第三节课习题

binxxx

June 19, 2018

1 习题说明

2 群的性质

1. $\{\mathbb{Z},+\}$是否为群?
   - $\{\mathbb{Z},+\}$是群，因为它满足了群所必要的四个元素。
     - 对于任意两个整数a和b，它们的和a+b也是整数。
     - 对于任意整数a,b,c，它们必定满足结合律(a+b)+c=a+(b+c)。
     - 对于任意整数a，都有0+a=a+0=a。
     - 对于任意整数a，都存在一个整数b使得a+b=b+a=0。
2. $\{\mathbb{N},+\}$是否为群?
   - $\{\mathbb{N},+\}$不是群，它不满足上述四条的最后一条，因为自然数都是非负整数，所以除了0之外找不到其他的两个自然数相加可以为0。

3 验证向量叉乘的李代数性质

现取集合$\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$，数域$\mathbb{F}=\mathbb{R}$，李括号为:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

请验证$\mathfrak{g}=(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},\times)$构成李代数。

证明$\mathfrak{g}=(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},\times)$构成李代数需要证明其满足四个条件，满足以下四个条件则可以说明其构成李代数，证明过程如下:

1. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3,\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$
2. $\forall\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathbb{R}^3, a,b\in\mathbb{R}$

$$[a\mathbf{X}+b\mathbf{Y},\mathbf{Z}]=(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})\times\mathbf{Z}=a\mathbf{X}\times\mathbf{Z}+b\mathbf{Y}\times\mathbf{Z}=a[\mathbf{X},\mathbf{Z}]+b[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]$$

$$[\mathbf{Z},a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}]=\mathbf{Z}\times(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})=a\mathbf{Z}\times\mathbf{X}+b\mathbf{Z}\times\mathbf{Y}=a[\mathbf{Z},\mathbf{X}]+b[\mathbf{Z},\mathbf{Y}]$$

3. $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = \mathbf{X} \times \mathbf{X} = 0$
4. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^3$,

   $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]]+[\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]]+[\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = \mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z})+\mathbf{Y} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{X})+\mathbf{Z} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = 0$

4 推导SE(3)的指数映射

证明过程如下:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= I + \frac{1}{2!}(\theta \mathbf{a}^\wedge)^1 + \frac{1}{3!}(\theta \mathbf{a}^\wedge)^2 + \frac{1}{4!}(\theta \mathbf{a}^\wedge)^3 + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}(\theta \mathbf{a}^\wedge)^n \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\theta \mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 \mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^3 \mathbf{a}^\wedge - \frac{1}{5!}\theta^4 \mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge + \cdots \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T + (\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \cdots)\mathbf{a}^\wedge + (-1 + \frac{1}{3!}\theta^2 - \frac{1}{5!}\theta^4 + \cdots)\mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \frac{1}{\theta}(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots)\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^\wedge - \frac{1}{\theta}(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots)\mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \frac{\cos\theta}{\theta}\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^\wedge \mathbf{a}^\wedge - \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{a}^\wedge \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \frac{\cos\theta}{\theta}\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{\theta}\mathbf{a}^\wedge - \frac{\sin\theta}{\theta}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I}) \\
&= (1 - \frac{\sin\theta}{\theta})\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\mathbf{a}^\wedge + \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I}.
\end{aligned}
$$

5 伴随

证明如下:
设任意向量$\mathbf{v}$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge \mathbf{v} &= (\mathbf{R}\mathbf{a}) \times (\mathbf{R}\mathbf{R}^T \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{a}^\wedge \mathbf{R}^T \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge \mathbf{R}^T \mathbf{v} \\
(\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge &= \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge \mathbf{R}^T \\
\exp(\mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge) &= \mathbf{R}\exp(\mathbf{a}^\wedge)\mathbf{R}^T
\end{aligned}
$$

6 轨迹的描绘

1. $\mathbf{T}_{WC}$中的平移部分代表了机器人坐标系在世界坐标系之下的位置，联系的平移部分就代表了机器人移动的轨迹。
2. 见code部分

7 轨迹的误差