Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке

Егор Подлесов

27 мая 2024 г.

Описание исходной задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.
Решаем задачу на интервале $(0, 1)$, вводя на ней равномерную сетку $x_0, x_1, ..., x_N$, $x_i = i * h$, $h = \frac{1}{N}$ Дискретная аппроксимация уравнения:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

для приграничных узлов (x_1, x_{N-1}) сюда войдут граничные условия

Метод прогонки

a_i - элементы стоящие на поддиагонали в i-ой строке
b_i - элементы стоящие на диагонали в i-ой строке
c_i - элементы стоящие на наддиагонали в i-ой строке
d_i - элемент правой части в i-ой строке

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов α_i и β_i , где i – номер строки матрицы. Этот этап выполняется при $i = 1...n$ строго по возрастанию значения i.

1. В первой строке матрицы $i = 1$ используются формулы:

$$\mathbf{y_1 = b_1, \alpha_1 = \frac{-c_1}{y_1}, \beta_1 = \frac{d_1}{y_1}}$$

2. Для строк i от 2 до $N - 2$ используются рекуррентные формулы:

$$\mathbf{y_i = b_i + a_i * \alpha_{i-1}, \alpha_i = \frac{-c_i}{y_i}, \beta_i = \frac{(d_i - a_i * \beta_{i-1})}{y_i}}$$

3. При $i = N - 1$ прямая прогонка завершается вычислением:

$$\mathbf{y_{N-1} = b_{N-1} + a_{N-1} * \alpha_{N-2}, \beta_{N-1} = \frac{(d_{N-1} - a_{N-1} * \beta_{N-2})}{y_{N-1}}}$$

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных yi. Этот этап выполняется при $i = n...1$ строго по убыванию значения i.

4. В последней строке матрицы $i = N - 1$ выполнено $x_{N-1} = \beta_{N-1}$

5. Для всех остальных строк при i от $N - 2$ до 1 применяется формула:

$$\mathbf{x_i = \alpha_i * x_{i+1} + \beta_i}$$

График

График зависимости точности c-нормы и дискретной l2-нормы от шага сетки в логарифмическом виде

graph.jpeg