

接受拒绝采样的证明



Warren

推荐算法工程师

关注他

54 人赞同了该文章

看了一堆博客没找到有实际意义的证明，就自己证明下。

假设目标分布 $\pi(X)$ 、建议分布 $q(X)$ 、均匀分布 $u \sim U(0, 1)$ ，其中 $Mq(X) \geq \pi(X)$

实际上要证明的东西就是 $p(x|accept) = \pi(x)$ ，也即被接受样本 x 的分布和应该目标分布一样，想到这点后面就水到渠成了：

1. 先贝叶斯成联合概率

$$p(x|accept) = \frac{p(x, accept)}{\int_x p(x, accept) dx}$$

2. 又由于先验 $p(x)$ 即建议分布 $q(x)$ ，且 u 与 x 无关，因此

$$\begin{aligned} p(x, accept) &= p(accept|x)p(x) \\ &= q(x) \int_U p(accept|x, u)p(u|x) du \\ &= q(x) \int_U p(accept|x, u)p(u) du \end{aligned}$$

3. $p(accept|x, u)$ 即给定 u, x 时， $accept$ 的概率

$$p(accept|x, u) = \begin{cases} 1, & u \leq \frac{\pi(x)}{Mq(x)} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

4. 又由于 $Mq(X) \geq \pi(X)$ 得 $0 \leq \frac{\pi(x)}{Mq(x)} \leq 1$ 因此有

$$p(x, accept) = q(x) \int_0^{\frac{\pi(x)}{Mq(x)}} p(u) du = q(x) \frac{\pi(x)}{Mq(x)} = \frac{\pi(x)}{M}$$

5. 带入到 $p(x|accept)$ ，有

$$\begin{aligned} p(x|accept) &= \frac{p(x, accept)}{\int_x p(x, accept) dx} \\ &= \frac{\frac{\pi(x)}{M}}{\int_x \frac{\pi(x)}{M} dx} = \frac{\pi(x)}{\int_x \pi(x) dx} = \pi(x) \end{aligned}$$

6. 得证

编辑于 2020-08-10 09:28

MCMC采样 机器学习 统计



评论千万条，友善第一条

7 条评论

默认 最新



未滿三岁哥斯拉

天呐 真的是我看过这么多篇乱七八糟的最清晰的一篇了 谢谢博主！

2022-12-02

回复 赞



一笑

学到了！多谢！

回复 赞

赞同 54 7 条评论 分享 喜欢 收藏 申请转载