מתימטיקה שימושית ותכנות מדעי

תרגיל 3- מכפלה פנימית, מערכות אורתוגונליות ואורתונורמליות, מקדמי פורייה מוכללים.

1. (10 נקודות) יהי W תת-מרחב הנפרש על-ידי $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}^t\right\}$. מצאו בסיס אורתונורמלי הפורש את אותו תת-מרחב. השתמשו בתהליך גרם-שמידט.

2. (10 נקודות) יהי W תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $S=\left\{1,x,x^2\right\}$ מעל R על הקטע $[0,1]$. מצאו מערכת אורתונורמלית הפורשת את W. המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב זה.

3. (10 נקודות) א. נתונות שלוש פונקציות f_1, f_2, f_3 במרחב מכפלה פנימית W כך ש- $\{f_1-f_2,\ f_2+f_3,\ f_2-f_3-f_1\}$ מערכת אורתונורמלית. חשבו את $\|f_2\|$. צטטו משפטים בהם השתמשתם לצורך החישוב.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_1, e_2\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V.

נסמן $W = sp\{e_1, e_2\}$. יהי $u \in V$, ויהי $\tilde{u}$ ההיטל האורתוגונאלי של u על W.

יהי $v \in V$ כך ש- $v \perp u$ וגם $v \perp W$. נניח ש- $\|\tilde{u}\| = 4$,$\|u\| = 6$ ו- $\|v\| = 2$.

למה שווה $\|u - \tilde{u} + e_1 + e_2 + v\|$?

4. (16 נקודות)

I. נניח כי Q היא מטריצה עם m שורות ו- n עמודות. ידוע כי n העמודות הן בסיס אורתונורמלי, וכן כי m>n.

א. הראו כי $Q^tQ = I$

ב. הוכיחו או הפריכו $QQ^t = I$?

ג. הראו כי אם עמודות Q הן בסיס אורתונורמלי אז לכל וקטור $x \in R^n$ קיים $\|Q\cdot x\| = \|x\|$.
הדרכה: $\|Q\cdot x\|^2 = (Q\cdot x)^t(Q\cdot x)$

II. ד. נניח כי המטריצה Q היא מטריצה ריבועית, כלומר n=m. הוכיחו כי $Q^t = Q^{-1}$, וכן $Q^tQ = QQ^t = I$.

ה. מטריצות ריבועיות כנ"ל בהן העמודות הן אורתונורמליות נקראות מטריצות אורתוגונליות. הראו כי גם שורות מטריצות אלה הן אורתונורמליות ויוצרות בסיס של R^n

ו. מרחבים אורתוגונליים הם מרחבים בהם כל וקטור במרחב אחד אורתוגונלי לכל וקטור במרחב שני. אלו שני תת-מרחבים הקשורים לפתרון מערכת משוואות הומוגניות הם מרחבים אורתוגונליים? הסבירו.

ז. האם תת המרחב של מישור הרצפה (xy) הוא אורתוגונלי לתת המרחב של ציר ה- z?

ח. האם תת המרחב של מישור הרצפה אורתוגונלי למישור xz?

ט. עבור שני מרחבים אורתוגונליים, נסחו טענה על וקטור הנמצא בתת-מרחב החיתוך.

5. (14 נקודות) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

יהי W תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $S=\{1,\cos x,\sin x\}$ מעל R, ותהי $f(x)=x$ פונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$.מצאו פונקציה g הנפרשת ע"י S שהיא הכי קרובה ל- f, כלומר $\|f-g\|$ מינימלי. מהו הערך המינימלי שמתקבל?האם קיימת פונקציה h הנפרשת ע"י S השונה מ-g כך ש- $\|f-g\|=\|f-h\|$?הסבירו את תשובתכם.

תרגיל Python

i. (25 נקודות) פירוק QR. כיתבו פונקציה למימוש תהליך גרם-שמידט לפי הפסאודו-קוד של האלגוריתם הבא:

```
for j in range(n)
      v = A(:,j)
      for i in range(j-1)
            R(i,j) = Q(:,i)' * v
            v = v - R(i,j) * Q(:,i)
      end
      R(j,j) = norm(v)
      Q(:,j) = v/R(j,j)
end
```

הסבר:

שורה 2 – הוקטור v הוא העמודה ה- j של A.,

שורה 3 – עבור כל הוקטורים q שנבנו עד עכשיו -

שורה 4 - (#מכפלה פנימית בין הוקטור החדש v לבין וקטור אורתונורמלי, חישוב של מקדם ההיטל, מציבים את התוצאה במטריצה R)

שורה 5 – מפחיתים מהוקטור v את ההיטל האורתוגונלי של v על הוקטור q=Q(:,i).

שורה 6 – מציבים את הנורמה של v באלכסון הראשי של R

שורה 7 – נירמול הוקטור לאחר ההפחתה (u-u_gal)/||u-u_gal||

הפונקציה תקבל בכניסה מטריצה A כלשהי של n וקטורים בלתי תלויים $a_1, a_2, \ldots, a_n$, (עמודות המטריצה A) , ותייצר n וקטורים אורתונורמליים $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (עמודות המטריצה Q). את המכפלות הפנימיות בין הוקטורים q'_i ו- a_j מציבים במטריצה הריבועית R, כך ש A=QR.
המטריצה R היא מטריצה משולשת עליונה, כי מקדם ההיטל $q'_i a_j$ הוא 0 כאשר גדול מ- j.

פירוק זה של A למטריצה אורתונורמלית Q ומטריצה משולשת עליונה R נקרא פירוק QR.

הפונקציה תחזיר שתי מטריצות Q ו- R.

כיצד תבדקו האם המטריצה Q היא מטריצה אורתונורמלית? בצעו את הפעולה הדרושה כחלק מהפונקציה.

ii. (25 נקודות) איפה מתחבא ה- chirp החבוי או באיזה מרחק נמצא המטוס? (המשך לתרגיל שהודגם בהרצאה)
בהרצאה ראינו איך מייצרים פונקציית קוסינוס או אות קוסינוס : $f(t)=\cos(2\pi\cdot f_0\cdot t)$

א. כתבו פונקציית Python המייצרת פונקציות מסוג chirp (פונקציות chirp הן פונקציות בהן התדירות עולה באופן ליניארי עם הזמן t).
הנוסחה המתארת אותות אלה היא $sig(t)=\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t+2\pi\cdot\mu\cdot t^2\right)$.

הפונקציה תקבל בכניסה את משך הזמן של האות, את התדירות ההתחלתית התדירות f_0, את המקדם μ (הקובע את שיפוע עליית התדירות) ואת תדירות הדגימה f_s (או את מרווח הדגימה $T_s=1/f_s$).

הדרכה: בתוך הפונקציה יצרו ציר זמן על-ידי:

```
fs=44100;
Ts=1/fs
```

ועם משך זמן dur. הפונקציה תחזיר וקטור sig ואת ציר הזמן tt.

ב. הדגימו את פעולת הפונקציה עבור tt ציר זמן עם משך של 0.5 שניות (כלומר dur=0.5), הנדגם בתדירות של 44100 פעמים בשניה, כלומר $T_s=1/44100$, $\mu=500$ וכן $f_0=1000$, ציירו את 200 הנקודות הראשונות ו-200 הנקודות האחרונות של הוקטור sig כפונקציה של ציר הזמן המתאים על שני גרפים באמצעות subplot.
מה אפשר לראות בשני הציורים?
לאחר יצירת הפונקציה הפעילו את

```
sd.play(sig,fs)
```

(לאחר הורדה של sounddevice ושימוש ב-

```
import sounddevice as sd)
```

האם הבחנתם בשינוי התדירות?

ג. באמצעות הפקודה `np.random.randn` יצרו אות רעש עם משך של 10 שניות, עם אותה תדירות דגימה כמו בסעיף הקודם. הוסיפו את אות ה- `chirp` לאות הרעש.

ד. כיתבו פונקציה למציאת המיקום של פונקציית `chirp` כנ"ל $sig(t)=\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t+2\pi\cdot\mu\cdot t^2\right)$ כאשר `t` הוא ציר זמן של 0.5 שניות, הנדגם בתדירות של 44100 פעמים בשניה, כלומר $T_s=1/44100$, ו- $\mu=500$ וכן $f_0=1000$, כלומר האות מכיל 1000 מחזורים לשניה. האות טבול בתוך אות רעש של 10 שניות (עם אותה תדירות דגימה של 44100 דגימות לשניה). הפונקציה תחזיר את מיקום האות בדגימות ובשניות לאורך ציר הזמן.

ה. במחיצת התרגיל אפשר למצוא שני אותות: אות `chirp` כנ"ל, ואות רעש המכיל את `chirp` במשך של חצי שניה. האם תוכלו באמצעות הפונקציה שכתבתם בסעיף הקודם לגלות איפה נמצא אות ה- `chirp`, כלומר מהו המיקום המדוייק בזמן של אות ה- `chirp`? במקרה זה תדירות הדגימה היא 44100, כלומר

```
fs=44100
Ts=1/fs
```

משך סיגנל הרעש הוא 29 שניות, ומשך ה- `chirp` הוא 0.5 שניות.

1. (10 נקודות) יהי W תת-מרחב הנפרש על-ידי $\left\{\overset{V_1}{(1\ \ 2\ \ 1)^t}, \overset{V_2}{(1\ \ -1\ \ 0)^t}, \overset{V_3}{(2\ \ 1\ \ -1)^t}\right\}$. מצאו בסיס אורתונורמלי הפורש את אותו תת-מרחב. השתמשו בתהליך גרם-שמידט.

נמצא את הבסיס ל W

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהווקטורים הם בת"ל

$$\|V_1\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$$

כעת נפעיל את שמידט גרם בצורה:

$$e_1 = \frac{(1\ 2\ 1)^t}{\|V_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$$

$$\langle V_2, e_1\rangle = 1/\sqrt6 - 2/\sqrt6 + 0 = -1/\sqrt6 \Rightarrow \tilde{V}_2 = -1/\sqrt6 \cdot e_1 = (-1/6, -2/6, -1/6)^t \Rightarrow V_2 - \tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -4/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \|V_2 - \tilde{V}_2\| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{66}}{6}$$

$$e_2 = \frac{V_2 - \tilde{V}_2}{\|V_2 - \tilde{V}_2\|} = \frac{V_2 - \langle V_2, e_1\rangle e_1}{\|\text{שם}\|} = \left(\frac{7}{\sqrt{66}}, -\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}\right)^t$$

$$\tilde{V}_3 = \begin{cases} \langle V_3, e_1\rangle e_1 = \frac{\sqrt6}{2} e_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t \\ + \\ \langle V_3, e_2\rangle e_2 = \frac{3\sqrt{66}}{2} e_2 = \left(\frac{21}{22}, \frac{6}{11}, \frac{3}{22}\right)^t \end{cases} + \ = \left(\frac{16}{11}, \frac{17}{11}, \frac{7}{11}\right)$$

$$V_3 - \tilde{V}_3 = \left(\frac{6}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{18}{11}\right)^t$$

$$\|V_3 - \tilde{V}_3\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{18}{11}\right)^2} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)^t$$

2. (10 נקודות) יהי W תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $S=\{1,x,x^2\}$ מעל R על הקטע $[0,1]$. מצאו מערכת אורתונורמלית הפורשת את W. המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב זה.

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$$

$$e_2 = \frac{x-\tilde{x}}{\|\text{מונה}\|}$$

$$\tilde{x} = \langle x, e_1\rangle e_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \|x-\tfrac{1}{2}\| = \sqrt{\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 x^2 - x + \tfrac{1}{4}\,dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{12}} =$$

$$e_2 = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}} = \sqrt{12}\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{12}\,x - \sqrt{3}$$

$$e_3 = \frac{x^2-\widetilde{x^2}}{\|\text{מונה}\|} \Rightarrow \widetilde{x^2} = \langle x^2, e_1\rangle e_1 + \langle x^2, e_2\rangle e_2 \Rightarrow$$

$$\langle x^2, e_1\rangle e_1 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle x^2, e_2\rangle = \int_0^1 x^2(\sqrt{12}\,x-\sqrt{3})\,dx = \int_0^1 \sqrt{12}\,x^3 - \sqrt{3}\,x^2\,dx = \sqrt{12}\,\frac{x^4}{4} - \sqrt{3}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{12}}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.288 \Rightarrow \langle x^2, e_2\rangle e_2 = 0.997x - 0.498$$

$$\widetilde{x^2} \approx x - \frac{1}{6} \Rightarrow \|x^2 - \widetilde{x^2}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right)^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{180}}$$

$$e_3 = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{180}} =$$

3. (10 נקודות) א. נתונות שלוש פונקציות f_1, f_2, f_3 במרחב מכפלה פנימית W כך ש- $\{f_1-f_2,\ f_2+f_3,\ f_2-f_3-f_1\}$ מערכת אורתונורמלית. חשבו את $\|f_2\|$. צטטו משפטים בהם השתמשתם לצורך החישוב.

$$f_2 = 1(\cancel{f_1}-\cancel{f_2})+1\cdot(\cancel{f_2}+\cancel{f_3})+1\cdot(f_2-\cancel{f_3}-\cancel{f_1}) \in W$$

מכיוון ש $f_2 \in W$ ניתן לרשום כ: $\|f_2\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2$

אזי הוא צירוף לינארי של הבסיס. ולכן נחשב את $\|f_2\|^2$

$$\|f_2\|^2 = |\langle f_2, f_1-f_2\rangle|^2 + |\langle f_2, f_2+f_3\rangle|^2 + |\langle f_2, f_2-f_3-f_1\rangle|^2 =$$

$$|\langle f_2, f_1\rangle - \langle f_2, f_2\rangle|^2 + |\langle f_2, f_2\rangle + \langle f_2, f_3\rangle|^2 + |\langle f_2, f_2\rangle - \langle f_2, f_3\rangle - \langle f_2, f_1\rangle|^2 =$$

$$1+1+1 = 3 \Rightarrow \|f_2\| = \sqrt{3}$$

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_1, e_2\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V.

נסמן $W = sp\{e_1, e_2\}$. יהי $u \in V$, ויהי $\tilde{u}$ ההיטל האורתוגונאלי של u על W.

יהי $v \in V$ כך ש- $u \perp v$ וגם $W \perp v$. נניח ש- $\|\tilde{u}\| = 4$, $\|u\| = 6$, ו- $\|v\| = 2$.

למה שווה $\|u - \tilde{u} + e_1 + e_2 + v\|$?

ממשפט פיתגורס המוכלל $\|u-w\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}-w\|^2$ ונציב $w=0$ אזי נקבל ש..

$$\|u\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 = 6^2+4^2 = 20$$

מכיוון ש $u-\tilde{u} \perp W$ וגם $V \perp W$ מתקיים

$$\|u-\tilde{u}+e_1+e_2+v\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|v\|^2 = 20+1+1+2^2 = 26$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{26}$$

4. (16 נקודות)

I. נניח כי Q היא מטריצה עם m שורות ו- n עמודות. ידוע כי n העמודות הן בסיס אורתונורמלי, וכן כי m>n.

א. הראו כי $Q^tQ=I$

ב. הוכיחו או הפריכו $QQ^t=I$?

ג. הראו כי אם עמודות Q הן בסיס אורתונורמלי אז לכל וקטור $x\in R^n$ קיים $\|Q\cdot x\|=\|x\|$.

הדרכה: $\|Q\cdot x\|^2=(Q\cdot x)^t(Q\cdot x)$

א.

מכיוון שעמודות Q ושורות Q^t מערכת אורתונורמלית אזי כי רק המכפלה בין עמודה j לשורה i כך ש $i=j$ ניתן תוצאה שהיא 1 ומתכונת האורתוגונליות לכל $i\neq j$ המכפלה תהיה 0 ולכן קיבלנו מטריצה עם אלכסון של 1 וכל שאר 0 ובאר בגודל מטריצה הבהרת!

$$Q^tQ = \begin{pmatrix} — \\ — \\ — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

ב. נתון $Q^tQ=I$, נכפול ב- Q משמאל ונקבל.

$$Q(\underbrace{Q^tQ}_{I}) = Q = (\underbrace{QQ^t}_{I})Q \Rightarrow$$

מסעיף א'   אסוציאטיביות.

ג.

$$(Q\cdot x)^t\cdot(Q\cdot x) = x^t\cdot Q^t\cdot Q\cdot x = x^t\cdot I\cdot x = x^t\cdot x = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$$

$$\|Q\cdot x\| = \|x\|$$

II. ד. נניח כי המטריצה Q היא מטריצה ריבועית, כלומר n=m. הוכיחו כי $Q^t = Q^{-1}$, וכן $Q^tQ = QQ^t = I$.

ה. מטריצות ריבועיות כנ"ל בהן העמודות הן אורתונורמליות נקראות מטריצות אורתוגונליות. הראו כי גם שורות מטריצות אלה הן אורתונורמליות ויוצרות בסיס של R^n

ו. מרחבים אורתוגונליים הם מרחבים בהם כל וקטור במרחב אחד אורתוגונלי לכל וקטור במרחב שני. אלו שני תת-מרחבים הקשורים לפתרון מערכת משוואות הומוגניות הם מרחבים אורתוגונליים? הסבירו.

ד. נתון: $Q^tQ = I$ מסעיף א'

$$Q\underbrace{(Q^tQ)}_{I} = Q$$

$$\underbrace{(QQ^t)}_{I}Q = Q$$

$$\Rightarrow Q^t = Q^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q^tQ = QQ^t = I}$$

ה. לפי סעיף ד גילינו שלמטריצה ריבועית עם עמודות אורתונורמליות מתקיים $QQ^t = I$

ומכאן שמתקיים כי שורות המטריצה של Q הן אורתונורמליות.

ו. מרחב הפתרונות של $Ax=0$ ומרחב השורות של $Q = Row(Q)$.

הסבר: מכיוון ש $\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ הרי שלכל $a_i \in Row(A)$ ו $x_i \in Null(A)$

$\langle x_i, a_i \rangle = 0$ ומכאן שהן אורתוגונליות

ז. האם תת המרחב של מישור הרצפה (xy) הוא אורתוגונלי לתת המרחב של ציר ה- z?

ח. האם תת המרחב של מישור הרצפה אורתוגונלי למישור xz?

ט. עבור שני מרחבים אורתוגונליים, נסחו טענה על וקטור הנמצא בתת-מרחב החיתוך.

ז. כן. נוכיח: ניקח וקטור כללי מ- XY $(x,y,0)\in XY$ וקטור כללי ב z $(0,0,z)$

$\langle (x,y,0),(0,0,z)\rangle = 0 \Rightarrow$ אורתוגונליים

ח. $(x,0,z)\in XZ$, $(x,y,0)\in XY$

$\langle (x,y,0),(x,0,z)\rangle = x^2 \Rightarrow XY \not\perp XZ$ לא מתקיים!!

ט. יהי W_1 , W_2 אורתוגונליים מכאן שמתקיים כי $W_1 \perp W_2$ אזי:

$\{v\in W_1\cap W_2 : \langle v,w_1\rangle = \langle v,w_2\rangle = 0\}$

5. (14 נקודות) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

יהי W תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $S=\{1,\cos x,\sin x\}$ מעל R, ותהי $f(x)=x$ פונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$. מצאו פונקציה g הנפרשת ע"י S שהיא הכי קרובה ל- f, כלומר $\|f-g\|$ מינימלי. מהו הערך המינימלי שמתקבל? האם קיימת פונקציה h הנפרשת ע"י S השונה מ-g כך ש- $\|f-g\|=\|f-h\|$? הסבירו את תשובתכם.

$$\tilde{f}(x) = \langle f,1\rangle 1 + \langle f,\cos(x)\rangle \cos(x) + \langle f,\sin(x)\rangle \sin(x)$$

אי זוגי

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

אי זוגי

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,dx = 2\pi$$

$$\tilde{f}(x) = 2\pi\sin(x)$$

$$\|f-\tilde{f}\|^2 = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(x-\sin(x))^2dx = 2\pi\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2-2x\sin(x)+\sin^2(x)\,dx\right) =$$

$$2\pi\left(\frac{2\pi^3}{3}-4\pi+\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\,dx = \pi\right)\right) =$$

המרחק המינימלי

$$\frac{4\pi^4}{3}-8\pi^2+2\pi^2 = \frac{4\pi^4}{3}-6\pi^2 = \frac{22}{3}\pi^2$$

נוכיח יחידות:

נניח בשלילה כי קיים $g\neq h$ כך ש $\|f-g\|=\|f-h\|$

אנו יודעים כי לפי פיתגורס $\|f-h\|^2=\|f-g\|^2+\|h-g\|^2$

לפי הנתון $\|h-g\|^2=0$ ולכן $h=g$ בסתירה לכך ש $g\neq h$