<u>מתימטיקה שימושית ומבוא למיחשוב מדעי - תרגיל בית מספר 2</u>

בתרגיל זה נעסוק בהיבטים שונים של נושא המכפלה הפנימית, הנורמה והמרחק.

1. תהי $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ מערכת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V ויהי $v \in V$

כך ש- $v=\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ הוכיחו כי לכל k, $a_k=\frac{1}{\|u_k\|^2}\cdot\langle v,u_k\rangle$

2. נרמלו את הוקטורים הבאים:

א. $v \in \mathbb{C}^5, \quad v= \ 1-i, 2, 5+3i, 1, -2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ב. $f(x)\in C \ a,b \ , \quad f(x)=\sin \ 2x$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ג. $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \quad A\in M_{2x2}^{\mathbb{R}}$ עם המכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle = tr(B^t A)$ כאשר tr מסמן את העקבה (trace) של המטריצה, כלומר סכום איברי האלכסון הראשי.

3. יהי P_2 מרחב כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2.

לכל $f,g\in P_2$ נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$.

א.הוכיחו כי זוהי מכפלה פנימית על P_2.

ב. הראו שהקבוצה $\left\{1, 1-x, 1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

4. א. עבור המרחב $C \ -1,1$ כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות המוגדרות על הקטע [-1,1] ומקבלות ערכים קומפלכסיים, נתונות הפונקציות הבאות:

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x+a, \quad f_2(x)=x^2+bx+c$$

נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כלומר

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

מצאו $a, \ b, \ c$ כך שהפונקציות תהיינה מערכת אורתוגונלית.

5. עבור המרחב $C\left[-1,1\right]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית המתאימה, האם הפונקציות $f_0\left(x\right)=1,\quad f_1\left(x\right)=x$ הן מערכת אורתונורמלית? הוכיחו או הפריכו.

אם זוהי מערכת אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו את המערכת ומצאו את הקירוב הטוב ביותר של הפונקציה $g\left(x\right)=e^x$ הנפרש על-ידי

$$f_0\left(x\right)=1,\quad f_1\left(x\right)=x$$

.

חלק ב' תרגיל python:

i. יהי $V=C^n$. כתבו פונקציית python לחישוב נורמה p מסדרים שונים עבור וקטור כניסה v.

השתמשו בדוגמא הבאה והשלימו את הפונקציה:

```
import numpy as np
from numpy import linalg as lin

def norm(v,p):
    """
        function to  compute the l-p norm of an input vector.
        Inputs: v - a numpy array (n dim vector)
        p - the order of the norm (1,2,3...)
        if p = np.inf the max norm should be computed
        Outputs:  p-th norm of v
     """

# your code here
```

א. חשבו באמצעות הפונקציה שכתבתם נורמה מסדר 1-10, והשוו לנורמה אינסוף (inf or max norm) עבור הוקטור:

```
v = np.array([1, -2, 3, 1, 5])
```

ב. מצאו באמצעות הפונקציה וקטור יחידה בכוון v=(1,5,2,-2,-1,7)

ב. חשבו באמצעות הפונקציה מהו המרחק בין הוקטורים:
u=(1,3,-2,-3,5) ו- v=(0,7,-15,2,7)

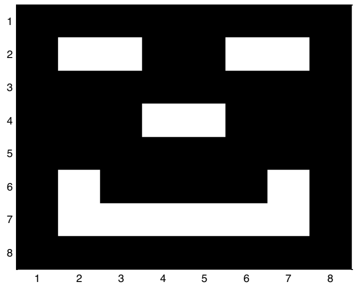
ii. תרגיל מעבדה: זיהוי פנים

מטרת התרגיל: שימוש במכפלה פנימית למציאת דמיון בין מטריצות בינאריות, התמצאות במערכי numpy ובמטריצות, שימוש בפקודה imshow.

מבוא:

"**מערכת זיהוי תווי פנים** היא אפליקציית מחשב אשר מסוגלת לזהות באופן אוטומטי או לאמת את זהותו של אדם על בסיס תצלום דיגיטלי או מקור וידאו. אחת הדרכים לעשות זאת היא באמצעות השוואת תכונות תווי הפנים בתמונה לתמונות המצויות במאגר נתונים. כיום מערכות זיהוי הפנים משמשות בעיקר מערכות אבטחה ופועלות לעתים רבות יחד עם מערכות זיהוי ביומטריות נוספות כגון זיהוי טביעות אצבע וזיהוי קשתית העין."
(מתוך ויקיפדיה, האנציקלופדיה החופשית).

בתרגיל זה נעסוק בפנים סכימטיות כמו בציור 1, ונפתח מערכת פשוטה לזיהוי "פנים" המבוססת על מדד דימיון.



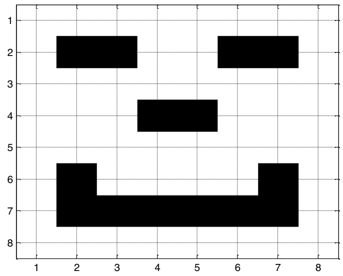
ציור 1: פנים סכימטיות באמצעות מטריצה.

א. בתרגיל זה ניצור פנים סכימטיות כמו בציור 1.
יצרו מטריצה בינארית של 8x8 באמצעות הפקודה np.zeros וציירו את המטריצה באמצעות הפקודה imshow.
הדרכה: כתבו את הקוד הבא:

```
X = np.zeros([8,8])
X[ 1, 1:3 ] = 1
X[ 1, 5:7 ] = 1
X[ 3, 3:5 ] = 1
X[ 5:7, 1::5 ] = 1
X[6,2:6] = 1
plt.imshow(X, cmp = 'gray')
plt.show()
```

.

עתה צרו פנים בהם הרקע בהיר, ואיברי הפנים ('עיניים', 'אף', 'פה') כהים, לפי הציור.



ב. כתבו פונקציה שתקבל בכניסה שתי מטריצות בינאריות ('פנים') ותחשב את מקדם דימיון ביניהן באמצעות המכפלה הפנימית הבאה:

האם תוכלו להציע דרך לחשב מקדם דימיון מנורמל, כלומר אם כל הערכים בשתי המטריצות זהים מקדם הדימיון המנורמל יהיה 1, אם כולם שונים זה מזה הערך יהיה 0, ואם 50% מהערכים זהים הערך צריך להיות 0.5, ובאופן כללי אם נסמן את מקדם הדימיון ב- ρ , $0 \le \rho \le 1$. כתבו פונקציה המחשבת את מקדם הדימיון המנורמל.

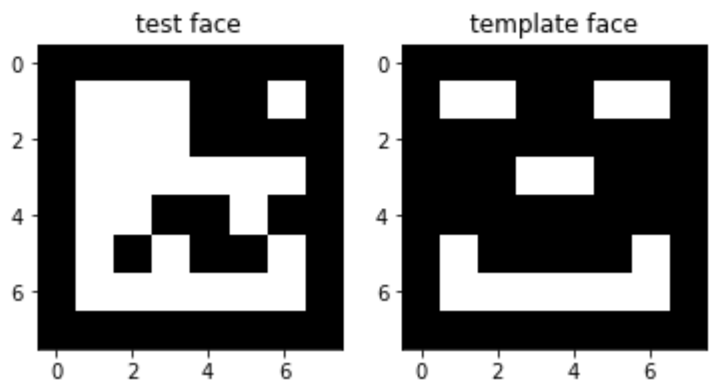
ג. נניח כי קיימת גישה רק ל'אנשים' עם 'פנים' הדומות למטריצה X הנתונה בסעיף א'.

כתבו script עם לולאת while המדמה את שער הכניסה האוטומטי של חברת "עסק הוגן" המחשב את מקדם הדימיון המנורמל בין X לבין מטריצה בינארית המייצגת "פנים" של אנשי החברה או אחרים המנסים להיכנס.

חברת "טרוף ובלוע" מנסה להיכנס דרך השער כדי לבצע ריגול תעשייתי, ומציגה סדרה של מטריצות אקראיות ("פנים") באותו גודל של מטריצת התבנית X. עבור כל מטריצה אקראית כזאת יש מספר דומה (לא בהכרח שווה) של ערכי 1 בחלק הפנימי של כל מטריצה, כלומר בשורות ועמודות 2:6.

ה- script יציג את מטריצת התבנית X ואת מטריצת המבחן Xtest בכל איטרציה על המסך באמצעות פקודת imshow, ויחשב את מקדם הדימיון המנורמל. המקדם יוצג כחלק מכותרת הציור של Xtest.

אם מקדם הדימיון עולה על ערך של 0.9 הלולאה עוצרת (השער נפתח), כלומר הלולאה עוצרת, ומוצגת ההודעה "access permitted". בכל מקרה אחר, כלומר אם מקדם הדימיון עבור המטריצה הנבחנת לא גדול או שווה לערך הסף מוצגת ההודעה "access denied".



1. תהי $\{u_k\}_{k=1}^n$ מערכת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V ויהי $v \in V$

כך ש- $v = \sum_{k=1}^n a_k u_k$ הוכיחו כי לכל k, $a_k = \frac{1}{\|u_k\|^2} \cdot \langle v, u_k \rangle$

$$\langle v, u_k \rangle = a_1 \langle u_1, u_k \rangle + \dots + a_k \langle u_k, u_k \rangle + \dots$$

$$a_k \langle u_k, u_k \rangle = a_k \cdot \|u_k\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$a_k = \frac{1}{\|u_k\|^2} \cdot a_k \cdot \|u_k\|^2 = \frac{1}{\|u_k\|^2} \cdot \langle v, u_k \rangle$$

מ.ש.ל

2. נרמלו את הוקטורים הבאים :

א. $v = 1-i, 2, 5+3i, 1, -2 \quad v \in \mathbb{C}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ב. $f(x) = \sin\ 2x \quad f(x) \in C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ג. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad A \in M_{2x2}^{\mathbb{R}}$ עם המכפלה הפנימית : $\langle A,B \rangle = tr(B^t A)$ כאשר tr מסמן את העקבה (trace) של המטריצה, כלומר סכום איברי האלכסון הראשי.

א.

$$\|V\| = \sqrt{\langle V,V \rangle} = \sqrt{|(1-i)|^2 + 4 + |5+3i|^2 + 1 + 4} = \sqrt{45}$$

ב.

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b \sin^2(2x)\,dx} = \sqrt{\int_a^b \frac{1}{2} - \frac{\cos(4x)}{2}\,dx} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right)\Big|_a^b} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b - \frac{\sin(4b)}{4} - a + \frac{\sin(4a)}{4}\right)}$$

ג.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ 5\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 31 \\ 25 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \sqrt{tr(A^t A)} = \sqrt{53+34} = \sqrt{87}$$

3. יהי P_2 מרחב כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2.

לכל $f,g\in P_2$ נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$.

א. הוכיחו כי זוהי מכפלה פנימית על P_2.

ב. הראו שהקבוצה $\left\{1,1-x,1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

א

1#

$$\langle f,f\rangle=\int_0^\infty f^2(x)\cdot e^{-x}\,dx\geq 0$$

$$f=0 \Rightarrow \langle f,f\rangle=\int_0^\infty 0\cdot 0\cdot e^{-x}\,dx=0$$

2#

$$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle=\int_0^\infty (\alpha f(x)+\beta g(x))\cdot h(x)\cdot e^{-x}\,dx=\alpha\int_0^\infty f(x)h(x)e^{-x}dx+\beta\int_0^\infty g(x)h(x)e^{-x}dx=$$

$$\alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle$$

3#

$$\overline{\langle g,f\rangle}=\overline{\int_0^\infty g(x)f(x)\cdot e^{-x}\,dx}=\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx=\langle f,g\rangle$$

ק

נכונה של אורתוגונליות:

$$\langle 1, 1-x \rangle = \int_0^\infty (1-x)e^{-x} = \int_0^\infty e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} - \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + \left(xe^{-x} - \int_0^\infty e^{-x}\,dx\right) =$$

$$-e^{x} + xe^{-x} + e^{-x}\Big|_0^\infty = xe^{-x}\Big|_0^\infty = \left(\lim_{x\to\infty} xe^{-x}\right) - 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\langle 1, 1-2x+\tfrac{1}{2}x^2 \rangle = \int_0^\infty \left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\,dx = \frac{xe^{-x}}{2}(x-2)\Big|_0^\infty = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{\text{לופ'}}{=} \frac{2x-2}{e^x} \overset{\text{לופ'}}{=} \frac{2}{e^x} = 0\right) - 0 = 0$$

$$\langle 1-x, 1-2x+\tfrac{x^2}{2} \rangle = \int_0^\infty (1-x)(1-2x+0.5x^2)e^{-x}\,dx = \frac{e^{-x}}{2}x(x^2-2x+2)\Big|_0^\infty = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2e^x}\cdot(x^2-2x+2) = 0\right) - 0 = 0$$

נכונה של אורתונורמליות

$$\|1\| = 1$$

$$\|1-x\| = \sqrt{\int_0^\infty (1-x)^2 e^{-x}\,dx} = \sqrt{-e^{-x}(x^2+1)\Big|_0^\infty} = \sqrt{\left(\lim_{x\to\infty} -\frac{x^2+1}{e^x} = 0\right) - (-1)} = 1$$

$$\|1-2x+0.5x^2\| = \int_0^\infty (1-2x+0.5x^2)^2 \cdot e^{-x}\,dx = e^{-x}\left(-\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2-1\right)\Big|_0^\infty = \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\right) - (-1) = 1$$

אורתונורמלית!

4. א. עבור המרחב $C[-1,1]$ כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות המוגדרות על הקטע [-1,1] ומקבלות ערכים קומפלכסיים, נתונות הפונקציות הבאות:

$$f_0(x)=1,\quad f_1(x)=x+a,\quad f_2(x)=x^2+bx+c$$

נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כלומר

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

מצאו $a,\ b,\ c$ כך שהפונקציות תהיינה מערכת אורתוגונלית.

$$\langle f_0, f_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot\overline{(x+a)}\,dx = \int_{-1}^{1} x+\bar{a}\,dx = \frac{x^2}{2}+\bar{a}x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{2}+\bar{a}-\frac{1}{2}+\bar{a} = 2\bar{a}=0$$

$$\langle f_1,f_2\rangle = \int_{-1}^{1}(x+a)\cdot\overline{(x^2+bx+c)}\,dx = \int_{-1}^{1}(x+a)\cdot(x^2+\bar{b}x+\bar{c})\,dx=$$

$$\int_{-1}^{1} x^3+\bar{b}x^2+\bar{c}x+ax^2+a\bar{b}x+a\bar{c}\,dx = \int_{-1}^{1} x^3+(a+\bar{b})x^2+(a\bar{b}+\bar{c})x+a\bar{c}=$$

$$\frac{x^4}{4}+(a+\bar{b})\frac{x^3}{3}+(a\bar{b}+\bar{c})\frac{x^2}{2}+a\bar{c}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}+\frac{(a+\bar{b})}{3}+\frac{(a\bar{b}+\bar{c})}{2}+a\bar{c}-$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{a+\bar{b}}{3}+\frac{a\bar{b}+\bar{c}}{2}-a\bar{c}\right) = \frac{2}{3}(a+\bar{b})+2a\bar{c}=0$$

$$\langle f_0,f_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2+\bar{b}x+\bar{c}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{\bar{b}x^2}{2}+\bar{c}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{\bar{b}}{2}+\bar{c}+\frac{1}{3}-\frac{\bar{b}}{2}+\bar{c}=$$

$$\frac{2}{3}+2\bar{c}=0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2\bar{a} = 0 \\ \frac{2}{3} + 2\bar{c} = 0 \\ \frac{2}{3}(a+\bar{b}) + 2a\bar{c} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a = 0$

$c = -\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\bar{b} = 0$

$b = 0$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$

5. עבור המרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית המתאימה, האם הפונקציות $f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x$ הן מערכת אורתונורמלית? הוכיחו או הפריכו. אם זוהי מערכת אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו את המערכת ומצאו את הקירוב הטוב ביותר של הפונקציה $g(x)=e^x$ הנפרש על-ידי

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x$$

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

פונקציה אי זוגית

לכן אורתוגונלית.

לא אורתונורמלית.

$$\|f_0\| = \sqrt{\langle f_0, f_0 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2} \neq 1$$

$$\|f_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f_{0I} = \frac{f_0}{\|f_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_{1I} = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

נרמל כעת.

$u = g(x) = e^x$ # נניח כי

נמצא את $\bar{u}$

$$\bar{u} = \underbrace{\alpha}\, f_{0I} + \beta f_{1I} = \langle w, f_{0I} \rangle f_{0I} + \langle w, f_{1I} \rangle f_{1I}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x e^x dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(e^x(x-1)\right)\Big|_{-1}^{1} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2}{e} \end{cases}$$

לפי הגדרה $\bar{u}$ הוא הקירוב הקרוב ביותר ל- u

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{3}{e}x$$