23.12

מתימטיקה שימושית ותכנות מדעי

תרגיל 4- קירוב בממוצע, מערכות אורתונורמליות אינסופיות, טור פורייה

1. (17 נקודות) יהי X מרחב מכפלה פנימית מעל R. ותהי $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ קבוצה אורתונורמלית ב- X.

נניח כי $f \in span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ וכן $\langle f, e_k \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ לכל $k = 1,2,...,n$.

א. פתחו ביטוי עבור $\|f\|$.

ב. נניח כי n=8. חשבו את הערך של $\|f\|$

2. (15 נקודות) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין (כלומר רציפות בקטעים, עם מספר סופי של אי-רציפויות סופיות), הממשיות עם המכפלה הפנימית: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

עבור הפונקציה $f(x) = sign(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 0 \quad if & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$ מצאו קירוב פוריה מסדר

שני (היינו השתמשו בתת המרחב הנפרש על-ידי הפונקציות $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \sin(2x)\}$

ובמכפלה פנימית $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ כדי לחשב את הייצוג הטוב ביותר של הפונקציה).

3. (15 נקודות) נניח כי V מרחב מכפלה פנימית עם ממד אינסופי, ו- $\{e_1, e_2, ...\}$ היא מערכת אורתונורמלית אינסופית סגורה ב- V. הוכיחו כי אם וקטור $u \in V$ אורתוגונלי לכל הוקטורים במערכת האורתונורמלית, כלומר $\langle u, e_n \rangle = 0 \quad \forall n$ אז u חייב להיות וקטור האפס.

4. (18 נקודות) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין (כלומר רציפות בקטעים, עם מספר סופי של אי-רציפויות סופיות), הממשיות עם המכפלה הפנימית: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$

חשבו את טור פורייה הטריגונומטרי עבור הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le |x| \end{cases}$.

5. תרגיל python (35 נקודות)

א. (15) כתבו פונקציית python המחשבת ובונה את טור פורייה המרוכב של פונקציה f(x) על סמך המקדמים המחושבים באופן ידני.

כלומר הפונקציה תקבל בכניסה את הפונקציה f(x) כ- string, את המקדמים c_n שוב באמצעות string, את הרזולוציה של ציר ה- x ואת מספר האיברים בטור m, תבנה ותצייר את הטור ההולך ונבנה (כלומר תעדכן בכל איטרציה של הלולאה את הערך של הסכום החלקי ותצייר אותו) בדומה לפונקציה שנכתבה בהרצאה.

ב. (10) הדגימו את הפונקציה עבור המקדמים של $f(x)=e^{-|x|}$ עבורו תחשבו את המקדמים c_n באופן ידני. ציירו את הפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$ ועליה את טור פורייה המרוכב.

ג. (10) הדגימו את הפונקציה באותו אופן עבור המקדמים של $f(x)=e^{x}$.

```
FourierCompSynthesis(cn, func, m, N):
"""
    FourierCompSynthesis for construting a partial sum of a complex Fourier series
    Inputs: cn -  coefficients of complex exponentials (strings
    func - the function (string) for which the complex Fourier series  coeffs were
    calculated.
    m - the series partial sum index, N - number of points on the x axis
    Output - FourierCompSynthesis returns the Fourier partial sum of order m
    Usage: y = FourierCompSynthesis(cn, func, m, N)
"""
```

ד. (רשות) – 20 נקודות

כתבו פונקציית python המחשבת את טור פורייה הקומפלכסי באמצעות חישוב המקדמים על-ידי אינטגרציה נומרית בשיטת סכום המלבנים כפי שנעשה במעבדה.

1. (17 נקודות) יהי X מרחב מכפלה פנימית מעל R. ותהי $\{e_k\}_{k=1}^n$ קבוצה אורתונורמלית ב- X.

נניח כי $f \in span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ וכן $\langle f, e_k \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ לכל $k = 1,2,...,n$.

א. פתחו ביטוי עבור $\|f\|$.

ב. נניח כי n=8. חשבו את הערך של $\|f\|$

א.

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k , \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle^2 \cdot \langle e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{9}\right)^k \Rightarrow \text{סדרה הנדסית} \Rightarrow \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9^n} - 1\right)}{\left(\frac{1}{9} - 1\right)} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9^n} - 1\right)$$

$$\|f\| = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9^n} - 1\right)$$

$n = 8$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9^8} - 1\right) = 0.3535...$$

2. (15 נקודות) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין (כלומר רציפות בקטעים, עם מספר סופי של אי-רציפויות סופיות), הממשיות עם המכפלה הפנימית: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

עבור הפונקציה $f(x)=sign(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 0 \quad if & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ מצאו קירוב פוריה מסדר שני (היינו השתמשו בתת המרחב הנפרש על-ידי הפונקציות $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin(x),\sin(2x)\}$

ובמכפלה פנימית $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ כדי לחשב את הייצוג הטוב ביותר של הפונקציה).

$$a_0=\langle f,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sing(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=\frac{1}{\pi}(-\pi+\pi)=0$$

$$a_1=\langle f,\sin(x)\rangle=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\sin(x)\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin(x)\,dx\right]=\frac{1}{\pi}(1+1+2)=\frac{4}{\pi}$$

$$a_2=\langle f,\sin(2x)\rangle=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\sin(2x)\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin(2x)\,dx\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$f\simeq 0+\frac{4}{\pi}\cdot\sin(x)+0\cdot\sin(2x)=\frac{4}{\pi}\sin(x)$$

3. (15 נקודות) נניח כי V מרחב מכפלה פנימית עם ממד אינסופי, ו- $\{e_1,e_2,\dots\}$ היא מערכת אורתונורמלית אינסופית סגורה ב- V. הוכיחו כי אם וקטור $u\in V$ אורתוגונלי לכל הוקטורים במערכת האורתונורמלית, כלומר $\forall n \quad \langle u,e_n\rangle=0$ אז u חייב להיות וקטור האפס.

נניח בשלילה כי $u\neq 0$:

מכיוון שהמערכת סגורה ב- V מתקיים כי $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|u-\sum_{k=1}^{m}\langle u,e_k\rangle e_k\right\|=0$

ומכיוון שלכל k מתקיים $\langle u,e_k\rangle=0$ אז $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\langle u,e_k\rangle e_k\right)=0$

אזי כי $\|u\|=0$ בסתירה להנחה ולכן $u=0$

4. (18 נקודות) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין (כלומר רציפות בקטעים, עם מספר סופי של אי-רציפויות סופיות), הממשיות עם המכפלה הפנימית: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$

חשבו את טור פורייה הטריגונומטרי עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x & -\pi/2<x<\pi/2 \\ 0 & \pi/2\le|x| \end{cases}$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=0$$

פונ' אי זוגית

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx=0$$

פונ' אי זוגית

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx=\left\{\begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=\sin(nx) & v=\frac{-\cos(nx)}{n}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx\right]=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}\right]$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}\right]$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$c_n =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|} e^{-inx} \, dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{x-inx} \, dx + \int_{0}^{\pi} e^{-x-inx} \, dx \right) =$$

$$\left. \frac{e^{x(1-in)}}{1-in} \right|_{-\pi}^{0} + \left. \frac{e^{-x(1+in)}}{-(1+in)} \right|_{0}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-in} - \frac{e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi}}{1-in} - \frac{e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi}}{(1+in)} + \frac{1}{1+in} \right)$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1-in} + \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+in} \right)$$