Optimisation d'une distribution de source de chaleur le long d'une barre par la méthode de Nelder-Mead

Raphaël GRANGER et Quiyan YANG et Yannick KOULONI

2024 - 2025

Problématique du projet

L'équation de notre problème est la suivante :

$$\frac{\partial(k(x) \times \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} = S(x) \tag{1}$$

avec k(x) le coefficient de conduction non uniforme, T(x) la température et S(x) le terme source.
On cherche à minimiser la fonction coût définie ci-après :

$$f(S) = \frac{1}{2} \times \| T(x) - T^*(x) \|^2 \tag{2}$$

Problématique du projet

Pour l'implémentation, nous écrivons $f(S)$ sous sa forme discrète :

$$f_d(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h \times (T_i - T^*)^2 \tag{3}$$

La problématique du projet consiste à trouver :
Quelle distribution de source $S(x)$ pour atteindre la température cible $T^*(x)$?

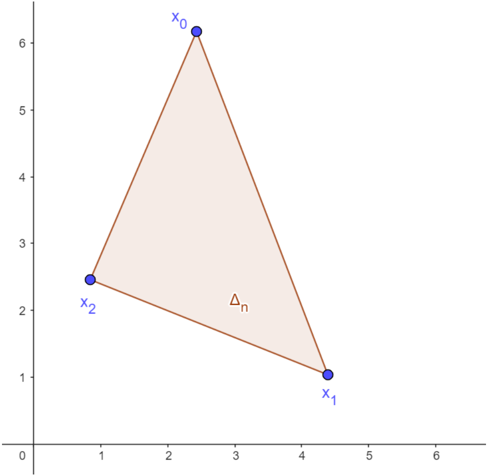
Problématique du projet

$S(x)$ est définie par :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i B_i(x) \tag{4}$$

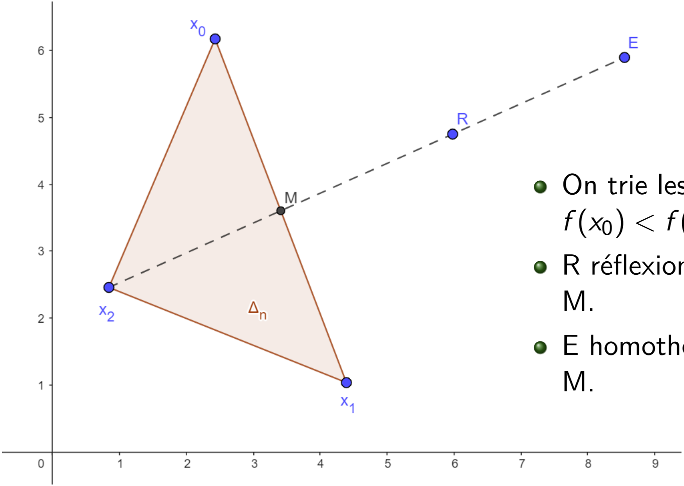
Avec $(S_i)_{i=1,\ldots N}$ les variables d'optimisation et $B_i(x)$ une base quelconque (de polynômes, de sinus, de Bernstein, ...)

Initialisation de la méthode



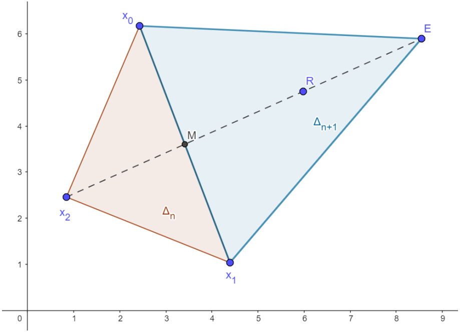
- On se donne un simplexe Δ_0.

Différentes évaluations

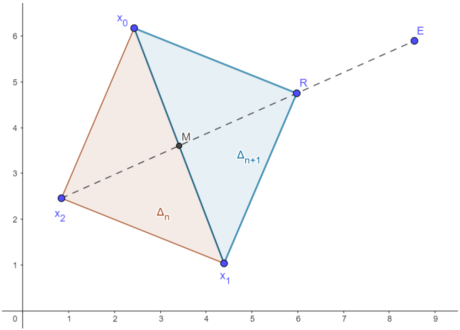


- On trie les sommets tel que : $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$.
- R réflexion de x_2 de centre M.
- E homothétie de R de centre M.

- Si $f(x_2)$ est le plus grand, Δ_{n+1} s'étend.

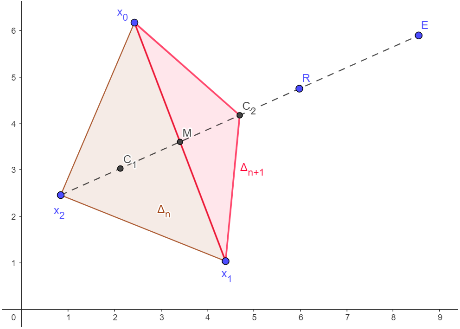


$f(E) < f(R)$

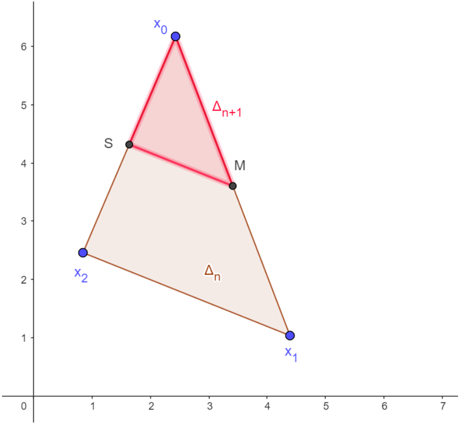


$f(E) > f(R)$

- Si $f(x_2)$ n'est pas le plus grand, Δ_{n+1} retrécie.

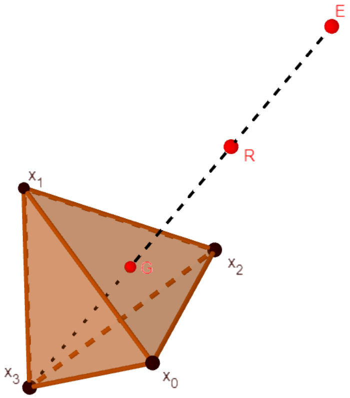


Contraction
$f(C) < f(R)$



Rétrécissement
$f(C) > f(R)$

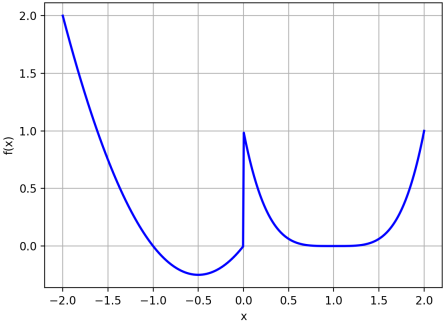
Nelder-Mead en 3D



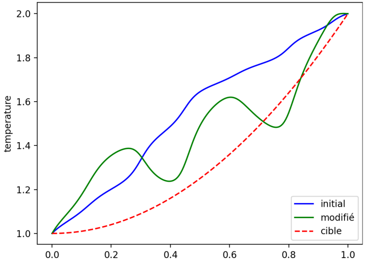
On récupère l'isobarycentre G de la meilleure face. La réflexion et l'homothétie restent les mêmes.

Propriétés de la méthode

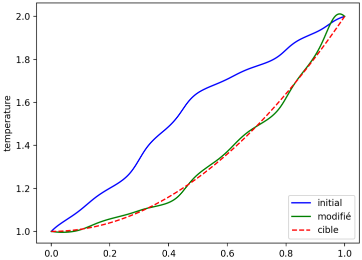
- Variation des paramètres.
- Les simplexes peuvent se coincer.
- Il est possible que le simplexe soit "plat".
  - Si Δ_0 ne l'est pas, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, Δ_n non plus.
- La méthode est faite pour s'adapter aux caractéristiques locales de la fonction.
  - Permet de trouver un minimum local.



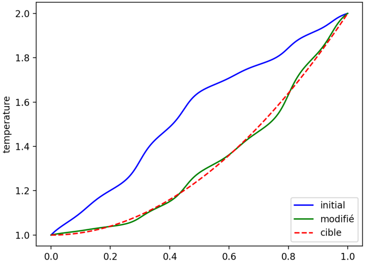
Choix de la base



$(\sin(n\pi t))_{i \leq n}$



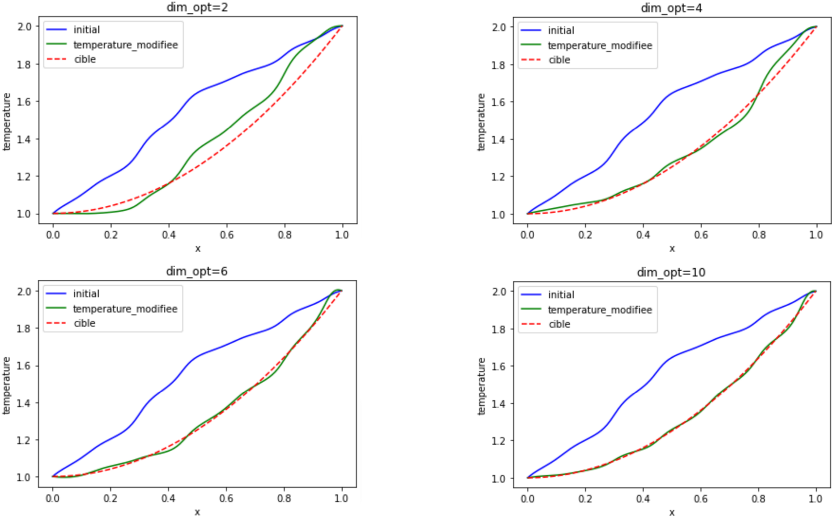
$(B_i^n(t))_{i \leq n}$



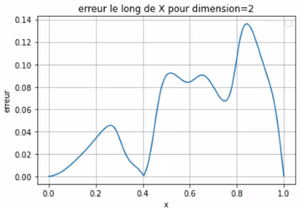
$(t^i)_{i \leq n}$

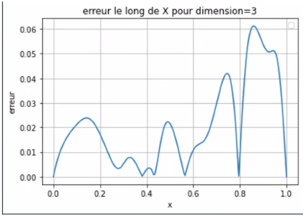
Simulations numériques

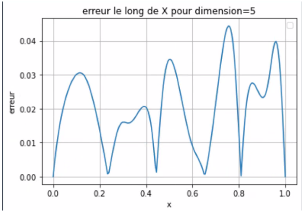
A l'issue de différentes simulations réalisées, nous obtenons les résultats graphiques suivants :

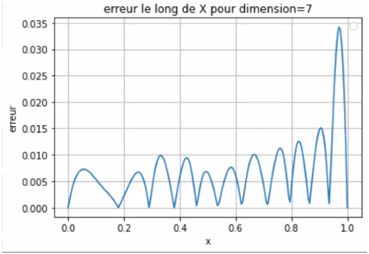


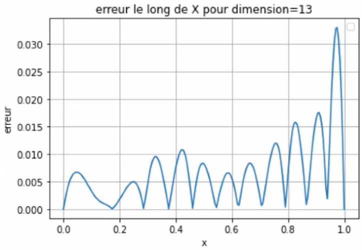
En variant la dimension, nous trouvons les erreurs sur des différentes positions de la barre pour chaque dimension :





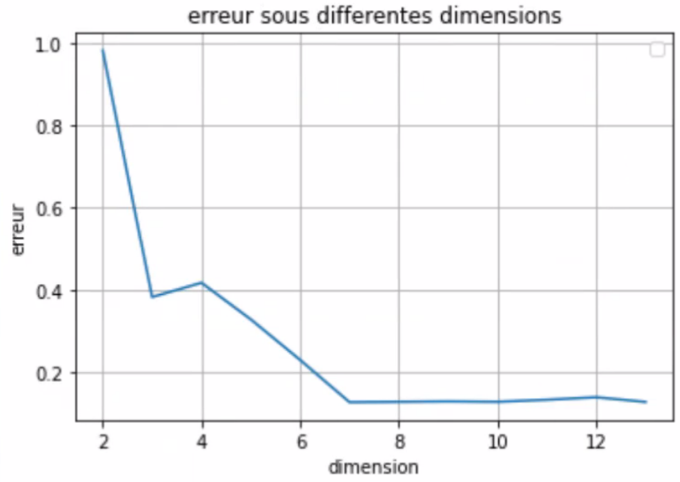






Erreurs et Convergence

Nous obtenons l'évolution de l'erreur en fonction des dimensions :



Conclusion

La méthode de Nelder-Mead présente des avantages et inconvenients :

- Une bonne précision au détriment de la dimension ;
- Une vitesse de convergence faible ;
- La recherche de miniminum local.