	27
8	Đề số 8	31
9	Đề số 9	35
10	Đề số 10	41
11	Đề số 11	44
12	Đề số 12	49
13	Đề số 13	53
	${ m D}$ ề số $14\ldots$	
15	Đề số 15	61
16	$egin{array}{lll} D \grave{e} & s \acute{o} & 15 & & \\ D \grave{e} & s \acute{o} & 16 & & & \\ \end{array}$	68
	Đề số 17	
18	Đề số 18	76
	Đề số 19	
20	Đề số 20	86
21	Đề số 21	91
22	Đề số 22	96
23	${ m D} \hat{ m e} \; { m so} \; { m 23} \;$	100
24	$\mathrm{D} \hat{\mathrm{e}} \mathrm{s} \hat{\mathrm{o}} 24 \ldots \ldots$	104
	Đề số 25	
26	$\mathrm{D}\hat{\mathrm{e}} \mathrm{s}\hat{\mathrm{o}} 26\ldots$	113
	${ m T}$ Đề số 27	
	Đề số 28	
	Đề số 29	
	Đề số 30	
	Đề số 31	



32 Đề số 32140
33 Đề số 33
34 Đề số 34
35 Đề số 35
36 Đề số 36
37 Đề số 37
38 Đề số 38
39 Đề số 39
$40 \text{D} \hat{\text{e}} \text{s} \hat{\text{o}} 40 \dots 172 \dots 172$
41 Đề số 41
42 Đề số 42
43 Đề số 43
44 Đề số 44
45 Đề số 45
$46 \text{D} \hat{\text{e}} \hat{\text{s}} \hat{\text{o}} 46 \dots 183 $
47 Đề số 47
48 Đề số 48
$49 \dot{\text{D}} \dot{\hat{\text{e}}} \dot{\text{s}} \dot{\text{o}} 49 \dots $
$50 \text{D} \hat{\text{e}} \text{s} \hat{\text{o}} 50 \dots $

multiply your success §1. ĐÈ Số 1

Bài 0.1.

a. Thực hiện phép tính:
$$\frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,265+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}}+\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25}$$

b. So sánh: $\sqrt{50} + \sqrt{26} + 1$ $va \sqrt{168}$

🔑 Hướng dẫn giải

a. Ta có: A =
$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{100} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{\frac{-53}{100} - 5\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3\left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320}\right)}{\frac{-53}{100} - 5\left(\frac{-66 + 60 + 55}{660}\right)} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-53}{100} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} = \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740}$$

b. Ta có:
$$\sqrt{50} > \sqrt{49} = 4$$
; $\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5$
Vậy: $\sqrt{50} + \sqrt{26} + 1 > 7 + 5 + 1 = 13 = \sqrt{169} > \sqrt{168}$



- a. Tìm x biết: |x-2| + |3-2x| = 2x + 1
- b. Tìm $x; y \in Z$ biết: xy + 2x y = 5
- c. Tìm x; y; z biết: 2x = 3y ; 4y = 5z và 4x 3y + 5z = 7

Hướng dẫn giải

a. Nếu
$$x>2$$
 ta có: $x-2+2x-3=2x+1 \Leftrightarrow x=6$

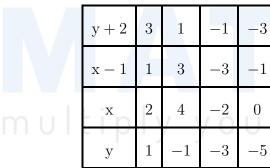
Nếu
$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$
ta có: $2-\mathbf{x}+2\mathbf{x}-3=2\mathbf{x}+1 \Leftrightarrow \mathbf{x}=-2$ loại

Nếu
$$x < \frac{3}{2}$$
 ta có: $2 - x + 3 - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

Vậy:
$$x = 6; x = \frac{4}{5}$$

b. Ta có:
$$xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(x-1) = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$$



c. Từ:
$$2x = 3y$$
; $4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{7}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow$$
 x = 12 · $\frac{1}{8}$ = $\frac{3}{2}$; y = 12 · $\frac{1}{12}$ = 1; z = 12 · $\frac{1}{15}$ = $\frac{4}{5}$

Bài 0.3.

a. Tìm đa thức bậc hai biết f(x) - f(x-1) = x.

Từ đó áp dụng tính tổng S = 1 + 2 + 3 + ... + n.

b. Cho
$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Hướng dẫn giải



Ta có :
$$f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$
.

$$f(x) - f(x - 1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý).

Áp dụng:

$$+ \text{ V\'oi } x = 1 \text{ ta c\'o} : 1 = f(1) - f(0)$$

$$+ \text{ V\'oi } x = 2 \text{ ta c\'o} : 1 = f(2) - f(1)$$

$$+ \text{ V\'oi } x = n \text{ ta c\'o} : n = f(n) - f(n-1)$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

b. Ta có:
$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$$

$$=\frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b}(1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c}(2);$$

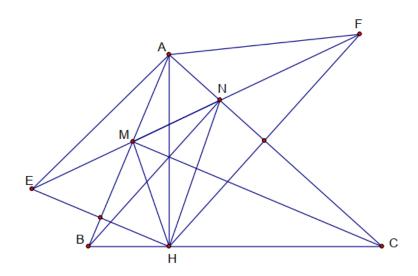
Từ (1) và (2) suy ra:
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{2b}=\frac{z}{3c}$$

Bài 0.4. Cho tam giác ABC ($BAC < 90^{\circ}$), đường cao AH. Gọi E; F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB; AC, đường thẳng EF cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

- a. AE = AF;
- b. HA là phân giác của MHN;
- c. CM//EH; BN//FH.

Hướng dẫn giải





a. Vì AB là trung trực của EH nên ta có: AE = AH (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: AH = AF (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AE = AF

- b. Vì M \in AB nên MB là phân giác $EMH \Rightarrow$ MB là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH Vì N \in AC nên NC là phân giác $FNH \Rightarrow$ NC là phân giác ngoài góc N của tam giác MNH Do MB; NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác HMN hay HA là phân giác của MHN.
- c. Ta có AH \perp BC (gt) mà HM là phân giác $MHN \Rightarrow$ HB là phân giác ngoài góc H của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài góc M của tam giác $\mathrm{HMN}(\mathrm{cmt})\Rightarrow\mathrm{NB}$ là phân giác trong góc N của tam giác HMN

 \Rightarrow BN \perp AC (Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau). \Rightarrow BN//HF (cùng vuông góc với AC) Chứng minh tương tự ta có: EH//CM

$\S 2. \ D\hat{\hat{\mathbf{E}}} \ S\hat{\hat{\mathbf{O}}} \ 2$

Bài 0.5.

- a. Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 4^6 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 3^6 + 8^4 \cdot 3^5} \frac{5^{10} \cdot 7^3 25^5 \cdot 49^2}{125 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3}$
- b. Tính giá trị biểu thức: B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + ... + 17.18.19
- c. Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^2 \cdot 3^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{125 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 3 - 1}{2^{12} \cdot 3^5 3 + 1} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 1 - 7}{5^9 \cdot 7^3 1 + 2^3}$$

$$A = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9}$$
$$A = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

b. multiply your success

$$4B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5 - 1) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6 - 2) + \ldots + 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot (20 - 16)$$

$$4B = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$$

$$B = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 5 = 29070$$

c. Gọi số có 3 chữ số cần tìm là abc (a, b, c là STN có 1 chữ số, a \neq 0). Theo bài ra ta có: $\overline{(a+n)(b-n)(c-n)} = n \cdot \overline{abc}$

$$\Rightarrow 100(a+n) + 10(\ b-n) + (c-n) = n(100a+10\ b+c)$$

$$\Rightarrow 100\mathrm{a} + 100\mathrm{n} + 10~\mathrm{b} - 10\mathrm{n} + \mathrm{c} - \mathrm{n} = 100\mathrm{an} + 10~\mathrm{b} + \mathrm{cn}$$

$$\Rightarrow 100(n-1)a + 10(n-1)b + (n-1)c = 89n$$

$$\Rightarrow$$
 89n:n - 1 mà (89; n - 1) = 1 nên n:n - 1

Tìm được n=2

Số có 3 chữ số cần tìm là 178.

Bài 0.6.

- a. Tìm các số x, y, z biết rằng: 3x = 4y, 5y = 6z và xyz = 30.
- b. Tìm x biết:

$$\left| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1, 6 + \frac{3}{5} \right|$$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 8k \\ y = 6k \end{cases}$$
$$z = 5k$$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k \cdot 6k \cdot 5k = 30 \Rightarrow 240k^3 = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

b. Ta có:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1, 6 + \frac{3}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \left| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} = \frac{3}{4} \\ \mathbf{x} = \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Bài 0.7.

- 1. Cho hàm số y = f(x) = (m-1)x
 - a. Tìm m biết: f(2) f(-1) = 7.
 - b. Cho m=5. Tìm x biết f(3-2x)=20
- 2. Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2, \ B = -\frac{3}{4}xy^2z^2, C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm.

Hướng dẫn giải

1. (a)

Vì
$$f(2) - f(-1) = 7 \Rightarrow (m - 2) \cdot 2 - (m - 1) \cdot (-1) = 7$$

 $\Rightarrow 2 m - 4 + m - 1 = 7$
 $\Rightarrow 3 m - 5 = 7 \Rightarrow m = 4$

(b) Với m = 5 ta có hàm số y = f(x) = 4x

Vì
$$f(3-2x) = 20 \Rightarrow 4(3-2x) = 20$$

 $\Rightarrow 12 - 8x = 20 \Rightarrow x = -1$

2. Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm \Rightarrow A.B.C có giá trị âm.

Mặt khác: A.B.C =
$$\left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right) \cdot x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$$

$$\mathrm{Vi} \ \frac{3}{8} \mathrm{x}^6 \mathrm{y}^4 \mathrm{z}^4 \geq 0 \quad \forall x,y \Rightarrow \ \mathrm{A.B.C} \ \geq 0 \quad \forall x;y$$

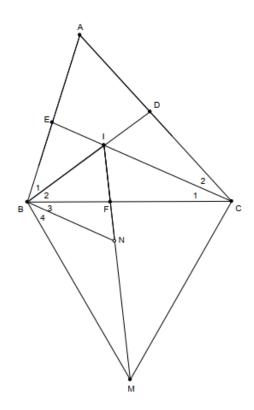
Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2) \Rightarrow điều giả sử sai. Vậy ba đơn thức $A=-\frac{1}{2}x^2yz^2, B=-\frac{3}{4}xy^2z^2, C=x^3y$ không thể cùng có giá trị âm.

Bài 0.8. Cho \triangle ABC nhọn có góc A bằng 60°. Phân giác ABC cắt AC tại D, phân giác ACB cắt AB tại E. BD cắt CE tại I.

- a. Tính số đo góc BIC.
- b. Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho BF = BE. Chứng minh $\Delta {\rm CID} = \Delta {\rm CIF}.$
- c. Trên tia IF lấy điểm M sao cho IM = IB + IC. Chứng minh \triangle BCM là tam giác đều.

Hướng dẫn giải





a. BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{1}{2} ABC$ CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}ACB$ Mà tam giác ABC có A + B + C = 180° suy ra 60° + ABC + ACB = 180°

$$\Rightarrow$$
 ABC + ACB = 120° \Rightarrow B₂ + C₁ = 60° \Rightarrow BIC = 120°

- b. $\triangle BIE = \triangle BIF(cgc) \Rightarrow BIE = BIF BIC = 120^{\circ} \Rightarrow BIE = 60^{\circ} \Rightarrow BIE = BIF = 60^{\circ} MBIE +$ $BIF + CIF = 180^{\circ} \Rightarrow CIF = 60^{\circ} CID = BIE = 60^{\circ} (\mathring{a}.\mathring{a}) \Rightarrow CIF = CID = 60^{\circ} \Rightarrow \Delta CID = 60^{\circ}$ ΔCIF (g.c.g)
- c. Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho IB = IN \Rightarrow NM = IC \Rightarrow Δ BIN đều \Rightarrow BN = BI và ${\rm BNM}=120^{\circ} \Rightarrow \Delta {\rm BNM}=\Delta {\rm BIC} \ ({\rm c.g.c}) \Rightarrow BM=BC \ {\rm và} \ B_2=B_4 \Rightarrow \Delta BCM \ {\rm dều}$

 $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \ldots + n \cdot 2^n = 2^{n+11}$ Bài 0.9. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: 🔑 Hướng dẫn giải

Dăt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + ... + n.2^n$

$$S = 2S - S = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}) - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n)$$

$$S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

Đặt
$$T = 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
. Tính được $T = 2 T - T = 2^{n-1} - 2^3$

$$\Rightarrow S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

$\S 3. \ D \hat{E} \ S \hat{O} \ 3$

Bài 0.10. Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: x = y = z.

Hướng dẫn giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $\mathbf{x}^2 = \mathbf{yz}, \mathbf{y}^2 = \mathbf{xz}, \mathbf{z}^2 = \mathbf{xy}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x=y=z$

Bài 0.11.

- a. Tìm x biết: $5^x + 5^{x+2} = 650$
- b. Tìm số hữu tỷ x, y biết: $(3x 33)^{2008} + |y 7|^{2009} \le 0$

$$\left| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1, 6 + \frac{3}{5} \right|$$

Hướng dẫn giải

a.
$$5^x + 5^{x+2} = 650$$

$$\Leftrightarrow 5^x \left(1 + 5^2\right) = 650$$

$$\Leftrightarrow 5^x.26 = 650$$

$$\Leftrightarrow$$
 $5^x = 25$

$$\Leftrightarrow$$
 $5^x = 5^2$

$$\Rightarrow x = 2$$

b. Ta có
$$(3x - 33)^{2008} \ge 0$$

$$|y - 7|^{2009} \ge 0$$

Suy ra
$$(3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} \ge 0$$

Mà
$$(3x-33)^{2008} + |y-7|^{2009} \le 0$$
 (Theo đề bài)

Nên
$$(3x - 33)^{2008} + |y - 7|^{2009} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 33)^{2008} = 0 \text{ và } |y - 7|^{2009} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ và } y = 7$$

Bài 0.12. Cho hàm số : $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ với $a, b, c, d \in Z$

Biết f(1):3; f(0):3; f(-1):3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Ta có: f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c

$$+) f(0):3 \Rightarrow c:3$$

+)
$$f(1):3 \Rightarrow a+b+c:3 \Rightarrow a+b:3(1)$$

+)
$$f(-1):3 \Rightarrow a-b+c:3 \Rightarrow a-b:3(2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra (a + b) + (a - b): $3 \Rightarrow 2a$: $3 \Rightarrow a$: $3 \Rightarrow$

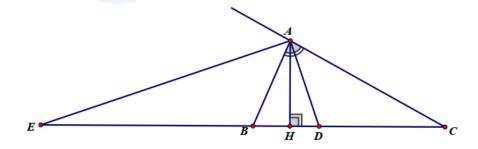
Vậy a , b , c đều chia hết cho 3

Bài 0.13. Cho tam giác ABC, AD là tia phân giác của góc A và B > C.

- a. Chứng minh rằng ADC ADB = B C.
- b. Vẽ đường thẳng AH vuông góc BC tại H. Tính ADB và HAD khi biết $B-C=40^{\circ}$
- c. Vẽ đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc đỉnh A, nó cắt đường thẳng BC tại E.

Chứng minh rằng
$$AEB = HAD = \frac{B-C}{2}$$

Hướng dẫn giải



a. ADC = B + BAD (góc ngoài $\triangle ABD$)(1)

ADB = C + CAD (góc ngoài \triangle ADC)(2) Mà AD là phân giác góc BAD nên BAD = DAC(3)

Từ(1),(2) và (3) suy ra đpcm

b. Ta có:

$$ADC - ADB = B - C = 40^{\circ}$$

$$ADC + ADB = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow ADC = \frac{180^{\circ} + 40^{\circ}}{2} = 110^{\circ}; ADB = 70^{\circ}$$

$$\Rightarrow AHD = 20^{\circ}$$

c. Ta có AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kê bù đỉnh A nên AD \perp AE



Xét $\triangle AED$ ta có: $AEB + ADE = 90^{\circ}$ (4)

Xét \triangle AHD ta có: $HAD + ADE = 90^{\circ}$ (5)

Mặt khác

$$ADB = C + DAC = C + \frac{A}{2}$$

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 90^{\circ} - \frac{B+C}{2}$$

$$ADB = C + 90^{\circ} - \frac{B+C}{2}$$

$$=\frac{C-B}{2}+90^{\circ}$$

$$\frac{B-C}{2} + ADB = 90^{\circ}(6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra đọcm

Bài 0.14.

a. Cho
$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$$
 và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S - P)^{2013}$.

b. Cho A =
$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

Tìm x \in Z để A có giá trị là một số nguyên.

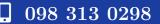
Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\begin{split} P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1006}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2012}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S. \end{split}$$
 Do đó $(S - P)^{2013} = 0$

b. Tìm $x \in z$ đề $A \in Z$

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$$
 (dk $x \ge 0, x \ne 9$)



A nguyên khi $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là U (4)

$$\vec{\mathrm{U}}(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

Các giá trị của x là : 1; 4; 16; 25; 49.



§4. ĐỀ SỐ 4

Bài 0.15.

a. Thực hiện phép tính:
$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right].$$

b. Rút gọn:

$$B = (-5)^{0} + (-5)^{1} + (-5)^{2} + (-5)^{3} + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$$

🔑 Hướng dẫn giải

a.

$$\bullet \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} = 1$$

$$\bullet \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right] = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5$$

$$A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

b.

$$(-5)B = (-5)^{1} + (-5)^{2} + (-5)^{3} + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}.$$

$$B = (-5)^{0} + (-5)^{1} + (-5)^{2} + (-5)^{3} + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}.$$

Do đó:
$$(-5)$$
B $-$ B $=$ (-6) B $=$ $(-5)^{2018} - 1$
$$Vây B = \frac{(-5)^{2018} - 1}{-4} = \frac{1 - 5^{2018}}{4}$$

Bài 0.16.

a. Tìm a, b, c biết $\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11}$ và a+b+c=48.

b. Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đôi thay đổi nên đã chia lai tỉ lê với 6; 5; 4. Như vây có một đôi làm nhiều hơn so với dự định là 6m³ đất. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

🔑 Hướng dẫn giải

a. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11} = \frac{12a - 15b + 20c - 12a + 15b - 20c}{27} = 0$$

$$\frac{12a - 15b}{7} = 0 \Rightarrow 12a = 15b$$

$$\frac{20c - 12a}{9} = 0 \Rightarrow 20c = 12a$$

$$\Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{12}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và a + b + c = 48, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{12}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}} = \frac{48}{\frac{1}{5}} = 24$$

$$\frac{a}{\frac{1}{12}} = 240 \Rightarrow a = 20 \frac{b}{\frac{1}{15}} = 240 \Rightarrow b = 16 \frac{c}{\frac{1}{20}} = 240 \Rightarrow c = 12$$

Vậy a = 20; b = 16; c = 12.

b. Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là x (m^3) ĐK: x > 0.

Số đất dự định chia cho ba đội I, II, III lần lượt là a, b, c (m³) ĐK: a, b, c > 0.

Ta có:
$$\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18}$$

Số đất sau đó chia cho ba đội I, II, III lần lượt là a', b', c' (m^3) ĐK: a', b', c' > 0.

Ta có:
$$\frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a' + b' + c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15}$$

So sánh (1) và (2) ta có: a < a'; b = b'; c > c' nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu.

Vi a
$$-a' = 6$$
 hay $\frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360~{\rm m}^3$ đất.

Bài 0.17.

- a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{|x-2017| + 2018}{|x-2017| + 2019}$
- b. Chứng tỏ rằng $S=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n\in N, n>2.$
- c. Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho: x 2xy + y = 0.

Hướng dẫn giải

a.
$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi |x-2017|+2019 có giá trị nhỏ nhất



Mà $|x-2017| \ge 0$ nên $|x-2017| + 2019 \ge 2019$. Dấu "=" xảy ra khi $x=2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi x=2017.

b. Ta có:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow S < n - 1(1)$$

Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) > -1 \Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) > (n-1) - 1$$

$$= n - 2.$$

$$\Rightarrow S > n - 2(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra n-2 < S < n-1hay S không là số nguyên.

c. Ta có:
$$x - 2xy + y = 0$$

 $\Rightarrow x(1 - y) + y = 0$
 $\Rightarrow (1 - y) + x(1 - y) = 1$
 $\Rightarrow (1 + x)(1 - y) = 1$
Ta có: $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$

Ta có bảng:



1+x	1	-1
1-y	1	-1
x	0	-2
y	0	2

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (-2; 2)\}$

Bài 0.18. Cho tam giác cân ABC, AB = AC. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lân lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

- a. DM = EN.
- b. Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN.
- c. Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

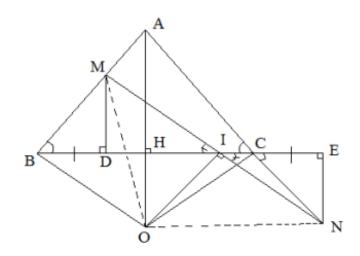
GT:

- 1. $\triangle ABC$
- 2. AB = AC
- 3. BD = CE
- 4. MD \perp BC; NE \perp BC
- 5. $BC \cap MN = \{I\}$

KL:

- a. DM = EN
- b. Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN
- c. Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đối trên cạnh BC





a.
$$\triangle MDB = \triangle NEC$$
 (g.c.g)

$$\Rightarrow$$
 DM = EN (cặp cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow$$
 MB = NC (cặp cạnh tương ứng)

b. Ta có:

 \triangle MDI vuông tại D : DMI + MID = 90° (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

 \triangle NEI vuông tại E: ENI + NIE = 90° (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà MID = NIE(đối đỉnh) nên DMI = ENI

 $\Delta MDI = \Delta NEI$ (g.c.g)

 \Rightarrow IM = IN (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

 $\Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền.cạnh góc vuông)

⇒ HAB = HAC (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I.

 $\triangle OAB = \triangle OAC(c.g.c)$

 \Rightarrow OBA = OCA (cặp góc tương ứng) (1)

 \Rightarrow OC = OB (cặp cạnh tương ứng)

 $\Delta \text{OIM} = \Delta \text{OIN (c.g.c)}$

 \Rightarrow OM = ON (cặp cạnh tương ứng)

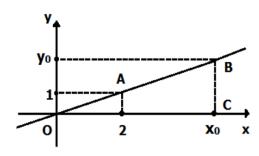
 $\triangle OBM = \triangle OCN (c.c.c)$

 \Rightarrow OBM = OCN (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OCA = OCN = 90^{\circ}$, do đó $OC \perp AC$.

Vậy điểm O cố định.

Bài 0.19.



Trong hình bên, đường thẳng OA là đồ thị của hàm số y = f(x) = ax.

a. Tính tỉ số
$$\frac{y_0-2}{x_0-4}$$
.

b. Giả sử $x_0=5$. Tính diện tích tam giác OBC

a. Điểm A thuộc đồ thị hàm số y = ax nên tọa độ (2;1) của A phải thỏa mãn hàm số y = ax.

Do đó, $1=a.2\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$ Vậy hàm số được cho bởi công thức $y=\frac{1}{2}\mathbf{x}.$

Hai điểm A và B thuộc đồ thị hàm số nên hoành độ và tung độ của chúng tỉ lệ thuận với nhau.

Suy ra
$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{y_0 - 2}{x_0 - 4}$$
 (theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

$$V_{ay} \frac{y_0 - 2}{x_0 - 4} = \frac{1}{2}.$$

b. Nếu $x_0 = 5$ thì $y_0 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{5}{2} = 2, 5.$

Diện tích tam giác OBC là:

Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}$ (a.h) ta có:

SOBC =
$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2, 5 = 6, 25.$$

$\S5.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 5

Bài 0.20.

a. Tìm
$$x, y$$
 biết: $\frac{4+\mathbf{x}}{7+\mathbf{y}} = \frac{4}{7}$ và $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 22$

b. Cho
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$$
 và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\frac{4+x}{7+y} \Rightarrow 28+7x = 28+4y \Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

b. Ta có:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96} : \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{186} \cdot \frac{245}{3x + 4y + 5z} = 1$$

$$\Rightarrow M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z} = \frac{186}{245}$$

Bài 0.21. Thực hiện tính:

a.
$$S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} \dots - 2 - 1$$

b.
$$P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$2S = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} \dots - 2^2 - 2$$

$$2S - S = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} \cdot -2^{2009} + 2^{2009} \cdot \cdot - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 + 1$$

$$S = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1$$

$$S = 2^{2011} - 2^{2011} + 1 = 1$$

b. Ta có:

$$P = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \frac{16 \cdot 17}{2}$$
$$= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \cdot + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$
$$= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 17 - 1)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{17.18}{2} - 1 \right) = 76$$

Bài 0.22. Tìm x biết:

a.
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$$

b.
$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30.31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30.31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow x = -36$$

b. Ta có:
$$\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{12} = 2^x$$

$$\Rightarrow x = 12$$

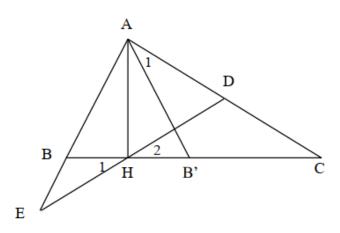
Bài 0.23. Cho tam giác ABC có $B < 90^{\circ}$ và B = 2C. Kể đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BH. Đường thẳng HE cắt AC tại D.

- a. Chứng minh BEH = ACB
- b. Chúng minh DH = DC = DA.
- c. Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB'. Chứng minh tam giác AB'C cân.



d. Chứng minh AE = HC.

Hướng dẫn giải



a. BEH cân tại B
 nên
$$\widehat{E} = \widehat{\mathcal{H}_1}$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{\mathbf{H}_1} = 2\widehat{\mathbf{E}}$$

$$\widehat{ABC} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{ACB}$$

b. Chứng tỏ được $\triangle \mathrm{DHC}$ cân tại D
 nên DC = DH. $\triangle \mathrm{DAH}$ có:

$$\widehat{DAH} = 90^{\circ} - C$$

$$\widehat{DHA} = 90^{\circ} - \widehat{H}_2 = 90^{\circ} - \widehat{C}$$

 $\Rightarrow \Delta {\rm DHA}$ cân tại D
 nên DA = DH.

c.
$$\triangle {\rm ABB}'$$
 cân tại A nên $\widehat{\rm B'}=\widehat{B}=2\widehat{C}$

$$\widehat{\mathbf{B}'} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$$
nên
 $2\widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$

$$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{AB'C}$$
 cân tại $\widehat{\mathbf{B}'}$

d. Ta có:

$$AB = AB' = CB'$$

$$BE = BH = B'H \text{ C\'o}: AE = AB + BE$$

$$HC = CB' + B'H$$

$$\Rightarrow$$
 AE = HC



Bài 0.24. Tính hợp lý các biểu thức sau:

a.
$$27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$$

b.
$$2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}}$$

c.
$$\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$$

Hướng dẫn giải

a.
$$27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \left(27\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4} \right) = 14 \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{4}$$

b.
$$2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}} = 2\left|\frac{1}{4}\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

c.
$$\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 (5+6)}{2^2 (15-2^2)} = \frac{2 \cdot 11}{11} = 2$$

Bài 0.25. Tìm x biết:

a.
$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$$

b.
$$\left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7$$

c.
$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5$$

🔑 Hướng dẫn giải

a.
$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

b.
$$\left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7$$

$$\Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = 12$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{vmatrix}$$

c.
$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^5 ((2x-1)^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \\ \Leftrightarrow 2x-1=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{bmatrix}$$

Bài 0.26. Ba đội cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Hướng dẫn giải

Gọi số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lân lượt là x; y; z (giờ).

DK: x; y; z > 0

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỷ lệ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: 2x = 3y = 4z và y - z = 5

$$\frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

 $\mathbf{y}=20, \mathbf{z}=15, \mathbf{x}=30$ (thoả mãn điều kiện bài toán)

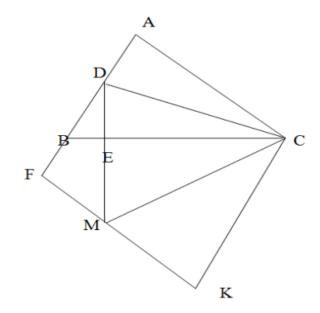
Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lân lượt là 30 người, 20 người, 15 người. \Box

Bài 0.27. Cho tam giác ABC vuông tại A với $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và BC = 15 cm. Tia phân giác góc C cắt AB tại D. Kẻ $DE\perp BC(E\in BC)$.

- a. Chứng minh AC = CE.
- b. Tính độ dài AB; AC.
- c. Trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AC. Kẻ tia F
x \perp FA cắt tia DE tại M. Tính DCM

Hướng dẫn giải





a. C/m được $\triangle ACD = \triangle ECD$ (cạnh huyền- góc nhọn) $\Rightarrow AC = CE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$

b.
$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}(gt) \Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

 $\Leftrightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9 + 16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$
 $AB^2 = 9.9 = 81 \Rightarrow AB = 9 \text{ cm}$
 $AC^2 = 9.16 = 144 \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$

c. Kẻ Cy \perp Fx cắt nhau tại K

Ta thấy AC = AF = FK = CK = CE và
$$ACK = 90^\circ$$
 C/M được $\triangle CEM = \triangle CKM$ (cạnh huyên- cạnh góc vuông)
$$\Rightarrow ECM = KCM \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$DCM = DCE + ECM = \frac{1}{2}ACK = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Bài 0.28. Tìm giá trị lớn nhất của biêu thức: A = |x| - |x - 2|Hướng dẫn giải

Xét các trường hợp:

+ TH1:
$$x \ge 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$$

+ TH2: $0 \le x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$
+ TH3: $x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$

 \Rightarrow Với mọi giá trị của x thì A ≤ 2

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2 khi x ≥ 2



§7. ĐỀ SỐ 7

Bài 0.29.

1. Tính
$$M = \left(\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0, 25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0, 875 + 0, 7}\right) : \frac{2012}{2013}$$

2. Tìm
$$x$$
, biết: $|x^2+|x-1||=x^2+2$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$M = \left(\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0, 25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0, 875 + 0, 7}\right) : \frac{2012}{2013}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}}\right) : \frac{2012}{2013}$$

$$= \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}\right) : \frac{2012}{2013}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2012}{2013} = 0$$

KL:

b. Vì
$$x^2 + |x - 1| > 0$$
 nên $(1) => x^2 + |x - 1| = x^2 + 2$ hay $|x - 1| = 2$
+ Nếu $x \ge 1$ thì (*) $=> x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
+ Nếu $x < 1$ thì (*) $=> x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

KL:

Bài 0.30.

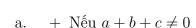
1. Cho a,b,c là ba số thực khác 0 , thoả mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

2. Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Hướng dẫn giải



Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$m \grave{a} \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vây B =
$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

 $+ N \hat{e}u + b + c = 0 thì a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b.$

$$\widehat{\text{Vay }}B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a}\cdot\frac{-b}{c}\cdot\frac{-a}{b} = -1$$

b. Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a,b,c

Ta có:
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$$
 (1)

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c', ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a' + b' + c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}(2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: a > a'; b = b'; c < c' nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Vây:
$$c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 0.31.

- 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A=|2x-2|+|2x-2013| với x là số nguyên.
- 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình x+y+z=xyz.

a. Ta có:

$$A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \ge |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$$

Dấu "=" xảy ra khi
$$(2x-2)(2013-2x) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 2011 khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

b. Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \le x \le y \le z$

Theo bài ra
$$1 = \frac{1}{uz} + \frac{1}{ux} + \frac{1}{zx} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \le 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có $1+y+z=yz\Rightarrow y-yz+1+z=0$

$$\Rightarrow$$
 y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

TH1:
$$y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ và } z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$$

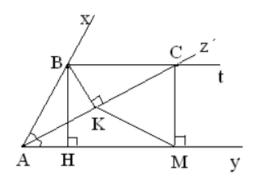
TH2:
$$y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$$
 và $z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn (1,2,3); (1,3,2)

Bài 0.32. Cho $xAy = 60^{\circ}$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M. Chứng minh :

- a. K là trung điểm của AC.
- b. \triangle KMC là tam giác đều.
- c. Cho BK = 2 cm. Tính các cạnh \triangle AKM.





- a. $\triangle ABC$ cân tại B do CAB = ACB (= MAC) và BK là đường cao \Rightarrow BK là đường trung tuyến \Rightarrow K là trung điểm của AC
- b. $\Delta ABH = \Delta BAK($ cạnh huyền + góc nhọn)

$$\Rightarrow$$
 BH = AK(hai cạnh t.ư) mà AK = $\frac{1}{2}$ AC

$$\Rightarrow$$
 BH = $\frac{1}{2}$ AC



Ta có : BH = CM(t/c cặp đoạn chắn) mà CK = BH = $\frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK$

 $\Rightarrow \Delta$ MKC là tam giác cân (1)

Mặt khác: $MCB = 90^{\circ}$ và $ACB = 30^{\circ} \Rightarrow MCK = 60^{\circ}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta \Delta \text{MKC}$ là tam giác đều

c. Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà góc $KAB = 30^{\circ} \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4$ cm

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

Mà KC =
$$\frac{1}{2}$$
AC \Rightarrow KC = AK = $\sqrt{12}$

$$\Delta \text{KCM}$$
đều $\Rightarrow \text{KC} = \text{KM} = \sqrt{12}$

Theo phần b:

$$AB = BC = 4$$

$$AH = BK = 2$$

HM = BC (HBCM là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow$$
 AM = AH + HM = 6

Bài 0.33. Cho ba số dương $0 \le a \le b \le c \le 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le 2$ P Hướng dẫn giải

Vì $0 \le a \le b \le c \le 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab+1 \ge a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{a+b}$$
(1)

Tương tự:
$$\frac{a}{bc+1} \le \frac{a}{b+c}$$
 (2) ; $\frac{b}{ac+1} \le \frac{b}{a+c}$ (3)

Do đó:
$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$
 (4)

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \le \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \ (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra:
$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le 2$$
 (đpcm)

§8. ĐỀ SỐ 8

Bài 0.34.

- a. So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$
- b. Chứng minh rằng: Số A = $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi n \in N

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -\left(2^7\right)^{13} = -128^{13}$$

Ta thấy: $125^{13} < 128^{13} \Rightarrow -125^{13} > -128^{13} \Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$

b. Ta có: A = $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot \left(12^2\right)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$

$$= 133.11^{n} + 12 \cdot (144^{n} - 11^{n})$$

Ta thấy: 133.11ⁿ:133

$$(144^{n} - 11^{n})$$
 : $(144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^{n} - 11^{n})$: 133

Do đó suy ra: $133.11^{n} + 12. (144^{n} - 11^{n})$ chia hết cho 133

Vậy: số A = $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi n < N

Bài 0.35.

- a. Tìm tất cả các cặp số (x;y) thỏa mãn: $(2x-y+7)^{2012}+|x-3|^{2013}\leq 0$
- b. Tìm số tự nhiên n
 và chữ số a biết rằng: $1+2+3+\ldots+n=\overline{aaa}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x-y+7)^{2012} \geq 0$ và $|x-3| \geq 0$

$$\Rightarrow |x-3|^{2013} \ge 0$$

Do đó, từ
$$(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \le 0$$

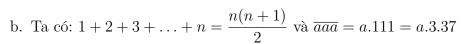
suy ra:
$$(2x - y + 7)^{2012} = 0$$
 và $|x - 3|^{2013} = 0$

$$\Rightarrow 2\mathbf{x} - \mathbf{y} + 7 = \mathbf{0}(1)$$
 và $\mathbf{x} - 3 = \mathbf{0}(2)$

$$T \mathring{\mathbf{u}} (2) \Rightarrow x = 3$$

$$T \grave{u} (1) \Rightarrow y = 2x + 7 = 2.3 + 7 = 13$$

Vậy cặp số (x;y) cần tìm là (3;13)



Do đó, từ
$$1+2+3+\ldots+n=\overline{aaa}$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37.a$$

$$\Rightarrow$$
n(n+1) chia hết cho số nguyên tố 37

$$\Rightarrow$$
 n hoặc n + 1 chia hết cho 37 (1)

Mặt khác:
$$\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \le 999$$

$$\Rightarrow$$
 n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n $<$ 45 (2)

Từ (1) và (2) suy ra hoặc n=37, hoặc n+1=37

- Với n = 37 thì
$$\overline{aaa} = \frac{37.38}{2} = 703$$
 (không thỏa)

- Với n + 1 = 37 thì
$$\overline{a}\overline{a}\overline{a}=\frac{36.37}{2}=666$$
 (thỏa mãn)

Vậy
$$n = 36$$
 và $a = 6$.

Bài 0.36. Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7 A_1 , $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7 A_2 và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7 A_3 đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Hướng dẫn giải

Gọi tổng số học sinh của 7 $A_1, 7$ $A_2, 7$ A_3 lần lượt là $a,b,c \, (a,b,c \in N^*)$

Theo bài ra ta có : $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và a + b + c = 147

$$\mathrm{T} \check{\mathrm{u}} \; (^*) \Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3.$$

Suy ra: a = 54, b = 48, c = 45

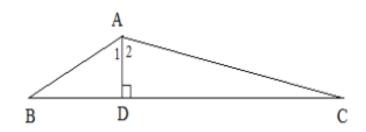
Vậy tổng số học sinh của 7 ${\rm A}_1, 7~{\rm A}_2, ~7~{\rm A}_3$ lần lượt là 54,48 và 45 .

Bài 0.37. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 3\hat{B} = 6\hat{C}$.

- a. Tính số đo các góc của tam giác ABC.
- b. Kẻ AD vuông góc với BC (D thuộc BC). Chứng minh: AD < BD < CD.

Hướng dẫn giải





a. Từ
$$\hat{A} = 3\hat{B} = 6\hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{1} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{6 + 2 + 1} = \frac{180^{\circ}}{9} = 20^{\circ}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 6.20^{\circ} = 120^{\circ}$$

$$\hat{B} = 2.20^{\circ} = 40^{\circ} \quad \text{Vậy: } \hat{A} = 120^{\circ}; \hat{B} = 40^{\circ}; \hat{C} = 20^{\circ}$$

$$\hat{C} = 1.20^{\circ} = 20^{\circ}$$

b. - Trong $\triangle ACD$ có

$$A\hat{D}C = 90^{\circ}; \hat{C} = 20^{\circ} \Rightarrow \hat{A}_2 = 70^{\circ}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 50^{\circ}$$

- Xét $\triangle {\rm ADB}$ có $\hat{B}=40^{\circ}<\hat{A}_1=50^{\circ}\Rightarrow AD< BD$ (1)
- Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B}=40^{\circ}>\hat{C}=20^{\circ}\Rightarrow AB< AC\Rightarrow AB^2< AC^{2*}$
- Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác vuông ADB và ADC có: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ và $AC^2 = AD^2 + CD^2$

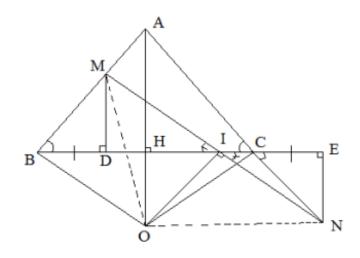
Do đó, từ (*)
$$\Rightarrow$$
 AD² + BD² < AD² + CD²
 \Rightarrow BD² < CD² \Rightarrow BD < CD (2)
Từ (1) và (2) \Rightarrow AD < BD < CD

Bài 0.38. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho AM + AN = 2AB.

- a. Chứng minh rằng: $\mathrm{BM}=\mathrm{CN}$
- b. Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.
- c. Đường trung trực của MN và tia phân giác của góc BAC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng: KC \perp AC.

Hướng dẫn giải





a. Theo giả thiết, ta có:

$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

$$AM + AN = AM + AC + CN$$

$$\Delta ABC$$
 cân ở $A\Rightarrow AB=AC$

Do đó, từ
$$AM + AN = 2AB$$

$$\Rightarrow$$
 BM = CN

b. Qua M kẽ $ME//AC(E \in BC)$ \triangle ABC cân ở A \Rightarrow \triangle BME cân ở M \Rightarrow EM = BM = CN \Rightarrow \triangle MEI = \triangle NCI(g - c - g) \Rightarrow IM = IN

Vậy: BC đi qua trung điểm của MN.

c. +K thuộc đường trung trực của MN \Rightarrow KM = KN (1)

$$+\triangle ABK = \Delta ACK(c - g - c) \Rightarrow KB = KC(2); A\hat{BK} = \hat{ACK}(^*)$$

+Kết quả câu c/m câu a BM = CN (3)

+ Từ (1), (2) và (3)
$$\Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK(c-c-c) \Rightarrow A\hat{B}K = N\hat{C}K$$
 (**)

+ Từ (*) và (**)
$$\Rightarrow$$
 $A\hat{C}K = N\hat{C}K = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ} \Rightarrow \text{KC} \perp \text{AN}$

$\S 9. \ D \hat{E} \ S \hat{O} \ 9$

Bài 0.39.

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a.
$$A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$$

b. $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

2. Cho
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$$
. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$

Hướng dẫn giải

1. (a)
$$A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$A = \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \right] = \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}\right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right) \right]$$

$$= \frac{11}{7} [(-1) + 1] = \frac{11}{7} \cdot 0 = 0$$

(b)
$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{2^{12} \cdot 3^6 + (2^3)^4 \cdot 3^5}$$
$$= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)}$$
$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

2. Đặt
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \mathbf{k} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 3\mathbf{k} \\ & \text{. Khi đó:} \\ y = 5\mathbf{k} \end{array} \right.$$

$$C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2} = \frac{5(3k)^2 + 3(5k)^2}{10(3k)^2 - 3(5k)^2} = \frac{45k^2 + 75k^2}{90k^2 - 75k^2} = \frac{120k^2}{15k^2} = 8$$

Bài 0.40.

1. Tìm các số x, y, z, biết:

a.
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$
; $\frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$
b. $(x-1)^{2018} + (2y-1)^{2018} + |x + 2y - z|^{2019} = 0$

2. Tìm x, y nguyên biết: xy + 3x - y = 6

Hướng dẫn giải

1. (a) Ta có:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và x+y+z=92, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases} \end{cases}$$

(b) Ta có:

$$(2y - 1)^{2016} \ge 0 \quad \forall y$$

$$|x + 2y - z|^{2017} > 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} \ge 0 \quad \forall x, y, z$$

Mà
$$(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$$

nên dấu "=" xảy ra
$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x + 2y - z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

2. Ta có:
$$xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6 - 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

Ta có bảng sau:

x-1	1	ಌ	-1	-3
y + 3	3	1	-3	-1
X	2	4	0	-2
у	0	-2	-6	-4

$$\hat{V}_{ay}$$
: (x; y)=(2; 0)=(4;-2)=(0; 6)=(-2;-4)

Bài 0.41.

- 1. Tìm đa thức A biết: $A \left(3xy 4y^2\right) = x^2 7xy + 8y^2$
- 2. Cho hàm số y = f(x) = ax + 2 có đồ thị đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$.
 - a. Tìm a
 - b. Với a vừa tìm được, tìm giá trị của x thỏa mãn: f(2x-1)=f(1-2x)

 \rat{P} Hướng dẫn giải $1. \ \mbox{Ta có:} \ A - \left(3xy - 4y^2\right) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

- 2. (a) Vì đồ thị hàm số y = f(x) = ax+2 đi qua điểm A (a 1; a² + a) nên: $a²+a = a(a-1)+2 \Leftrightarrow a$ $a^2 + a = a^2 - a + 2 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$
 - (b) Với a = 1 thì y = f(x) = x + 2

Ta có:
$$f(2x - 1) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow (2x - 1) + 2 = (1 - 2x) + 2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 0.42. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

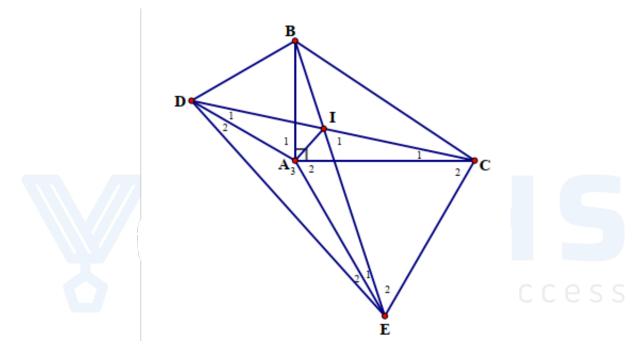
- a. BE = CD
- b. △BDE là tam giác cân
- c. $EIC = 60^{\circ}$ và IA là tia phân giác của DIE

Hướng dẫn giải

GT: $\triangle ABC$, $A=90^{\circ}$, $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ đều, $I=BE\cap CD$ KL:

a.
$$BE = CD$$

- b. $\triangle BDE$ là tam giác cân
- c. EIC = 60° và IA là tia phân giác của DIE



a. Ta có:
$$\begin{cases} DAC = A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ &\Rightarrow DAC = BAE \end{cases}$$

$$BAE = A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA(GT)$$

$$DAC = BAE(CM trên)$$

$$AC = AE(GT)$$

$$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE(c - g - c) \Rightarrow BE = CD$$
 (Hai canh tương ứng)

b. Ta có:
$$A_3 + A_1 + BAC + A_2 = 360^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow A_3 = 150^{\circ}$$

$$\Rightarrow A_3 = DAC = 150^{\circ}$$



Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA(GT)$$

$$A_3 = DAC(CM trên)$$

AE: Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE(c - g - c)$$

- \Rightarrow DE = BE (Hai canh tương ứng)
- $\Rightarrow \triangle BDE$ là tam giác cân tại E
- c. Ta có: $\Delta DAC = \Delta BAE(CM \ câu \ a) \Rightarrow E_1 = C_1$ (Hai góc tương ứng) Lại có: $\hat{I}_1 + E_2 + ICE = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong ΔICE)

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + (AEC - E_1) + (C_1 + C_2) = 180^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + 60^\circ - E_1 + C_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 + 120^\circ = 180^\circ \left(V i \ E_1 = C_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \hat{I}_1 = 60^{\circ}$$

Vì $\triangle DAE = \triangle BAE (Cm \ câu \ b) \Rightarrow E_1 = E_2 (Hai góc tương ứng)$

 \Rightarrow EA là tia phân giác của DEI (1)

$$Vi \left\{ \begin{array}{l} \triangle DAC = \Delta BAE \\ \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow D_1 = D_2 \text{ (Hai g\'oc tương \'ung) } \Rightarrow DA \text{ là tia} \\ \triangle DAE = \Delta BAE \end{array} \right.$$

phân giác của EDC (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow A là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle {\rm DIE}$

 \Rightarrow IA là đường phân giác thứ ba trong \triangle DIE hay IA là tia phân giác của DIE

Bài 0.43.

- 1. Tìm số hữu tỉ x, sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.
- 2. Cho các số a,b,c không âm thỏa mãn: a+3c=2016; a+2b=2017. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P=a+b+c.

Hướng dẫn giải

a. Gọi
$$x = \frac{m}{n}(m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1)$$
. Khi đó:
$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn}(1)$$

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$



$$\Rightarrow m^{2} + n^{2}:m$$

$$\Rightarrow n^{2}: m \left(vi m^{2}:m\right)$$

$$\Rightarrow n:m$$

Mà (m,n) = 1 nên m = 1 hoặc m = -1

* Với
$$m = 1$$
:

Từ (1), ta có:
$$x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}$$
. Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2$: $n \Rightarrow 1$: n

* Với
$$m = -1$$
:

Từ (1), ta có:
$$x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}$$
. Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n)$ hay $n = \pm 1$

Khi đó
$$x=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}=\frac{1}{1}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=\frac{-1}{-1}$$
hay x = ±1

b. Ta có:
$$a + 3c = 2016$$
 (1) và $a + 2$ b = 2017 (2)

$$Tid(1) \Rightarrow a = 2016 - 3c$$

Lấy (2) - (1) ta được: 2 b - 3c = 1
$$\Leftrightarrow$$
 b = $\frac{1+3c}{2}$.

Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1 + 3c}{2} + c = \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}.$$

Vì a, b, c không âm nên
$$P=2016\frac{1}{2}-\frac{c}{2}\leq 2016\frac{1}{2}, Max P=2016=\frac{1}{2}$$
 \Leftrightarrow c = 0

$\S 10. \ \hat{ ext{DE}} \ \hat{ ext{SO}} \ 10$

Bài 0.44. Tính giá trị của biểu thức

a.
$$A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

b.
$$B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2015} - \frac{3^{2016}}{2}$$

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)} = -\frac{1}{3}$$

b. Dăt
$$M = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2015}$$

Ta có
$$3M = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2016}$$

$$3M - M = 3^{2016} - 1 \Rightarrow M = \frac{3^{2016}}{2} - \frac{1}{2}$$

Khi đó B =
$$\frac{3^{2016}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3^{2016}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Bài 0.45.

a. Tìm
$$x$$
 biết: $\frac{15}{28} - \left| x - \frac{3}{14} \right| = -\frac{5}{12}$

b. Tìm
$$x$$
, y nguyên biết: $25 - y^2 = 4(x - 2016)^2$

🔑 Hướng dẫn giải

a.
$$\left| x - \frac{3}{14} \right| = \frac{15}{28} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \left| x - \frac{3}{14} \right| = \frac{80}{84}$$

$$x - \frac{3}{14} = \frac{80}{84} \text{ hoặc } x - \frac{3}{14} = -\frac{80}{84}$$

$$x = \frac{3}{14} + \frac{80}{84}x = \frac{3}{14} - \frac{80}{84}$$

$$x = \frac{7}{6}x = \frac{31}{42}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{6}; \quad x = \frac{31}{42}$$

b. Ta có
$$4(x-2016)^2 \ge 0$$
 với mọi x nên $25-y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le 25$
Mà $4(x-2016)^2$ là số chính phương chẵn $\Rightarrow 25-y^2$ chẵn \Rightarrow y lẻ.
y² là số chính phương lẻ, y² $\le 25 \Rightarrow$ y² $\in \{1;9;25\}$
+ Nếu $y^2 = 25 \Rightarrow 4(x-2016)^2 = 0 \Rightarrow x = 2016$



+ Nếu
$$y^2 = 9 \Rightarrow 4(x-2016)^2 = 16 \Rightarrow x = 2016$$

 $\Rightarrow (x-2016)^2 = 4$
 $x-2016 = 2$ hoặc $x-2016 = -2$
 $x=2018$ hoặc $x=2014$
+ Nếu $y^2 = 1 \Rightarrow 4(x-2016)^2 = 24$ không phải là số chính phương (loại)
Vậy với $y=\pm 3$ thì $x=2018$; $x=2014$

Với $y = \pm 5$ thì x = 2016.

Bài 0.46.

- a. Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết 13a + b + 2c = 0. Chứng minh $f(-2) \cdot f(3) \le 0$
- b. Cho các số thực $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{xy}{x+y} = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z}$ Tính giá trị cuả biểu thức: $M = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + xz}$.

Hướng dẫn giải

- a. Ta có f(3) = 9a + 3b + c; f(-2) = 4a 2b + c f(3) + f(-2) = 13a + b + 2c = 0 => f(3) = -f(-2) $\Rightarrow f(3) \cdot f(-2) = -f(3)^2 \le 0$
- b. Vì x, y, z \neq 0 nên theo bài ra ta có: $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{y+z}{y \cdot z} = \frac{x+z}{x \cdot z}$ $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\Rightarrow x = y = z.$

Thay x = y = z vào M ta được M = 1.

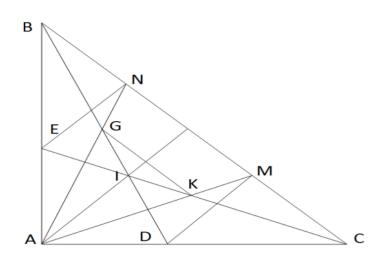
Bài 0.47. Cho tam giác ABC vuông ở A, có phân giác BD, CE cắt nhau ở I. Gọi M, N lân lượt là hình chiếu của D, E trên BC

- a. Chứng minh tam giác ABM cân.
- b. Chứng minh MN = AB + AC BC
- c. Tính góc MAN.



d. Gọi G,K lân lượt là giao điểm của BD và AN;CE và AM. Tia AI cắt GK ở H. Tính góc AHG.

Hướng dẫn giải



- a. $\triangle ABD = \triangle MBD$ (cạnh huyền góc nhọn) $=> {\rm AB} = {\rm AM} => \triangle AMB$ cân ở B.
- b. Ta có $\triangle AEC = \triangle NEC => CN = CA$ Khi đó AB + AC = BM + CN = BM + MC + MN = BC + MN $\Rightarrow MN = AB + AC - BC$
- c. Từ $\triangle AMB$ cân ở M \Rightarrow $AMB = \frac{180^{\circ} ABC}{2} = 90^{\circ} \frac{ABC}{2}$ Từ $\triangle ANC$ cân ở N \Rightarrow $ANB = \frac{180^{\circ} ACB}{2} = 90^{\circ} \frac{ACB}{2}$ Trong $\triangle AMN$ có $MAN = 180^{\circ} AMB ANC$

$$=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{ABC}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{ACB}{2}\right)$$

$$=\frac{ABC}{2}+\frac{ACB}{2}=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ \text{ (Vì }\triangle ABC \text{ vuông tại A nên }ABC+ACB=90^\circ \text{)}$$
 Vây $MAN=45^\circ$

d. Vì $\triangle AMB$ cân ở B
 nên đường phân giác BD đồng thời là đường cao $\Rightarrow BD \perp AM$ ha
y $GI \perp AK$

 $\triangle ANC$ cân ở C \Rightarrow đường phân giác CE đồng thời là đường cao $\Rightarrow CE \perp AN$ hay $KI \perp AG$ Trong $\triangle AKG$ có 2 đường cao xuất phát từ G, K cắt nhau ở I \Rightarrow I là trực tâm của $\triangle AKG$. $AI \perp GK$ ở H $\Rightarrow AHG = 90^{\circ}$

§11. ĐỀ SỐ 11

Bài 0.48.

a. Tính giá trị của biểu thức:
$$A=\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{15}-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}:\left(\frac{1}{11}-\frac{5}{22}\right)$$

b. Tìm
$$x$$
, biết: $\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$

c. Tính giá trị của biểu thức $M=21x^2y+4xy^2$ với $x,\,y$ thoả mãn:

$$(x-2)^4 + (2y-1)^{2014} \le 0$$

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{4}{9} : \frac{-3}{5} + \frac{4}{9} : \frac{-3}{22} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-5}{3} + \frac{-22}{3}\right) = -4$$

b. Ta có:
$$\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow -1\frac{3}{5} + x = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\Leftrightarrow x = 3\frac{3}{5}$$

c. Vì
$$(x-2)^4 \ge 0$$
; $(2y-1)^{2014} \ge 0$ với mọi x , y nên $(x-2)^4 + (2y-1)^{2014} \ge 0$.

Mà
$$(x-2)^4 + (2y-1)^{2014} \le 0$$

Suy ra
$$(x-2)^4 = 0$$
 và $(2y-1)^{2014} = 0$ suy ra $x = 2, y = \frac{1}{2}$

Khi đó
$$M=44$$
.

Bài 0.49.

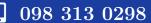
a. Tìm các số x, y, z biết:
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$$
; $\frac{y}{6} = \frac{z}{8}$ và $2x + y - z = -14$.

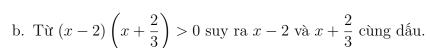
b. Tìm
$$x$$
, biết: $(x-2)(x+\frac{2}{3}) > 0$.

c. Tìm số nguyên
$$x$$
, biết rằng:
$$\frac{3}{7} \cdot 15\frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot 5\frac{2}{5} \le x \le \left(3\frac{1}{2} : 7 - 6\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right)$$

Hướng dẫn giải

a. Từ
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$$
; $\frac{y}{6} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16}$
Vậy: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{2x}{18} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{2x + y - z}{18 + 12 - 16} = \frac{-14}{14} = -1$
Suy ra $x = -9$; $y = -12$; $z = -16$





Dễ thấy
$$x - 2 < x + \frac{2}{3}$$
 nên ta có:

*
$$x-2$$
 và $x+\frac{2}{3}$ cùng dương $\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

*
$$x-2$$
 và $x+\frac{2}{3}$ cùng âm $\Leftrightarrow x+\frac{2}{3}<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$

Vậy
$$x > 2$$
 hoặc $x < -\frac{2}{3}$.

c. Ta có
$$\frac{3}{7} \cdot 15\frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot 5\frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \left(15\frac{1}{3} + 5\frac{2}{5}\right) = 8\frac{31}{35}\left(3\frac{1}{2} : 7 - 6\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) = 14$$

Do đó:
$$8\frac{31}{35} \le x \le 14$$
, vì x nguyên nên $x \in \{9; 10; 11; 12; 13; 14\}$

Bài 0.50.

a. Tính giá trị của biểu thức $M = 4x + 4y + 21xy(x + y) + 7(x^3y^2 + x^2y^3) + 2014$, biết x + y = 0.

b. Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, p(x):5 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

c. Cho
$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4026}, B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4025}$$
. So sánh $\frac{A}{B}$ với $1\frac{2013}{2014}$.

Hướng dẫn giải

a.
$$M = 4(x + y) + 21xy(x + y) + 7x^2y^2(x + y) + 2014 = 2014$$
 (Vì x+y=0)

b. Vì p(x):5 với mọi x nguyên nên p(0) = d:5.

$$p(1) = a + b + c + d : 5 (1)$$

$$p(-1) = -a + b - c + d : 5 (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : 2(b+d):5 và 2(a+c):5.

Vì 2(b+d):5, mà (2,5)=1 nên b+d:5 suy ra b:5.

p(2) = 8a + 4b + 2c + d:5 mà d:5; b:5. nên 8a + 2c:5, kết hợp với 2(a + c):5 suy ra 6a:5 suy ra a:5 vì (6,5) = 1. từ đó c:5.

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho5 .

c. Đặt
$$C = A - B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{4026}$$

Ta có
$$B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4025} > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4026} = \frac{1}{2} + C$$
 (1)

Lại có:

$$\frac{2013}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{2013 \text{ sohang}} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4026}}_{2013 \text{ sohang}} = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{C}{2013}(2)$$

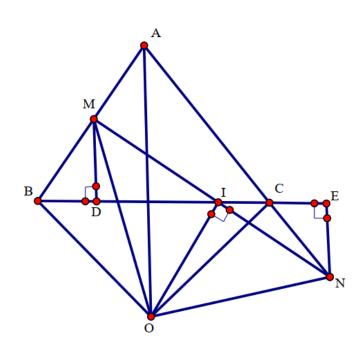
Từ (1) và (2) suy ra
$$B > \frac{C}{2013} + C \Rightarrow 2013B > 2014C$$

Do đó: $\frac{C}{B} < \frac{2013}{2014} \Rightarrow \frac{C+B}{B} < 1\frac{2013}{2014} \Rightarrow \frac{A}{B} < 1\frac{2013}{2014}$

Bài 0.51. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B,C). Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho CE = BD. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại E0. MN cắt E1.

- a. Chứng minh rằng: DM = EN.
- b. Chứng minh rằng IM = IN; BC < MN.
- c. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I. Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Hướng dẫn giải



a. Tam giác ABC cân tại A nên ABC = ACB; NCE = ACB; (đối đỉnh) Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$



b. Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = NI$

Vi BD = CE nên BC = DE.

Lại có DI < MI, IE < IN nên DE = DI + IE < MI + IN = MN

Suy ra BC < MN.

c. Ta chứng minh được:

 $\triangle ABO = \triangle ACO(\text{ c.g.c }) \Rightarrow OC = OB, ABO = ACO.$

 $\triangle MIO = \triangle NIO(\text{ c.g.c }) \Rightarrow OM = ON.$

Lại có: BM = CN, do đó $\triangle BMO = \triangle CNO$ (c.c.c)

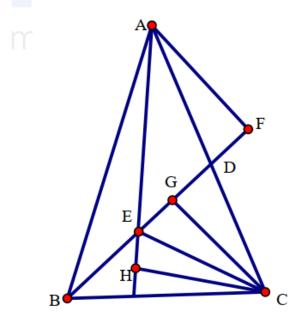
 $\Rightarrow MBO = NCO$, Mà: MBO = ACO suy ra NCO = ACO,

mà đây là hai góc kề bù nên CO \perp AN.

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Bài 0.52. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho DAE = ABD (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng DAE = ECB.

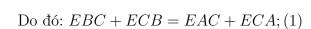
Hướng dẫn giải



Vẽ AF vuông góc BD, CG vuông góc BD, CH vuông góc với AE.

Ta có $\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huỳen - góc nhon). Suy ra: AF = CH. $\triangle ADF = \triangle CDG(ch - gn)$ suy ra AF = CG.

Từ đó ta có CH = CG. $\triangle CEH = \triangle CEG(ch - cgv) \Rightarrow CEH = CEG$; Mà CEG = EBC + ECB; CEH = EAC + ECA;



Mặt khác: EBA + EBC = ECB + ECA; (2)

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có:

$$ECB - EBA = EAC - ECB = EBA - ECB$$

$$\Rightarrow EBA = ECB$$

Mà
$$DAE = ABD$$
 nên $DAE = ECB$.



$\S12.$ Đ \hat{E} S \hat{O} 12

Bài 0.53.

- a. Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$.
- b. Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $\mathbf{M} = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.
- c. Tính giá trị của biểu thức: $N=xy^2z^3+x^2y^3z^4+x^3y^4z^5+\ldots+x^{2014}y^{2015}z^{2016}$ tại: $\mathbf{x}=-1;\mathbf{y}=-1;\mathbf{z}=-1$

Hướng dẫn giải

a.
$$\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$$
$$\frac{1}{2016.2015}x = \frac{-1}{2015}$$
$$x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016.2015} = -2016$$
$$Vay x = -2016$$

b.
$$M = \frac{3n-1}{n-1}$$
 có giá trị là số nguyên $\Rightarrow 3n-1$: $n-1$ $\Rightarrow 3(n-1)+2$: $n-1 \Rightarrow 2$: $n-1 \Rightarrow n-1 \in U'(2)=\{-1;1;-2;2\}$

Ta có bảng:

Thử lại ta có $n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

c. Ta có : N = xyz · yz² + x²y²z² · yz² + x³y³z³ · yz² + . . . + x²0¹⁴y²0¹⁴z²0¹⁴ · yz²
Thay y = 1; z =
$$-1$$
 ta được:

$$N = -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014}$$

= $-(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014}$.

Thay xyz = -1 được:

$$N = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 = 0$$

$$V$$
ây $N = 0$.



- a. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a}=\frac{3cx-az}{2b}=\frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a}=\frac{y}{2b}=\frac{z}{3c}$
- b. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho : $2^m + 2015 = |n 2016| + n 2016$.

Hướng dẫn giải

a.
$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b}(1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c}(2); \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

- b. Nhận xét:
 - -Với $x \ge 0$ thì |x| + x = 2x
 - -Với x < 0 thì |x| + x = 0.

Do đó $|\mathbf{x}| + \mathbf{x}$ luôn là số chẵn với $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì |n-2016|+n-2016 là số chẵn với $n-2016 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó
$$|n - 2016| + n - 2016 = 2016$$

+ Nếu n < 2016, ta có - (n - 2016) + n - 2016 = 2016
$$\Leftrightarrow 0 = 2016$$
 (loại)

+ Nếu
$$n \geq 2016,$$
ta có $2(n-2016) = 2016 \Leftrightarrow n-2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy
$$(m; n) = (0; 3024)$$

Bài 0.55.

- a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |x 2015| + |x 2016| + |x 2017|.
- b. Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3 . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này ?

Hướng dẫn giải

a.
$$P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$$

Ta có: $|x - 2015| + |2017 - x| \ge |x - 2015 + 2017 - x| = 2$. Dấu "=" xảy ra khi: $2015 \le x \le 2017$ (1)

Lai có: $|x - 2016| \ge 0$.



Dấu "=" xảy ra khi x = 2016 (2).

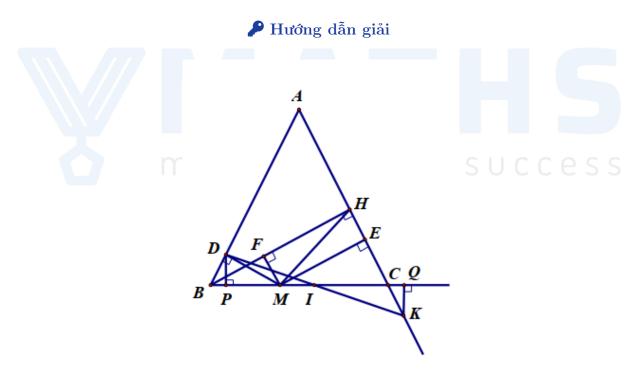
Từ (1) và (2) ta có min
P = 2. Dấu " = " xảy ra khi x=2016

b. Nhận xét : Bốn số phải có cùng số dư khi chia cho 2 và 3 . Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1 .

Từ đó ta có các số 1,7,13 và 19 . Tổng của chúng là : 1+7+13+19=40.

Bài 0.56. Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.

- a. Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.
- b. Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng MD + ME có giá trị không đổi.
- c. Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = EH. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK.



- a. Chúng minh được $\Delta DBM = \Delta FMB$ (ch-gn)
- b. Theo câu a ta có: $\Delta DBM = \Delta FMB($ ch-gn $) \Rightarrow MD = BF(2$ cạnh tương ứng)
 - +) Chứng minh: $\Delta MFH = \Delta HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2)
 - Từ (1) và (2) suy ra: MD + ME = BF + FH = BH

BH không đổi \Rightarrow MD + ME không đổi (đpcm)

- c. Vẽ $DP \perp BC$ tại $P, KQ \perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC
 - +) Chứng minh : BD = FM = EH = CK



- +) Chứng minh : $\triangle BDP = \triangle CKQ \text{ (ch-gn)} \Rightarrow DP = KQ \text{ (canh tương ứng)}$
- +) Chứng minh: $IDP = IKQ \Rightarrow \Delta DPI = \Delta KQI(g c g) \Rightarrow ID = IK(dpcm)$

Bài 0.57. Có sáu túi lân lượt chứa 18, 19, 21, 23, 25 và 34 bóng. Một túi chỉ chứa bóng đỏ trong khi năm túi kia chỉ chứa bóng xanh. Bạn Toán lấy ba túi, bạn Học lấy hai túi. Túi còn lại chứa bóng đỏ. Biết lúc này bạn Toán có số bóng xanh gấp đôi số bóng xanh của bạn Học. Tìm số bóng đỏ trong túi còn lại.

Hướng dẫn giải

Tông số bóng trong 6 túi là : 18+19+21+23+25+34=140 Vì số bóng của Toán gấp hai lần số bóng của học nên tổng số bóng của hai bạn là bội của 3. Ta có : 140 chia 3 bằng 46 dư 2. Do đó số bóng đỏ cũng là số chia 3 dư 2.

Trong sáu số đã cho chỉ có 23 chia 3 dư 2, đó chính là số bóng đỏ trong túi còn lại. Từ đó ta tìm được số bóng của Toán là : 18 + 21 = 39. Số bóng của học là : 19 + 25 + 34 = 78.





$\S13.$ ĐỀ SỐ 13

Bài 0.58.

a.
$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

b.
$$2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

c.
$$(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$$

🔑 Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{1}{5} | -4 = -2 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{9}{5} \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vây với } x = \frac{9}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{5} \text{ thì } \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

b. Ta có:
$$2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

c. Ta có:
$$(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^{x+2} \left[1 - (x-3)^6\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-3=0 \\ (x-3)^6=1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=3 \\ x=4 \\ x=2 \end{bmatrix}$$

Bài 0.59. Tìm
$$x, y, z$$
 biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Hướng dẫn giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 9 + 16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad x \quad y \quad z \quad + 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \pm 2$$

Vây
$$(x; y; z) = (4; 6; 8)$$
 hoặc $(x; y; z) = (-4; -6; -8)$

Bài 0.60. Trong vòng bán kết giải bóng đá của trường THCS Phù Đổng có 4 đội thi đấu, gọi A là tập hợp các cầu thủ; B là tập hợp các số áo thi đấu. Quy tắc mỗi cầu thủ ứng với số áo của họ có phải là một hàm số không? Vì sao?

🔑 Hướng dẫn giải



Quy tắc mỗi cầu thủ ứng với số áo của họ không là một hàm số vì đại lượng cầu thủ không phải là các giá trị bằng số. (trả lời đúng giải thích sai không có điểm) \Box

Bài 0.61. Tính giá trị của đa thức $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với x + y = 2Hướng dẫn giải

$$P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$$

$$= x^{2}(x+y) - 2x^{2} - y(x+y) + 3y + x + 2017$$

$$=2x^{2}-2x^{2}-2y+3y+x+2017=x+y+2017=2019$$

Vây với x + y = 2 thì P = 2019

Hoặc nhóm để xuất hiện x + y - 2

Bài 0.62. Cho : $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$. Chứng minh: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{12x - 8y}{16} = \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{16 + 9 + 4} = 0$$

$$\Rightarrow 12x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{12x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{6z}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Bài 0.63. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 3y^2 = 77$

Hướng dẫn giải

$$2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2y^2 \le 77 \Rightarrow y^2 \le 77/3 \Rightarrow y^2 \le 25$$

Mà $2x^2$ chẵn; 77 lẻ $\Rightarrow 3y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$

$$+y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37 \Rightarrow \text{ không có số tự nhiên x}$$

$$+y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ và } y = 3$$

$$+y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ và } y = 5$$

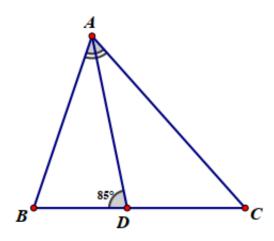
Vậy số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$ là (x; y) = (5; 3); (1; 5)

Học sinh lân lượt thư chọn các số tụ nhiên x (hoặc y) từ $0,1,2,\ldots$ để có được KQ sẽ không được điểm vì không thể hiện được năng lực tu duy số học.

Bài 0.64. Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Biết $ADB = 85^{\circ}$

- a. Tính: B C
- b. Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu 4.B = 5.C

Hướng dẫn giải



a. Xét $\triangle ADC$ có ADB là góc ngoài tại D

$$\Rightarrow$$
 ADB = C + DAC = 85°

Xét $\triangle ADB$ có ADC là góc ngoài tại D \Rightarrow ADC = B + BAD = $180^{\circ} - 85^{\circ} = 95^{\circ}$

Mà DAC = BAD(ViAD là tia phân giác của góc A)

$$\Rightarrow$$
 Từ (1) và (2) \Rightarrow B - C = 95° - 85° = 10°

b. Vì B – C = 10° mà 4 · B = 5 · C
$$\Rightarrow \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = \frac{B-C}{5-4} = 10^\circ$$

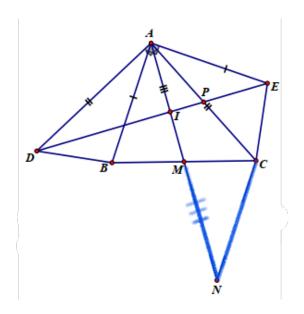
$$\Rightarrow B = 50^{\circ}$$
 và $C = 40^{\circ} \Rightarrow A = 90^{\circ}$

Bài 0.65. Cho \triangle ABC có ba góc nhọn, trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B, vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AC.

- a. Chứng minh: BD = CE
- b. Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho MN = MA. Chứng minh: $\triangle ADE = \triangle CAN$.
- c. Gọi I là giao điểm của DE và AM. Chứng minh: $\frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$

Hướng dẫn giải





a. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$AD = AC(gt)$$

$$AE = AB(gt)$$

BAD = CAE (Cùng phụ với BAC)

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow$$
 BD = CE (Hai canh tương ứng)

b. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$ có AM = MN (gt); BM = CM (gt) AMB = AMC (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow$$
 AB = CN (hai cạnh tương ứng), $ABM = NCM$ (Hai góc tương ứng)

$$Ta~c\acute{o}~ACN = ACB + BCN = ACB + ABC = 180^{\circ} - BAC$$

Lại có
$$DAE = DAC + BAE - BAC = 180^{\circ} - BAC$$

$$\Rightarrow$$
 DAE = ACN

Xét
$$\triangle ADE$$
 và $\triangle ACN$ có $CN=AE$ (cùng bằng AB)

$$AC = AD(gt) DAE = ACN(cmt)$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN (c.g.c)$$

c. Vì $\triangle {\rm ADE} = \Delta {\rm CAN(cmt)} \Rightarrow {\rm NAC} = {\rm ADE}$ (Hai góc tương ứng)

Gọi
$$P$$
là giao điểm của DE và AC

Xét
$$\triangle ADP$$
 vuông tại $A \Rightarrow ADE + APD = 90^{\circ} \Rightarrow NAC + APD = 90^{\circ} \Rightarrow AI \perp DE$

Xét
$$\triangle ADI$$
vuông tại I. Theo ĐL Pytago ta có $AD^2 = DI^2 + AI^2 \Rightarrow AI^2 = AD^2 - DI^2$

Xét
$$\triangle AIE$$
vuông tại I. Theo ĐL Pytago ta có $AE^2=AI^2+IE^2\Rightarrow AI^2=AE^2-IE^2$

$$\Rightarrow AD^2 - DI^2 = AE^2 - IE^2 \Rightarrow AD^2 + IE^2 = DI^2 + AE^2 \Rightarrow \frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1(\text{dpcm})$$

§14. ĐỀ SỐ 14

Bài 0.66.

- a. Cho biểu thức: P = x 4xy + y. Tính giá trị của P với |x|=1,5; y=-0,75
- b. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$|x|=1,5\Rightarrow x=1,5$$
 hoặc x=-1,5

+) Với
$$x = 1,5$$
 và $y = -0,75$ thì

$$P = 1, 5 - 4.1, 5(-0, 75) - 0, 75 = 1, 5(1 + 3) = 6 - 0, 75 = 5, 25$$

+) Với
$$x = -1, 5$$
 và $y = -0, 75$ thì

$$P = -1, 5 - 4(-1, 5) \cdot (-0, 75) - 0, 75 = -1, 5(1+3) - 0, 75 = -6, 75$$

b.
$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 - 1)} = \frac{1}{3}$$

Bài 0.67.

a. Tìm x, y, z, biết:

$$2x = 3y; 4y = 5z$$
 và $x + y + z = 11$

b. Tìm x, biết: |x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x

Hướng dẫn giải

a.
$$2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

b.
$$|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$$

Vì VT
$$\geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0$$
hay x $\geq 0,$ do đó:

$$|x+1| = x+1; |x+2| = x+2; |x+3| = x+3$$

$$(1) \Rightarrow x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x \quad \Rightarrow x = 6$$

Bài 0.68. Cho hàm số: $y = f(x) = -4x^3 + x$

- a. Tính f(0), f(-0, 5)
- b. Chứng minh: f(-a) = -f(a).

Hướng dẫn giải

a.
$$f(0) = 0$$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

b.
$$f(-a) = -4(-a)^3 - a = -4a^3 - a$$

 $-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$
 $\Rightarrow f(-a) = -f(a)$

Bài 0.69. Tìm cặp số nguyên (x; y) biết: $x + y = x \cdot y$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x + y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y - 1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y - 1}$

vì $x \in z \Rightarrow y: y-1 \Rightarrow y-1+1: y-1 \Rightarrow 1: y-1,$ do đó y $-1=\pm 1 \Rightarrow y=2$ hoặc y=0

Nếu y=2 thì x=2

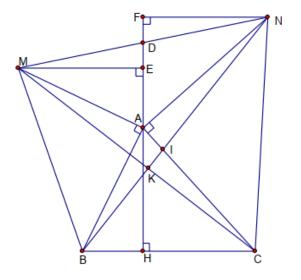
Nếu y = 0 thì x = 0

Vậy các cặp số nguyên (x; y) là: (0, 0) và (2; 2)

Bài 0.70. Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90°. Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

- a. Chứng minh rằng: $\triangle AMC = \triangle ABN$;
- b. Chứng minh: BN \perp CM;
- c. Kẻ AH \perp BC(H \in BC). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.

Hướng dẫn giải



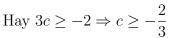


- a. Xét \triangle AMC và \triangle ABN, có:
 - $AM = AB (\Delta AMB vuông cân)$
 - $AC = AN (\triangle ACN vuông cân)$
 - $\angle MAC = \angle NAC (= 90^{\circ} + \angle BAC)$
 - Suy ra $\Delta AMC = \Delta ABN(c g c)$
- b. Gọi I là giao điểm của BN với AC, K là giao điểm của BN với MC.
 - Xét Δ KIC và Δ AIN, có: \angle ANI = \angle KCI(\triangle AMC = Δ ABN)
 - $\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)
 - $\Rightarrow \angle IKC = \angle NAI = 90^{\circ}$, do đó: MC \perp BN
- c. Kẻ ME \perp AH tại E, NF \perp AH tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH.
 - Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^{\circ}$ (vì $\angle MAB = 90^{\circ}$)
 - Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^{\circ}$, nên $\angle AME = \angle BAH$
 - Xét \triangle MAE và \triangle ABH, vuông tại E và H, có:
 - $\angle AME = \angle BAH$ (chứng minh trên)
 - MA = AB
 - Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền-góc nhọn)
 - \Rightarrow ME = AH
 - Chứng minh tương tự ta có $\Delta_{\mathrm{AFN}} = \Delta_{\mathrm{CHA}}$
 - $\Rightarrow FN = AH$
 - Xét \triangle MED và \triangle NFD, vuông tại E và F, có:
 - ME = NF (= AH)
 - $\angle \text{EMD} = \angle \text{FND}($ phụ với $\angle \text{MDE}$ và $\angle \text{FDN},$ mà $\angle \text{MDE} = \angle \text{FDN})$
 - $\Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD$
 - \Rightarrow BD = ND.
 - Vậy AH đi qua trung điểm của MN.

Bài 0.71. Cho ba số a, b, c thõa mãn: $0 \le a \le b+1 \le c+2$ và a+b+c=1. Tìm giá trị nhỏ nhất của c.

Hướng dẫn giải

Vì:
$$0 \le a \le b+1 \le c+2$$
 nên $0 \le a+b+1+c+2 \le c+2+c+2+c+2$
 $\Rightarrow 0 \le 4 \le 3c+6$ (vì a+b+c=1)



Vậy giá trị nhỏ nhất của c
 là:
$$-\frac{2}{3}$$
 khi đó $a+b=\frac{5}{3}$





Bài 0.72.

a. Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{13} - 6^{12}}; \quad B = \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$$

- b. Cho a, b, c là ba số thực khác 0 , thoả mãn : $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b}.$ Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{c}{b}\right).$
- c. Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^5 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 2016x 2017$ tại x = 2017

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{12}} = \frac{3^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{13} - 2^{12} \cdot 3^{12}} \triangleleft$$

$$= \frac{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{12}(3 - 1)} = \frac{3^{12} \cdot 2^{12}(5 - 1)}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2}$$

$$= \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$V$$
ây $A=2$

$$B = \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{5}{2012 \cdot 2017} + \frac{5}{2017 \cdot 2022}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2022}\right) = 2 \cdot \frac{2022 - 7}{2022 \cdot 7} = \frac{2015}{7077}$$

$$\text{Vây } B = \frac{2015}{7077}$$

b. +) Nếu a $+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy B} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

$$+) \text{Nếu } a+b+c=0$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy B} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

c. Tính giá trị của đa thức:

$$f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$$
 tại $x = 2017$

Ta có
$$x = 2017 \Rightarrow \begin{cases} 2018 = x + 1 \\ 2016 = x - 1 \end{cases}$$
.

Khi đó ta có:

$$f(2017) = x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x$$
$$= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x = 0$$

Vây $f(2017) = 0$

Bài 0.73.

a. Cho
$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$
. Chứng minh rằng : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

b. Tìm
$$x, y, z$$
 biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + \left| x^2 + xz \right| = 0$

Hướng dẫn giải

a. Theo bài ra ta có:
$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\Rightarrow \frac{12x - 8y}{16} = \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{16 + 9 + 4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x - 8y = 0 \\ 8y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x = 8y \\ 8y = 6z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{6z}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} (\text{dpcm})$$



$$\Rightarrow \begin{cases} |x - \frac{1}{2}| = 0 \\ |y + \frac{2}{3}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ x(x+z) = 0 \end{cases}$$

$$\forall \hat{a} \ x = \frac{1}{2}; \ y = -\frac{2}{3}; \ z = -\frac{1}{2}$$

Bài 0.74.

- a. Tìm các cặp số tự nhiên $(\mathbf{x};\mathbf{y})$ sao cho: $49-\mathbf{y}^2=12(\mathbf{x}-2001)^2$
- b. Cho $|2019x_1 2018y_1| + |2019x_2 2018y_2| + \ldots + |2019x_{2018} 2018y_{2018}| \le 0$. Chứng minh

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019}.$$

c. Một cửa hàng có ba cuộn vải, tổng chiều dài ba cuộn vải đó là 186 m, giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn là như nhau. Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba. Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2. Tính xem trong ngày đó cửa hàng đã bán được bao nhiều mét vải mỗi cuộn.

Hướng dẫn giải

a. Xét đẳng thức: $49 - y^2 = 12(x - 2001)^2$.

Vế phải là mộ số chẵn không âm nên y là một số lẻ và không lớn hơn 7.

Khi y =
$$1 \Rightarrow$$
 x = 2003 và x = 1999

Khi
$$y=3$$
không có giá trị $x\in N$

Khi
$$y = 5$$
 không có giá trị $x \in \mathbb{N}$

Khi
$$y = 7 \Rightarrow x = 2011$$

Vậy các cặp (x; y) cần tìm là (2003; 1); (1999; 1); (2001; 7)

b. Ta có:

$$|2019x_1 - 2018y_1| \ge 0$$

$$|2019x_2 - 2018y_2| \ge 0$$

. . .

$$|2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \ge 0$$

$$\Rightarrow (2017x_1 - 2016y_1)^2 + (2017x_2 - 2016y_2)^2 + \ldots + (2017x_{2016} - 2016y_{2016})^2 \ge 0$$



Theo bài ra ta có:

$$|2019x_1 - 2018y_1| + |2019x_2 - 2018y_2| + \ldots + |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| \le 0$$

Suy ra:

$$\begin{cases} |2019x_1 - 2018y_1| = 0 \\ |2019x_2 - 2018y_2| = 0 \\ \vdots \\ |2019x_{2018} - 2018y_{2018}| = 0 \end{cases}$$

$$|2019x_{2018} - 2018y_{2018}| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2019x_1 = 2018y_1 \\ 2019x_2 = 2018y_2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{2018}{2019} \\ \vdots \end{cases}$$

$$2019x_{2018} = 2018y_{18}$$

$$2019x_{2018} = 2018y_{18}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{2018}}{y_{2018}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + \dots + y_{2018}}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2018}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2018}} = \frac{2018}{2019} \text{(dpcm)}$$

- c. Gọi chiều dài cuộn vải thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là x, y, z(m) ĐK: 0 < x, y, z < 186
 - +) Tổng chiều dài ba cuộn vải đó là 186 m \Rightarrow x + y + z = 186
 - +) Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba

Trong ngày đó cửa hàng đã bán được số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là $\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}, \frac{2z}{5}$ (mét)

- +) Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2 và giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn như nhau.
- \Rightarrow Số mét vải bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2

$$\Rightarrow \frac{x}{3} : \frac{2y}{3} : \frac{2z}{5} = 2 : 3 : 2 \Rightarrow \frac{2x}{12} = \frac{2y}{9} = \frac{2z}{10}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+9+10} = \frac{186}{31} = 6$$



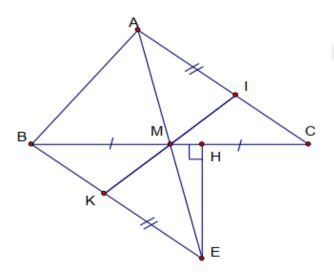
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=72 \\ \\ y=54 \end{array} \right. \mbox{ (Thỏa mãn điều kiện)} \\ z=60 \end{array}$$

Vậy trong ngày đó cửa hàng đã bán số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là : 24; 36; 24 (mét).

Bài 0.75. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

- a. AC = EB và AC//BE
- b. Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK. Chứng minh ba điểm I, M K thẳng hàng
- c. Từ E kẻ $EH \perp BC(H \in BC)$. Biết $HBE = 50^{\circ}; MEB = 25^{\circ}$. Tính HEM và BME

Hướng dẫn giải



a. Xét
$$\triangle AMC$$
 và $\triangle EMB$ có : $AM = EM$ (gt)

$$AMC = EMB$$
 (đối đỉnh)

$$BM = MC$$
 (gt)

Nên :
$$\triangle AMC = \Delta EMB$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow$$
 AC = EB

$$Vi \triangle AMC = \triangle EMB$$

$$\Rightarrow MAC = MEB$$



MàMAC và MEB là 2 góc có vị trí so le trong

Suy ra AC//BE.

b. Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM(gt)$$

$$MAI = MEK \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK (gt)$$

Nên
$$\triangle AMI = \Delta EMK$$
(c.g.c)

Suy ra
$$AMI = EMK$$

Mà
$$AMI + IME = 180^{\circ}$$
 (tính chất hai góc kề bù)

- $\Rightarrow EMK + IME = 180^{\circ}$
- \Rightarrow Ba điểm I; M; K thẳng hàng (đpcm)
- c. Trong tam giác vuông BHE ($H=90^{\circ}$) có $HBE=50^{\circ}$

$$\Rightarrow HBE = 90^{\circ} - HBE = 90^{\circ} - 50^{\circ} = 40^{\circ}$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^{\circ} - 25^{\circ} = 15^{\circ}$$

BMElà góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

Nên $BME = HEM + MHE = 15^{\circ} + 90^{\circ} = 105^{\circ}$ (định lý góc ngoài của tam giác)

Bài 0.76. Tìm các số tự nhiên $x, y, z \neq 0$ thoả mãn điều kiện: x + y + z = xyz

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử x \leq y \leq z

Vì x, y, z là các số tự nhiên khác $0 \Rightarrow 1 \leq x \leq y \leq z$

Ta có
$$x + y + z = xyz$$
 (*)

$$\Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào (*) ta được:

$$1 + y + z = yz$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1)=2$$



$$\Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x, y, z) = (1; 2; 3)$$

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên các bộ số (x, y, z) thoả mãn bài toán là :

$$(1;2;3);(1;3;2);(2;1;3);(2;3;1);(3;1;2);(3;2;1)$$



$\S16.$ ĐỀ SỐ 16

Bài 0.77.

a. Tính:
$$A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$$

b. So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Hướng dẫn giải

a. Biến đổi:

$$A = \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1$$

b. + Biến đổi:
$$16^{20} = 2^{4.20} = 2^{80}$$

$$+$$
 Có $2^{80} < 2^{100}$ vì $(1 < 2; 80 < 100)$

$$V$$
ây $16^{20} < 2^{100}$

Bài 0.78.

a. Tìm
$$x$$
 biết: $|2x-7|+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$

b. Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13.3^5$



a. Ta có
$$|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = |2x - 7| = 1$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 1$$
 hoặc $2x - 7 = -1$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy
$$x = 4$$
 hoặc $x = 3$.

b. Biến đổi được
$$3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13.3^5$$

$$\Rightarrow 3^n = 3^6$$

$$\Rightarrow$$
 n = 6

Bài 0.79.

a. Cho dãy tỉ số bằng nhau:
$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$
 Tính giá trị biểu thức Q, biết Q =
$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$



b. Cho biểu thức $M=\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+t}+\frac{z}{y+z+t}+\frac{t}{x+z+t}$ với x,y,z,t là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10}<1025$.

Hướng dẫn giải

a. + Biến đổi:
$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

+ Nếu
$$a+b+c+d \neq 0$$
 thì $a=b=c=d \Rightarrow Q=1+1+1+1=4$

$$+$$
 Nếu $a+b+c+d=0$

thì
$$a + b = -(c + d)$$
; $b + c = -(d + a)$; $c + d = -(a + b)$; $d + a = -(b + c)$

$$\Rightarrow Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

+ KL:

$$Q = 4$$
 khi $a + b + c + d \neq 0$

$$Q=-4$$
 khi $a+b+c+d=0$

b. + Ta có:
$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$
+ Có $M^{10} < 2^{10}(Vi M > 0)$ mà $2^{10} = 1024 < 1025$

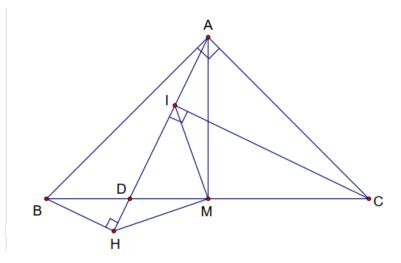
$$Vây $M^{10} < 1025$$$

Bài 0.80.

- 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kể các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:
 - (a) BAM = ACM và BH = AI.
 - (b) Tam giác MHI vuông cân.
- 2. Cho tam giác ABC có góc $\hat{A}=90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E. Chứng minh rằng AB + AC = BC + DE.

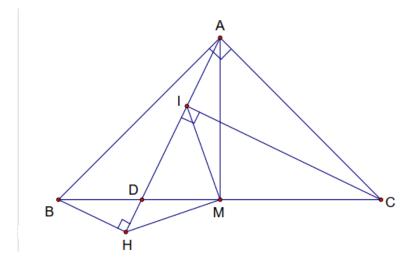
Hướng dẫn giải

1.



- (a) * Chứng minh: BAM = ACM
 - + Chúng minh được: $\triangle ABM = \Delta ACM(c c c)$
 - + Lập luận được: $BAM = CAM = 45^\circ$
 - +Tính ra được $ACM = 45^{\circ}$
 - $\Rightarrow BAM = ACM$
 - * Chứng minh: BH = AI.
 - + Chỉ ra: BAH = ACI(cùng phụ DAC)
 - +Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHA($ Cạnh huyền góc nhọn)
 - $\Rightarrow BH = AI$ (2 canh tương ứng)
- (b) Tam giác MHI vuông cân.
 - + Chứng minh được $AM \perp BC$
 - + Chứng minh được AM = MC
 - + Chứng minh được HAM = ICM
 - + Chứng minh được $\triangle HAM = \Delta ICM$ (c-g-c)
 - $\Rightarrow HM = MI (*)$
 - + Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow HMA = IMC \Rightarrow HMB = IMA (do <math>AMB = AMC = 90^{\circ}$
 - + Lập luận được: $HMI = 90^{\circ} (**)$
 - Từ (*) và (**) => Δ MHI vuông cân

2.



+ Chứng minh được:

$$AEC = ABC + BAE = HAD + DAC + BAE = EAH + HAD + DAC = EAC$$

(Vì B và HAC cùng phụ với BAH)

Suy ra tam giác AEC cân tại $C \Rightarrow AC = CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được AB = BD (**)

 $+ \text{ Từ }(^*) \text{ và }(^{**}) \Rightarrow \text{AB} + \text{AC} = \text{BD} + \text{EC} = \text{ED} + \text{BC}$

Bài 0.81. Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn x + y + z = 0 và $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2 .

Hướng dẫn giải

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử x; y ≥ 0

$$\Rightarrow$$
 z = -x - y \leq 0

$$+)V - 1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1 => x^2 + y^4 + z^6 \le |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \le x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \le -2z$$

+)
$$-1 \le z \le 1$$
 và $z \le 0 => x^2 + y^4 + z^6 \le 2$

KL: Vậy
$$x^2 + y^4 + z^6 \le 2$$

 \overline{T} rang 71/194



§17. ĐỀ SỐ 17

Bài 0.82. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy + ay + ab + by)} \text{ V\'oi } a = \frac{1}{3}; b = -2; x = \frac{3}{2}; y = 1$$

Hướng dẫn giải

$$A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy + ay + ab + by)}$$

$$= \frac{a(-x-y) + b(-x-y) - a(b-x) + y(b-x)}{abxy(xy + ay + ab + by)}$$

$$= \frac{-ax - ay - bx - by - ab + ax + by - xy}{abxy(xy + ay + ab + by)}$$

$$= \frac{-ay - bx - ab - xy}{abxy(xy + ay + ab + by)} = \frac{-(xy + ay + ab + by)}{abxy(xy + ay + ab + by)}$$

$$= \frac{-1}{abxy}$$

Với
$$a = \frac{1}{3}$$
; $b = -2$; $x = \frac{3}{2}$; $y = 1$ ta được:

$$A = \frac{-1}{\frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = 1$$

Bài 0.83. Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$ Hướng dẫn giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9$$
 (3)

Cộng vế với vế của (1) (2) (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì
$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$$
 nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Bài 0.84. Có 3 mảnh đất hình chữ nhật: A; B và C. Các diện tích của A và B tỉ lệ với A và Adiện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27~\mathrm{m}.$ B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24~\mathrm{m}.$ Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất đó.

🔑 Hướng dẫn giải

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là S_A , d_A , r_A , S_B , d_B , r_B , S_c , d_c , r_c . Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng. Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\Rightarrow r_A = 12(m); r_B = 15(m) = r_C$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài. Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7.24}{8} = 21(\text{m}) = d_A$$

Do đó: $S_A=d_A.r_A=21.12=252\left(m^2\right)$

$$S_B = d_B.r_B = 21.15 = 315 \, (m^2)$$

$$S_{c} = d_{C}.r_{C} = 24 \cdot 15 = 360 \left(m^{2}\right)$$

Bài 0.85. Cho 2 biểu thức:

$$A = \frac{4x - 7}{x - 2}; \quad B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}$$

- a. Tìm giá trị nguyên của xđể mỗi biểu thức có giá trị nguyên
- b. Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a. Ta có: A =
$$\frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$$

Với
$$x \in Z$$
 thì $x - 2 \in Z$.

Để A nguyên thì
$$\frac{1}{x-2}$$
 nguyên.

$$\Rightarrow$$
 x -2 là ước của 1

Ta có:
$$x-2=1$$
 hoặc $x-2=-1$. Do đó: $x=3$ hoặc $x=1$

Vậy để A nguyên thì
$$x=3$$
 hoặc $x=1$

$$+B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} = \frac{3x(x - 3) + 2}{x - 3} = 3x + \frac{2}{x - 3}$$

Với
$$x \in Z$$
 thì $x - 3 \in Z$.

Để B nguyên thì
$$\frac{2}{x-3}$$
 nguyên. \Rightarrow x - 3 là ước của 2



Ta có: $x - 3 = \pm 2$ hoặc $x - 3 = \pm 1$.

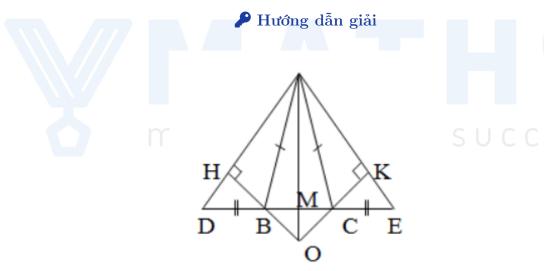
Do đó
$$x = 5; x = 1; x = 4; x = 2$$

Vậy để B nguyên thì x=5 hoặc x=1 hoặc x=4 hoặc x=2

b. Từ câu a) suy ra: Đê A và B cùng nguyên thì x=1

Bài 0.86. Cho tam giác cân ABC, AB = AC. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho BD = CE

- a. Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- b. Gọi M là trung điểm của BC. Chúng minh AM là tia phân giác của góc DAE
- c. Từ B và C vẽ BH và CK theo thứ tự vuông góc với AD và AE. Chứng minh BH = CK
- d. Chứng minh 3 đường thẳng AM; BH; CK gặp nhau tại 1 điểm.



a. $\triangle ABC$ cân có AB = AC nên: ABC = ACB

Suy ra:
$$ABD = ACE$$

Xét

$$\in ABD$$
 và $\triangle ACE$ có:

$$AB = AC(gt)$$

$$\mathrm{ABD} = \mathrm{ACE}(\mathrm{CM}\ \mathrm{tr} \hat{\mathrm{e}}\mathrm{n}\)$$

$$\mathrm{DB} = \mathrm{CE}(\mathrm{gt})$$

Do đó

$$\in ABD = \Delta ACE(c-g-c)$$

 \Rightarrow AD = AE (2 cạnh tương ứng). Vậy $\Delta {\rm ADE}$ cân tại A.



b. Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$$AD = AE (CM trên)$$

Do đó
$$\triangle AMD = \triangle AME(c - c - c)$$

$$\Rightarrow MAD = MAE$$
.

Vậy AM là tia phân giác của DAE

c. Vì $\triangle ADE$ cân tại A (CM câu a) nên ADE = AED

Xét
$$\triangle BHD$$
 và $\triangle CKE$ có:

$$BDH = CEK \text{ (Do } ADE = AED$$

$$DB = CE (gt)$$

- $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (Cạnh huyền- góc nhọn) Do đó: BH = CK.
- d. Gọi giao điểm của BH và CK là O.

Xét
$$\triangle AHO$$
 và $\triangle AKO$ có:

OA: Canh chung

$$AH = AK(DoAD = AE; DH = KE (vì \triangle BHD = \triangle CKE))$$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO$$
 (Cạnh huyền- Cạnh góc vuông)

Do đó OAH = OAK nên AO là tia phân giác của KAH hay AO là tia phân giác của DAE.

Mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của DAE. Do đó AO \equiv AM, suy ra 3 đường thẳng AM; BH; CK cắt nhau tại O.

§18. ĐỀ SỐ 18

Bài 0.87.

- a. So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$
- b. Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.
- c. Cho $S = 1 \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2013} \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \ldots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}.$$

Tính $(S - P)^{2016}$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có: $\sqrt{17} > \sqrt{16}$; $\sqrt{26} > \sqrt{25}$

$$\Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 = 4 + 5 + 1 = 10$$

Mà $10 = \sqrt{100} > \sqrt{99}$

Vây: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}$.

b. Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$

Suy ra:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$$

Vậy:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$$

c. Ta có: $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}=S.$$

Do đó $(S-P)^{2016} = 0$

Bài 0.88.

- a. Một số nguyên tố p
 chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.
- b. Tìm số tự nhiên \overline{ab} sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$

Hướng dẫn giải

a. Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: p = 42k + r(0 < r < 42, k, r tự nhiên)

Hay p = 2.3.7k + r.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

 \Rightarrow r là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và r<42

Học sinh chỉ ra được r=25

Vậy hợp số r=25

b. Ta có: $(a + b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên a + b là số chính phương.

Đặt $a + b = x^2 (x \in N^*)$

Suy ra: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 = x^6 \Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100 \text{ và } \overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4$ vì $x \in N^*$

- Nếu $x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2+7)^3 \Rightarrow x = 3 \text{ (nhận)}$
- Nếu x = 4 $\Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 \neq (6+4)^3 = 1000$

 $\Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: $\overline{ab} = 27$

Bài 0.89.

- a. Cho x; y; z $\neq 0$ và x y z = 0. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 \frac{z}{x}\right)\left(1 \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)$
- b. Cho $\frac{3x-2y}{4}=\frac{2z-4x}{3}=\frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ Cho biểu thức $M=\frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a. Ta có: $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right) = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y-x}{y} \cdot \frac{z+y}{z}$

Từ: $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{y}; \mathbf{y} - \mathbf{x} = -\mathbf{z}$ và $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$

Suy ra: B = $\frac{y}{x} \cdot \frac{-z}{y} \cdot \frac{x}{z} = -1(x; y; z \neq 0)$

b. Ta có: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ => $\frac{4(3x - 2y)}{16} = \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:



$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = 0$$

$$\Rightarrow > 3x = 2y = > \frac{x}{2} = \frac{y}{3}(1) \text{ và } \frac{3(2z-4x)}{9} = 0$$

$$\Rightarrow 2z = 4x = > \frac{x}{2} = \frac{z}{4}(2)$$
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

c. Ta có:
$$M = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1(x \neq 2)$$

Mnhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{3}{x-2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x-2$ lớn nhất và x-2<0

 $\Leftrightarrow x$ lớn nhật và $x<2 \Leftrightarrow x=1$ (vì xnguyên)

Khi đó GTNN của M là: $M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4$ khi x = 1

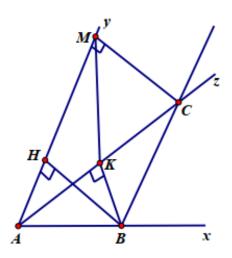
Bài 0.90. Cho $xAy=60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Kẻ BH \perp Ay tại H, CM \perp Ay tại M, BK \perp AC tại K. Chứng minh:

a.
$$KC = KA$$

b. BH =
$$\frac{AC}{2}$$

c. △KMC đều.





a. Chứng minh: KC = KA

Ta có $yAz = zAx = 30^{\circ} (Az là tia phân giác của <math>xAy$)

Mà: yAz = ACB(Ay//BC, so le trong)

$$\Rightarrow \approx Ax = ACB \Rightarrow \triangle ABC$$
 cân tại B

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy

- \Rightarrow BK cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow KC = KA$
- b. Chứng minh: BH = $\frac{AC}{2}$

Ta có: $ABH = 90^{\circ} - xAy = 30^{\circ} (\triangle ABH vuông tại H).$

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$, có:

AB : Cạnh chung; $= Ax = ABH (= 30^{\circ})$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \Delta BAK \Rightarrow BH = AK$$

Mà: AK =
$$\frac{AC}{2}(cmt) \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

c. Chứng minh: △KMC đều

Ta có: \triangle AMC vuông tại M có MK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = AC/2$$

Mà: AK = KC = AC/2(2)

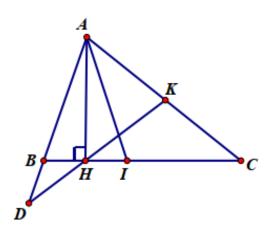
Từ (1) và (2) => KM = KC $\Rightarrow \Delta$ KMC cân tại K (3)

Mặt khác: \triangle AMC có $AMC=90^\circ;$ yAz = $30^\circ \Rightarrow MCK=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle AMC$ đều

Bài 0.91. Cho ΔABC có $B=2\cdot C<90^\circ$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho AD = HC. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hướng dẫn giải



Ta có: $B=2.C\Rightarrow B>C$ nên AC > AB \Rightarrow HC > HB

Trên đoạn thẳng HC lấy điểm I sao cho IH = HB $\Rightarrow \Delta AHI = \Delta AHB$

$$\Rightarrow$$
 AI = AB và $AIB = ABC = 2 \cdot ACB$

Mặt khác: $AIB = ACB + IAC \Rightarrow IAC = ACB$

Do đó: IA = IC < HC hay AB < HC = AD

Gọi K là giao điểm của DH với AC.

Vì AD = HC, AB = IC nên BD = HI = HB $\Rightarrow \Delta$ DBH cân tại B

Do đó: $BDH = BHD = \frac{1}{2}ABC = ACB$

Suy ra: $KHC = ACB(=BHD) \Rightarrow KAH = KHA$ (phụ hai góc bằng nhau)

Suy ra: KA = KH = KC hay K là trung điểm của AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC





Bài 0.92.

- a. Tính giá trị biểu thức $A=\left(2\frac{1}{3}+3,5\right):\left(-4\frac{1}{6}+3\frac{1}{7}\right)+7,5$
- b. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$
- c. Tìm đa thức M biết rằng: $M + \left(5x^2 2xy\right) = 6x^2 + 9xy y^2$. Tính giá trị của M khi x,y thỏa mãn $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \le 0$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3, 5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7}\right) + 7, 5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{22}{7}\right) + \frac{15}{2}$$
$$= \frac{35}{6} : \frac{-43}{42} + \frac{15}{2} = \frac{-245}{43} + \frac{15}{2} = \frac{-490}{86} + \frac{645}{86} = \frac{155}{86}$$

b. Ta có:

$$B = \frac{2 \times 8^4 \times 27^2 + 4 \times 6^9}{2^7 \times 6^7 + 2^7 \times 40 \times 9^4} = \frac{2^{13} \times 3^6 + 2^{11} \times 3^9}{2^{14} \times 3^7 + 2^{10} \times 3^8 \times 5}$$
$$= \frac{2^{11} \times 3^6 \times (2^2 + 3^3)}{2^{10} \times 3^7 \times (2^4 + 3 \times 5)} = \frac{2}{3}$$

c. Ta có:

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 => M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Ta có } (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \le 0$$

Ta có :
$$\begin{cases} (2x-5)^{2012} \ge 0 \\ = > (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \ge 0 \end{cases}$$
$$(3y+4)^{2014} \ge 0$$

Mà
$$(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \le 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vây} \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vây
$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Bài 0.93.



a.
$$\operatorname{Tim} x : \frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

b. Tìm x, y, z biết:
$$2x = 3y$$
; $4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

c. Tìm
$$x$$
, biết : $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ (Với n là số tự nhiên)

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$\frac{1}{2} - \left| \mathbf{x} + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

 $\Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$
TH1: $\mathbf{x} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \mathbf{x} = -\frac{1}{30}$
TH2: $\mathbf{x} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \mathbf{x} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{11}{30}$

b. Ta có :
$$2x = 3y$$
 suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ hay $\frac{x}{15} = \frac{y}{10}$
 $4y = 5z$ suy ra $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ hay $\frac{y}{10} = \frac{z}{8}$

Vây $x = -\frac{1}{30}$; $x = -\frac{11}{30}$

Vây
$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$
Suy ra $x = 5, y = \frac{10}{3}, z = \frac{8}{3}$

c. Ta có:
$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$(x+2)^{n+1} \left[1 - (x+2)^{10} \right] = 0$$

TH1:
$$(x+2)^{n+1} = 0$$
 suy ra $x = -2$

TH2:
$$1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$(x+2)^{10} = 1$$

$$x + 2 = 1$$
 suy ra $x = -1$

$$x+2=-1$$
 suy ra $x=-3$

Vậy
$$x = -2; x = -1; x = -3$$

Bài 0.94.



- a. Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13 cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lân lượt là $2~{\rm cm}, 3~{\rm cm}, 4~{\rm cm}$.
- b. Tìm x, y nguyên biết: 2xy x y = 2

Hướng dẫn giải

a. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm)(x, y, z > 0)

Theo bài ra ta có : x + y + z = 13

và
$$2x = 3y = 4z = 2 \text{ S}_{ABC}$$

Suy ra
$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

suy ra
$$x = 6, y = 4; z = 3$$

KL:
$$x = 6, y = 4, z = 3$$
.

b. Ta có: 2xy - x - y = 2

$$4xy - 2x - 2y = 4$$

$$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$$

$$(2y-1)(2x-1) = 5$$

HS xét 4 trường hợp tìm ra $(x,y) = \{(1;3); (3;1); (-2;0); (0;-2)\}$

(Mỗi trường hợp đúng cho $0.25~\mathrm{d})$

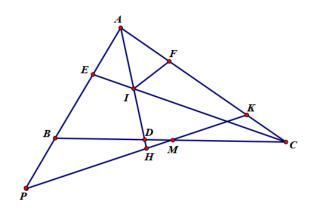
Vậy
$$(x,y) = \{(1,3); (3,1); (-2,0); (0,-2)\}$$

Bài 0.95. Cho tam giác ABC (AB < AC, góc B = 60°). Hai phân giác AD và CE của \triangle ABC cắt nhau ở I, từ trung điểm M của BC kẻ đường vuông góc với đường phân giác AI tại H, cắt AB ở P, cắt AC ở K.

- a. Tính AIC
- b. Tính độ dài cạnh AK biết PK = 6 cm, AH = 4 cm.
- c. Chứng minh Δ IDE cân.

Hướng dẫn giải





- a. Ta có $\angle ABC = 60^{\circ}$ suy ra $\angle BAC + \angle BCA = 120^{\circ}$
 - AD là phân giác của $\angle {\rm BAC}$ suy ra $\angle {\rm IAC} = \frac{1}{2} \angle {\rm BAC}$

CE là phân giác của $\angle ACB$ suy ra $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

Suy ra $\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^{\circ} = 60^{\circ} \text{ Vây } \angle AIC = 120^{\circ}$

b. Xét $\triangle AHP$ và $\triangle AHK$ có

 $\angle PAH = \angle KAH$ (AH là phân giác của $\angle BAC$)

AH chung

$$\angle PHA = \angle KHA = 90^{\circ}$$

Suy ra $\triangle {\rm AHP} = \Delta {\rm AHK}$ (g-c-g) suy ra ${\rm PH} = {\rm KH}$ (2 cạnh tương ứng). Vậy ${\rm HK} = 3~{\rm cm}$

Vì \triangle AHK vuông ở H theo định lý Pitago ta có

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

Suy ra AK = 5 cm

$$\mathrm{Vi} \ \angle \mathrm{AIC} = 120^{\circ}$$

Do đó
$$\angle AIE = \angle DIC = 60^{\circ}$$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho AF = AE

Xét \triangle EAI và \triangle FAI có

$$AE = AF$$

$$\angle EAI = \angle FAI$$

AI chung

Vậy
$$\triangle EAI = \Delta FAI(c - g - c)$$

suy ra IE = IF (hai cạnh tương ứng) (1)

$$\angle {\rm AIE} = \angle {\rm AIF} = 60^{\circ}$$
suy ra $\angle {\rm FIC} = \angle {\rm AIC} - \angle {\rm AIF} = 60^{\circ}$

Xét \triangle DIC và \triangle FIC có

$$\angle DIC = \angle FIC = 60^{\circ}$$



Cạnh IC chung

$$\angle DIC = \angle FCI$$

Suy ra
$$\Delta {\rm DIC} = \Delta {\rm FIC}({\rm g-c-g})$$

Suy ra ID = IF (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta {\rm IDE}$ cân tại I

Bài 0.96. Chứng minh rằng $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\sqrt{10}$ là số hữu tỷ

$$\sqrt{10} = \frac{a}{b}$$
 (a, b là số tự nhiên , b khác 0; (a; b) = 1)

$$\frac{a^2}{b^2} = 10$$

Suy ra
$$a^2 = 10b^2$$

a:
$$2 \Rightarrow a^2 : 4 \Rightarrow 10b^2 : 4 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow b$$
:2

Vậy
$$(a; b) \neq 1$$

Nên
$$\sqrt{10}$$
 là số vô tỷ

$\S 20.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 20

Bài 0.97.

a. Tính
$$M = \left(\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0, 25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0, 875 + 0, 7}\right) : \frac{2017}{2018}.$$

b. Tìm x, biết: |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| = 2.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$M = \left(\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0, 25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0, 875 + 0, 7}\right) : \frac{2017}{2018}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}}\right) : \frac{2017}{2018}$$

$$= \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}\right) : \frac{2017}{2018}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2017}{2018} = 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chi khi $(x-2017)(2019-x)\geq 0$ và 2018-x=0, suy ra: $2017\leq x\leq 2019$ và x = 2018 \Rightarrow x = 2018

Vậy x = 2018.

Bài 0.98.

a. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right).$

- b. Cho hai đa thức: f(x) = (x-1)(x+3) và $g(x) = x^3 ax^2 + bx 3$ Xác định hệ số a; b của đa thức g(x) biết nghiệm của đa thức f(x) cũng là nghiệm của đa thức g(x).
- c. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: x + y + z = xyz.

Hướng dẫn giải

a. Vì a, b,c là các số dương nên $a+b+c\neq 0$ Nên theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:



$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Mà: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

$$\text{Vây } B = 8$$

b. HS biết tìm nghiệm của $f(x) = (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x=1; x=-3$

Nghiệm của f(x) cũng là nghiệm của $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$ nên:

Thay x = 1 vào g(x) ta có: 1 - a + b - 3 = 0

Thay x = -3 vào g(x) ta có: -27 - 9a - 3b - 3 = 0

Từ đó HS biến đổi và tính được: a = -3; b = -1

c. Vì $x, y, z \in Z^+$ nên giả sử $1 \le x \le y \le z$

Theo bài ra: $1 = \frac{1}{vz} + \frac{1}{vx} + \frac{1}{zx} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

Suy ra: $x^2 \le 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có:

Thay vào đầu bài ta có:
$$1+y+z=yz \Rightarrow y-yz+1+z=0$$

$$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

TH1:
$$\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

TH2:
$$\begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$
 (loại)

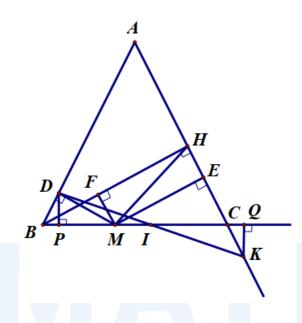
Vậy (x; y; z) = (1; 2; 3) và các hoán vị

Bài 0.99. Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.



- a. Chứng minh: $\triangle DBM = \triangle FMB$.
- b. Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $\mathrm{MD} + \mathrm{ME}$ có giá trị không đổi.
- c. Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = EH. Chứng minh BC đi qua trung điệm của đoạn thẳng DK.

Hướng dẫn giải



- a. Chứng minh được $\Delta DBM = \Delta FMB$ (ch-gn)
- b. Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn) $\Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng)(1)
 - +) C/m : Δ MFH = Δ HEM \Rightarrow ME = FH (2 canh tương ứng)(2)

Từ (1) và (2) suy ra: MD + ME = BF + FH = BH

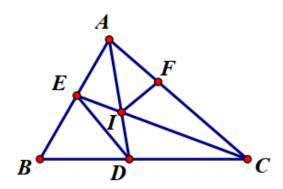
BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đ
pcm)

- c. Vẽ DP \bot BC tại $P,KQ\perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC
 - +) Chứng minh: BD = FM = EH = CK
 - +) Chúng minh: $\triangle BDP = \triangle CKQ(ch\text{-gn}) \Rightarrow DP = KQ$ (canh tương ứng)
 - +) Chứng minh: IDP = IKQ $\Rightarrow \Delta \text{DPI} = \Delta \text{KQI}(g-c-g) \Rightarrow \text{ID} = \text{IK}(\text{đpcm})$

Bài 0.100. Cho tam giác ABC $(AB < AC, B = 60^{\circ})$. Hai tia phân giác AD $(D \in BC)$ và CE ($E \in AB$) của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I. Chứng minh $\triangle IDE$ cân.

Hướng dẫn giải





Ta có
$$ABC = 60^{\circ} \Rightarrow BAC + BCA = 120^{\circ}$$

AD là phân giác của BAC suy ra IAC =
$$\frac{1}{2}$$
BAC

CE là phân giác của ACB suy ra ICA =
$$\frac{1}{2}$$
BCA

Suy ra IAC + ICA =
$$\frac{1}{2} \cdot 120^{\circ} = 60^{\circ} \Rightarrow AIC = 120^{\circ}$$

Do đó AIE = DIC =
$$60^{\circ}$$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho AF = AE

Xét $\triangle EAI$ và $\triangle FAI$ có:

$$AE = AF$$

$$EAI = FAI$$

AI chung

Vậy
$$\Delta EAI = \Delta FAI(c - g - c)$$

suy ra IE = IF (hai cạnh tương ứng) (1)

$$AIE = AIF = 60^{\circ} \Rightarrow FIC = AIC - AIF = 60^{\circ}$$

Chứng minh
$$\Delta DIC = \Delta FIC(g - c - g)$$

Suy ra ID = IF (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta {\rm IDE}$ cân tại I

Bài 0.101. Cho
$$S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \ldots + \frac{n^2-1}{n^2}$$
 (với $n \in N$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Có
$$S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

= $(n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$

$$\mathrm{D A} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Do
$$A>0$$
 nên $S_{\rm n} < n-1$



Mặt khác A
$$< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2\left(\text{ do } \frac{1}{n} > 0\right)$$

$$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1 \text{ nên } S_n \text{ không là số nguyên}$$



$\S21.$ Đ \hat{E} S \hat{O} 21

Bài 0.102.

- a. Tính giá trị biểu thức $A = \left(2\frac{1}{3} + 3, 5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7, 5$
- b. Rút gọn biểu thức $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$
- c. Tính đa thức M biết rằng : $M + \left(5x^2 2xy\right) = 6x^2 + 9xy y^2$. Tính giá trị của M khi x,y thỏa mãn $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \le 0$.

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3, 5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7, 5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2}$$

= $\frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$

b.
$$B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot (2^3)^4 \cdot (3^3)^2 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5}$$
$$= \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$$

c.
$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\Rightarrow M = 6x^{2} + 9xy - y^{2} - 5x^{2} + 2xy = x^{2} + 11xy - y^{2}$$

$$\text{Ta c\'o}: \begin{cases} (2x - 5)^{2018} \ge 0 \\ \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \ge 0 \end{cases}$$

$$(3y + 4)^{2020} \ge 0$$

Mà
$$(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \le 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2x-5)^{2018}=0\\ (3y+4)^{2020}=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{5}{2}\\ y=-\frac{4}{3} \end{array} \right. \text{ Thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Bài 0.103. Tìm x biết:

a.
$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

b.
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

c. Tìm x, y nguyên biết 2xy - x - y = 2

Hướng dẫn giải

a.
$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

 $\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \frac{130}{343}$
Vây $x = \frac{130}{343}$

b.
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49.$$

$$V$$
ây $x = 49$

c.
$$2xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y = 4$$

 $\Leftrightarrow 2x(2y - 1) - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow (2y - 1)(2x - 1) = 5$

HS xét 4 trường hợp tìm ra $(x, y) = \{(1, 3), (3, 1), (-2, 0), (0, -2)\}$

Vậy
$$(x, y) = \{(1, 3), (3, 1), (-2, 0), (0, -2)\}$$

Bài 0.104.

- a. Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35;210;12.
- b. Cho

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

- . Chứng minh biểu thức $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ có giá trị nguyên.
- c. Cho a, b, c, d $\in Z$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 8 d^3)$. Chứng minh a + b + c + d chia hết cho 3

🔑 Hướng dẫn giải

a. Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12 .

Ta có
$$(x+y) \cdot 35 = (x-y).210 = 12.xy$$

$$T\text{ \'u }(x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$$
 thay vào đẳng thức $(x + y) \cdot 35 = 12.xy$ ta được

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \{0;5\}$$
 mà $y>0$ nên $y=5$

Với
$$y = 5$$
 thì $x = 7$.

b.
$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

Nếu
$$x + y + z + t = 0$$
 thì $P = -4$

Nếu
$$x + y + z + t \neq 0$$
 thì $x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

Vây P nguyên

c. Ta có
$$a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8 d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15 d^3$$

Mà $3c^3 - 15d^3 : 3$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0;\pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0;\pm 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}$; $c \equiv c^3 \pmod{3}$; $d \equiv d^3 \pmod{3}$

$$\Rightarrow a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$$
 (2)

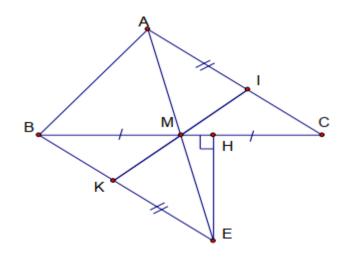
Từ (1) và (2) suy ra a + b + c + d chia hết cho 3

Bài 0.105. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

- a. $AC = EB \ va \ AC//BE$
- b. Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng
- c. Từ E kẻ $EH \perp BC(H \in BC)$. Biết $HBE = 50^{\circ}; MEB = 25^{\circ}$. Tính HEM và BME

🔑 Hướng dẫn giải





a. Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có :

$$AM = EM$$
 (gt) $AMC = EMB$ (đối đỉnh)

$$BM = MC$$
 (gt)

$$\Rightarrow \triangle AMC = \Delta EMB$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = EB$$
 (Hai canh tương ứng)

Vì
$$\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow MAC = MEB$$
 mà 2 góc này ở vị trí so le trong

Suy ra AC//BE.

b. Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có : AM = EM (gt) MAI = MEK (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$)

$$AI = EK (gt)$$

$$AI = EK (gt)$$

 $N\hat{e}n \triangle AMI = \Delta EMK (c.g.c)$

$$\Rightarrow AMI = EMK$$

Mà
$$AMI + IME = 180^{\circ}$$
 (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow$$
 EMK + $IME=180^{\circ}$ \Rightarrow Ba điểm I; M; K thẳng hàng

c. Trong tam giác vuông BHE $(H = 90^{\circ})$ có $HBE = 50^{\circ}$

$$\Rightarrow HBE = 90^{\circ} - HBE = 90^{\circ} - 50^{\circ} = 40^{\circ} \Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^{\circ} - 25^{\circ} = 15^{\circ}BME$$
 là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$$\Rightarrow BME = HEM + MHE = 15^{\circ} + 90^{\circ} = 105^{\circ}$$

Bài 0.106. Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \ldots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Ta có:
$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500}\right)$$



$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) = 49 - M$$

Trong đó
$$M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{50^2}\right)$$

Áp dụng tính chất
$$\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\text{Ta c\'o: } \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49}\right)$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lai có:

$$M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.



$\S22.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 22

Bài 0.107. Thực hiện phép tính:

a.
$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^{2015}$$

b.
$$B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

Hướng dẫn giải

a. Thực hiện phép tính

$$A = 1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^{2015}$$

Ta có:

$$5 A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015} + 5^{2016}$$

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2015}$$

Trừ theo vế : $5 \text{ A} - \text{A} = 5^{2016} - 1$

Vậy:
$$A = \frac{5^{2016} - 1}{4}$$

b. Ta có:

$$B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

$$= \frac{(2^2)^5 \cdot (3^2)^4 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot 2^2 \cdot 5}$$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5}$$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^8}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8}$$
$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

Bài 0.108.

- a. Tìm x để biểu thức ${\rm P}=1+\frac{9}{3+|x-5|}$ đạt giá trị lớn nhất.
- b. Tìm giá trị của x biết: |2x-1|=2.
- c. Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$.

Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

🔑 Hướng dẫn giải



a. Tìm x để biểu thức $P=1+\frac{9}{3+|x-5|}$ đạt giá trị lớn nhất.

Để P đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{9}{3+|x-5|}$ đạt GTLN khi và chỉ khi 3+|x-5| đạt GTNN mà $|x-5|\geq 0$ dấu "=" khi x=5

Vậy GTLN của P=4 khi x=5

b. Tìm giá trị của x biết : |2x - 1| = 2.

TH1: Xét với $2x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0,5$ ta có:

$$|2x - 1| = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1, 5$$
 (thỏa mãn đk)

TH2: Xét với 2x - 1 < 0 => x < 0,5 ta có

$$|2x - 1| = 2 \Rightarrow -2x + 1 = 2 \Rightarrow x = -0,5$$
 (thỏa mãn đk)

Vậy có hai giá trị phù hợp : x=1,5; x=-0,5

c. Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$.

Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

Vì
$$b = \frac{a+c}{2}$$
 nên $2b = a + c$

Mặt khác :
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right) = \frac{b+d}{2bd} \text{ hay } 2bd = bc + cd$$

hay a
d $+\mathrm{cd}=\mathrm{bc}+\mathrm{cd}$ do đó $ad=\mathrm{bc}$ hay bốn số lập thành tỉ lệ thức



Bài 0.109. Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh của nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x,y,z (x, y, z nguyên dương)

Theo đề bài ta có:

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z$$
chia các tỉ số trên cho BCNN(2,4,8) = 8 ta được

$$\frac{2 \cdot x}{3 \cdot 8} = \frac{8 \cdot y}{11 \cdot 8} = \frac{4 \cdot z}{5 \cdot 8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$$

Mặt khác : y + z - x = 18

Áp dụng tính chất dãy các tỉ số bằng nhau:

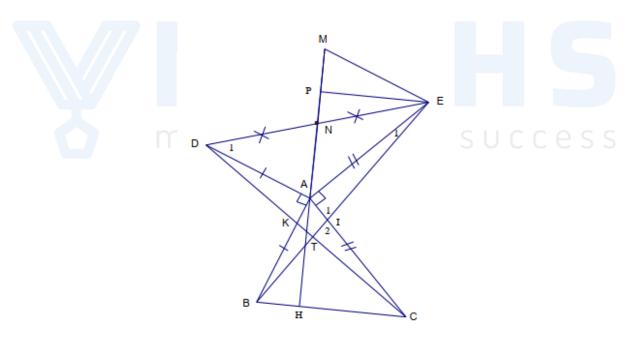
$$\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y+z-x}{11+10-12} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 12.2 = 24 \\ y = 11.2 = 22 \\ z = 10.2 = 20 \end{cases}$$

Vậy số học sinh: Nhóm I là 24; nhóm II là 22, nhóm III là 20

Bài 0.110. Cho \triangle ABC có $\hat{A} < 90^{\circ}$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC.

- a. Chứng minh: DC = BE và DC \perp BE
- b. Gọi N là trung điểm của DE. Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho NA=NM. Chứng minh: AB=ME và $\triangle ABC=\Delta EMA$.
- c. Chứng minh: MA \perp BC.





Vẽ hình đúng đến câu a

a. Chứng minh được $\Delta \mathrm{DAC} = \Delta \mathrm{BAE}$ (c.g.c)

$$\Rightarrow$$
 DC = BE

Xét \triangle AIE và \triangle TIC có :

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2}(\ \mathrm{d}\mathrm{d})$$

$$E_1 = \widehat{C}_1(\text{ do } \Delta DAC = \Delta BAE)$$

$$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI}$$

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{CTI}} = 90^\circ => \mathrm{DC} \perp \mathrm{BE}$$



b. Chứng minh được $\Delta MNE = \Delta AND$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{MEN}, AD = ME$$

$$m\grave{a} AD = AB(gt)$$

$$\Rightarrow AB = ME(\bar{d}pcm)(1)$$

Vì
$$\widehat{D_1} = \widehat{MEN} => DA//ME => \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ$$
 (trong cùng phía)

$$m\grave{a} BAC + \widehat{DAE} = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow > \widehat{BAC} = \widehat{AEM}(2)$$

Ta lại có:
$$AC = AE$$
 (gt) (3). Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta EMA(\emptyset pcm)$

c. Kéo dài MA cắt BC tại H. Từ E hạ $\mathrm{EP}\perp\mathrm{MH}$

Xét \triangle AHC và \triangle EPA có:

$$\widehat{\mathrm{CAH}} = \widehat{\mathrm{AEP}}($$
 do cùng phía với góc PAE)

$$\widehat{AE} = CA(gt)$$

$$\Rightarrow \widehat{PAE} = \widehat{HCA}(\text{ do } \triangle ABC = \triangle EMA \text{ câu b})$$

$$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{AHC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow$$
 MA \perp BC(g.c.g)

Bài 0.111. Một số chính phương có dạng \overline{abcd} . Biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. Hãy tìm số \overline{abcd} .

Hướng dẫn giải

Ta có a,b,c,d là các số nguyên từ 0 đến 9; a, c khác 0

Là số chính phương nên $\overline{abcd} = n^2$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Hay
$$n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

Suy ra
$$n^2 - 100 = (n - 10)(n + 10) = 101\overline{cd}$$
, n^2 là số có 4 chữ số vậy $n < 100$ do đó $n + 10 = 101$

suy ra n = 91 và n² =
$$\overline{abcd}$$
 = 91² = 8281

$\S23.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 23

Bài 0.112. Thực hiện phép tính:

a.
$$A = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0, 9}{\frac{7}{91} + 0, 2 - \frac{3}{10}}$$

b.
$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0, 9}{\frac{7}{91} + 0, 2 - \frac{3}{10}} = \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - \frac{9}{10}}{\frac{1}{13} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10}}$$
$$= \frac{5\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13\left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}}$$
$$= \frac{5}{13} + 3 = 3\frac{5}{13}$$

b.
$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3}$$
$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 + 2^3)}$$
$$= \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Bài 0.113.

- a. Chứng minh rằng: $3^{n+2} 2^{n+2} + 3^n 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n.
- b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : A=|2014-x|+|2015-x|+|2016-x|
- c. Tìm x, y thuộc Z biết : $25 y^2 = 8(x 2015)^2$

Hướng dẫn giải

a. Ta có :
$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$$

= $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$
= $10 \left(3^n - 2^{n-1} \right) : 10$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n.

b. Vì
$$|2015 - x| \ge 0$$
 nên :

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \ge |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi
$$x = 2015(1)$$

Ta có :
$$|2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \ge |x - 2014| + |2016 - x| = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \ge 0$, suy ra :

 $2014 \le x \le 2016(2)$

Từ (1) và (2) suy ra A \geq 2. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 2015.

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi x = 2015.

c. Ta có:
$$25 - y^2 \le 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \le 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4$$
.

Do x nguyên nên $(x-2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra :

TH 1 : $(x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$, khi đó y = 5 hoặc y = -5.

TH 2:
$$(x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x - 2015 = 1 \Rightarrow x = 2016$$

$$x - 2015 = -1$$

$$x = 2014$$

Với x=2016 hoặc x=2014 thì $y^2=17$ (loại)

Vậy x = 2015, y = 5 và x = 2015, y = -5

Bài 0.114.

a. Cho
$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$
 và $4x^3 - 3 = 29$. Tính: $x-2y+3z$

b. Cho
$$f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$$
 và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có :
$$4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$
.

Thay vào tỷ lệ thức ta được :

$$\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$
$$\Rightarrow y = -7, z = 1$$

Vậy
$$x - 2y + 3z = 2 - 2 \cdot (-7) + 3.1 = 19$$

b. Ta có :
$$f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a+4)x^3 - 4x + 8$$

 $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$

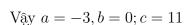
Do f(x) = g(x) nên chọn x bằng 0; 1; -1 ta được:

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4 \ b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4 \ b = -3(1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4 b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4 b = 3(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:
$$b = 0$$
; $a = -3$.

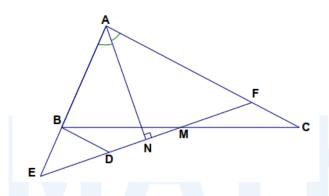


Bài 0.115. Cho tam giác ABC có (AB < AC). Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N, cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng :

a.
$$BE = CF$$

b.
$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

Hướng dẫn giải



a. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt EF tại D.

Xét \triangle MBD và \triangle MCF có : DBM = FCM (so le trong)

 $\mathrm{MB}=\mathrm{MC}$ (giả thiết); BMD=CMF (đối đỉnh)

Mặt khác : \triangle AEF có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại A, suy ra E=MFA. Mà BDE=MFA (đồng vị) nên BDE=E

Do đó: \triangle BDE cân tại B, suy ra BD = BE(2).

Từ (1) và (2) suy ra : BE = CF(dpcm)

b. Tam giác AEF cân tại A suy ra $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$

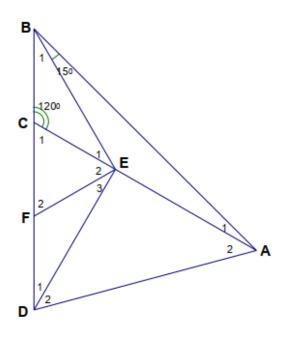
Ta có: 2AE = AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF)

= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC(do BE = CF)

Vậy $AE = \frac{AB + AC}{2}$ (đ
pcm)

Bài 0.116. Cho tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho CD = 2CB. Tính góc ADB.

Hướng dẫn giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $EBA=15^{\circ} \Rightarrow B_1=30^{\circ}$

Ta có : $E_1 = A_1 + EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle \text{CBE}$ cân tại C \Rightarrow CB = CE

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$

Tam giác CEF cân tại C, lại có $C_1 = 180^{\circ} - BCA = 60^{\circ}$ nên là tam giác đều.

Như vậy : CB = CE = CF = FD = EF.

Suy ra $D_1=E_3$ mà $D_1+E_3=F_2=60^\circ\,(\Delta \text{CEF dều}) \Rightarrow D_1=30^\circ$

Xét tam giác CDE ta có: $CED = 180^{\circ} - (C_1 + D_1) = 90^{\circ}(1)$

Ta có : $D_1 = B_1 \Rightarrow \text{EB} = \text{ED}, A_1 = EBA \Rightarrow \text{EA} = \text{EB} \Rightarrow \text{ED} = \text{ED}$

Từ (1) và (2) \Rightarrow Tam giác EDA vuông cân tại E $\Rightarrow D_2=45^\circ$

Vậy $ADB = D_1 + D_2 = 30^{\circ} + 45^{\circ} = 75^{\circ}$

$\S 24.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 24

Bài 0.117. Tính hợp lí:

a.
$$\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23}$$

b.
$$\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$$

c.
$$(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17)$$

d.
$$\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35}$$

Hướng dẫn giải

a.
$$\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23} = \left(\frac{-7}{25} + \frac{-18}{25}\right) + \left(\frac{4}{23} + \frac{19}{23}\right) + \frac{5}{7} = \frac{-25}{25} + \frac{23}{23} + \frac{5}{7} = -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{19}{23} + \frac{19}$$

b.
$$\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19} = \left(\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11}\right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11}\right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} + \frac{12}{19} = 1$$

c.
$$(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-25) \cdot 4 \cdot 125 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-100) \cdot (-1000) \cdot (-17) = -17000000$$

d.
$$\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} \left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19} \right) - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} - \frac{2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

Bài 0.118. Tính giá trị các biểu thức sau:

a.
$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right)$$
.

b.
$$B = 2x^2 - 3x + 5$$
 với $|x| = \frac{1}{2}$.

c.
$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$
, biết $x - y = 0$.

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right)$$

$$= \frac{2016}{2017}$$

b. Vì
$$|x|=\frac12$$
 nên $x=\frac12$ hoặc $x=-\frac12$ Với $x=\frac12$ thì $B=2\cdot\left(\frac12\right)^2-3\cdot\frac12+5=4$



Với
$$x=-\frac{1}{2}$$
 thì $B=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=7$

Vậy
$$B=4$$
 với $x=\frac{1}{2}$ và $B=7$ với $x=-\frac{1}{2}$.

c.
$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

= $2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1(\text{ vi } x - y = 0)$

Bài 0.119.

a. Tìm
$$x, y$$
 biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \le 0$.

b. Tìm
$$x, y, z$$
 biết: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 18$.

Hướng dẫn giải

a. Vì
$$\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2 \ge 0$$
 với $\forall x; |3y+12| \ge 0$ với $\forall y,$ do đó:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \ge 0 \text{ v\'oi } \forall x, y.$$

Theo đề bài thì
$$\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2+|3y+12|\leq 0$$
. Từ đó suy ra:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$$

Khi đó
$$2x - \frac{1}{6} = 0$$
 và $3y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$$
 và $y = -4$. Vậy $x = \frac{1}{12}$ và $y = -4$.

b. Ta có:
$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$
.

Suy ra:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

Do đó:
$$\frac{3x-2y}{4}=0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}$$

$$\frac{2z-4x}{3}=0 \Rightarrow 2z=4x \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{z}{4}$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$
.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2.$$

Suy ra:
$$x = 4; y = 6; z = 8$$

- a. Tìm các số nguyên x, y biết: x 2xy + y 3 = 0.
- b. Cho đa thức $f(x) = x^{10} 101x^9 + 101x^8 101x^7 + \dots 101x + 101$. Tính f(100).

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$x - 2xy + y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

 $\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$

Lập bảng:

2x-1	1	5	-1	-5
1-2y	5	1	-5	-1
X	1	3	0	-2
У	-2	0	-3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (3; 0), (0; 3), (-2; 1)\}.$

b. Ta có:

$$f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$$

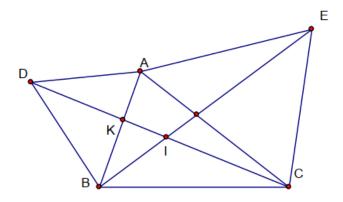
$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101$$

$$= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101)$$
Suy ra $f(100) = 1$.

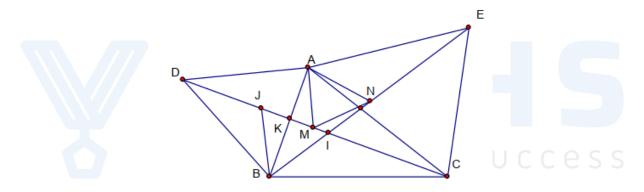
Bài 0.121. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

- a. Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.
- b. Chứng minh rằng: $\widehat{\text{DIB}} = 60^{\circ}$.
- c. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
- d. Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.





- a. Ta có: AD = AB; DAC = BAE và AC = AE Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)
- b. Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow ABE = ADC$, mà BKI = AKD (đối đỉnh). Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra BIK = DAK = 60° (d̄pcm)

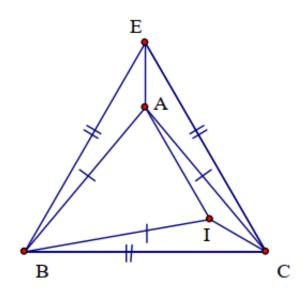


- c. Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) \Rightarrow CM = EN và ACM = AEN $\Rightarrow \triangle ACM = \Delta AEN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AM = AN \text{ và CAM} = EAN$ $MAN = CAE = 60^{\circ}. \text{ Do đó } \triangle AMN \text{ đêu}$
- c. Trên tia ID lấy điểm J
 sao cho IJ = IB $\Rightarrow \Delta \rm BIJ$ đều
 - $\Rightarrow \mathrm{BJ} = \mathrm{BI}$ và $\mathrm{JBI} = \mathrm{DBA} = 60^\circ$ suy ra
 $\mathrm{IBA} = \mathrm{JBD},$ kết hợp $\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$
 - $\Rightarrow \Delta \mathrm{IBA} = \Delta \mathrm{JBD} \ (\mathrm{c.g.c}) \Rightarrow \mathrm{AIB} = \mathrm{DJB} = 120^\circ$ mà $\mathrm{BID} = 60^\circ$
 - $\Rightarrow {\rm DIA}=60^{\circ}.$ Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Bài 0.122. Cho tam giác ABC cân tại A, $A=80^\circ$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho $IBC=10^\circ, ICB=30^\circ$. Tính AIB

Hướng dẫn giải





Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC, chứa điểm A dựng tam giác đều BCE.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A, $A=80^\circ$ nên $ABC=ACB=50^\circ \Rightarrow ABE=ACE=10^\circ$ và điểm A thuộc miền trong \triangle BCE.

Dễ dàng chứng minh được

$$\triangle ABE = \Delta ICB(g \cdot c \cdot g)$$

$$\Rightarrow$$
 BA = BI \Rightarrow Δ ABI cân tại B

Ta có

$$ABI = 50^{\circ} - 10^{\circ} = 40^{\circ} \Rightarrow AIB = \frac{140^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$$



Bài 0.123.

a. Tính:
$$A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$$

b. So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Hướng dẫn giải

a. Biến đổi:

$$A = \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24}$$
$$= \frac{7}{5} - \frac{2}{5}$$
$$= 1$$

b. Biến đổi:
$$16^{20} = 2^{4.20} = 2^{80}$$

$$+ \text{ C\'o } 2^{80} < 2^{100} \text{ vì } (1 < 2; 80 < 100)$$

Vậy
$$16^{20} < 2^{100}$$

Bài 0.124.

a. Tìm
$$x$$
 biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b. Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4.3^n = 13.3^5$

Hướng dẫn giải

a. + Ta có
$$|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow |2x - 7| = 1$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 1$$
 hoặc $2x - 7 = -1$

$$\Rightarrow x = 4$$
 hoặc $x = 3$

Vậy
$$x = 4$$
 hoặc $x = 3$.

b. + Biến đổi được
$$3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$\Rightarrow 3^n = 3^6$$

$$\Rightarrow$$
 n = 6

KL: Vậy
$$n = 6$$

Bài 0.125.

a. Cho dãy tỉ số bằng nhau:
$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$
 Tính giá trị biểu thức Q, biết Q =
$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$



b. Cho biểu thức $M=\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+t}+\frac{z}{y+z+t}+\frac{t}{x+z+t}$ với x,y,z, t là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10}<1025$.

Hướng dẫn giải

a. Biến đổi:
$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$+ Nếu a+b+c+d \neq 0 \text{ thì } a = b = c = d => Q = 1+1+1+1=4$$

$$+ Nếu a+b+c+d = 0$$

$$\text{thì } a+b=-(c+d); b+c=-(d+a); c+d=-(a+b); d+a=-(b+c)$$

$$\Rightarrow$$
 Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4

$$KL:V \hat{a} y \ Q = 4$$
khi $a+b+c+d \neq 0$

$$Q = -4 \text{ khi } a + b + c + d = 0$$

b. Ta có:
$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y} \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

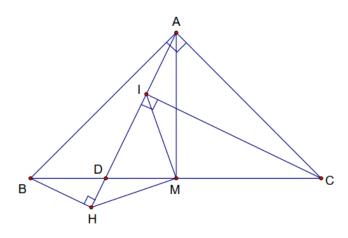
$$+ \text{Có } M^{10} < 2^{10}(\text{Vì } M > 0) \text{ mà } 2^{10} = 1024 < 1025$$

$$\text{Vậy } M^{10} < 1025$$

Bài 0.126.

- 1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:
 - a. BAM = ACM và BH = AI.
 - b. Tam giác MHI vuông cân.
- 2) Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A}=90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E. Chứng minh rằng AB + AC = BC + DE.

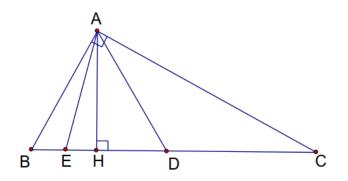
Hướng dẫn giải



1.

- a. * Chứng minh: BAM = ACM
 - + Chúng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM(c c c)$
 - + Lập luận được: $BAM = CAM = 45^{\circ}$
 - + Tính ra được $ACM = 45^{\circ}$
 - $\Rightarrow BAM = ACM$
 - * Chứng minh: BH = AI.
 - + Chỉ ra: BAH = ACI (cùng phụ DAC)
 - + Chứng minh được $\triangle {\rm AIC} = \Delta {\rm BHA}$ (Cạnh huyên góc nhọn)
 - \Rightarrow BH = AI (2 canh tương ứng)
- b. Tam giác MHI vuông cân.
 - + Chứng minh được $AM \perp BC$
 - + Chứng minh được AM = MC
 - + Chứng minh được HAM = ICM
 - + Chúng minh được $\Delta HAM = \Delta ICM(c g c)$
 - $\Rightarrow HM = MI(*)$
 - + Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow HMA = IMC \Rightarrow HMB = IMA (do <math>AMB = AMC = 90^{\circ}$
 - + Lập luận được: $HMI = 90^{\circ}$
 - Từ (*) và (**) => Δ MHI vuông cân (**)
 - Từ (*) và (**) => Δ MHI vuông cân

2.



+ Chứng minh được:

$$AEC = ABC + BAE = HAD + DAC + BAE = EAH + HAD + DAC = EAC$$

(Vì B và HAC cùng phụ với BAH)

Suy ra tam giác AEC cân tại $C \Rightarrow AC = CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được AB = BD (**)

+ Từ (*) và (**)
$$\Rightarrow$$
 AB + AC = BD + EC = ED + BC

Bài 0.127. Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn x + y + z = 0 và $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Hướng dẫn giải

+) Trong ba số x,y,z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x;y\geq 0$

$$\Rightarrow$$
 z = -x - y \leq 0

+ Vi
$$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1 => x^2 + y^4 + z^6 \le |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \le x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \le -2z$$

+) – 1 ≤ z ≤ 1 và z ≤ 0 ⇒
$$x^2 + y^4 + z^6 \le 2$$

KL: Vậy
$$x^2 + y^4 + z^6 \le 2$$

§26. ĐỀ SỐ 26

Bài 0.128. 1) Thực hiện phép tính

a.
$$A = \frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} + \frac{11}{25}$$

b. $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

2) Tìm x, y, z biết:

a.
$$\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$$

b. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Hướng dẫn giải

1) a.
$$A = \frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} + \frac{11}{25}$$

$$= \frac{-3}{3} + \frac{25}{25} + \frac{2}{7} = (-1+1) + \frac{2}{7}$$

$$= 0 + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$
b. $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

2) a. Ta có:



b. Từ giả thiết:
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Từ (1) và (2) suy ra:
$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Ta có:
$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó:
$$\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

$$KL: x = 27, y = 36, z = 60$$

Bài 0.129.

- a. Tìm x, y nguyên thoả mãn $3xy-5=x^2+2y$
- b. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n
 thì: $3^{n+2} 2^{n+2} + 3^n 2^n$ chia hết cho 10

Hướng dẫn giải

a. Theo đề ta có $3xy - 2y = x^2 + 5 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 5$

Do x, y nguyên nên suy ra $x^2 + 5$ chia hết cho 3x - 2

$$\Rightarrow 9. (x^2 + 5)$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 + 45$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 - 6x + 6x - 4 + 49$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 3x \cdot (3x - 2) + 2(3x - 2) + 49$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow$$
 49 chia hết cho $3x - 2 \Rightarrow 3x - 2 \in \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$

$$\Rightarrow 3x \in \{-47, -5, 1, 3, 9, 51\} \Rightarrow x \in \{1, 3, 17\}$$

Thay x lần lượt vào (1) ta được $y \in \{6; 2; 6\}$

Vậy các cặp số (x, y) là (1; 6), (3; 2), (17; 6)

b.
$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n =$$

$$3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n$$

$$=3^{n}(3^{2}+1)-2^{n}(2^{2}+1)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= 10 \left(3^n - 2^{n-1} \right)$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$: 10 với mọi n là số nguyên dương.



Bài 0.130. Cho đa thức: $A(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^{99} + x^{100}$

- a. Chứng minh rằng x = -1 là nghiệm của A(x)
- b. Tính giá trị biểu thức A(x)khi $x=\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

a.
$$A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$$

 $= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots (-1) + 1 = 0$ (vì có 50 số -1 và 50 số 1)
Suy ra x = -1 là nghiệm của đa thức A(x)

b. Với
$$x=\frac{1}{2}$$
 thì giá trị của đa thức $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}$
$$\Rightarrow 2A=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}$$

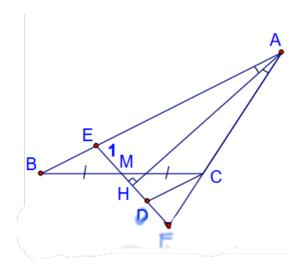
$$\Rightarrow 2\ A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}\right)+1-\frac{1}{2^{100}}\Rightarrow 2A=A+1-\frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow A=1-\frac{1}{2^{100}}$$

Bài 0.131. Cho $\triangle ABC(AB > AC)$, M là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua M vuông góc với tia phân giác của góc BAC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F (giao điểm của đường thẳng đó với tia phân giác góc BAC là H). Chứng minh rằng:

- a. EH = HF
- b. 2BME = ACB B.
- c. $\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$.
- d. BE = CF

🔑 Hướng dẫn giải



- a. C/m được $\triangle AEH = \triangle AFH$ (g-c-g) Suy ra EH = HF (đpcm)
- b. Từ $\triangle AEH = \triangle AFH$ Suy ra $E_1 = F$

Xét $\triangle CMF$ có ACB là góc ngoài suy ra CMF = ACB - F

 $\triangle BME$ có E_1 là góc ngoài suy ra $BME=E_1-B$

Vây $CMF + BME = (ACB - F) + (E_1 - B)$ hay 2BME = ACB - B(d̄pcm).

c. Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông AFH:

ta có
$$HF^2 + HA^2 = AF^2$$
 hay $\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$ (dpcm)

d. $C/m\triangle AHE = \triangle AHF(g-c-g)$ Suy ra AE = AF và $E_1 = F$

Từ C vẽ $CD//AB(D \in EF)$

C/m được $\triangle BME = \triangle CMD(g-c-g) \Rightarrow BE = CD$

Và có $E_1 = CDF$ (cặp góc đồng vị)

Do đó $CDF = F \quad \Rightarrow \quad \Delta CDF$ cân $\Rightarrow CF = CD$

Từ (1) và (2) suy ra BE = CF

Bài 0.132. Giải bằng máy tính cầm tay:

- a. Tính giá trị của đa thức $P(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{10}$ tại x=2,13 (kết quả ghi dưới dạng số thập phân lấy trên màn hình).
- b. Tìm 2 chữ số cuối của: $A = 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$

Hướng dẫn giải

a. Cách 1: Ta có thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10} = \frac{x^{11} - 1}{x - 1}$

Thay x=2,13 ta được kết quả $P(2,13)=\frac{2,13^{11}-1}{2.13-1}\approx 3622,355813.$



Cách 2: Nhập vào máy: $\sum_{x=0}^{10}{(2,13^x)} \boxminus$ ta được kết quả $P(2,13) \approx 3622,355813.$

b. HD:

$$\begin{split} A &= 2^{2000} \left(2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} \right) \\ &= \left(2^{20} \right)^{100} \times 130048 \\ \text{mà } 2^{20} &= \left(2^{10} \right)^2 = 1024^2 = 1048576 \end{split}$$

Ta nhận thấy bất kỳ một số có đuôi là 76 thì lũy thừa luôn luôn có đuôi là 76 (dùng máy để kiểm tra)

Do đó: A = 130048 × (. . . 76) = 48. Vậy 2 số cuối của A có giá trị là 48



§27. ĐỀ SỐ 27

Bài 0.133.

a. Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{\left(2^2 \cdot 3\right)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$$

b. Cho hàm số
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$
.

Cho biết f(0) = 2014; f(1) = 2015; f(-1) = 2017. Tính f(-2).

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5}$$
$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

b. Ta có
$$f(0) = 2014 \Leftrightarrow c = 2014 \ f(1) = 2015 \Leftrightarrow a + b + c = 2015 \Rightarrow a + b = 1 \ (1)$$

$$f(-1) = 2017 \Leftrightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = 3 (2)$$

Từ (1)(2) suy ra:
$$a = 2$$
; $b = -1$. Khi đó $f(x) = 2x^2 - x + 2014$

Suy ra
$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2014 = 2024$$

Bài 0.134. Tìm x, y biết:

a.
$$\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$$
 Multiply your SUCCESS

b.
$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

c.
$$|x+5| + (3y-4)^{2016} = 0$$

d.
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$$
 và $xy = 40$

Hướng dẫn giải

a.
$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$\Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{array} \right|$$

Vậy
$$x = \frac{9}{5}; x = -\frac{11}{5}$$

b.
$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

Suy ra $x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy x = -3.

c.
$$|x+5| + (3y-4)^{2016} = 0$$
. Vi $|x+5| \ge 0$; $(3y-4)^{2016} \ge 0$

Suy ra:
$$\begin{cases} |x+5| = 0 \\ (3y-4)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ 3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vây
$$x = -5; y = \frac{4}{3}$$

d. Ta có:
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{2.5} = \frac{y^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{40}{10} = \frac{y^2}{25}$$

$$\Rightarrow y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y = \pm 10 \Rightarrow x = \pm 4$$

Vây
$$(x; y) \in \{(4; 10); (-4; -10)\}$$

ATHS

Bài 0.135.

- a. Tìm tất cả các cặp số nguyên $x,\,y$ sao cho: 2xy+x-2y=4
- b. Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0.5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó bằng 4660.

Hướng dẫn giải

a. 1) Ta có: $2xy + x - 2y = 4 \Leftrightarrow x(2y+1) - (2y+1) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3$ $\Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3 = (\pm 1) \cdot (\pm 3) = (\pm 3) \cdot (\pm 1)$

x-1	1	-1	3	-3
x	2	0	4	-2
2y + 1	3	-3	1	-1
у	1	-2	0	-1

Vây
$$(x; y) \in \{(2; 1); (0; -2); (4; 0); (-2; -1)\}$$

b. Ta có $0,5:1\frac{2}{3}:2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}:\frac{5}{3}:\frac{9}{4}=\frac{6}{12}:\frac{20}{12}:\frac{27}{12}=6:20:27$

Giả sử M được chia thành 3 số là x; y; z.

Theo bài ra ta có:

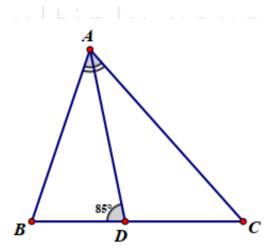
$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy
$$M = 12 + 40 + 54 = 106$$
 Hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Bài 0.136. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = BD. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M. Đường vuông góc với BE tại E cắt AC tại N.

- a. Chứng minh: $\triangle MBD = \triangle NCE$.
- b. Cạnh BC cắt MN tại I. Chứng minh I trung điểm của MN.
- c. Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC.

Hướng dẫn giải



- a. Ta có ABC = NCE = (ACB) $\Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE(cqv - qn).$
- b. Theo câu a)
 - $\Rightarrow MD = EN \Rightarrow \triangle IMD = INE(cgv gn) \Rightarrow IM = IN \Rightarrow I \text{ trung điểm MN}.$



- c. Kể $AH \perp BC$
 - $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH(ch gn)$
 - $\Rightarrow BAH = CAH$

Đường vuông góc với MN tại I cắt AH tại O.

- $\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAC(\text{ c.g.c})$
- $\Rightarrow OBA = OCA$

Măt khác:

$$\triangle OBH = \triangle OCH(2cqv) \Rightarrow OB = OC(*)$$

$$\triangle OMI = \triangle ONI(2cgv) \Rightarrow OM = ON(**)$$

$$BM = CN$$
 (câu b) (***)

$$T\mathring{u}$$
 (*) (**) (**) suy ra :

$$\triangle OBM = \triangle OCN(\text{ c.c.c }) \Rightarrow OBM = OCN \text{ Từ } (2)(3) \Rightarrow OCA = OCN(=OBA) = 90^{\circ} \Rightarrow OC \perp AC$$

Vì AC cố định mà $OC \perp AC \Rightarrow O$ cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 0.137.

- a. Tìm số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó chia hết cho 7 và tổng các chữ số đó bằng 14.
- b. Cho tam giác ABC có $BAC = BCA = 80^{\circ}$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC và BA lân lượt tại D và E. Cho biết $CAD = 60^{\circ}$; $ECA = 50^{\circ}$. Tính số đo góc ADE.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$\overline{abc}: 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c): 7 \Leftrightarrow (98a + 7b + 2a + 3b + c): 7 \Leftrightarrow (2a + 3b + c): 7(1)$$

Mặt khác theo bài ra:

$$a + b + c = 14 \Rightarrow (a + b + c) : 7 \Rightarrow (2a + 2b + 2c) : 7$$

Từ (1), (2)
$$\Rightarrow b - c : 7 \Rightarrow b - c \in \{-7; 0; 7\}$$

+) Nếu
$$b-c=7$$
 có:

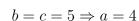
$$c = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = 7$$

$$c = 1 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$c = 2 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 3$$

+) Nếu
$$b-c=0$$
 có:

$$b = c = 6 \Rightarrow a = 2$$



$$b = c = 4 \Rightarrow a = 6$$

$$b = c = 3 \Rightarrow a = 8$$

+) Nếu
$$b-c=-7$$
 có:

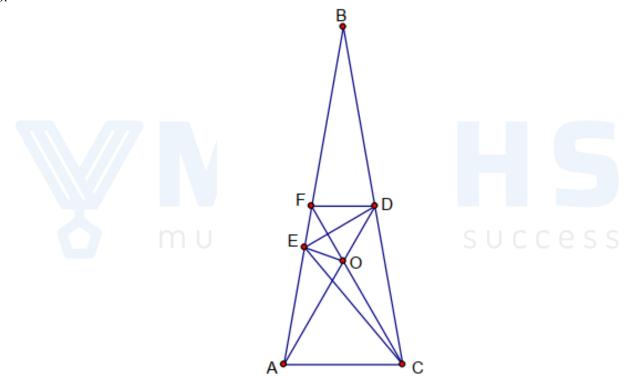
$$c = b + 7 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow a = 7$$

$$b = 1 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 2 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow a = 3$$

Vậy có 10 số thỏa mãn : 770; 581; 392; 266; 455; 644; 833; 707; 518; 329.

b.



Kể tia CF sao cho $ACF = 60^{\circ} (F \in AB)$, Tia CF cắt AD tại O.

$$\Rightarrow \triangle AOC; \triangle FOD$$
đều

$$\Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD.$$

$$\triangle AEC$$
 có $EAC=80^{\circ}, ACE=50^{\circ} \Rightarrow CEA=50^{\circ}$

$$\Rightarrow \triangle ACE$$
 cân tại A

$$\Rightarrow AC = AE \Rightarrow \triangle AEO$$
 cân tại A. Có:

$$EAO = 20^{\circ} \Rightarrow AEO = AOE = 80^{\circ} \Rightarrow EOF = 40^{\circ}$$

Suy ra:
$$AFC=180^{\circ}-80^{\circ}-60^{\circ}=40^{\circ}=EOF$$

$$\Rightarrow \triangle EOF$$
 cân tại $\mathbf{E} \Rightarrow EO = EF$



$$\Rightarrow \triangle FDE = \triangle ODE(\text{ c.c.c})$$

$$\Rightarrow ODE = FDE = \frac{1}{2}FDA = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ \text{ Vậy } ADE = 30^\circ.$$



$\S28.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 28

Bài 0.138.

1. a. Thực hiện phép tính:
$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1008} + \frac{11}{2016} \right) \cdot \frac{1008}{25} + \frac{1007}{2016} \right]$$
b. Thực hiện phép tính: $A = \begin{bmatrix} 1 & 74(-11)^2 & 775 & (-1)^2 \\ 775 & (-1)^2 & (-73 - 116) \end{bmatrix}$

b. Thực hiện phép tính:
$$B = \frac{1}{-77^2} \cdot 7^4 (-11)^2 \cdot 77^5 \cdot \left(\frac{1}{7^2}\right)^2 : \left(7^3 \cdot 11^6\right)$$

2. Cho các số
$$a,b,c$$
 khác 0 thỏa mãn:
$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$$
 Tính giá trị biểu thức:
$$P = \left(1+\frac{c}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

Hướng dẫn giải

1. a.
$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1008} + \frac{11}{2016} \right) \cdot \frac{1008}{25} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = \left[\frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{25} + \frac{11}{50} \right) \cdot + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1: \left[\frac{1}{2} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1: \left(\frac{2015}{2016}\right)$$

$$A = \frac{2016}{2015}$$

Vậy
$$A = \frac{2016}{2015}$$

b.
$$B = \frac{1}{-77^2} \cdot 7^4 (-11)^2 \cdot 77^5 \cdot \left(\frac{1}{7^2}\right)^2 : \left(7^3 \cdot 11^6\right)$$

$$B = \frac{1}{-7^2 \cdot 11^2} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 7^5 \cdot 11^5 \cdot \frac{1}{7^4} \cdot \frac{1}{7^3 \cdot 11^6}$$

$$B = -\frac{7^9 \cdot 11^7}{7^9 \cdot 11^8}$$

$$B = -\frac{1}{11}$$

$$V_{ay} B = -\frac{1}{11}.$$

$$\begin{split} P &= \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \\ &= \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b} \text{ v\'oi } a, b, c \neq 0 \end{split}$$



$$\text{Khi } a+b+c=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b=-c \\ \\ b+c=-a \end{array} \right. \Rightarrow P=\frac{-a}{a}\cdot\frac{-c}{c}\cdot\frac{-b}{b}=-1 \\ \\ c+a=-b \end{array}$$

Khi $a+b+c\neq 0$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2(c+a+b)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{2b} = \frac{c+b}{2a} = \frac{a+b}{2c} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{c+b}{a} = \frac{a+b}{c} = 2$$

$$\Rightarrow P = 8$$

Với $a,b,c\neq 0$ thì P=-1khi a+b+c=0; P=8khi $a+b+c\neq 0$

Bài 0.139.

a. Tìm
$$x$$
 biết: $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$

- b. Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.
- c. Tìm các số nguyên dương x; y; z thỏa mãn:

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015 \cdot |x-z| = 2017$$

Hướng dẫn giải

a. Tìm
$$x$$
 biết :
$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$
$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{3|x-2|+1} \Leftrightarrow 6|x-2|+2 = 3|x-2|+6 \Leftrightarrow 3|x-2|=4$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x - 2 = \frac{4}{3} \\ x - 2 = -\frac{4}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

$$\hat{\text{Vay }} x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$$

b. Gọi kích thước hình chữ nhật cần tìm là x, y (đơn vị độ dài)

$$(x, y \in N^*; x \ge y)$$

Ta có diện tích và chu vi hình chữ nhật lần lượt là : x.y và 2(x+y)



Theo bài ra ta có : x.y = 2(x + y) với $x, y \in N^*; x \ge y$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(x-2) = 4$$

Với
$$x, y \in N^*$$
 ta có $(y-2); (x-2) \in Z$

$$\Rightarrow y-2; x-2 \in u'(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$
nhưng vì $x-2; y-2 > -2$ và $x \geq y$

Ta có 2 trường hợp sau :

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

Có hai hình chữ nhật thỏa mãn bài toán :

Hình chữ nhật có kích thước 6 và 3; 4 và 4.

c. Các bạn tự chứng minh: $(x-y)^3 - (x-y)$ chia hết cho 2

$$(y-z)^2 - (y-z)$$
 chia hết cho 2

$$|z-x|-(z-x)$$
 chia hết cho 2

Do đó:

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015|x-z| =$$

$$(x-y)^3 - (y-z) + 2016|x-z| = (x-y)^3 - (x-y) + (y-z)^2 - (y-z) + |z-x| - (z-x) + 2014|z-x|$$
 chia hết cho 2

Mà 2017 không chia hết cho 2 nên không tồn tại các số nguyên dương x; y; z thỏa mãn đề bài.

Bài 0.140. Cho hàm số: $y = f(x) = x + \frac{3}{2}|x|(1)$

- a. Vẽ đồ thị hàm số (1).
- b. Gọi E và F là hai điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ lần lượt là (-4) và $\frac{4}{5}$, xác định tọa độ hai điểm E, F. Tìm trên trực tung điểm M để EM + MF nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a. Vẽ đồ thị hàm số y = f(x) = x +
$$\frac{3}{2}$$
|x| (1)

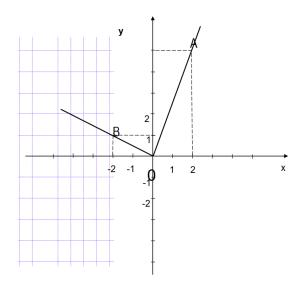
Từ hàm số (1) , ta có :
$$y = \frac{5}{2}x$$
 với $x \ge 0$

$$y = \frac{-1}{2}x \text{ với } x < 0$$

Cho x = 2
$$\Rightarrow$$
 y = 5, ta có điểm A(2; 5) thuộc đồ thị hàm số(1)

Cho x = $-2 \Rightarrow$ y = 1, ta có điểm B(-2;1) thuộc đồ thị hàm số (1) Đồ thị hàm số (1) là hai

tia OAvà OB



b. Từ hàm số (1) , ta có y =
$$\frac{5}{2}$$
x với $x \ge 0$

$$y=\frac{-1}{2}x$$
 với $x<0$

Điểm E thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ
$$\mathbf{x} = -4 < 0$$

nên tung độ điểm
$$E$$
 là y = $\frac{-1}{2}(-4) = 2 \Rightarrow E(-4;2)$

Điểm F thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ
$$x = \frac{4}{5} > 0$$

nên tung độ điểm F là y =
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 2 \Rightarrow F(1;2)$$

Điểm
$$M$$
 thuộc trực tung nên hoành độ điểm M là $x=0$

Ta có E, F thuộc đường thẳng y =
$$2$$

$$\mathbf{D}$$
ể $\mathbf{E}\mathbf{M}+\mathbf{F}\mathbf{M}$ nhỏ nhất khi \mathbf{M} nằm giữa \mathbf{E} và \mathbf{F}

nên
$$M$$
 thuộc đường thẳng $y=2,$ nên tung độ M là $y=2$

Vậy điểm M
$$(0;2)$$

Bài 0.141.

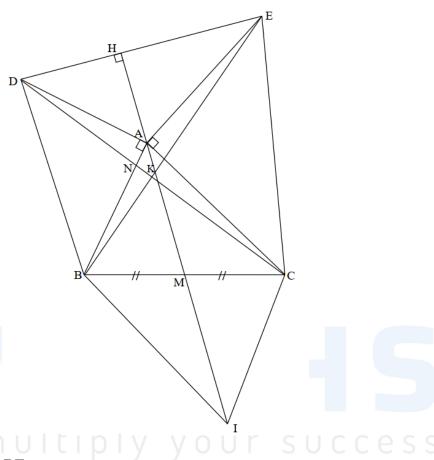
- 1. Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE.
 - a. Chứng minh DC = BE và DC \perp BE.
 - b. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh A, M, H thẳng hàng .
- 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3 cm; AC = 4 cm. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC. Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ điểm I đến BC.



Tính MB.

Hướng dẫn giải

1.



a. Chứng minh DC = BE

Ta có
$$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 90^{\circ} + \angle BAC$$
 tương tự $\angle BAE = 90^{\circ} + \angle BAC$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$$

Xét
$$\triangle DAC$$
 và $\triangle BAE$ có $AD = AB(\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$$AC = AE (\triangle AC E vuông cân tại A)$$

$$\angle DAC = \angle BAE(cmt)$$

$$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE(c - g - c)$$

$$\Rightarrow$$
 DC = BE (định nghĩa tam giác bằng nhau)

Chứng minh DC \perp BE

Gọi K, N lân lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$$\triangle$$
AND và \triangle KNB có \angle AND = \angle KNB(đối đỉnh); \angle ADN = \angle KBN(\triangle DAC = \triangle BAE)

 $\Rightarrow \angle DAN = \angle BKN \text{ dịnh lí tổng 3 góc trong tam giác })$

Mà
$$\angle DAN = 90^{\circ}((\triangle ABD \text{ vuông cân tại A})$$

$$\Rightarrow \angle BKN = 90^{\circ}$$



$$\Rightarrow$$
 DC \perp BE tại K

b. Chứng minh A, H, M thẳng hàng

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI=MA

Chứng minh $\triangle AMB = \Delta IMC(cgc)$

$$\Rightarrow$$
 CI = AB và CI//AB

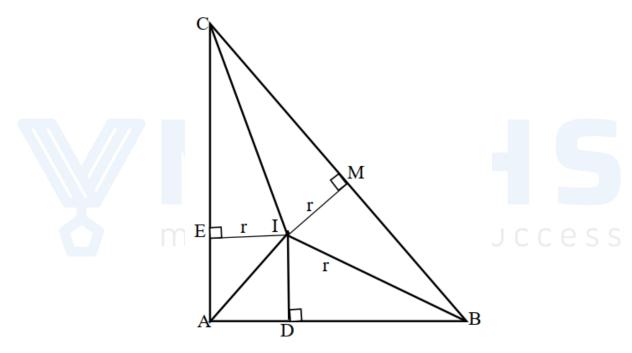
Chứng minh $\angle ACI = \angle DAE$ (cùng bù $\angle BAC$)

Chứng minh $\Delta ACI = \Delta EAD(c - g - c)$

$$\Rightarrow$$
 \angle CAI = \angle AED mà \angle AED + \angle EAH = 90° (\triangle AHE vuông tại H)

$$\Rightarrow \angle CAI + \angle EAH = 90^{\circ} \Rightarrow \angle MAH = 180^{\circ} \Rightarrow M, A, H \text{ th} \mathring{a}ng \text{ h} \mathring{a}ng$$

2.



Vì điểm I nằm trong tam giác và cách đều 3 cạnh tam giác ABC nên I là giao điểm 3 đường phân giác trong tam giác ABC

Tam giác ABC vuông tại A nên ${\rm AB^2 + AC^2 = BC^2}$ (định lý Pitago)

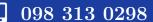
Tinh BC = 5 cm

Chứng minh $\Delta \text{CEI} = \Delta \text{CMI}$ (cạnh huyền- góc nhọn) $\Rightarrow \text{CE} = \text{CM}$

Tương tự AE = AD; BD = BM

Do đó:

$$BM = \frac{MB + BD}{2} = \frac{(BC - MC) + (AB - AD)}{2} = \frac{(BC - CE) + (BA - AE)}{2}$$
$$= \frac{BC + BA - (AE + EC)}{2} = \frac{BC + BA - AC}{2}$$
$$\Rightarrow BM = \frac{5 + 3 - 4}{2} = 2(\text{ cm})$$



Bài 0.142. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \ldots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên.}$$

Hướng dẫn giải

S có (n - 1) số hạng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \ldots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1(1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2(2)$$

Từ (1) và (2) ta c
ó
$$n-2 < S < n-1$$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên n ≥ 2

multiply your success

§29. ĐỀ SỐ 29

Bài 0.143.

a. Tìm
$$x$$
, biết $|x - 1| = \frac{2}{3}$;

b. Tính giá trị của biểu thức sau: A =
$$\frac{2x^2 + 3x - 1}{3x - 2}$$
 với $|x - 1| = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có
$$|x-1| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-1 = \frac{2}{3} \\ x-1 = -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b. Từ câu 1):

Với x =
$$\frac{5}{3}$$
 thay vào A ta được A = $\frac{14}{27}$
Với x = $\frac{1}{3}$ thay vào A ta được A = $-\frac{2}{9}$

Bài 0.144.

- a. Tìm chữ số tận cùng của A biết $A=3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$
- b. Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n (3^2 + 1) - 2^n (2^2 + 1) = 10.3^n - 2^n (2^2 + 1) = 10.3^n - 5.2^n$$
$$= 10.3^n - 10.2^{n-1} = 10 (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

A chia hết cho 10 suy ra chữ số tận cùng của A là 0

b. Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in Z \Leftrightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x = 1; 3; -3; 7$$

Bài 0.145. Cho đa thức f(x) xác định với mọi x thỏa mãn: $x \cdot f(x+2) = (x^2-9) \cdot f(x)$.

- a. Tính f(5).
- b. Chứng minh rằng f(x) có ít nhất 3 nghiệm.

Hướng dẫn giải

a. Ta có với
$$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$$

b.
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$$
 là một nghiệm

$$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$$
 là một nghiệm

$$x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$$
 là một nghiệm

Vậy f(x) có ít nhất là 3 nghiệm.

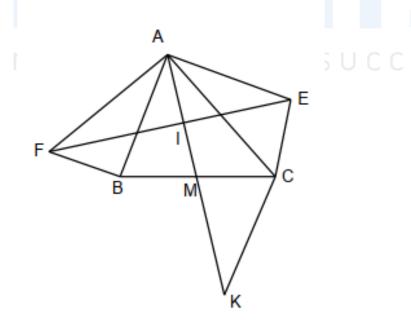
Bài 0.146. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và AE = AB. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và AF = AC. Chứng minh rằng:

a.
$$FB = EC$$

b.
$$EF = 2AM$$

c. AM
$$\perp$$
 EF.

Hướng dẫn giải



a. Chứng minh
$$\triangle ABF = \triangle AEC(\text{cgc}) \Rightarrow FB = EC$$

b. Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho AK = 2AM. Ta có:

$$\triangle ABM = \Delta KCM \Rightarrow CK//AB$$

$$\Rightarrow ACK + CAB = EAF + CAB = 180^{\circ} \Rightarrow ACK = EAF$$

$$\triangle EAF$$
 và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;



$$\begin{aligned} \mathbf{AF} &= \mathbf{AC}(\mathbf{gt}); ACK = EAF \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{EAF} = \Delta \mathbf{KCA}(\mathbf{cgc}) \Rightarrow \mathbf{EF} = \mathbf{AK} = 2\mathbf{AM}. \end{aligned}$$

c. Từ
$$\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow CAK = AFE$$

 $\Rightarrow AFE + FAK = CAK + FAK = 90^{\circ}$
 $\Rightarrow AK \perp EF$

Bài 0.147. Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử a \leq b \leq c \leq d. Áp dụng BĐT $|a|+|b|\geq |a+b|$, dấu bằng xảy ra \Leftrightarrow ab ≥ 0 ta có:

$$|x - a| + |x - d| \ge |x - a| + |d - x| \ge |x - a + d - x| = d - a$$

$$|x-b| + |x-c| \ge |x-b| + |c-x| \ge |x-b+c-x| = c-b$$

Suy ra $A \ge c + d - a - b$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x-a)(d-x) \ge 0 \text{ và } (x-b)(c-x) \ge 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{d} \text{ và } \mathbf{b} \le \mathbf{x} \le \mathbf{c}.$$
 Do đó min A = c + d - a - b \ \display \mathbf{b} \le \mathbf{x} \le \mathbf{c}.

Do đó
$$\min A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \le x \le c$$



Bài 0.148. Thực hiện phép tính:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right); \quad B = (0, 25)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b.
$$B = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (3)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot 4}{4^2 \cdot 3^2} = 4$$

Bài 0.149.

a. Tìm x biết:
$$|2x - 6| - 4x = 12$$

b. Tìm
$$x$$
 biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015}\right) \cdot x = \frac{2014}{1} + \frac{2013}{2} + \ldots + \frac{2}{2013} + \frac{1}{2014}$

c. Chứng minh rằng: Nếu
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
 thì $\frac{4a+5b}{4a-5b}=\frac{4c+5d}{4c-5d}$ (Với $a,b,c,d\neq 0; 4a\neq \pm 5b; 4c\neq \pm 5d$)

Hướng dẫn giải

a. Nếu
$$x \ge 3$$
 thì: $|2x-6|-4x=12 \Leftrightarrow 2x-6-4x=12 \Leftrightarrow -2x=18 \Leftrightarrow x=-9$ (KTM)
Nếu $x < 3$ thì: $|2x-6|-4x=12 \Leftrightarrow 6-2x-4x=12 \Leftrightarrow -6x=6 \Leftrightarrow x=-1$ (TM)
Vậy $x=-1$

b.
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) \cdot x = \frac{2014}{1} + \frac{2013}{2} + \dots + \frac{2}{2013} + \frac{1}{2014}$$

 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) x = \frac{2013}{2} + 1 + \frac{2012}{3} + 1 \dots + \frac{2}{2013} + 1 + \frac{1}{2014} + 1 + 1$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) x = \frac{2015}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{2015}{2013} + \frac{2015}{2014} + \frac{2015}{2015}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) x = 2015 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) \Leftrightarrow x = 2015$
 $KL : x = 2015$

c. Với a, b, c, d
$$\neq$$
 0, 4a \neq ±5 b, 4c \neq ±5 d, ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Áp dụng TC của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{4a}{4c} = \frac{5b}{5d} = \frac{4a + 5b}{4c + 5d} = \frac{4a - 5b}{4c - 5d} \Leftrightarrow \frac{4a + 5b}{4a - 5b} = \frac{4c + 5d}{4c - 5d}$$

Trang 134/194



Bài 0.150. Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyên động với vận tốc 5 cm/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4 cm/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3 cm/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Hướng dẫn giải

Giả sử thời gian chuyển động trên cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lân lượt là x, y, z (giây)

 \Rightarrow thời gian chuyể động trên cạnh thứ hai là x (giây).

Quãng đường mà vật chuyển động trên các cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lân lượt là 5x, 4y, 3z.

Mà độ dài các cạnh của hình vuông bằng nhau nên ta có : 5x = 4y = 3z (1)

Tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây nên có : x+x+y+z=59

Từ (1)
$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5}, \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

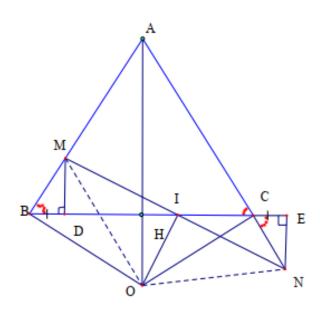
Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{2x+y+z}{24+15+20} = \frac{59}{59} = 1$ $\Rightarrow x = 12, y = 15, z = 20$

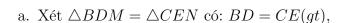
 $KL : D\hat{Q}$ dài cạnh hình vuông là : 5.12 = 60 (cm)

Bài 0.151. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

- a. Chứng minh rằng: DM = EN.
- b. MN cắt BC tại I.Chúng minh I là trung điểm của MN.
- c. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Hướng dẫn giải





$$D = E = 90^{\circ}(MD, NE \perp BC)$$

$$ABC = ECN (= ACB)$$

$$\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CEN(g.c.g)$$

$$\Rightarrow DM = EN$$

b. Xét \triangle MDI và \triangle NEI có: $D=E=90^{\circ}$

$$DM = EN$$
 (Theo câu a)

$$DMI = ENC$$
 (So le trong và MD//NE)

$$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI (g.c.g)$$

$$\Rightarrow IM = IN$$

Vậy I là trung điểm của MN.

c. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC, O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ $I \Rightarrow$ Cần chứng minh O là điểm cố định.

Nối O với B, C. Vì đường thẳng OA cố định nên cần chứng minh OC cố định hay OC \perp AC.

Chứng minh
$$\triangle OAB = \triangle OAC$$
 (c.c.c) $\Rightarrow OBA = OCA$

Chứng minh
$$\triangle OBM = \triangle OCN$$
 (c.c.c) $\Rightarrow OBA = OCN$

Từ
$$1, 2 \Rightarrow OCA = OCN$$
 mà $OCA + OCN = 180^{\circ} \Rightarrow OCA = OCN = 90^{\circ}$

$$\Rightarrow$$
 OC \perp AC.

⇒ O là điểm cố định.

Vậy khi D di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 0.152. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Chứng tỏa rằng: $f(-2) \cdot f(3) \le 0$. Biết rằng 13a + b + 2c = 0

🔑 Hướng dẫn giải

$$f(-2) = 4a - 2b + c$$
 và $f(3) = 9a + 3b + c \Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = (4a - 2b + c)(9a + 3b + c)$

Nhận thây
$$(4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow (4a - 2b + c) = -(9a + 3b + c)$$

Vậy
$$f(-2) \cdot f(3) = -(4a - 2b + c) \cdot (4a - 2b + c) = -(4a - 2b + c)^2 \le 0$$

$\S31.$ ĐỀ SỐ 31

Bài 0.153.

- a. Tìm tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < x < \frac{1}{24} \left(\frac{1}{8} \frac{1}{3}\right)$.
- b. Tìm các số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ và a b + c = -49.

Hướng dẫn giải

a.
$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < x < \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{4}$$
$$\frac{-2}{4} < x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2 < x < 1. \text{ mà } x \text{ là số nguyên nên } x \in \{-1, 0\}$$

b. Vì
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}; \quad \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$
 nên $\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{a-b+c}{10-15+12} = \frac{-49}{7} = -7$$
Suy ra: $a = 10 \cdot (-7) = -70; b = 15 \cdot (-7) = -105; c = 12 \cdot (-7) = -84$

Bài 0.154.

- a. Tìm giá trị của m
 để đa thức $g(x) = x^4 + m^2 x^3 + m x^2 + m x 1$ có nghiệm là -1.
- b. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp, biết: $f(x) = (3x^2 12x + 8)^{2013} \cdot (x^3 2x^2 + 3x 3)^{2014}$.
- c. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n
 thì phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

🔑 Hướng dẫn giải

- a. Để đa thức g(x) có nghiệm -1 thì $g(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + m^2(-1)^3 + m(-1)^2 + m(-1) 1 = 0$ $\Leftrightarrow 1 m^2 + m m 1 = 0 \Leftrightarrow -m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$
- b. Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là $\mathbf{f}(1)$

$$\text{Mà } f(1) = \left(3.1^2 - 12.1 + 8\right)^{2013} \cdot \left(1^3 - 2.1^2 + 3.1 - 3\right)^{2014} = (-1)^{2013} \cdot (-1)^{2014} = -1.$$

Vậy: Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp là -1

c. Gọi d = UCLN $(12n+1,30n+2)\,(d\in N^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1 \\ \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60n+5 \\ \vdots d \end{cases} \Rightarrow (60n+5)-(60n+4)=1 \\ \vdots d \Rightarrow d=1 \end{cases}$$

$$60n+4 : d$$

Vậy: Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.



Bài 0.155. Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường xấu tốt khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng lần lượt bằng 40; 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB?

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc và thời gian xe tải đi trên ba chặng đường lần lượt là $v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3$. Khi đó:

 $t_1 + t_2 + t_3 = 5$ Vì ba chặng đường dài bằng nhau, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỷ lệ nghịch, do đó:

$$t_1:t_2:t_3=\frac{1}{v_1}:\frac{1}{v_2}:\frac{1}{v_3}=\frac{1}{40}:\frac{1}{24}:\frac{1}{60}=3:5:2$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$

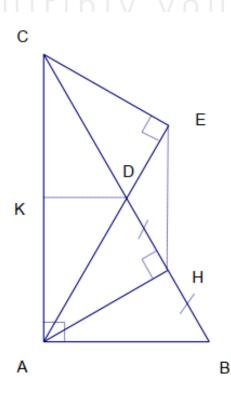
Suy ra: t1 = 3.0, 5 = 1, 5(h)

Quãng đường AB là: 3. (40.1, 5) = 180 (km)

Bài 0.156. Cho tam giác ABC vuông tại A, có C = 30° , kẻ $AH \perp BC(H \in BC)$. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho HD = HB. Từ C kẻ CE \perp AD. Chứng minh rằng:

- a. $BAD = 60^{\circ}$;
- b. EH song song với AC.

Hướng dẫn giải



- a. $\triangle {\rm AHB} = \triangle {\rm AHD}$ (hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau)
 - $\Rightarrow AB = AD$



 $\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A.

$$B = 60^{\circ} \Rightarrow BAD = 60^{\circ}$$

- b. Kẻ DK \perp AC \Rightarrow DK = DE = DH (tính chất đường phân giác)
 - $\Rightarrow \triangle DEH$ cân tại D

$$EDH = ADC = 120^{\circ} (d\acute{o}i dinh)$$

- \Rightarrow DHE = 30°
- \Rightarrow DHE = ACB ($\mathring{\sigma}$ vị trí so le trong) \Rightarrow EH//AC

Bài 0.157.

- a. Tính giá trị của biểu thức A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + ... + 48.50.
- b. Cho $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng: $B < \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

a. $A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + 48.50 = 1.(2+1) + 2.(3+1) + 3.(4+1) + \dots + 48.(49+1)$

$$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + (1 + 2 + 3 + \dots + 48)$$

Lại có:
$$T_1 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 = \frac{48.49.50}{3} = 39200$$

$$T_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 48 = \frac{1 + 48}{2} \cdot 48 = 1176$$

$$V_{\text{ay}}: A = 39200 + 1176 = 40376$$

b. Vì $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{23}$; $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{34}$; \cdots ; $\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99100}$ nên

$$B < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

Tính được:
$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$$

Suy ra:
$$B < \frac{1}{4} + \frac{49}{100} = \frac{25 + 49}{100} = \frac{74}{100} < \frac{75}{100} < \frac{3}{4}$$

$\S32.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 32

Bài 0.158.

a. Tính giá trị của biểu thức
$$A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$$

b. Tính giá trị của biểu thức
$$B = 2x^2 - 3x + 1$$
 với $|x| = \frac{1}{2}$.

c. Tìm 3 số
$$x, y, z$$
 biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$; $\frac{y}{2} = \frac{z}{5}$ và $x + y + z = -110$.

Hướng dẫn giải

a.
$$A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$$

 $= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$
 $= \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)\right] : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0$

$$V \hat{a} y : A = 0$$

b. Vì
$$|x| = \frac{1}{2}$$
 nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$
Với $x = \frac{1}{2}$ thì: $A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$

Với
$$x = -\frac{1}{2}$$
 thì: $A = 2$. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3$. $\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$

Vậy : A = 0 với x =
$$\frac{1}{2}$$
 và A = 3 với x = $-\frac{1}{2}$

c. Từ
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$
. Suy ra $\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$

[5px] Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{6+14+35} = \frac{-110}{55} = -2$$

Suy ra
$$x = -2.6 = -12$$
; $y = -2.14 = -28$; $z = -2.35 = -70$.

Vậy:
$$x = -12$$
; $y = -28$; $z = -70$.

Bài 0.159.

a. Tìm tập hợp các số nguyên x, biết rằng:

$$4\frac{5}{9}: 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5}: 3, 2 + 4, 5.1\frac{31}{45}\right): \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

b. Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

c. Tính giá trị của biểu thức: $C=2x^5-5y^3+2015$ tại x,y thỏa mãn:

$$|x-1| + (y+2)^{20} = 0$$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:
$$4\frac{5}{9}: 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$$

$$\text{Lại có: } \left(3\frac{1}{5}:3,2+4,5\cdot1\frac{31}{45}\right): \left(-21\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{5}\cdot\frac{5}{16} + \frac{9}{2}\cdot\frac{76}{45}\right): \left(-\frac{43}{2}\right) = \left(1+\frac{38}{5}\right)\cdot\frac{-2}{43}$$

$$[5px] = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$

Do đó:
$$-5 < x < \frac{-2}{5}$$
 mà $x \in Z$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

b. Do $|x-1| \ge 0$; $(y+2)^{20} \ge 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \ge 0$ với mọi x, y.

Kết hợp
$$|x-1| + (y+2)^{20} = 0$$
 suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0 \Leftrightarrow x=1; y=-2$

[5px] Giá trị của biểu thức : $C=2x^5-5y^3+2015$ tại x=1;y=-2 là:

[5px]
$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2015 = 2 + 40 + 2015 = 2057$$

$$[5px]$$
Vậy $C = 2057$

Bài 0.160.

- a. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1: 2: 3.
- b. Tìm tất cả các số tự nhiên a,b sao cho : $2^{a} + 37 = |b 45| + b 45$.

Hướng dẫn giải

a. Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cân tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử a $\leq b \leq c \leq 9$

Ta có $1 \le a + b + c \le 27$.

Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 , do đó a+b+c=9 hoặc a+b+c=18 hoặc a+b+c=27.

Theo đề bài ta có:
$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$$
;

Như vậy a+b+c chia hết cho 6 , nên a+b+c=18.

Từ đó suy ra a = 3, b = 6, c = 9.

Do số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn,

 $[5\mathrm{px}]$ vì vậy hai số cân tìm là: 396; 936.

b. Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = a \cdot b$ $a^2 + c^2 \qquad a^2 + a \cdot b$

khi đó
$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + a \cdot b}{b^2 + a \cdot b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

c. Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì |x| + x = 2x

Với x < 0 thì |x| + x = 0. Do đó |x| + x luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|\mathbf{b}-45|+\mathbf{b}-45$ là số chẵn với $\mathbf{b}\in\mathbf{Z}.$

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$.

Khi đó
$$|b - 45| + b - 45 = 38$$

+ Nếu
$$b < 45$$
, ta có $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Leftrightarrow 0 = 38$ (loại)

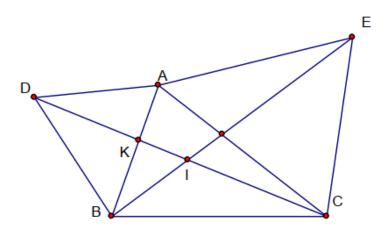
+ Nếu
$$b \ge 45$$
, ta có $2(b-45) = 38 \Leftrightarrow b-45 = 19 \Leftrightarrow b = 64(TM)$

vậy
$$(a; b) = (0; 64)$$

Bài 0.161. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

- a. Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.
- b. Chứng minh rằng: góc DIB = 60° .
- c. Gọi M và N lân lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
- d. Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

Hướng dẫn giải



a. Ta có: AD = AB; DAC = BAE và AC = AE

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

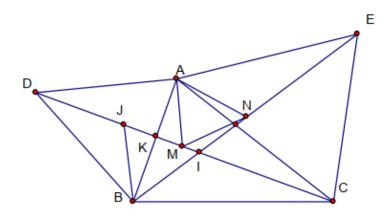
b. Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow ABE = ADC$,



mà BKI = AKD (đối đỉnh).

Khi đó xét \triangle BIK và \triangle DAK suy ra BIK = DAK = $60^{\circ}(\emptyset$ pcm)

c.



Từ
$$\triangle ADC = \triangle ABE$$
 (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $ACM = AEN$ $\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $CAM = EAN$ $MAN = CAE = 60^{\circ}$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

- d. Trên tia ID lấy điểm J sao cho IJ = IB \Rightarrow Δ BIJ đều \Rightarrow BJ = BI và JBI = DBA = 60° [5px] suy ra IBA = JBD, kết hợp BA = BD
 - $\Rightarrow \Delta IBA = \Delta JBD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AIB = DJB = 120^{\circ} \text{ mà BID} = 60^{\circ}$
 - \Rightarrow DIA = $60^{\circ}.$ Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Bài 0.162. Cho 20 số nguyên khác $0: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ có các tính chất sau:

- * a_1 là số dương.
- * Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.
- * Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng : $a_1.a_{14} + a_{14}.a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0; a_1 > 0;$$

 $a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0 \Rightarrow a_{14} < 0$

Cũng như vậy:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 = > a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác, $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$.

Từ các điều kiện $a_1>0; a_{12}>0; a_{14}<0$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14}a_{12} < a_1 \cdot a_{12} \text{ (dpcm)}.$$





$\S 33.$ ĐỀ SỐ 33

Bài 0.163.

a. Tính giá trị
$$A = 1000 - \left\{ (-5)^3 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot \left[7^2 - 5 \cdot 2^3 + 8 \left(11^2 - 121 \right) \right] \right\}$$

b. Tìm
$$x$$
 biết $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

c. Tìm
$$x$$
 thỏa mãn $|x-10|^{10} + |x-11|^{11} = 1$

Hướng dẫn giải

a. Ta có:

$$A = 1000 - \{(-125) \cdot (-8) - 11 \cdot [49 - 40 + 8 \cdot (121 - 121)]\}$$

$$= 1000 - [1000 - 11 \cdot (9 + 8 \cdot 0)]$$

$$= 1000 - (1000 - 11 \cdot 9)$$

$$= 99$$

b. Ta có:

$$\left(3 - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{21}{10} - |x+2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = -2; 2$$

$$\Leftrightarrow x = -4; 0$$

Vậy
$$x = 0; -4$$

c. - Nếu x>11 hoặc x<10 th
ìx-10>1 hoặc x-11<-1.

Suy ra
$$|x-10| > 1; |x-11| > 1$$
 (loại)

- Nếu 10 < x < 11 thì 0 < x - 10 < 1,0 < 11 - x < 1. Suy ra
$$|x-10| < 1; |x-11| < 1.$$
 Do đó $|x-10|^{10} < |x-10| = x-10; |x-11|^{11} = |11-x|^{11} < |11-x| = 11-x$

Suy ra
$$|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} < x - 10 + 11 - x = 1$$
 (loại)

- Nếu
$$x=10$$
 hoặc $x=11$ thỏa mãn

Vậy
$$x = 10; 11$$



Bài 0.164.

- a. Tìm hai số dương khác nhau x,y biết rằng: Tổng, hiệu và tích của chúng lân lượt tỉ lệ nghịch với 35;210 và 12 .
- b. Cho a, b, c là các số thực khác 0 . Tìm các số thực x, y, z khác 0 thoả mãn:

$$\frac{xy}{ay + bx} = \frac{yz}{bz + cy} = \frac{zx}{cx + az} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hướng dẫn giải

a. Gọi hai số phải tìm là x và y(x > 0, y > 0 và x \neq y)

Theo đề bài ta có: 35. (x + y) = 210.(x - y) = 12x.y

Chia các tích trên cho BCNN của 35, 210, 12 là 420 ta được:

$$\frac{35 \cdot (x+y)}{420} = \frac{210(x-y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

hay
$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{35}$$
 (1)

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{(x+y) + (x-y)}{12+2} = \frac{(x+y) - (x-y)}{12-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5}(2)$$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$$

Vì
$$x > 0; y > 0$$
 nên $7y = 35$

$$\Rightarrow y = 5; 5x = 35 \Rightarrow x = 7$$

Vậy hai số phải tìm là 7 và 5.

b. Do x, y, z khác 0 nên
$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az}$$

$$\Rightarrow \frac{zxy}{ayz+bxz} = \frac{xyz}{bzx+cyx} = \frac{yzx}{cxy+azy}$$

Suy ra $ayz+bxz=bzx+cyx=cxy+azy\Rightarrow az=cx,bx=ay$

Do đó
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t \Rightarrow x = at, y = bt, z = ct, t \neq 0$$

Ta có
$$\frac{xy}{ay + bx} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{at.bt}{abt + bat} = \frac{a^2t^2 + b^2t^2 + c^2t^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Suy ra
$$\frac{t}{2} = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} (\text{ do } t \neq 0)$$

Vậy
$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}$$

Bài 0.165.



- a. Tìm x, y nguyên thoả mãn $3xy 5 = x^2 + 2y$
- b. Tìm số có bốn chữ số \overline{abcd} thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
 - i. $\overline{ab}, \overline{ad}$ là hai số nguyên tố;
 - ii. $\overline{db} + c = b^2 + d$.

Hướng dẫn giải

a. Theo đề ta có
$$3xy - 2y = x^2 + 5 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 5$$

Do x, y nguyên nên suy ra $x^2 + 5$ chia hết cho 3x - 2

$$\Rightarrow 9. (x^2 + 5)$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 + 45$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 - 6x + 6x - 4 + 49$$
 chia hết cho $3x - 2$

$$\Rightarrow 3x.(3x-2)+2(3x-2)+49$$
chia hết cho $3x-2$

$$\Rightarrow 49$$
 chia hết cho $3x-2 \Rightarrow 3x-2 \in \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$

$$\Rightarrow 3x \in \{-47; -5; 1; 3; 9; 51\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 17\}$$

Thay x lần lượt vào (1) ta được $y \in \{6, 2, 6\}$

Vậy các cặp số
$$(x, y)$$
 là $(1; 6), (3; 2), (17; 6)$

b. Do \overline{ab} ; \overline{ad} là các số nguyên tố nên b và d lẻ khác 5 (1)

Mặt khác từ điều kiện ii) ta có 9 d + c = b(b - 1) (2)

Có 9 d + c
$$\geq$$
 9 nên từ (2) suy ra $b > 3$ mà b lẻ \Rightarrow b = 7; 9

$$+b = 7 \Rightarrow 9 d + c = 42 \Rightarrow 3 < d \le 4 trái với (1)$$

$$+b=9 \Rightarrow 9 \ d+c=72 \Rightarrow 6 < d \leq 8 \ mà \ d \ le \Rightarrow d=7$$

Thay vào điều kiện (2) được c = 9.

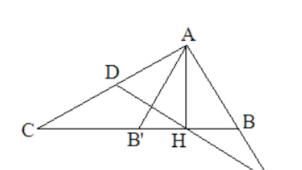
Do $\bar{a}; \bar{a7}$ là các số nguyên tố nên a chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng 1; 2; 5; 7; 8 hoặc 1; 3; 4; 6; 9.

Suy ra a=1 và $\overline{abcd}=1997$, thử lại thấy đúng.

Bài 0.166. Cho tam giác ABC có $\hat{B} < 90^{\circ}$ và $\hat{B} = 2\hat{C}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BH (với H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC), đường thẳng EH cắt AC ở D.

- a. Chứng minh rằng: DA = DC.
- b. Chứng minh rằng: AE = HC.

Hướng dẫn giải



Ε

a. Ta có \triangle BEH cân tại B $\Rightarrow \angle$ BEH = \angle BHE

Ta có
$$\angle ABC = 2$$
. $\angle BHE = 2$. $\angle DHC$ mà $\angle ABC = 2$. $\angle ACB \Rightarrow \angle DHC = \angle DCH(1)$

Suy ra Δ DCH cân tại D nên DH = DC

$$X\acute{e}t \triangle ACH : \angle CAH + \angle DCH = 90^{\circ}, \angle CHD + \angle DHA = 90^{\circ} (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\angle DAH = \angle DHA$, do đó $\triangle DAH$ cân tại D, suy ra DA = DC.

b. Lấy B' đối xứng với B qua H, suy ra $\triangle ABB'$ cân tại A (AH là trung trực của BB')

$$\Rightarrow$$
 AB = AB', B'H = BH, \angle AB'H = \angle ABC

Ta có
$$\angle AB'H = \angle ABC = 2$$
. $\angle C = \angle C + \angle CAB'$

$$\Rightarrow \angle C = \angle CAB'$$
, do đó $\Delta B'AC$ cân tại B' nên $B'A = B'C$

Vì AB < AC nên AB' = AB < AC nghĩa là B' ở giữa H và C nên

$$HC = HB' + B'C = HB + AB' = BE + AB = AE$$

$\S34.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 34

Bài 0.167.

- a. Chứng minh: $5^{2014} 5^{2013} + 5^{2012}$ chia hết cho105 .
- b. Tìm số nguyên tố p
 sao cho p + 2 và p + 4 đều là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

a.
$$5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012} = 5^{2011} (5^3 - 5^2 + 5) = 5^{2011} (125 - 25 + 5) = 5^{2011} .105$$
 chia hết cho 105

Vậy p = 3k, mặt khác p là số nguyên tố nên p = 3

Bài 0.168. Tìm x biết:

a.
$$|3 - 2x| = x + 1$$

b.
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

Hướng dẫn giải

a. Nếu
$$x \ge \frac{3}{2}$$
 thì $|3-2x| = x+1 \Leftrightarrow 2x-3 = x+1 \Leftrightarrow x=4$
Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|3-2x| = x+1 \Leftrightarrow 3-2x = x+1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy
$$x = 4$$
 hoặc $x = \frac{2}{3}$

b.
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2014}\right) x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \ldots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2014}\right) x = 2014 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right) \Leftrightarrow x = 2014$$

Bài 0.169.

a. Tìm
$$x; y; z$$
 biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$.

b. Cho
$$\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$$
. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015|.

Hướng dẫn giải

a. Ta có
$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14}(1); 5x = 7z \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15}$$
 (2)

Từ (1) và (2) ta có:
$$\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x - 2y + z}{21 - 28 + 15} = \frac{32}{8} = 4$$

Tìm được: x = 84; y = 56; z = 60

b. Đặt:
$$\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k \Rightarrow 7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7}$$

Tương tự: $7z + 5t = k(3z - 7t) \Rightarrow (3k - 7)z = (7k + 5)t$

$$\Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7}(2) \ (1)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c.
$$A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015| = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

Ta có:
$$|x - 2013| + |2015 - x| \ge |x - 2013 + 2015 - x| = 2$$
.

Dấu " = " xảy ra khi:
$$2013 \le x \le 2015(1)$$

Lại có:
$$|x - 2014| \ge 0$$
. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2014$ (2).

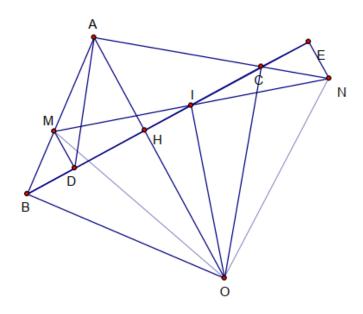
Từ (1) và (2) Ta có min
$$A = 2$$
. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2014$

Bài 0.170. Cho tam giác ABC cân (AB = AC). Trên cạnh BC lấy điểm D trên tia đối tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lân lượt ở M và N. Gọi I là giao điểm của MN và BE.

- a. Biết AB < BC. Chứng minh: $\hat{A} > 60^{\circ}$.
- b. Chứng $\min IM = IN$
- c. Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua 1 điểm cố định khi D thay đối trên cạnh BC.

Hướng dẫn giải





- a. Do AB < BC nên A>B. mà B=C vì tam giác ABC cân Mà $A+B+C=180^\circ$ nên ta có $A>60^\circ$ (HS có thể $c/{\rm m}$ bằng phản chứng)
- b. HS chứng minh được $\Delta BDM = \Delta CEN$ suy ra EN = DM HS chứng minh được $\Delta IDM = \Delta IEN$ suy ra IN = IM
- c. Kẻ AH vuông góc với BC. Gọi O là giao điểm của AH và đường thẳng vông góc với MN ở I. HS chứng minh được O là điểm cố định.





$\S35.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 35

Bài 0.171.

1. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (-1)^{3} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^{2} \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{1}{14}\right)$$

$$B = 2016 : \left(\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} \cdot \frac{-1\frac{1}{6} + 0, 875 - 0, 7}{\frac{1}{3} - 0, 25 + \frac{1}{5}}\right)$$

2. Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết Q(x) chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

a.
$$A = (-1) \cdot \frac{(-7)^3}{8^3} \cdot \frac{(-2)^2}{7^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (-7)^3 \cdot (-2)^2}{2^9 \cdot 7^2 \cdot 2}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (-7) \cdot (-1)}{2^8}$$

$$= \frac{-7}{256}$$
Tinh:

Tính:

*)
$$\frac{0, 4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1, 4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}$$
$$= \frac{2}{7} \left(\text{ vì } \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \neq 0 \right)$$

*)
$$\frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} = \frac{-7 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}$$
$$= \frac{-7}{2} \left(\text{ vi } \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \neq 0 \right)$$

B = 2016:
$$\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{-7}{2}\right) = -2016$$

b. Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Vì Q(x) : 3 với mọi
$$x \in Z$$
, nên

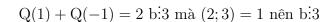
Với
$$\mathbf{x} = 0$$
, ta có $\mathbf{Q}(0) = d \mathbf{\dot{z}}$

Với x = 1, ta có Q(1) =
$$a + b + c + d$$
:3

$$mà d:3 => a + b + c:3(1)$$

Với
$$x = -1$$
, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d:3$

$$mà d:3 => -a + b - c:3(2)$$



$$Q(1) - Q(-1) = 2(a+c)$$
:3 mà $(2;3) = 1$ nên a + c:3(3)

Với
$$x = 2$$
, ta có $Q(2) = 8a + 4b + 2c + d:3$

hay
$$7a + (a + c) + 2b + d3$$

Mà d:3, a + c:3, b:3 nên 7a:3 mà
$$(7;3) = 1 = a:3$$

$$T\dot{u}$$
 (3) suy ra c:3 => dpcm

Bài 0.172.

1. Biết
$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$$
 (với $a,b,c\neq 0$). Chứng minh rằng: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{c}}$.

2. Số M được chia thành ba phân tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

Hướng dẫn giải

a. Với a, b,
$$c \neq 0$$
, ta có:

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{bza - cya}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$$
$$= \frac{bza - cya + bcx - baz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

Suy ra
$$\frac{bz - cy}{a} = 0$$
, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}(1)$

$$\frac{cx - az}{b} = 0$$
, do đó $cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{z}$$

b. Gọi ba phần được chia của số M là x,y,z. , ta được x+y+z=M

Theo đề bài ta có x : y : z =
$$\frac{1}{3}$$
 : $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{6}$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728(1)$

Hay
$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \text{ và } x^3 + y^3 + z^3 = 10728$$

Suy ra
$$x^3 = 10^3 \cdot k^3$$
; $y^3 = 6^3 \cdot k^3$; $z = 5^3 \cdot k^3$

Thay vào (1), được
$$1341k^3=8 \Rightarrow k=2$$
 suy ra 20; $y=12; z=10$

$$V \hat{a} y M = 42.$$

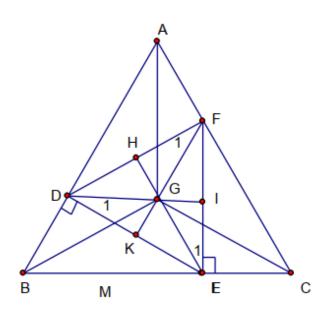
Bài 0.173. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho BD = $\frac{1}{3}$ AB. Tại D kẻ đường vuông góc với AB cắt cạnh BC tại E. Tại E kẻ đường vuông góc với BC cắt AC tại F.

1. Chứng minh DF \perp AC. Biết trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° thì bằng nửa cạnh huyền.



- 2. Chứng minh tam giác DEF đều.
- 3. Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh GA = GB = GC.

Hướng dẫn giải



a.
$$\triangle ABC$$
 đều nên $AB = AC = BC = a$ và $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$$BD = \frac{1}{3}a \quad (gt)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2}{3}a$$

Xét
$$\triangle BDE$$
 vuông tại D có $\angle B = 60^{\circ} \Rightarrow \angle DEB = 30^{\circ}$

Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle DEB = 30^{\circ}$

$$\Rightarrow$$
 BD = $\frac{1}{2}$ BE

hay BE = 2BD =
$$2 \cdot \frac{1}{3}$$
a = $\frac{2}{3}$ a mà BC = a nên EC = $\frac{1}{3}$ a

Tương tự, xét $\triangle \mathrm{ECF}$ vuông tại E có $\angle \mathrm{C} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle EFC = 30^{\circ}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{1}{3}a$$

Xét \triangle ADF và \triangle BED có:

$$AD = BE \left(= \frac{2}{3}a \right)$$

$$\angle A = \angle B (= 60^{\circ})$$

$$AF = BD \left(= \frac{1}{3}a \right)$$

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle BED(c. g. c)$$

$$\Rightarrow \angle {\rm AFD} = \angle {\rm BDE}$$
 (hai góc tương ứng)

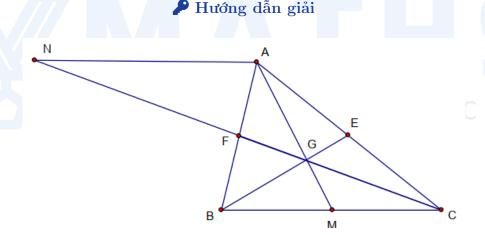
Mà ∠BDE =
$$90^{\circ}$$



$$\Rightarrow \angle AFD = 90^{\circ} \text{ hay DF} \perp AC$$

- b. Chứng minh tương tự cũng có . $\Delta DBE = \Delta ECF$ (c.g.c)
 - \Rightarrow DE = EF (hai canh tương ứng)
 - Có $\triangle ADF = \triangle BED$ (c. g. c) (cmt)
 - \Rightarrow DF = DE (hai cạnh tương ứng)
 - \Rightarrow DE = DF = EF
 - $\Rightarrow \Delta {\rm DEF}$ là tam giác đều.
- c. Xét $\triangle DEF$ đều có G là trọng tâm của tam giác
 - $\Rightarrow G$ là giao điểm của ba đường phân giác
 - \Rightarrow GD, GE, GF là các đường phân giác của các góc \angle EDF; \angle DEF; \angle DFE Có \triangle DEF đều nên \angle D = \angle E = \angle F = 60°

Bài 0.174. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng nếu AGB $\leq 90^\circ$ thì AC + BC > 3AB.



Vẽ trung tuyến CF của Tam giác ABC. Trên tia đối của tia FC lấy điểm N sao cho FN = FC.

$$C/M \text{ duoc}: \triangle ANF = \Delta BCF(c-g-c) \Rightarrow AN = BC$$

Xét $\triangle CAN$ có AN + AC > NC (bất đẳng thức tam giác)

$$\Rightarrow$$
 AC + BC > NC

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên CF = 3GF \Rightarrow NC = 6GF (1)

Ta sẽ chứng minh: nếu $\angle AGB \le 90^{\circ}$ thì GF $\ge \frac{AB}{2}$

Giả sử GF $<\frac{AB}{2}$ hay GF < AF = BF thì \angle FAG < \angle AGF; \angle FBG < \angle BGF (quan hệ góc và cạnh tương ứng trong tam giác)

$$\Rightarrow \angle ABG + \angle BAG < \angle FGB + \angle FGA = \angle AGB \le 90^{\circ}$$

Xét tam giác AGB có \angle ABG + \angle BAG + \angle AGB < 90° + 90° = 180° vô lí.



Vậy nếu $\angle AGB \le 90^{\circ}$ thì GF $\ge \frac{AB}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NC \geq 3AB$ suy ra AC + BC > 3AB (đpcm)

Bài 0.175. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{22-3x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Biến đổi
$$C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$$

C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau:

Với
$$x > 4 \Rightarrow 4 - x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} < 0$$

Với $x > 4 \Rightarrow 4 - x > 0$.

Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất

Có $x \in Z$ Suy ra $4-x \in Z$

Suy ra 4-xlà số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3$

khi đó
$$\frac{10}{4-x}$$
 có giá trị là $10(2)$

Từ (1) và (2) , phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10

Vậy GTLN của C bằng 13 khi và chỉ khi x=3



§36. ĐỀ SỐ 36

Bài 0.176.

a. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

b. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Hướng dẫn giải

a. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Vì a, b, c là các số dương nên $a+b+c\neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

Nên: $\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Mà
$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Vậy: B = 8

b. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Ta có:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013}$$

$$\text{M\`a: } \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}}$$

Từ (1) và (2)
$$\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$$
 (đpcm)

Bài 0.177.

a. Cho
$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

Chứng minh rằng: Biểu thức sau có giá tri nguyên

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

- b. Tìm x biết: $x^2 5x + 6 = 0$
- c. Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Hướng dẫn giải

a. Cho
$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

Chúng minh rằng: Biểu thức sau có giá tri nguyên

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

Ta có:
$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = y + z + t; 3y = z + t + x; 3z = t + x + y; 3t = x + y + z$$

$$\Rightarrow x + y = z + t; y + z = t + x; z + t = x + y; t + x = y + z$$

$$\Rightarrow x + y = z + t; y + z = t + x; z + t = x + y; t + x = y + z$$

$$\Rightarrow A = \frac{x + y}{z + t} + \frac{y + z}{t + x} + \frac{z + t}{x + y} + \frac{t + x}{y + z} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \in \mathbb{Z}$$

Vây biểu thức A có giá tri nguyên. (đpcm)

b. Tìm
$$x$$
 biết: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Ta có:
$$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x) - (2x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x = 2 \end{bmatrix}$$

Vậy: x = 2 hoặc x = 3

c. Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$.

Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Gọi ba phân được chia lần lượt là: a, b, c

Theo bài ra ta có:
$$a:b:c=\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$$
 và $a^2+b^2+c^2=24309$

Ta có:
$$a:b:c=\frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}=24:45+10\Rightarrow \frac{a}{24}=\frac{b}{45}=\frac{c}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 576.9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$$

$$b^2 = 2025.9 = 18225 \Rightarrow b = \pm 135$$

$$c^2 = 100.9 = 900 \Rightarrow c = 30$$

Vì:
$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow a, b, c$$
 cùng dấu.

$$\Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

$$A = 72 + 135 + 30 = 235$$

Vậy:
$$A = -135$$
 hoặc $A = 135$

Bài 0.178. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: A = |x - 2013| + |x - 3014| + |x - 2015|🔑 Hướng dẫn giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Tim giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = |x - 2013| + |x - 3014| + |x - 2015|$$

Ta có:
$$|x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 3014|$$

$$\Rightarrow A \geq |x - 2013 + 2015 - x| + |x - 2014|$$

$$\Rightarrow A \ge 2 + |x - 2014|$$

Mà:
$$|x - 3014| \ge 0$$

$$\Rightarrow A \ge 0$$

Dấu bằng xảy ra
$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2013)(2015-x) & \Leftrightarrow \\ x=2014 & \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 2013 \le x \le 2014 \\ x=2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2014$$
 Vậy GTNN của A là 2 khi $x = 2014$

Bài 0.179. Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 20;120;16.

🔑 Hướng dẫn giải

Tìm hai số dương biết tổng hiệu tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 30; 120; 16.

Gọi hai số dương cần tìm là x, y

Theo bài ra ta có: 30(x + y) = 120(x - y) = 16xy

$$\Rightarrow \frac{x+y}{8} = \frac{x-y}{2} = \frac{xy}{15} = k$$

$$\Rightarrow x + y = 8k; x - y = 2k; xy = 15k$$

$$\Rightarrow x = 5k; y = 3k \Rightarrow xy = 5k \cdot 3k = 15k$$

$$15k^2 = 15k \Rightarrow k = 1$$

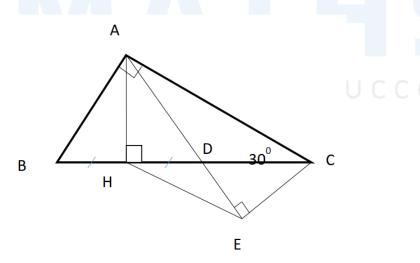
$$\Rightarrow x + y = 8; x - y = 2 \Rightarrow x = 5; y = 3$$

Vậy hai số dương cần tìm là 5 và 3.

Bài 0.180. Cho tam giác ABC vuông ở A, có góc $C=30^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho HD=HB. Từ C kẻ CE vuông góc với AD. Chứng minh:

- a. Tam giác ABD là tam giác đều.
- b. AH = CE.
- c. HE song song với AC.

Hướng dẫn giải



a. $\triangle ABD$ có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ABD$ cân tại A.

Ta có: $B+C=90^\circ$ (Hai góc nhọn của một tam giác vuông)

$$\Rightarrow B = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$$

Nên $\triangle ABD$ là tam giác đều. (đ
pcm)

b. Ta có: $EAC = BAC - ABD = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$

$$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle CEA$$
 (cạnh huyền -góc nhọn)

Do đó AH = CE (dpcm)

c. $\triangle AHC = \triangle CEA(\mathrm{cmt})$ nên HC = EA(1)



 $\triangle ADC$ cân ở D vì có $ADC = DCA = 30^{\circ} \Rightarrow \triangle DAC$ cân ở D.

Suy ra : DA = DC. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DH = DE \Rightarrow \triangle DHE$ cân tại D

Hai tam giác cân ADC và DEH có:

Hai tam giác cân: $\triangle ACD$ cân tại D và $\triangle DHE$ cân tại D có:

$$ADC = HDE(dd) \Rightarrow DHE = ADC$$
 ở vị trí so le trong

 $\Rightarrow EH//AC$ (dpcm)





§37. ĐỀ SỐ 37

Bài 0.181.

- a. Tính giá trị biểu thức $P = \left| a \frac{1}{2014} \right| + \left| a \frac{1}{2016} \right|$, với $a = \frac{1}{2015}$.
- b. Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

🔑 Hướng dẫn giải

a. Tính giá trị biểu thức P =
$$\left|a - \frac{1}{2014}\right| + \left|a - \frac{1}{2016}\right|$$
, với $a = \frac{1}{2015}$.

Thay
$$a = \frac{1}{2015}$$
 vào biểu thức $P = \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014} \right| + \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right|$

Ta có
$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$$

$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016}$$

$$P = \frac{2014 - 2016}{2016 - 2014} = \frac{2}{2014.2016}$$

$$P = \frac{1}{1007.2016} = \frac{1}{2030112}$$

b. Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Dặt A =
$$\frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1}$$

= $\frac{2(x-1)}{x+1}$

$$=\frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2x-2}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+1)-4}{x+1}$$

$$=2-\frac{4}{x+1}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì x + 1 là $U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Suy ra x
$$\in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$$

Bài 0.182.

- a. Cho a > 2, b > 2. Chứng minh ab > a + b
- b. Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Hướng dẫn giải

a. Cho a > 2, b > 2. Chứng minh ab > a + b

Từ
$$a>2\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{2}\;b>2\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{2}$$

Suy ra
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$$

Vậy
$$ab > a + b$$

b. Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1; d_2, r_2; d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3, d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1=12~{\rm cm}, r_2=15~{\rm cm}$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7.24}{8} = 21 \text{ cm}$$

Vậy diện tích hình thứ hai $S_2=d_2r_2=21.15=315~\mathrm{cm}^2$

Diện tích hình thứ nhất:

$$S_1 = \frac{4}{5}S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 \text{ cm}^2$$

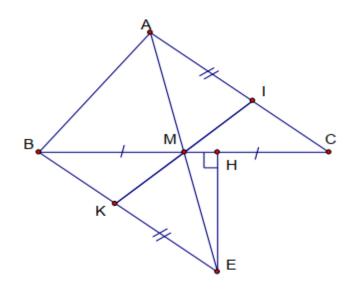
Diện tích hình thứ ba: $S_3 = \frac{8}{7}S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 \text{ cm}^2$

Bài 0.183. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

- a. $\mathrm{AC} = \mathrm{EB}$ và AC // BE
- b. Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho: AI = EK. Chứng minh: I, M, K thẳng hàng.
- c. Từ E kẻ EH \perp BC(H \in BC). Biết góc HBE bằng 50°; góc MEB bằng 25°, tính các góc HEM và BME?

🔑 Hướng dẫn giải





a. Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM$$
 (gt)

$$AMC = EMB$$
 (đối đỉnh)

$$BM = MC$$
 (gt)

Nên :
$$\triangle AMC = \triangle EMB$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow$$
 AC = EB

$$Vi \triangle AMC = \triangle EMB$$

(2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE).

Suy ra $AC//\mathrm{BE}.$

b. Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM(gt)$$

$$MAI = MEK(vi \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK(gt)$$

Nên
$$\triangle AMI = \Delta EMK$$
 (c.g.c). Suy ra $AMI = EMK$

Mà
$$AMI + IME = 180^{\circ}$$
 (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow$$
 EMK + IME = 180° \Rightarrow Ba điểm I; M; K thẳng hàng

c. Trong tam giác vuông BHE ($H = 90^{\circ}$) có $HBE = 50^{\circ}$

$$\Rightarrow HBE = 90^{\circ} - HBE = 90^{\circ} - 50^{\circ} = 40^{\circ}$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^{\circ} - 25^{\circ} = 15^{\circ}$$

BME là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

Nên $BME = HEM + MHE = 15^{\circ} + 90^{\circ} = 105^{\circ}$ (định lý góc ngoài của tam giác)

Bài 0.184. Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{15}$. Chứng minh rằng $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Hướng dẫn giải

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{15}$.

Chứng minh rằng
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Ta có
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

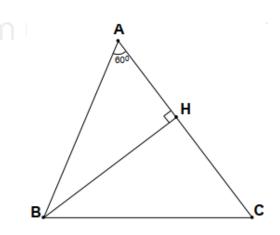
Suy ra
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} < 5 (a_5 + a_{10} + a_{15})$$

$$V_{ay} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Bài 0.185. Cho \triangle ABC nhọn với $BAC = 60^{\circ}$. Chứng minh rằng:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$$

Hướng dẫn giải



 $\text{K\'e} \ \text{BH} \perp \text{AC}$

Vì
$$BAC = 60^{\circ} \Rightarrow ABH = 30^{\circ} \Rightarrow AH = \frac{AB}{2}$$
 (1)

Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$AB^{2} = AH^{2} + BH^{2} \text{ và } BC^{2} = BH^{2} + HC^{2} \Rightarrow BC^{2} = AB^{2} - AH^{2} + HC^{2}$$

$$\Rightarrow$$
 BC² = AB² - AH² + (AC - AH)² \Rightarrow BC² = AB² - AH² + AC² - 2AC · AH + AH²

$$\Rightarrow$$
 BC² = AB² + AC² - 2AC · AH(2)

$$T\dot{u}(1) \& (2) \Rightarrow dpcm$$

§38. ĐỀ SỐ 38

Bài 0.186. Tính các giá trị biểu thức sau:

$$A = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0.6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0.16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$B = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + (\frac{2}{7})^2 - \frac{4}{343}}$$

🔑 Hướng dẫn giải

$$A = 1$$

$$B = \frac{1}{4}$$

Bài 0.187. Tìm các số a a $_1$, a_2 , a_3 , ... a_9 biết

$$\frac{a_1 - 1}{9} = \frac{a_2 - 2}{8} = \frac{a_3 - 3}{7} = \dots = \frac{a_9 - 9}{1} \text{ và } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 90$$

🔑 Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta tính được:

$$a_1=a_2=\ldots=a_9=10$$

Bài 0.188.

a. Tìm x, y thoả mãn:
$$|x^2 + 2x| + |y^2 - 9| = 0$$

b. Tìm x, y, z thoả mãn:
$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(y+\sqrt{2})^2}+|x+y+z|=0$$

Hướng dẫn giải

a. Vì
$$|x^2 + 2x| \ge 0$$
 và $|y^2 - 9| \ge 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$ và $y^2 - 9 = 0$ từ đó tìm được các cặp $(x; y) = \{(0; 3); (0; -3); (-2; 3); (-2; -3)\}$

b. Vì
$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2} \ge 0$$
 với $\forall \mathbf{x}; \sqrt{(y+\sqrt{2})^2} \ge 0$ với $\forall \mathbf{y}; |x+y+z| \ge 0$ với $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$

Suy ra đẳng thức đã cho tương đương $\begin{cases} \sqrt{(x-\sqrt{2})^2}=0 & \text{$x=\sqrt{2}$} \\ \sqrt{(y+\sqrt{2})^2}=0 & \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{2} \\ |x+y+x|=0 \end{cases} \end{cases}$

$$|x+y+x| = 0 z = 0$$

Bài 0.189. Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng: $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Hướng dẫn giải

Từ
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$
 suy ra $c^2 = a.b$

khi đó
$$\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+a\cdot b}{b^2+a\cdot b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$$

Từ
$$\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$$
 hay $\frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$

Vậy
$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Bài 0.190.

a. Cho hàm số:
$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ với } x \ge -1 \\ x - 1 \text{ với } x < -1 \end{cases}$$

- Viết f(x) dưới dạng 1 biểu thức.
- Tìm x khi f(x) = 2.
- Tổng của 20 số đó là số âm.
- b. Cho hai đa thức $P(x)=x^2+2mx+m^2$ và $Q(x)=x^2+(2m+1)x+m^2$ Tìm m biết P(1)=Q(-1)

Hướng dẫn giải SUCCESS

a. Biểu thức xác định f(x) = |x+1|

Khi
$$f(x) = 2 \Rightarrow |x+1| = 2$$
 từ đó tìm được $x = 1; x = -3$.

b. Thay giá trị tương ứng của x vào 2 đa thức, ta tìm được biểu thức P(1) và Q(-1) theo m giải phương ẩn m mới tìm được

$$\Rightarrow$$
 m = $-\frac{1}{4}$

Bài 0.191. Tìm x, y để C = -18 - |2x - 6| - |3y + 9| đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có C =
$$-18 - (|2x - 6| + |3y + 9|) \le -18$$

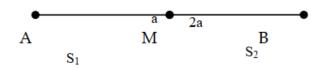
$$|2x - 6| \ge 0; |3y + 9| \ge 0$$

Suy ra C đạt giá trị lớn nhất bằng -18 khi $\begin{cases} 2x-6=0\\ 3y+9=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ và } y = -3$$

Bài 0.192. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 65 km/h, cùng lúc đó một xe máy chạy từ B đến A với vận tốc 40 km/h. Biết khoảng cách AB là 540 km và M là trung điểm của AB. Hỏi sau khi khởi hành bao lâu thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy đến M.

Hướng dẫn giải



Quảng đường AB dài 540 km, nửa quảng đường AB dài 270 km.

Gọi t là khoảng thời gian từ lúc khởi hành cho đến khi ô tô và xe máy lần lượt cách M bằng a và 2a(km, a > 0).

Khi đó ô tô và xe máy lần lượt đi được quảng đường là : 270 - a và 270 - 2a

$$\Rightarrow t = \frac{270 - a}{65} = \frac{270 - 2a}{40}$$

$$t = \frac{540 - 2a}{130} = \frac{270 - 2a}{40} = \frac{(540 - 2a) - (270 - 2a)}{130 - 40} = \frac{270}{90} = 3$$

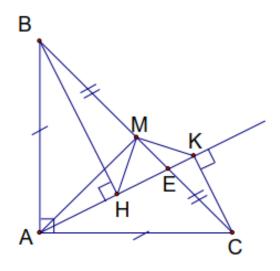
Vậy sau khi khởi hành 3 giờ thì ô tô cách M một khoảng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ xe máy tới M. \square

Bài 0.193. Cho \triangle ABC vuông cân ở A, M là trung điểm của BC, điểm E nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE(H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng:

a.
$$BH = AK$$
.

b.
$$\triangle$$
MBH = \triangle MAK.

Hướng dẫn giải





a. Theo bài ra ta có: $\angle BAH + \angle KAC = \angle BAH + \angle HBA => KAC = \angle HBA$

$$m\grave{a} AB = CA(gt)$$

$$\Rightarrow \Delta HAB = \Delta KCA(ch - gn) \Rightarrow BH = AK$$

b. Có $\angle MBH + \angle HBA = 45^{\circ} = \angle MAK + \angle KAC$ mà $\angle KAC = \angle HBA$ (cm trên)

$$\Rightarrow \angle MBH = \angle MAK$$

Xét \triangle MBH và \triangle MAK có:

$$MB = MA(t/c \text{ tam giác vuông })$$

$$\angle MBH = \angle MAK(c/m \text{ trên})$$

$$BH = AK(c/m \text{ trên})$$

$$\Rightarrow \Delta MBH = \Delta MAK(dpcm)$$

c. Từ các kết quả trên $\Rightarrow \Delta MHA = \Delta MKC$ (c.c.c) và MH = MK(1)

$$\Rightarrow \angle KMC = \angle HMA = > \angle KMC + \angle CMH = \angle HMA + \angle CMH = 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow \angle HMK = 90^{\circ}(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MHK$ vuông tại M((đpcm)

§39. ĐỀ SỐ 39

Bài 0.194.

a.
$$3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$$

b.
$$3x + x^2 = 0$$

c.
$$(x-1)(x-3) < 0$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.195.

a. Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ và $2x^2+2y^2-3z^2=-100$

b. Cho
$$\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$$
 (a, b, c, d > 0)
Tính A = $\frac{2011a - 2010b}{c + d} + \frac{2011b - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010d}{a + b} + \frac{2011d - 2010a}{b + c}$

Hướng dẫn giải

Bài 0.196.

a. Tìm cặp số nguyên (x,y) thoả mãn x+y+xy=2.

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x nguyên)

Hướng dẫn giải

Bài 0.197.

- a. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.
- b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbf{P} = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007$

Hướng dẫn giải

Bài 0.198. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. M là trung điểm BC, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho AM = MD. Gọi I và K lân lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống AD, N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC.

- - a. Chứng minh rằng BK = CI và BK//CI.
 - b. Chứng minh KN < MC.
 - c. $\triangle ABC$ thỏa mãn thêm điều kiện gì để AI = IM = MK = KD.
 - d. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BI, DH, MN đồng quy.

Hướng dẫn giải

multiply your success

$\S40.$ Đ $\dot{ m E}$ So 40

Bài 0.199.

- a. So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$.
- b. Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.
- c. Cho $S = 1 \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2013} \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \ldots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$. Tính $(S P)^{2016}$.

Hướng dẫn giải

Bài 0.200.

- a. Một số nguyên tố p
 chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.
- b. Tìm số tự nhiên \overline{ab} sao cho $\overline{ab}^2=(a+b)^3$

Hướng dẫn giải

Bài 0.201.

a. Cho x; y; z
$$\neq$$
 0 và x - y - z = 0. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)$

b. Cho
$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$
. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

c. Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

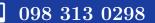
Hướng dẫn giải

Bài 0.202. Cho $xAy=60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Kẻ BH \perp Ay tại H, CM \perp Ay tại M, BK \perp AC tại K. Chứng minh:

a.
$$KC = KA$$

b. BH =
$$\frac{AC}{2}$$

c. △KMC đều.



Hướng dẫn giải

Bài 0.203. Cho ΔABC có $B=2.C<90^\circ$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho AD = HC. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC. \raiseta Hướng dẫn giải



§41. ĐỀ SỐ 41

Bài 0.204.

a. Tính giá trị biểu thức: A =
$$\frac{2^{12}\cdot 13 + 2^{12}\cdot 65}{2^{10}\cdot 104} + \frac{3^{10}\cdot 11 + 3^{10}\cdot 5}{3^{9}\cdot 2^{4}}$$

b. Cho A = $3+3^2+3^3+\ldots+3^{2015}$. Tìm số tự nhiên n biết rằng 2 A + 3 = 3^n

Hướng dẫn giải

Bài 0.205.

a. Tìm các số x; y; z biết rằng:
$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

b. Tim
$$x: \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

c. Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2016x$

Hướng dẫn giải

Bài 0.206.

- a. Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} 3}$. Tìm số nguyên x để A là số nguyên
- b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$
- c. Tìm số nguyên x,y sao cho x-2xy+y=0

Hướng dẫn giải

Bài 0.207. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

- a. AC = EB và AC//BE
- b. Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng
- c. Từ E kẻ $EH \perp BC(H \in BC)$. Biết $HBE = 50^{\circ}; MEB = 25^{\circ}$. Tính HEM và BME

Hướng dẫn giải



Bài 0.208. Từ điểm I tùy ý trong tam giác ABC, kẻ IM, IN, IP lân lượt vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $AN^2 + BP^2 + CM^2 = AP^2 + BM^2 + CN^2$ P Hướng dẫn giải

multiply your success

$\S42.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 42

Bài 0.209.

a. Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

b. Tính giá trị biểu thức:

$$B = 1.2 \cdot 3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$$

c. Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Hướng dẫn giải

Bài 0.210.

- a. Tìm các số x,y,z biết rằng: $3\mathbf{x}=4\mathbf{y},\,5\mathbf{y}=6\mathbf{z}\,$ và $\,\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}=30\,$
- b. Tìm x biết: $\left| x \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1, 6 + \frac{3}{5} \right|$

Hướng dẫn giải

Bài 0.211.

- 1. Cho hàm số y = f(x) = (m-1)x
 - a. Tìm m biết: f(2) f(-1) = 7
 - b. Cho m=5. Tìm x biết f(3-2x)=20
- 2. Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$ Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm.

Hướng dẫn giải

Bài 0.212. Cho \triangle ABC nhọn có góc A bằng 60°. Phân giác ABC cắt AC tại D, phân giác ACB cắt AB tại E.BD cắt CE tại I.

- - a. Tính số đo góc BIC.
 - b. Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho BF = BE. Chứng minh $\Delta \text{CID} = \Delta \text{CIF}$.
 - c. Trên tia IF lấy điểm M sao cho IM = IB + IC. Chứng minh Δ BCM là tam giác đều.

🔑 Hướng dẫn giải

 $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \ldots + n \cdot 2^n = 2^{n+11}$ Bài 0.213. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: Hướng dẫn giải



§43. ĐỀ SỐ 43

Bài 0.214. Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

a.
$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$$

b.
$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.215. Xét tổng gồm n số hạng $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $S_n < 2$

Hướng dẫn giải

Bài 0.216. Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5 m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4 m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3 m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây

Hướng dẫn giải

multiply your success -

Bài 0.217. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^{\circ}$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M. Chứng minh:

- a. Tia AD là phân giác của góc BAC
- b. AM = BC

Hướng dẫn giải

Bài 0.218. Cho tam giác ABC cân tại A, $A=80^\circ$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho $IBC=10^\circ, ICB=30^\circ.$ Tính AIB

Hướng dẫn giải

§44. ĐỀ SỐ 44

Bài 0.219. Tìm x biết:

a.
$$\frac{64}{(-2)^x} = (-16)^2 : 4^3$$

b.
$$\frac{6}{x^2+2} + \frac{12}{x^2+8} = 3 - \frac{7}{x^2+3}$$

c.
$$|x-2| + |3-x| = 11$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.220.

1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có các tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

a.
$$\frac{4a-3b}{a} = \frac{4c-3d}{c}$$

b.
$$\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{3a^2 + 2b^2}{3c^2 + 2d^2}$$

2. Tìm $x, y \in Z$ biết: $\mathbf{x} + \mathbf{y} + 2\mathbf{x}\mathbf{y} = 83$



Bài 0.221.

- a. Hai xe máy cùng khởi hành 1 lúc từ A và B cách nhau 11 km để đi đến C (3 địa điểm A, B, C cùng ở trên một đường thẳng) vận tốc của người đi từ A là 20 km/h, của người đi từ B là 24 km/h. Tính quãng đường mỗi người đã đi biết họ đến C cùng 1 lúc.
- b. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in Q$. Chứng tổ rằng: f(-2). $f(3) \le 0$ biết 13a + b + 2c = 0

Hướng dẫn giải

Bài 0.222. Cho $\triangle ABC$ có góc B và góc C là hai góc nhọn. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AB, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AE = AC.

- a. Chứng minh rằng: BE = CD
- b. Lấy M là trung điểm của BE, N
 là trung điểm của CD. Chứng minh M, A, N thẳng hàng.

- - c. Ax là tia bất kì nằm giữa 2 tia AB và AC. Gọi H, K lân lượt là hình chiếu của B và C trên tia Ax. Chứng minh $BH+CK \leq BC$
 - d. Xác định vị trí của tia Ax để tổng BH + CK có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Bài 0.223. Cho biểu thức $A = \frac{3|x| + 2}{4|x| - 5}$

Tìm $x \in Z$ để A đại GTLN, tìm GTLN đó.

Hướng dẫn giải



$\S45.$ ĐỀ SỐ 45

Bài 0.224.

- 1. Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.
- 2. Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 1 = 15$. Tính B = x + y + z.

Hướng dẫn giải

Bài 0.225.

- 1. Tìm x, y biết: $x(x y) = \frac{3}{10}$ và $y(x y) = -\frac{3}{50}$.
- 2. Tìm x biết: $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

Hướng dẫn giải

Bài 0.226.

- 1. Tìm số tự nhiên n
 để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.
- 2. Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, p(x) : 5 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.
- 3. Gọi a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.227. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D(D khác B, C). Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho CE = BD. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N, MN cắt BC tại I.

- a. Chứng minh DM = EN.
- b. Chứng minh IM = IN, BC < MN.
- c. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I. Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Hướng dẫn giải

Bài 0.228. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$.



§46. ĐỀ SỐ 46

Bài 0.229. Tìm x biết:

a.
$$3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$$

b.
$$3x + x^2 = 0$$

c.
$$(x-1)(x-3) < 0$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.230.

a. Tìm ba số x,y,z thỏa mãn: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

b. Cho
$$\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}(a, b, c, d > 0)$$

Tính A = $\frac{2011a - 2010 \text{ b}}{c + d} + \frac{2011 \text{ b} - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010 \text{ d}}{a + b} + \frac{2011 \text{ d} - 2010a}{b + c}$

Hướng dẫn giải

Bài 0.231.

a. Tìm cặp số nguyên (x,y) thoả mãn x+y+xy=2.

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x nguyên)

Hướng dẫn giải

Bài 0.232.

- a. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.
- b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbf{P} = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007$

Hướng dẫn giải

Bài 0.233. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. M là trung điểm BC, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho AM = MD. Gọi I và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống AD, N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC.

- - a. Chứng minh rằng BK = CI và BK//CI.
 - b. Chứng minh $\mathrm{KN} < \mathrm{MC}.$
 - c. $\triangle ABC$ thỏa mãn thêm điều kiện gì để AI = IM = MK = KD.
 - d. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BI, DH, MN đồng quy.

Hướng dẫn giải

multiply your success



Bài 0.234.

a. Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{\left(2^2 \cdot 3\right)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{\left(125 \cdot 7\right)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

b. Chứng minh rằng :
$$\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \ldots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \ldots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$$

c. Tính:
$$B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 98^2$$

d. Cho p là số nguyên tố lớn hon 3 chứng minh rằng: \mathbf{p}^2-1 chia hết cho 24

Hướng dẫn giải

Bài 0.235.

a. Tìm
$$x$$
 biết $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right|$

b. Cho C =
$$\frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2) + 6}$$
 với m $\in N$ Chứng minh C là số hữu tỉ

c. Cho
$$M = (x-1)(x+2)(3-x)$$
. Tìm x để $M < 0$

Hướng dẫn giải MULLID V OUT SUCCESS

Bài 0.236.

a. Cho
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$
 chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

b. Tìm các giá trị nguyên của x và y biết: $x^2 - y^2 = 5$

Hướng dẫn giải

Bài 0.237. Cho tam giác ABC có $BAC = 75^{\circ}$, $ABC = 35^{\circ}$. Phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AD cắt tia BC tại E. Gọi M là trung điểm của DE. Chóng minh rằng:

a. Tam giác ACM là tam giác cân.

b.
$$AB < \frac{AD + AE}{2}$$

c. Chu vi tam giác ABC bằng độ dài đoạn thẳng BE.

Hướng dẫn giải

Bài 0.238.

- a. Tìm một số có 3 chữ số,
biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1,2 và 3 .
- b. Cho $f(x) = 3x^2 2x 1$ Tìm x để f(x) = 0
 - Hướng dẫn giải



§48. ĐỀ SỐ 48

I. Phần trắc nghiệm khách quan:

Bài 0.239. Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x}-1)^2=0,25$ là:

- A. $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{4}$
- B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$
- C. $\frac{9}{4}$; $-\frac{1}{4}$
- D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

 A

Bài 0.240. Cho góc xOy = 50°, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Để Am song song với Ox thì số đo của góc OAm là:

- A. 50°
- B. 130°
- C. 50° và 130°
- D. 80°



 Γ

Bài 0.241. Cho hàm số y = f(x) xác định với mọi x > 1. Biết $f(n) = (n-1) \cdot f(n-1)$ và f(1) = 1. Giá trị của f(4) là:

- A. 3
- B. 5
- C. 6
- D. 1

Hướng dẫn giải

 $^{\mathrm{C}}$

Bài 0.242. Cho tam giác ABC vuông tại $B,AB=6,\hat{A}=30^{\circ}$. Phân giác góc C cắt AB tại D. Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2;4
- B. 3;3
- C. 4; 2
- D. 1;5

Hướng dẫn giải

Α

Bài 0.243. Cho $a^{2 \text{ m}} = -4$. Kết quả của $2a^{6m} - 5$ là:

- A. -123
- B. -133
- C. 123
- D. -128

Hướng dẫn giải

В

Bài 0.244. Cho tam giác DEF có $\angle E = \angle F$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I. Ta có:

- A. $\triangle DIE = \Delta DIF$
- B. $DE = DF, \angle IDE = \angle IDF$
- C. IE = IF; DI = EF
- D. Cả A, B, C đều đúng

Hướng dẫn giải

D

Bài 0.245. Biết a + b = 9. Kết quả của phép tính 0, a(b) + 0, b(a) là:

- A. 2
- B. 1
- C. 0,5
- D. 1,5

Hướng dẫn giải

В

Bài 0.246. Cho $(a-b)^2 + 6a \cdot b = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a \cdot b$ là:

- A. 6
- B. -6
- C. 7
- D. 5

Hướng dẫn giải

Α

Bài 0.247. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM, CN. Biết AC > AB. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$
- B. BM > CN
- C. BM < CN
- D. BM = CN



🔑 Hướng dẫn giải

С

Bài 0.248. Điểm thuộc đồ thị hàm số y = -2x là:

- A. M (-1; -2)
- B. N(1; 2)
- C. P(0; -2)
- D. Q(-1;2)

Hướng dẫn giải

D

Bài 0.249. Biết rằng lãi suất hàng năm của tiền gửi tiết kiệm theo mức 5% năm là một hàm số theo số tiên gửi: i = 0,005p. Nếu tiền gửi là 175000 thì tiền lãi sẽ là:

A. 8850 đ



- B. 8750 đ
- C. 7850 đ
- D. 7750 đ

Hướng dẫn giải

В

Bài 0.250. Cho tam giác ABC cân tại $A, \hat{A} = 20^{\circ}$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Số đo của góc BDC là:

- A. 50°
- B. 70°
- C. 30°
- D. 80°

Hướng dẫn giải

 \mathbf{C}

II. Phần tự luận

Bài 0.251.

- a. Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot \left(4^{2017} + 4^{2016} + \ldots + 4^2 + 4 + 1\right) + 25$ chia hết cho 10^2
- b. Cho tích $a \cdot b$ là số chính phương và (a, b) = 1. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Bài 0.252.

- 1. Cho đa thức A = 2x.(x 3) x(x 7) 5(x 403) Tính giá trị của A khi x = 4. Tìm x để A = 2015
- 2. Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7 B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2 . Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7 A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Bài 0.253.

- 1. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° .
 - a. Chứng minh rằng: AC + BD = CD.
 - b. Chứng minh rằng: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$
- 2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{HA} + \mathrm{HB} + \mathrm{HC} < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Hướng dẫn giải

Bài 0.254. Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết:

igcup 16/2 Trần Thiện Chánh, P12, Q10, TP.HCM

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

$\S49.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 49

Bài 0.255.

a. Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{12}}$$

- b. Cho đa thức $P(x) = x^{2012} 2011x^{2011} 2011x^{2010} \dots 2011x^2 2011x + 1$ Tính P(2012)
- c. Chứng minh rằng : $\frac{1}{7^2} \frac{1}{7^4} + \ldots + \frac{1}{7^{4n-2}} \frac{1}{7^{4n}} + \ldots + \frac{1}{7^{98}} \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Hướng dẫn giải

Bài 0.256. Tìm x, y, z biết :

a.
$$2012 = |x - 2010| + |x - 2008|$$

b.
$$(x-3)^x - (x-3)^{x+2} = 0$$

c.
$$\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$$
 và $x + y + z = 50$

Bài 0.257.

a. Cho dãy tỷ số bằng nhau:

$$\frac{2012a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2012b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2012c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2012d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a + b}{c + d} + \frac{b + c}{d + a} + \frac{c + d}{a + b} + \frac{d + a}{b + c}$$

b. Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a-21\ b+5)(a-3\ b+1)$: 7 Chứng minh rằng $43a+11\ b+15$: 7



Bài 0.258. Cho biểu thức : A = |x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014|. Tìm x để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó .

Hướng dẫn giải

Bài 0.259. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M dựng các đoạn thẳng MD, ME sao cho AB là đường trung trực của đoạn thẳng MD và AC là đường trung trực của đoạn thẳng ME.

- a. Với điểm M không trùng với điểm B và C. Chúng minh rằng : AM = AD = AE
- b. Với M bất kỳ. Chứng minh ràng: Ba điểm A, D, E thẳng hàng
- c. Cho tam giác ABC cố định. Tìm vị trí của điểm M
 trên cạnh BC sao cho DE có độ dài ngắn nhất .



$\S 50.$ Đ $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$ S $\hat{\hat{\mathbf{O}}}$ 50

Bài 0.260.

- 1. Rút gọn: $A = \left(\frac{3}{2} \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) : \left(\frac{3}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right)$.
- 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |x 2012| + |x 2013| với x là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Bài 0.261.

- 1. Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$.
- 2. Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Hướng dẫn giải

Bài 0.262.

- 1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.
- 2. Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết n+4 và 2n đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

 $\bf Bài~0.263.$ Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

- 1. Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B. Gọi H là trung điểm của BC, trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho AI = BC. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$.
- 2. Phân giác của các góc ABC,BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M. Phân giác của góc BDA cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $BD=\frac{1}{2}MN$.

Hướng dẫn giải

Bài 0.264. Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S - P)^{2013}$

Hướng dẫn giải