Projet de Processus Stochastique: Évolution du capital d'un casino

YANG QINYAN, KAPTCHA ESSOWAZA CELESTIN, MAN CASTILLO DAVID

PLAN

1. Introduction
2. Proposition 1
3. Proposition 2
4. Proposition 3
5. Cas $\alpha > \mu$
6. Théorème 1 et Hn
7. Conclusion

Introduction

- ✓Nous nous intéressons dans ce projet à l'évolution du capital dans les casinos en développant un modèle de processus aléatoire. Concentrons-nous sur des paramètres assurant stabilité financière et croissance en analysant la probabilité de ruine du casino.

- ✓Modèle: $Y_t = Y_0 + \alpha t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \;\; avec \;\; \alpha > 0$

- ✓Probabilité de ruine: $r(y) = \mathbb{P}(\exists \; t \in \mathbb{R} + t.\, q.\, \forall \;\; Y_t < 0 \mid Y_0 = y)$

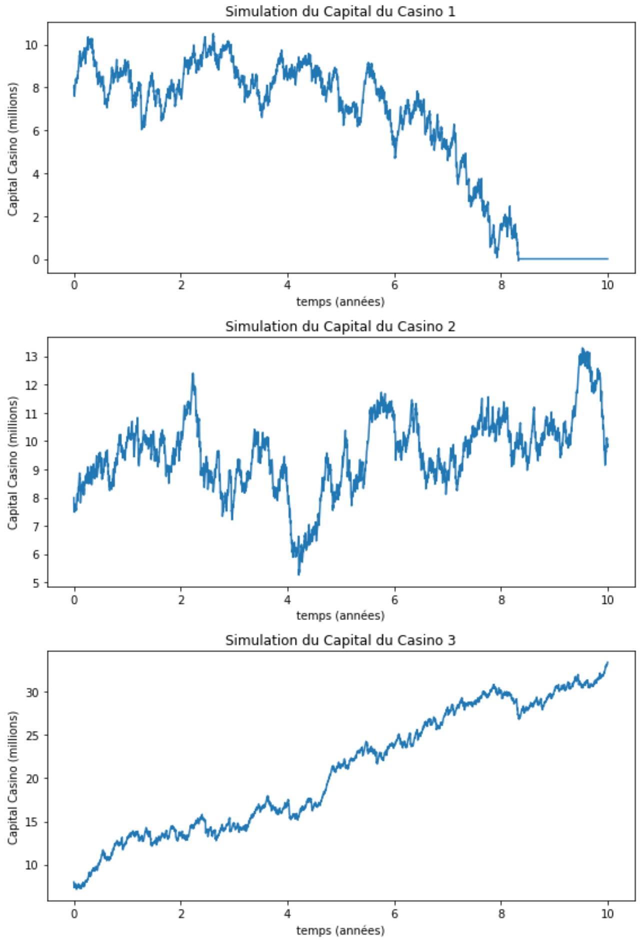
Proposition 1

$$\forall \ y \geq 0, \ \ r(y) > 0$$

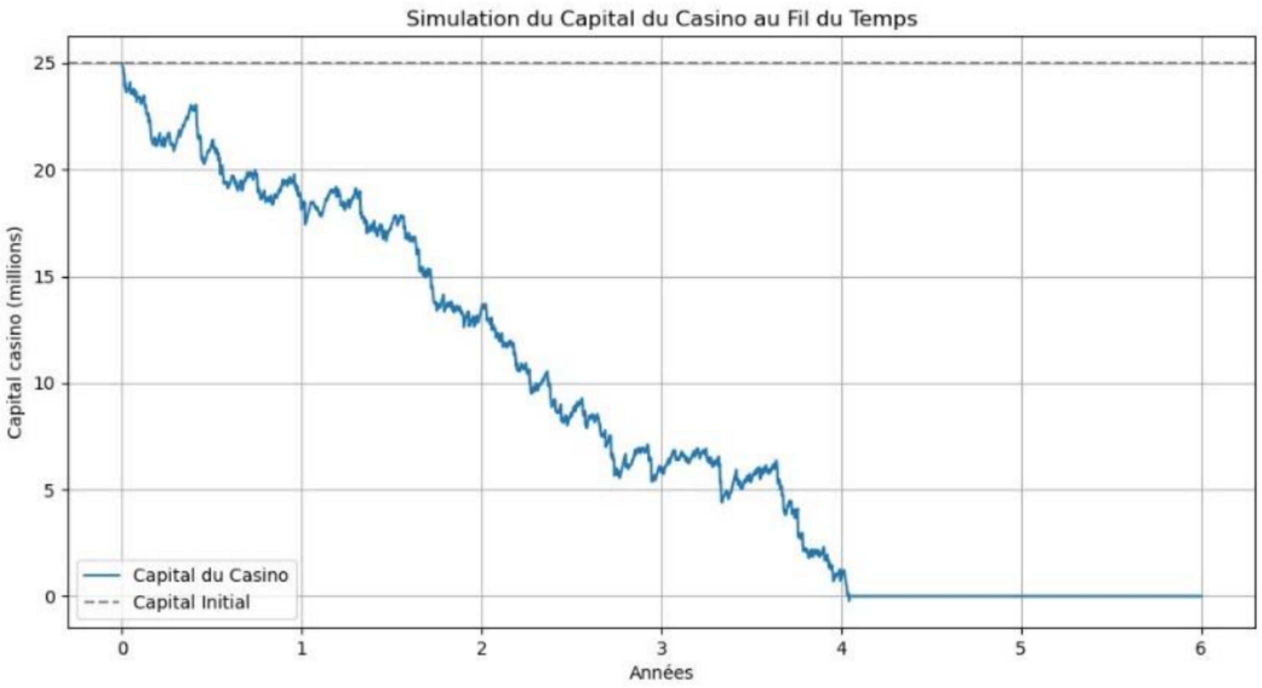
Soient t > 0, y ≥ 0 telle que,

$$Y_0 + \alpha t < \sum_{i=1}^{N_t} X_i \text{ , } p.s$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Y_0 + \alpha t < \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right) > 0 \Leftrightarrow P(Y_t < O \mid Y_0 = y)$$



Proposition 2:



Si $\alpha < \mu$ alors: $\forall y \geq 0$, $r(y) = 1$.

D'après la démonstration on a:

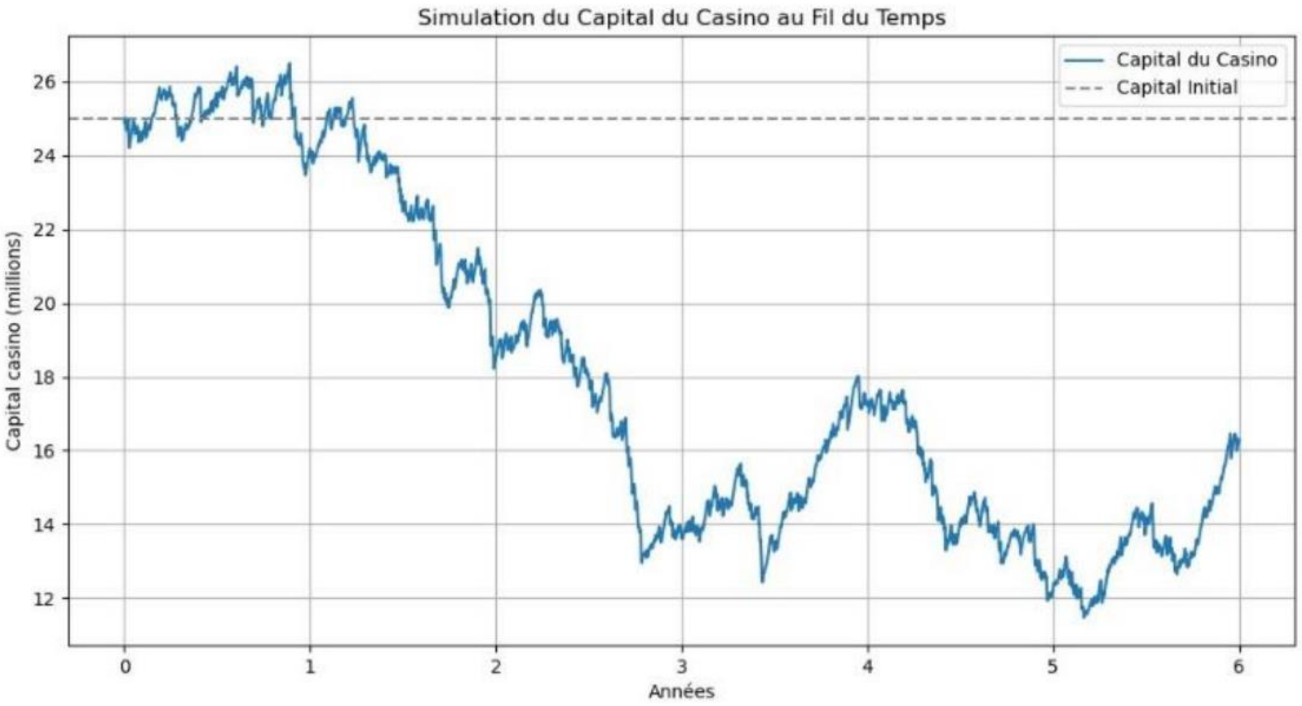
$$\mu = \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{t} X_i - Y_0\right)$$

Donc $\alpha < \mu$ i.e.

$$\alpha t < \sum_{i=1}^{t} X_i - Y_0$$

Autrement dit, l'invertissment plus le gain du casino est plus petit que le gain des joueurs.

Proposition 3:



Si $\alpha = \mu$ alors: $\forall y \geq 0$, $r(y) = 1$.

On a que

$$Y_{T_n} = Y_0 - S_n$$

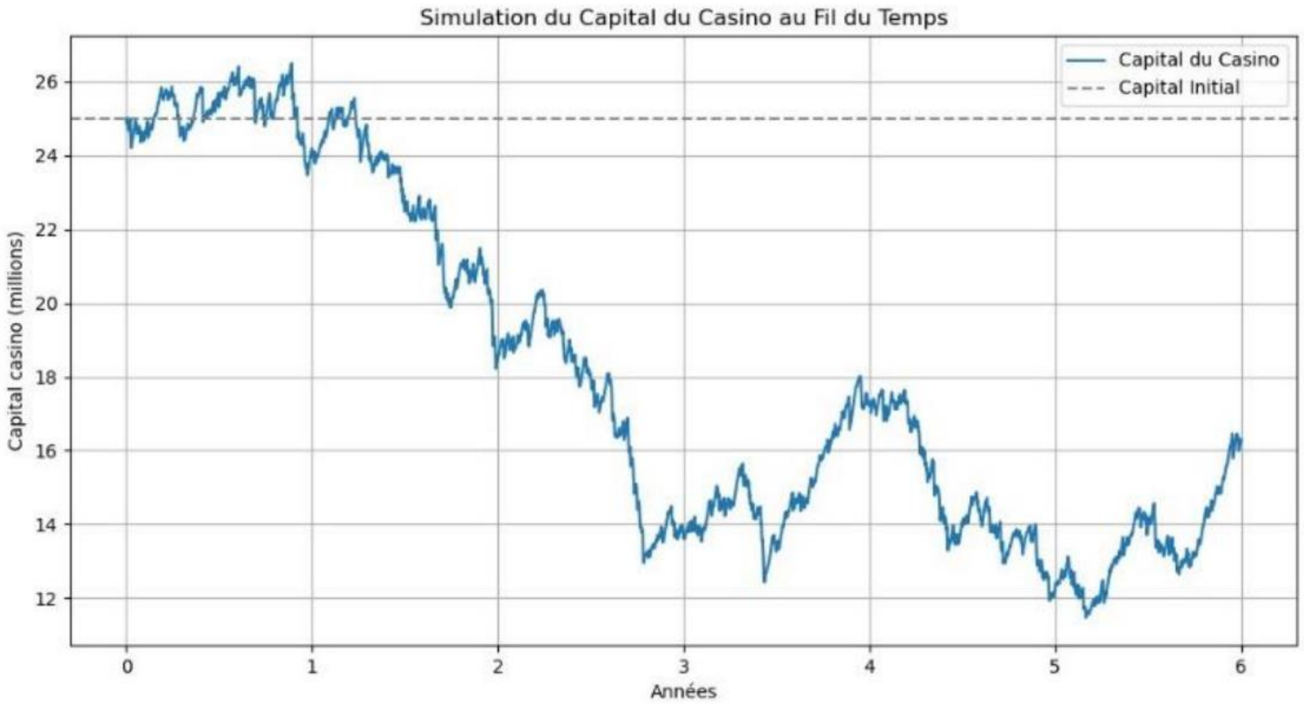
Evidement, on obtien:

$$Y_{T_n} \xrightarrow[S_n \to +\infty]{} -\infty$$

De plus, lorsque $\alpha = \mu$ on aura:

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Proposition 3:



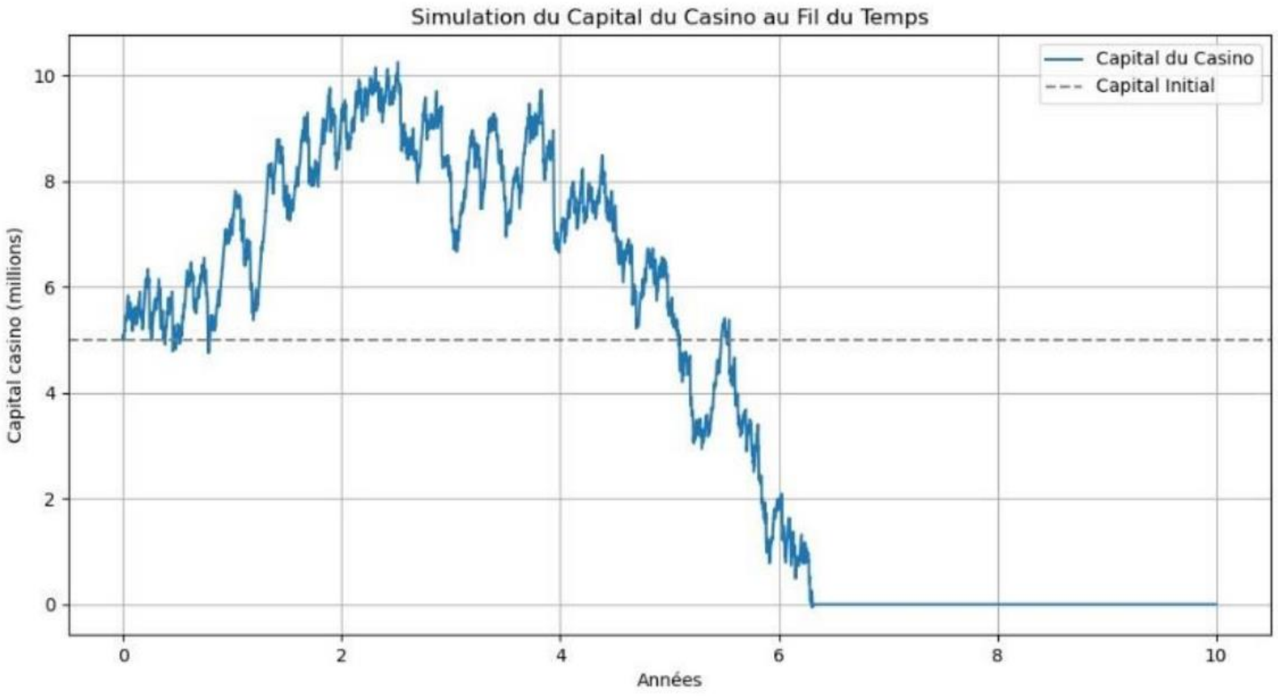
Si $\alpha = \mu$ alors: $\forall y \geq 0, r(y) = 1$.

<u>Le casino n'est pas ruiné</u>:

Contradiction avec la proposition?

C'est, quand $\alpha = \mu$ on a moins de chance que le casino être ruiné dans une certaine période que dans le cas $\alpha < \mu$.

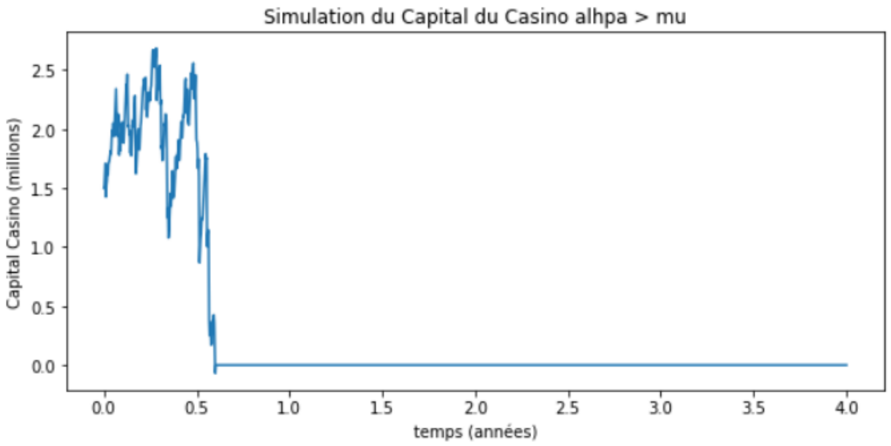
Proposition 3:

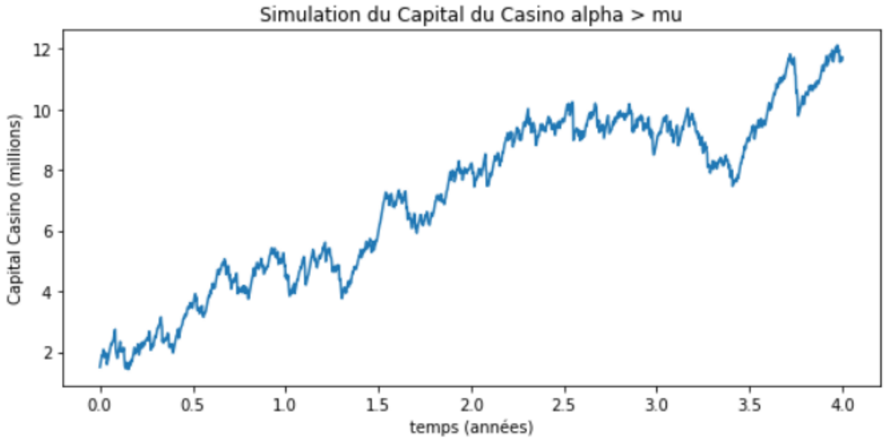


Si $\alpha = \mu$ alors: $\forall y \geq 0$, $r(y) = 1$.

Le casino ruiné：

Quand on simule avec un temps t plus grand que précédemment, on obtien le résultat qui vérifie la proposition.





Cas $\alpha > \mu$

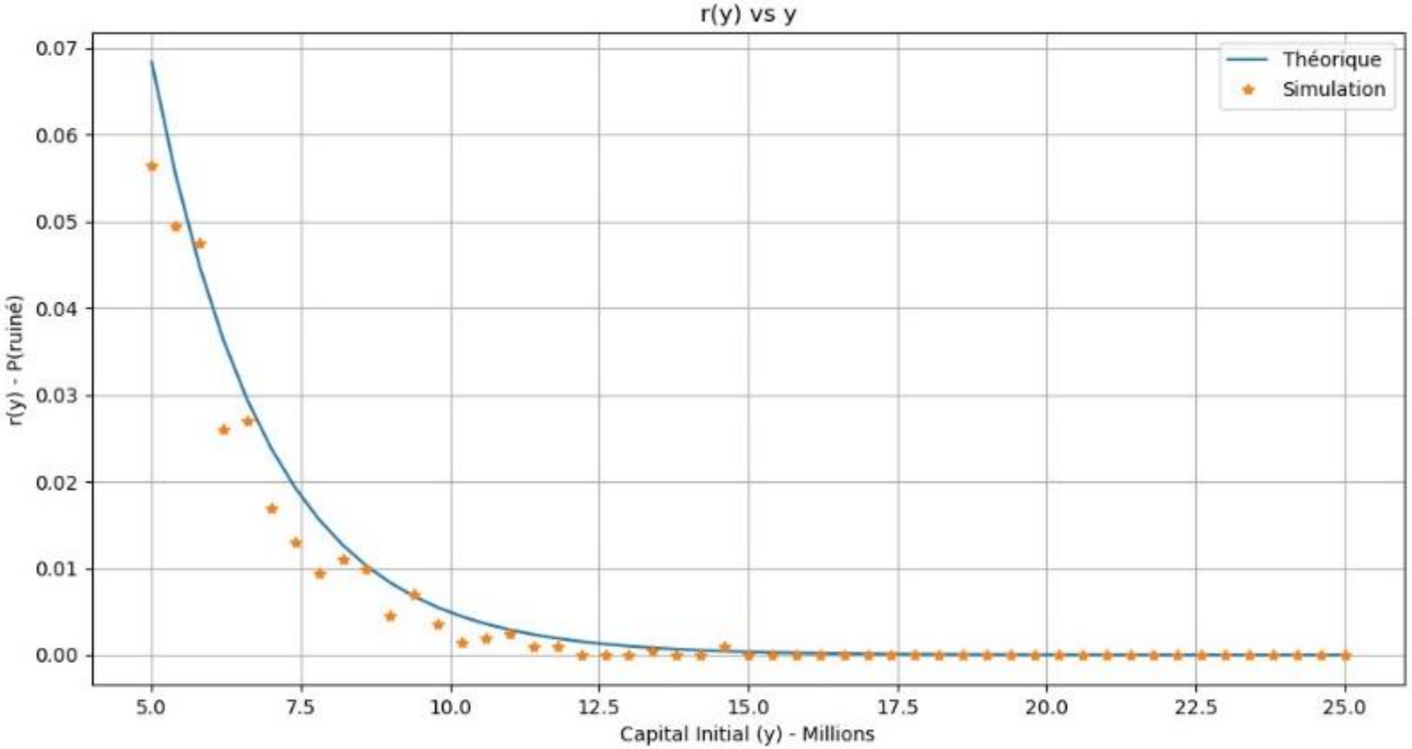
$$\alpha > \mu,\ \ alors\ \forall y \geq 0,\ \ r(y) \leq e^{-Ay}$$

Theorème 1

Lorsque les gains $(X_i)_{i\geq 1}$ sont distribués suivant une *loi exponentielle* $\varepsilon(\gamma)$,

$$r(y) = \frac{e^{-(\gamma-1/\alpha)y}}{\alpha\gamma},$$

$$\forall y \geq 0 \; avec \; \gamma = \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\alpha}$$



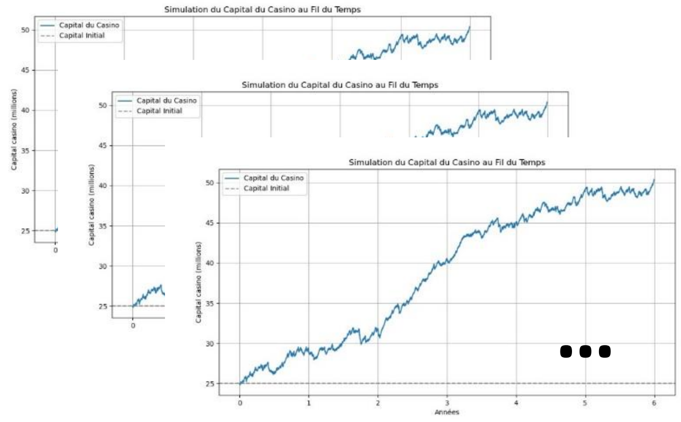
Theorème 1 - Formule

$$\boldsymbol{r(y) = \frac{e^{-(\gamma - 1/\alpha)y}}{\alpha\gamma}}, \quad \boldsymbol{\forall y \geq 0 \; avec \; \gamma = \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\alpha}}$$

$$g(y) \coloneqq 1 - r(y) = P\left(\max_{n \geq 1} S_n \leq y\right) \rightarrow r'(y) = \frac{1}{\alpha}\left(r(y) - e^{-\gamma y} + \gamma e^{-\gamma y} \int_0^y r(v) e^{\gamma v} dv\right)$$

$$h(y) = \int_0^y r(v) e^{\gamma v} dv \rightarrow \begin{cases} h''(y) = \left(\gamma + \frac{1}{\alpha}\right) h'(y) - \frac{\gamma}{\alpha} h(y) - \frac{1}{\alpha} \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = r(0) = \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\mu}{\alpha} \end{cases}$$

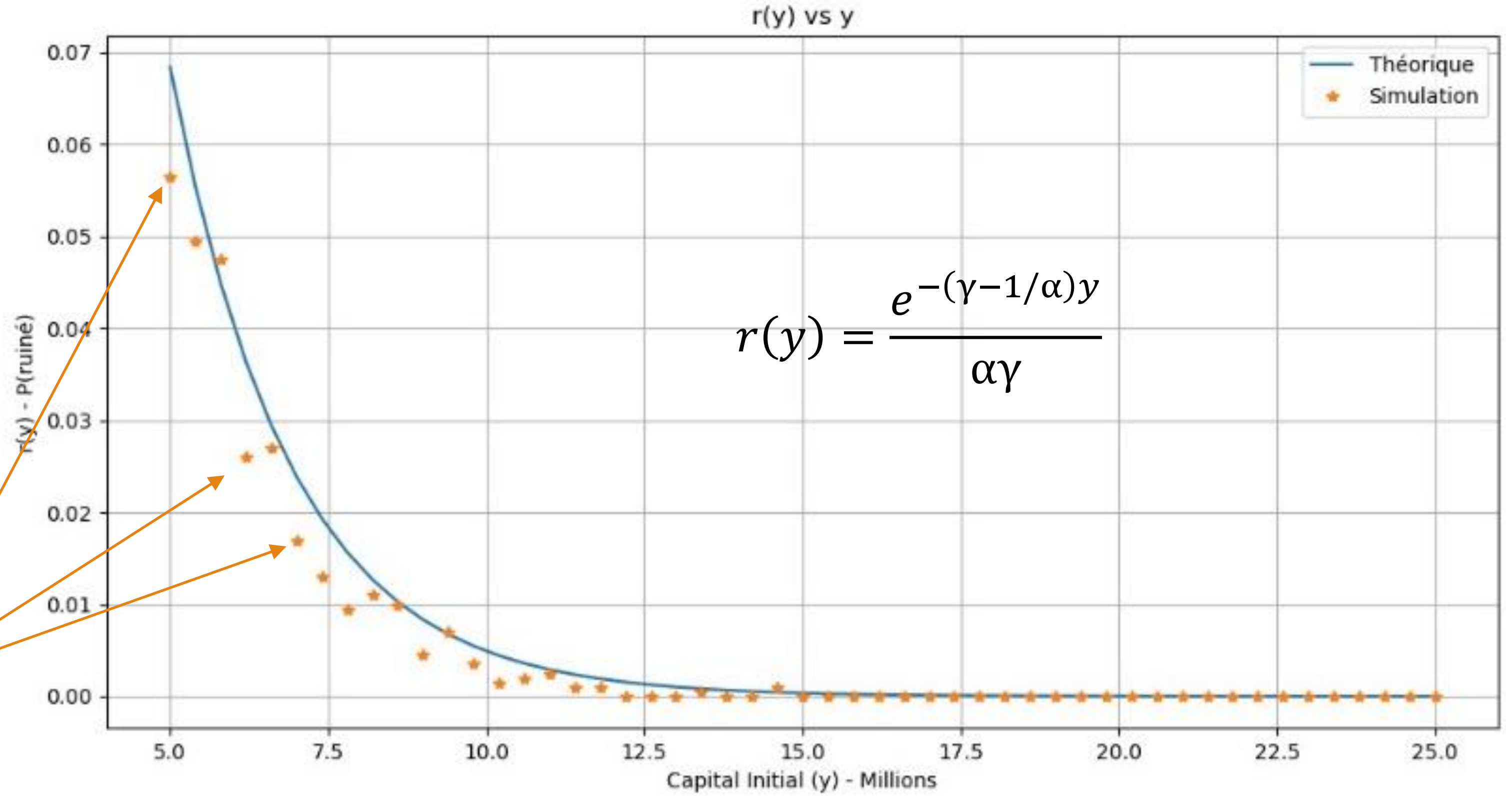
La méthode de Monte Carlo



$$n = 2000$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y_t^k<0\}}\right] = \frac{1}{n}\sum_i^n \mathbf{1}_{\{Y_i^k<0\}}$$

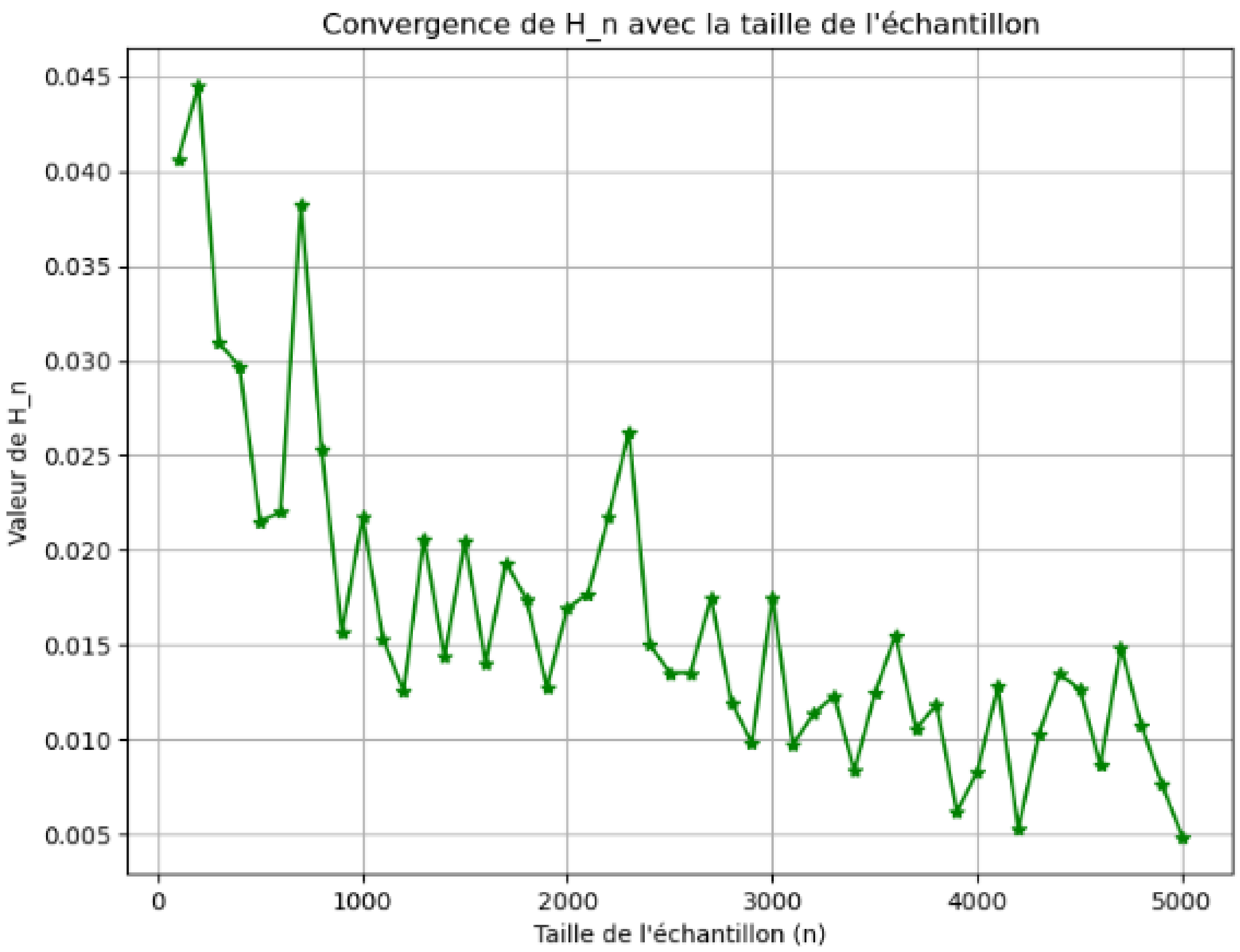
$$k = \{1,2,..,50\}$$



$$r(y) = \frac{e^{-(\gamma-1/\alpha)y}}{\alpha\gamma}$$

Pour chaque capital initial

$$Y_0^k = \{Y_0^1, Y_0^2, \dots\} \in [5M, 25M]$$



Statistique H_n

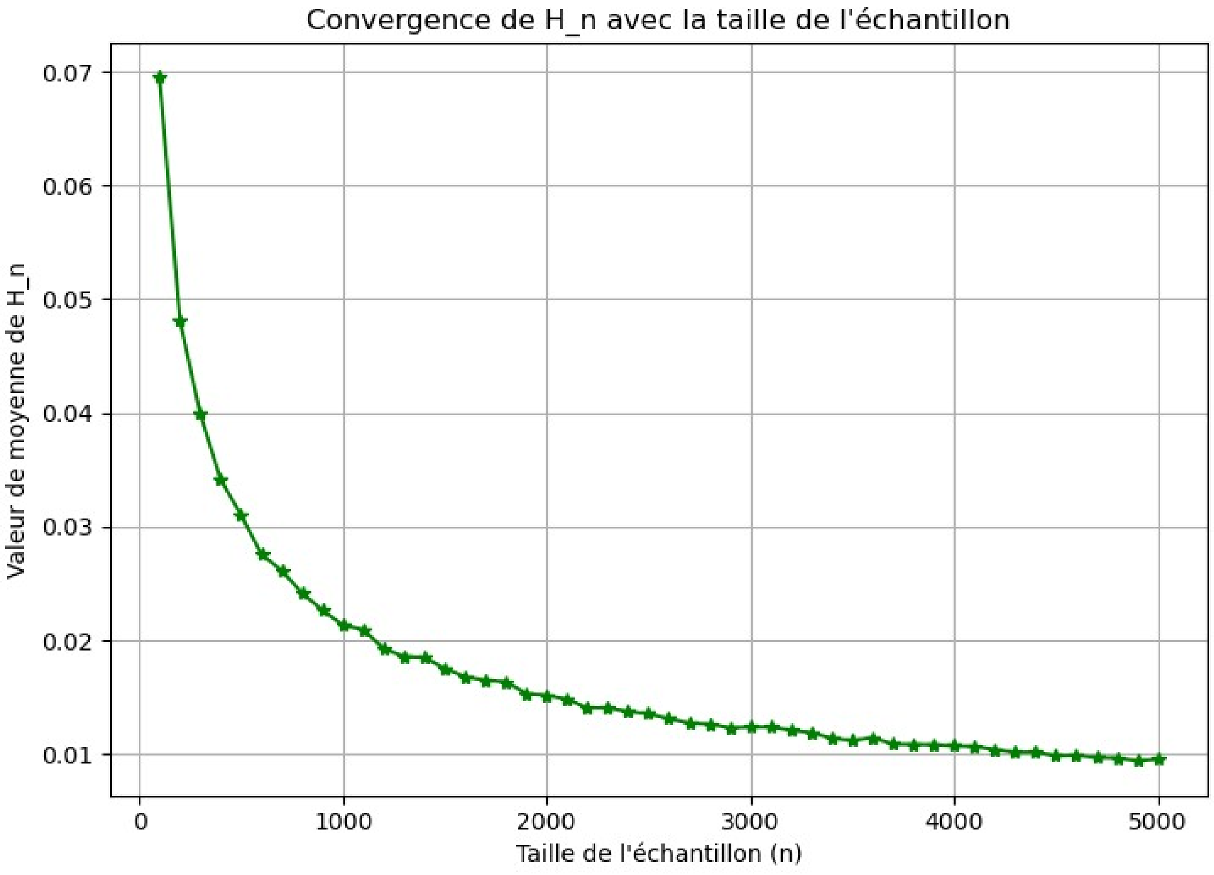
$$H_n = \sup_{x \geq 0} \left| \widehat{F_n}(x) - \left(1 - e^{-x/\overline{X_n}}\right) \right|$$

Fonction répartition

empirique vs **théorique**

$$\widehat{\gamma_n} = \frac{1}{\overline{X_n}} := \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n}$$

Si les $(X_i)_{i \geq 1}$ ont une distribution exponentielle, $H_n \to 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$



Statistique H_n

$$H_n = \sup_{x\geq 0}\left|\widehat{F_n}(x) - \left(1 - e^{-x/\overline{X_n}}\right)\right|$$

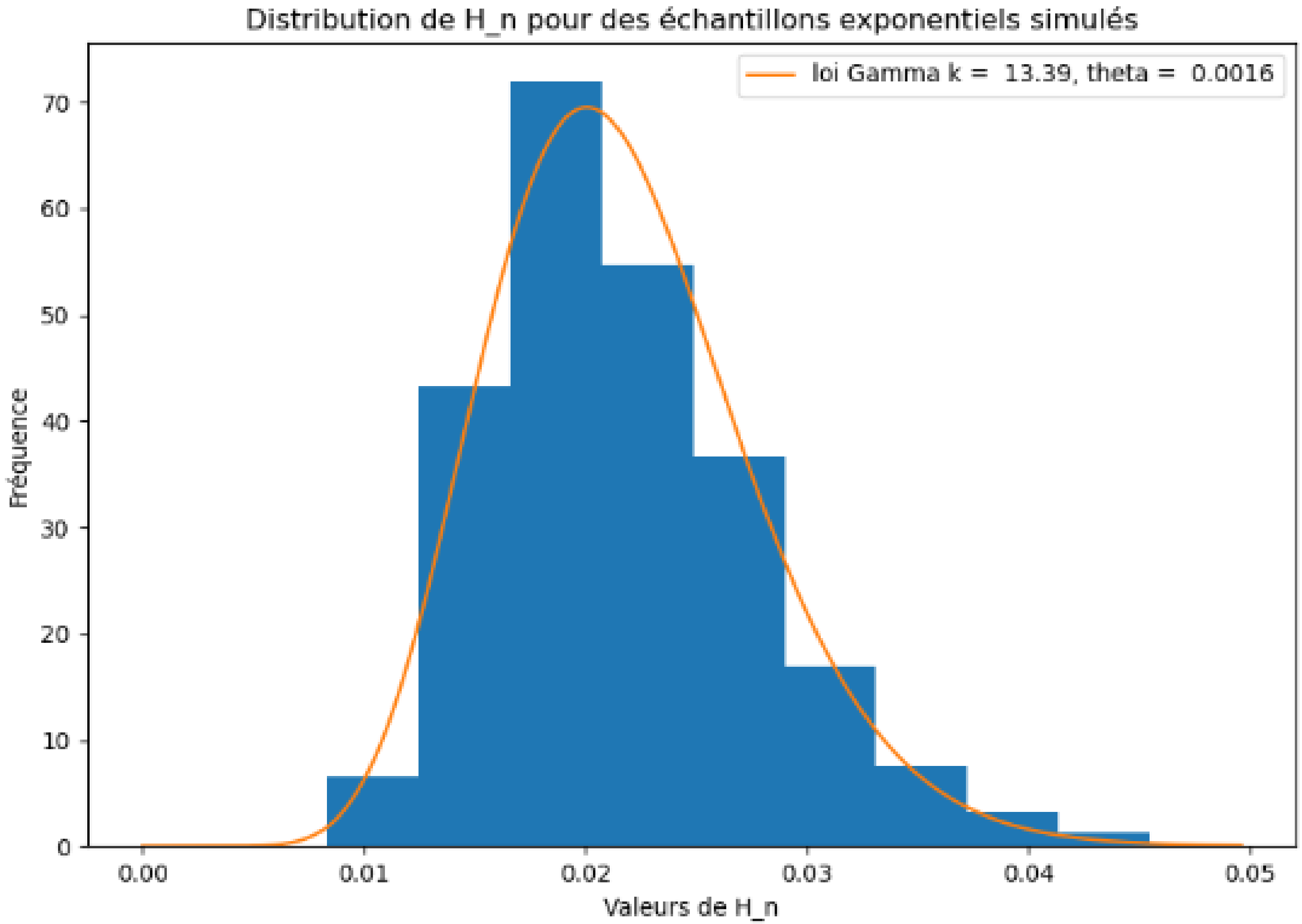
Fonction répartition

empirique vs **théorique**

$$\widehat{\gamma_n} = \frac{1}{\overline{X_n}} := \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n}$$

Si les $(X_i)_{i\geq 1}$ ont une distribution exponentielle, $H_n \to 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$

Avec la valeur moyenne



Statistique H_n

$$H_n = \sup_{x \geq 0} \left| \widehat{F_n}(x) - \left(1 - e^{-x/\overline{X_n}}\right) \right|$$

Confiance de 90%

$C_{P95} = 0.033$

pour zone de rejet $\{H_n > C\}$

On a tracé une distribution gamma en haut

modèle statistique $\theta = \begin{cases} k = 13.39 \\ \theta' = 0.016 \end{cases}$

$C_\gamma = 0{,}032$

Conclusion

En résumé, l'étude approfondie du modèle de processus aléatoire appliqué au capital d'un casino met en évidence la robustesse du casino face aux aléas du marché grâce à des stratégies de gestion des risques efficaces. La non-observation de ruines dans les casinos réels est attribuée à leur avantage statistique, à une gestion proactive des risques, et à la diversité des jeux et des joueurs. Cette conclusion souligne l'importance de la prudence financière. En somme, l'étude suscite la curiosité sur la gestion financière dans un environnement aléatoire, soulignant la nécessité d'une approche nuancée dans l'analyse des modèles financiers.

Merci de votre attention

Paramètres particuliers du modèle

```
#capital entre 5 - 25 millions

Y0 = np.linspace(5, 25, 51) * 1e6

# le casino gagne 0.1 million per jour
(100k/jour)

alpha = 0.1 * 1e6

mu = alpha * (1 - 0.05)  #alpha (5% >) mu

mu = alpha * (1 + 0.05)  #alpha (5% <) mu

mu = alpha * (1 - 0.00)  #alpha = mu

#temps arbitraire que nous avons choisi
pour visualiser la simulation

annees = 6
```

Pour chaque capital initial

$Y_0^k = \{Y_0^1, Y_0^2, \dots\} \in [5M€, 25M€]$

$\alpha = 100k€ = 0.1M€$

Taux de gain moyen du casino par unité de temps

On définit $\mu : \alpha \rightarrow f(\alpha)$

- Faciliter le travail avec les simulations

- Δ élevé entre α et μ -> graphique trop court