

在医学成像中，低剂量CT（Computed Tomography）扫描是一种常用的技术，旨在减少患者接受的辐射剂量。然而，降低辐射剂量通常会导致图像质量下降，主要表现为噪声增加。为了研究和改进低剂量CT图像的处理方法，我们需要模拟低剂量CT图像中的噪声特性。

## 光子计数的泊松分布模拟

从上一篇文章《[CT投影和泊松噪声的关系](#)》中，我们知道，在理想的、无噪声的世界里，X射线穿过物体遵循 Beer-Lambert 定律：

$$N = N_0 \cdot e^{-\mu l} = N_0 \cdot e^{-p_{\text{ICT}}}$$

其中， $N_0$ 是入射到物体上的X射线光子数， $N$ 是穿过物体后到达探测器的X射线光子数， $\mu$ 是物体的线性衰减系数， $l$ 是射线穿过物体的路径长度， $p_{\text{ICT}}$ 是**理想线积分值**(True Line Integral)，也即CT的投影值，这是我们想要测量的物理量，则：

$$p_{\text{ICT}} = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$$

在现实世界中，光子的发射和探测是一个随机过程。即 $N$ 不再是一个确定值，而是一个服从泊松分布的随机变量：

$$N \sim \text{Poisson}(N_0 \cdot e^{-p_{\text{ICT}}})$$

在低剂量CT扫描中，入射光子的强度会降低，假设降低的比例为 $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )，即 $N'_0 = \alpha N_0$ ，那么低剂量CT下探测器接收到的光子数量可以表示为：

$$N_{\text{LDCT}} \sim \text{Poisson}(\alpha N_0 \cdot e^{-p_{\text{ICT}}})$$

那么，我们只要从式(4)中采样，就可以得到模拟的低剂量CT系统中探测器接收到的光子数量 $N_{\text{LDCT}}$ 。然后计算出对应的低剂量CT投影值 $p_{\text{LDCT}}$ ：

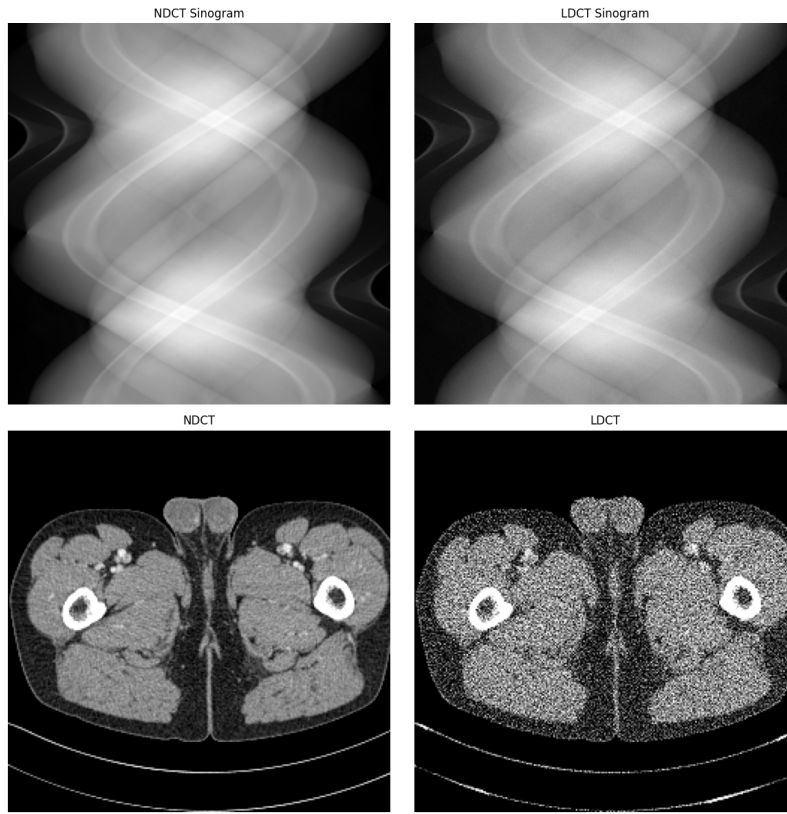
$$p_{\text{LDCT}} = -\ln\left(\frac{N_{\text{LDCT}}}{N'_0}\right) = -\ln\left(\frac{N_{\text{LDCT}}}{\alpha N_0}\right)$$

代码示例 (Python)：

```
import torch

def poisson_noise_simulation(p_ict, N0, alpha=1.0):
    """
    p_ict: full-dose sinogram (line integral)
    N0:    full-dose 入射光子数
    alpha: 剂量缩放因子 (0<alpha<=1)
    """
    N0_ldct = N0 * alpha                # 低剂量下的 N0
    # 1) full-dose 透过率 -> 低剂量 photon 期望
    lam = N0_ldct * torch.exp(-p_ict)   # λ = N0_ldct * exp(-p)
    # 2) Poisson 噪声
    I_ldct = torch.poisson(lam)
    # 3) 反算回 line integral
    p_ldct = -torch.log(I_ldct / N0_ldct)
    return p_ldct
```

下面展示一个低剂量CT噪声模拟的示例，假设入射光子数 $N_0 = 1e5$ ，剂量缩放因子 $\alpha = 0.25$ （即25%剂量）的情况下的模拟结果：



25%剂量CT噪声模拟示例

## 投影域高斯噪声仿真

然而CT系统记录的不是 $N$ ，而是通过对数变换得到的投影数据 $p_{\text{measured}}$ ：

$$p_{\text{measured}} = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$$

由于 $N$ 是随机的， $p_{\text{measured}}$ 也是一个随机变量。我们的任务就是精确地刻画 $p_{\text{measured}}$ 的统计特性（均值和方差）。Whiting et al.(2006)在其论文的Section IV. Discussion中明确指出：

"As exposure increases, the pdf will approach a Gaussian distribution characterized by a mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$ , with negligible higher moments, as expected from the central limit theorem."

也就是说，当入射光子数 $N_0$ 较大时，其概率密度函数会趋近于一个高斯分布，其高阶矩（如偏度、峰度）可以忽略不计，这是中心极限定理的预期结果。而且论文中还给出了结论：**当检测到的光子数 $N > 20$ 时，泊松分布与高斯分布的差异已经非常小，高斯近似是足够精确的。**

由于我们已知光子计数 $N$ 服从泊松分布，其均值和方差均为 $\lambda = N_0 e^{-p_{\text{ICT}}}$ （泊松分布的均值和方差相等）。所以当 $N$ 较大时，我们可以近似地认为 $N$ 服从高斯分布： $N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ，其中均值 $\mu = \lambda = N_0 e^{-p_{\text{ICT}}}$ ，方差 $\sigma^2 = \lambda = N_0 e^{-p_{\text{ICT}}}$ 。

而我们要计算的投影数据 $p_{\text{measured}}$ 是 $N$ 的对数变换，因此我们可以使用**Delta方法**来近似计算 $p_{\text{measured}}$ 的均值和方差。

Delta方法指出，如果 $X$ 是一个随机变量， $g(X)$ 是一个可微函数，那么当 $X$ 的方差较小时， $g(X)$ 的方差可以近似表示为：

$$\text{Var}(g(X)) \approx [g'(\mu)]^2 \cdot \text{Var}(X)$$

在这里：

- $X$ 是光子计数 $N$ ；
- $g(N) = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$ ；
- $g'(N) = -\frac{1}{N}$ 。

因此，投影数据 $p_{\text{measured}}$ 的均值和方差可以近似表示为：

$$\mathbb{E}[p_{\text{measured}}] = -\ln\left(\frac{\mu}{N_0}\right) = -\ln\left(\frac{N_0 e^{-p_{\text{ICT}}}}{N_0}\right) = p_{\text{ICT}}$$

$$\text{Var}(p_{\text{measured}}) \approx \left(-\frac{1}{\mu}\right)^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot \mu = \frac{1}{\mu} = \frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0}$$

即可以得到 $p_{\text{measured}}$ 服从均值为 $p_{\text{ICT}}$ ，方差为 $\frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0}$ 的高斯分布：

$$p_{\text{measured}} \sim \mathcal{N}\left(p_{\text{ICT}}, \frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0}\right)$$

现在，我们将上述通用模型应用到具体的全剂量和低剂量场景。

## 全剂量CT投影噪声模型

对于全剂量CT扫描，入射光子数为 $N_0$ ，因此全剂量CT投影数据 $p_{\text{FDCT}}$ 的统计模型为：

$$p_{\text{FDCT}} = p_{\text{ICT}} + \sqrt{\frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0}} \cdot x, \quad x \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

## 低剂量CT投影噪声模型

同理，低剂量CT扫描中，入射光子数为 $N'_0 = \alpha N_0$ ，因此低剂量CT投影数据 $p_{\text{LDCT}}$ 的统计模型为：

$$p_{\text{LDCT}} = p_{\text{ICT}} + \sqrt{\frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{\alpha N_0}} \cdot x, \quad x \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

注意：这里我们假设 $p_{\text{FDCT}}$ 和 $p_{\text{LDCT}}$ 是对同一个理想值 $p_{\text{ICT}}$ 的两次独立测量，因此它们共享同一个随机变量 $x$ （或至少是同分布的）。

我们现在面临一个实际问题：我们只有 $p_{\text{FDCT}}$ ，没有 $p_{\text{ICT}}$ ，如何从 $p_{\text{FDCT}}$ 合成 $p_{\text{LDCT}}$ ？最自然的构造方式是：

$$p_{\text{LDCT}} = p_{\text{FDCT}} + \text{Noise}_{\text{add}}$$

其中， $\text{Noise}_{\text{add}}$ 是我们需要添加的噪声项。为了使 $p_{\text{LDCT}}$ 满足式(10)的统计特性，我们可以推导出 $\text{Noise}_{\text{add}}$ 的均值和方差：

$$\text{Mean}(\text{Noise}_{\text{add}}) = \text{Mean}(p_{\text{LDCT}}) - \text{Mean}(p_{\text{FDCT}}) = p_{\text{ICT}} - p_{\text{ICT}} = 0$$

$$\text{Var}(\text{Noise}_{\text{add}}) = \text{Var}(p_{\text{LDCT}}) - \text{Var}(p_{\text{FDCT}})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{\alpha N_0} - \frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0} \\ &= e^{p_{\text{ICT}}} \left( \frac{1}{\alpha N_0} - \frac{1}{N_0} \right) \\ &= \frac{e^{p_{\text{ICT}}}}{N_0} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

公式(12)中仍然包含未知的理想值 $p_{\text{ICT}}$ 。这是无法直接用于仿真的。Yu et al. 的核心洞见是：全剂量CT是一个高信噪比（SNR）的测量。因此，我们可以用 $p_{\text{FDCT}}$ 作为 $p_{\text{ICT}}$ 的一个极佳近似：

$$p_{\text{ICT}} \approx p_{\text{FDCT}}$$

将式(13)代入式(12)中，我们得到了最终的，完全可操作的低剂量CT投影噪声的添加模型：

$$\text{Noise}_{\text{add}} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{e^{p_{\text{FDCT}}}}{N_0} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)$$

也即：

$$\text{Noise}_{\text{add}} = 0 + \sqrt{\frac{e^{p_{\text{FDCT}}}}{N_0} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \cdot x, \quad x \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

带入到式(11)中，我们最终得到了从全剂量CT投影数据 $p_{\text{FDCT}}$ 合成低剂量CT投影数据 $p_{\text{LDCT}}$ 的公式：

$$p_{\text{LDCT}} = p_{\text{FDCT}} + \sqrt{\frac{e^{p_{\text{FDCT}}}}{N_0} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \cdot x, \quad x \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

代码示例（Python）：

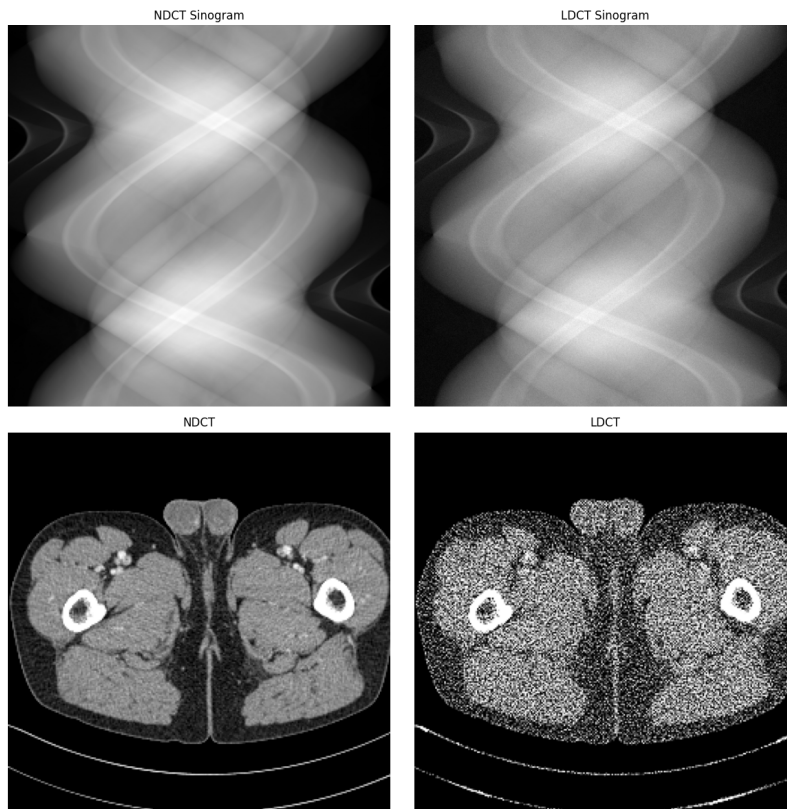
```
import torch
def gaussian_noise_simulation(p_fdct, N0, alpha=1.0):
    """
    p_fdct: full-dose sinogram (line integral)
    N0:      full-dose 入射光子数
    alpha:   剂量缩放因子 (0<alpha<=1)
```

```

scale = ((1 - alpha) / alpha) ** 0.5
# 计算噪声的标准差
noise_std = torch.sqrt(torch.exp(p_fdct) / N0) * scale
# 生成高斯噪声
x = torch.randn_like(p_fdct)
noise_add = noise_std * x
# 合成低剂量投影
p_ldct = p_fdct + noise_add
return p_ldct

```

下面展示一个低剂量CT噪声模拟的示例，假设入射光子数 $N_0 = 1e5$ ，剂量缩放因子 $\alpha = 0.1$ （即10%剂量）的情况下的模拟结果：



10%剂量CT高斯噪声模拟示例

## 参考文献

1. Yu, Lifeng, et al. "Development and validation of a practical lower-dose-simulation tool for optimizing computed tomography scan protocols." *Journal of computer assisted tomography* 36.4 (2012): 477-487.
2. NIH, AAPM, Clinic, M.: Low Dose CT Grand Challenge. <https://www.aapm.org/GrandChallenge/LowDoseCT/> (2016).
3. Whiting, Bruce R., et al. "Properties of preprocessed sinogram data in x-ray computed tomography." *Medical physics* 33.9 (2006): 3290-3303.
4. Liu, Yuxin, et al. "Imaging foundation model for universal enhancement of non-ideal measurement ct." *arXiv preprint arXiv:2410.01591* (2024).