第二节课习题

binxxx

June 12, 2018

1 习题说明

2 熟悉Eigen矩阵运算

1. 设线性方程$Ax = b$，在A为方阵的前提下，在什么条件下，x有解且唯一
   - A为满秩矩阵。
2. 高斯消元法的原理是什么?
   - 采用初等行变换将增广矩阵化为阶梯型矩阵，并利用向前或向后替换算法求得解。
3. QR分解的原理是什么?
   - QR分解是将系数矩阵A转化为一个半正交矩阵和一个上三角矩阵之积，之后利用向后替换算法求解。
4. Cholesky分解的原理是什么?
   - Cholesky分解将系数矩阵转化为一个下三角矩阵和其共轭矩阵之积，并先后用向前替换算法和向后替换算法求得解。
5. 编程实现A为100x100随机矩阵时，用QR和Cholesky分解求x的程序。

3 几何运算练习

4 旋转的表达

1. 设有旋转矩阵$\mathbf{R}$，证明$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$且$det\mathbf{R} = +1$

   根据旋转矩阵定义，$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, det\mathbf{R} = +1$，由于$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{I}$，可得$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$
2. 设有四元数$\mathbf{q}$，我们把虚部记为ε，实部记为η，那么$\mathbf{q} = (\varepsilon, \eta)$。请说明$\varepsilon$和$\eta$的维度。

   ε的是三维的，η是一维的。

3. 证明过程如下：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 = [\varepsilon_1, \eta_1]^T, \mathbf{q}_2 = [\varepsilon_2, \eta_2]^T \\
\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = [\eta_1\varepsilon_2 + \eta_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2, \eta_1\eta_2 - \varepsilon_1^T\varepsilon_2]^T \\
\mathbf{q}_1^+\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1\mathbf{1} + \varepsilon_1^\wedge & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\eta_1\mathbf{1} + \varepsilon_1^\wedge)\varepsilon_2 + \eta_2\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1^T\varepsilon_2 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 + \eta_2\varepsilon \\ -\varepsilon_1^T\varepsilon_2 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} \\
then \quad \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1^+\mathbf{q}_2 \\
\mathbf{q}_2^\oplus\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \eta_2\mathbf{1} - \varepsilon_2^\wedge & \eta_2 \\ -\eta_2^T & \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\eta_2\mathbf{1} - \varepsilon_2^\wedge)\varepsilon_1 + \varepsilon_2\eta_1 \\ -\varepsilon_2^T\varepsilon_1 + \eta_2\eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\eta_1 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1^T\varepsilon_2 + \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} \\
then \quad \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^\oplus\mathbf{q}_1
\end{aligned}
$$

5 罗德里格斯公式的证明

证明如下：

设任意向量$\mathbf{v}$绕$\mathbf{n}$旋转角度为θ。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{rot} &= \mathbf{v}_{\perp rot} + \mathbf{v}_{\parallel rot} \\
&= \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\mathbf{n} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}_\parallel \\
&= \cos\theta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel) + \cos\theta\mathbf{n} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}_\parallel \\
&= (1 - \cos\theta)\mathbf{v}_\parallel + \cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{n} \times \mathbf{v} \\
&= (1 - \cos\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} + \cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{n} \times \mathbf{v} \\
\mathbf{v}_{rot} &= \mathbf{R}\mathbf{v} \\
\mathbf{R}\mathbf{v} &= (1 - \cos\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} + \cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{n} \times \mathbf{v} \\
\mathbf{R} &= (1 - \cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{n}^\wedge
\end{aligned}
$$

6 四元数运算性质的验证

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^+\mathbf{p}^+\mathbf{q}^{-1} \\
&= \mathbf{q}^+\mathbf{q}^{-1\oplus}\mathbf{p} \\
\mathbf{p}' &= \mathbf{Q}\mathbf{p} \\
Q &= \mathbf{q}^+\mathbf{q}^{-1\oplus} \\
&= \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} + \varepsilon^\wedge & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} + \varepsilon^\wedge & -\varepsilon \\ \varepsilon^T & \eta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\eta\mathbf{1} + \varepsilon^\wedge)(\eta\mathbf{1} + \varepsilon^\wedge) + \varepsilon\varepsilon^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon^T\varepsilon + \eta^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

7 熟悉C++11

- 第17行a:avec 运用了范围for循环
- auto运用了自动类型推导
- sort函数里面运用了lambda表达式，对index进行排序。