بسم الله الرحمن الرحیم

موضوع پروژه: کنترل سیستم آونگ وارونه یک درجه آزادی برای حالت بدون اصطکاک با استفاده از PID و اتصال نرم افزار آدامز به سیمولینک متلب

درس مربوطه: کنترل اتوماتیک

استاد راهنما: دکتر ساویز

گردآورنده:

یاسین ریاضی

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

نیمسال اول ۹۹

فهرست

پارامترها

جرم ارابه	M
جرم پاندول	m
اصطکاک ارابه	b
فاصله مرکز جرم پاندول	l
گشتاور ماند پاندول	I
نیروی اعمالی به ارابه	F
موقعیت ارابه	x
زاویه پاندول نسبت به قائم	θ

مقدمه

حفظ تعادل یک پاندول معکوس سوار بر روی یک ارابه متحرک که در یک راستا به طور افقی حرکت می‌کند، یک مسئله کلاسیک در سیستم‌های کنترل است. در این پروژه روش‌های مختلفی جهت بازگرداندن پاندول معکوس از حالت نامتعادل به حالت تعادل و حفظ این حالت ارائه می‌شود.

پاندول معکوس یک مسئله استاندارد در سیستم‌های کنترلی بوده و همچنین برای نمایش اصول کنترل خطی، مانند پایدار کردن سیستم‌های ناپایدار مفید می‌باشد. از آنجایی که این سیستم به طور ذاتی غیر خطی است برای نمایش ایده‌هایی در سیستم‌های کنترلی غیر خطی نیز مفید می‌باشد.

در این سیستم یک پاندول معکوس به یک ارابه متصل شده که توسط یک موتور در راستای محور افقی حرکت می‌کند. ما می‌توانیم از طریق موتور سرعت و موقعیت معینی را به ارابه بدهیم و مسیر ریلی، ارابه را به حرکت در یک راستا محدود می‌کند. سنسورهایی جهت اندازه‌گیری زاویه انحراف پاندول و سرعت و موقعیت ارابه در سیستم قرار داده شده اند و اندازه گیری‌های لازم و همچنین سیگنال‌های کنترلی موتور توسط یک برد کنترلی، که در واقع رابط بین کامپیوتر و این سیستم است، انجام شده، همچنین فرمان‌های لازم جهت کنترل و نتایج بدست آمده توسط نرم افزار متلب تحلیل و اجرا می‌شوند.

این سیستم در واقع یک سیستم یک ورودی- دو خروجی می‌باشد چرا که ما باید بتوانیم تنها با یک سیگنال کنترلی که به موتور می‌دهیم، به طور همزمان موقعیت ارابه و زاویه پاندول را تحت کنترل داشته باشیم.

سیستم پاندول معکوس دو نقطه تعادل ذاتی دارد که یکی پایدار و دیگری ناپایدار است. نقطه تعادل پایدار جایی است که پاندول رو به پایین قرار گرفته که بدون نیاز به هیچ کنترل کننده‌ای سیستم به طور طبیعی رو به این حالت می‌رود. نقطه تعادل ناپایدار مربوط به وضعیتی می‌شود که پاندول دقیقا رو به بالا قرار گرفته و در نتیجه نیاز به یک کنترل گر برای حفظ تعادل دارد. هدف اصلی در مسئله پاندول معکوس حفظ تعادل در نقطه ناپایدار است و هدف کنترلی این پروژه این است که وضعیت پاندول را از یک حالت نامتعادل به نقطه تعادل برساند و این وضعیت را حفظ کند.

در ابتدای کار و قبل از اینکه سیستم پاندول معکوس راه اندازی شود، با استفاده از معادلات مکانیکی سیستم و نرم افزار متلب شبیه سازی‌هایی از سیستم انجام داده تا شمای کلی آنچه در پیش رو داریم برایمان آشکار شود.

از این شبیه‌سازی ما میتوانیم پاسخ ذاتی سیستم را مشاهده کرده و با شبیه‌سازی یک کنترل گر و تغییر ضرایب آن نتایج دلخواهی بدست آوریم و چگونگی تغییر رفتار سیستم با تغییر دادن پارامترهایی از آن، از جمله جرم و طول پاندول و ... و تغییر ضرایب کنترل کننده، را پیش بینی کرده و در عمل سریع‌تر به نتایج دلخواه برسیم.

در این بخش ابتدا با استفاده از قوانین مکانیکی تابع تبدیلی برای سیستم بدست آورده و سیستم را با استفاده از آن مدل می‌کنیم. سپس کنترل کننده‌های مختلفی را به آن اعمال کرده و نتایج را شبیه‌سازی می‌کنیم.

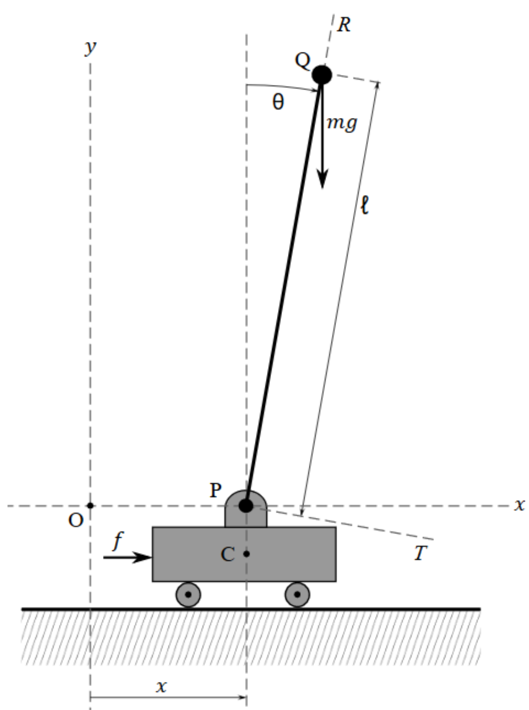
ابتدا از کنترل کننده PID جهت حفظ تعادل استفاده شده است که با استفاده از آن توانستیم هر دو خروجی سیستم یعنی زاویه و موقعیت پاندول را انحراف های زاویه ای کم کنترل کنیم.

۱ مدل‌سازی سیستم پاندول معکوس

سیستم پاندول معکوس تعریف شده در اینجا، در شکل۱ نمایش داده شده است ؛که از یک ارابه، یک پاندول، و یک مسیر ریلی جهت محدود کردن حرکت ارابه به یک راستا و همچنین تعیین موقعیت آن، تشکیل شده است. پاندول از یک انتها به مرکز سطح فوقانی ارابه متصل شده و از انتهای دیگر آزاد می‌باشد، در نتیجه می‌تواند به طور آزادانه در صفحه‌ای شامل مسیر ریلی حرکت کند. ارابه، با توجه به اینکه محدود به حرکت بر روی مسیر ریلی است، توسط یک موتور حرکت می‌کند در حالی که موقعیت ارابه از وسط مسیر، و زاویه انحراف پاندول از نقطه تعادل، توسط سنسورهایی اندازه‌گیری می‌شوند. در به دست آوردن معادلات سیستم و همچنین شبیه سازی، از اثر اصطکاک جهت ساده‌تر شدن معادلات صرف نظر شده ولی در عمل این اثر در نظر گرفته شده است.

این مدل به عنوان نمایانگر یک سیستم ناپایدار در نظر گرفته می شود زیرا برای متعادل نگه داشتن آونگ به یک نیروی کنترل خارجی نیاز است .در مقابل آونگ آویزان رو به پایین که در آن نیروی جاذبه به تنهایی منجر به نوسان پایدار در مورد عمودی رو به پایین می شود .

ما یک آونگ ایده آل فرض خواهیم کرد ، که در آن تمام جرم آونگ در یک نقطه Q در انتهای یک میله سفت و سخت بدون جرم قرار دارد .



شکل ۱-۱ : نمودار جسم آزاد پاندول معکوس

سیستم پاندول معکوس زیر را در نظر گرفته که با استفاده از یک نیروی ضربه‌ای F تحریک می‌شود. معادلات دینامیکی آن را بدست آورده و حول نقطه تعادل خطی می‌کنیم. (فرض بر اینست که پاندول فقط در حدود چند درجه از نقطه تعادل منحرف می‌شود).

۱/۱ معادلات حرکت

۱/۱/۱ شتاب نقطه Q نسبت به نقطه P

موقعیت Q نسبت به P در قاب مختصات XY و برای یک زاویه آونگ معینθ ، از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boldsymbol{x_{q|p} = l \sin \theta} \quad \textbf{(۱)}$$

$$\boldsymbol{y_{q|p} = l \cos \theta} \quad \textbf{(۲)}$$

با مشتق گرفتن از (۱) و (۲) با توجه به زمان ، سرعت Q را نسبت به P ، برای یک زاویه آونگ معین می دهدθ و سرعت زاویه ای $\dot{\theta}$ سرعت

سرعت محور X

$$\frac{d(x_{q|p})}{dt} = \frac{d(l\ sin\ \theta)}{dt} \xrightarrow{Chain\ rule} \frac{d(l\ sin\ \theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{Newton's\ notation}$$

$$\dot{x}_{q|p} = l(\ cos\ \theta)(\dot{\theta})$$

$$\boldsymbol{\dot{x}_{q|p} = l\dot{\theta} \cos \theta} \quad \textbf{(۳)}$$

سرعت محور Y

$$\frac{d(y_{q|p})}{dt} = \frac{d(l\ cos\ \theta)}{dt} \xrightarrow{Chain\ rule} \frac{d(l\ cos\ \theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{Newton's\ notation}$$

$$\dot{y}_{q|p} = l(-\ sin\ \theta)(\dot{\theta})$$

$$\boldsymbol{\dot{y}_{q|p} = -l\dot{\theta} \sin \theta} \quad \textbf{(۴)}$$

شتاب محور X

$$\frac{d(\dot{x}_{q|p})}{dt}=\frac{d^{۲}(x_{q|p})}{dt^{۲}}=\frac{d(l\dot{\theta}\cos\theta)}{dt}=l\left[\frac{d(\dot{\theta}\cos\theta)}{dt}\right]\xrightarrow{Product\ rule}$$

$$l\left[\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cos\theta+\dot{\theta}\frac{d(\cos\theta)}{dt}\right]\xrightarrow{Chain\ rule}l\left[\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cos\theta+\dot{\theta}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}_{q|p}=l[\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^{۲}\sin\theta]} \quad (۵)$$

شتاب محور Y

$$\frac{d(\dot{y}_{q|p})}{dt}=\frac{d^{۲}(y_{q|p})}{dt^{۲}}=\frac{d(-l\dot{\theta}\sin\theta)}{dt}-l\left[\frac{d(\dot{\theta}\sin\theta)}{dt}\right]\xrightarrow{Product\ rule}$$

$$-l\left[\frac{d\dot{\theta}}{dt}\sin\theta+\dot{\theta}\frac{d(\sin\theta)}{dt}\right]\xrightarrow{Chain\ rule}-l\left[\frac{d\dot{\theta}}{dt}\sin\theta+\dot{\theta}\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\boldsymbol{\ddot{y}_{q|p}=-l[\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^{۲}\cos\theta]} \quad (۶)$$

معادلات فوق حرکت XY نقطه Q را توصیف می کنند ، با توجه به حرکتی که در سیستم مختصات قطبی از نظر زاویه و فاصله از نقطه محوری بیان شده است. این معادلات در مورد نیروهایی که بر روی سیستم ، عامل حرکت هستند چیزی نمی‌گویند.

معادلات (۵) و (۶) نشان می دهد که دو اثر متمایز وجود دارد که به شتاب Q نسبت به P کمک می کند ، به عنوان دو اصطلاح جداگانه در هر معادله ظاهر می شود. یک اصطلاح وابسته به سرعت چرخشی ($\dot{\theta}$) و یک اصطلاح وابسته به شتاب چرخشی است$\ddot{\theta}$)

اصطلاحات وابسته به سرعت شتاب گریز از مرکز را که روی Q کار می کند ، Qرا بطور مداوم مستقیماً به سمت مرکز چرخش (نقطهP) می کشانند و بنابراین حرکت دایره ای را حفظ می کنند ، توصیف می کنند. با اشاره به اینکه نیروی گریز از مرکز F_c برای یک توده m در شعاع مشخص r و سرعت زاویه ای ω از رابطه زیر بدست می آید:

$$F_c=mr\omega^{۲}$$

۱/۱/۲ شتاب مطلق نقطه Q

شتاب مطلق محور x

$$\ddot{x}_q = \ddot{x}_{q|p} + \ddot{x}$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}_q = l\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right) + \ddot{x}} \quad (۷)$$

شتاب مطلق محور y

$$\ddot{y}_q = \ddot{y}_{q|p}$$

$$\boldsymbol{\ddot{y}_q = -l\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^{۲}\cos\theta\right)} \quad (۸)$$

۱/۱/۳ نیروی اینرسی روی نقطه Q

نیروی اینرسی (محور x)

$$\left(F_q^i\right)_x = -m\ddot{x}_q$$

$$\boldsymbol{\left(F_q^i\right)_x = -m\left[l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^{۲}\sin\theta + \ddot{x}\right]} \quad (۱۰)$$

نیروی اینرسی (محور y)

$$\left(F_q^i\right)_y = -m\ddot{y}_q$$

$$\boldsymbol{\left(F_q^i\right)_y = ml\left[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^{۲}\cos\theta\right]} \quad (۱۱)$$

۱/۱/۴ نیروهای وارد بر گاری

$$f - m_c\ddot{x} + \left(F_q^i\right)_x = ۰ \xrightarrow{yields}$$

$$f - m_c\ddot{x} - m\left[l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^{۲}\sin\theta + \ddot{x}\right] = ۰$$

$$\boldsymbol{m_c\ddot{x} + m\left[l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^{۲}\sin\theta + \ddot{x}\right] = f} \quad (۱۲)$$

۱/۱/۵ نیروهای چرخشی بر روی آونگ

اکنون توجه خود را به نیروهای چرخشی وارد بر آونگ معطوف می کنیم. از نیروی چرخشی به عنوان ممنتوم نیرو یا گشتاور یاد می شود . سه نیرو وجود دارد که منجر به تأثیر گشتاور بر روی آونگ می شود ، این ها عبارتند از:

۱. جاذبه که بر روی جرم نقطه ای آونگ در Q تأثیر می گذارد
۲. نیروی اینرسی حاصل از مقاومت اینرسی جرم نقطه ای آونگ در Q ، یعنی هنگامی که چرخ دستی به سمت چپ یا راست در زیر آونگ حرکت می کند.
۳. یک نیروی اینرسی چرخشی معروف به لحظه اینرسی . سه گشتاور حاصل باید طبق اصل دالامبر در تعادل باشد ، و یک معادله حرکت اضافی برای مدل گاری و پاندول ارائه می دهد.

$$M_q = \left[۱_R(l) \times F_q^i\right]_z \quad (۱۳)$$

$$= \left[(l \sin\theta)\left(ml\left[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^۲\cos\theta\right]\right) - (l\cos\theta)\left(-m\left[l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^۲\sin\theta + \ddot{x}\right]\right)\right]$$

$$= ml\left[(\sin\theta)\left(l\left[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^۲\cos\theta\right]\right) + (\cos\theta)\left(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^۲\sin\theta + \ddot{x}\right)\right]$$

$$= ml\left[l\ddot{\theta}\sin^۲\theta + l\dot{\theta}^۲\sin\theta\cos\theta + l\ddot{\theta}\cos^۲\theta - l\dot{\theta}^۲\sin\theta\cos\theta + \ddot{x}\cos\theta\right]$$

$$= ml\left[l\ddot{\theta}\left(\sin ۲\,\theta + \cos^۲\theta\right) + \ddot{x}\cos\theta\right]$$

$$\boldsymbol{M_q = ml\left(l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta\right)} \quad (۱۴)$$

گشتاور حاصل از کشش رو به پایین گرانش بر جرم آونگ در Q بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{M_g = -mgl\sin\theta} \quad (۱۵)$$

با توجه به اینکه گشتاور حاصل از جاذبه صفر است هنگامی که آونگ به طور کامل عمودی است، و هنگامی که آونگ در °۹۰+ باشد منفی است. به عبارت دیگر، آونگ را با یک گشتاور منفی و در نتیجه در جهت عقربه‌های ساعت تسریع می‌کند.

$$\boldsymbol{M_i = J\ddot{\theta}} \quad (۱۶)$$

با توجه به اینکه علامت M_i مثبت برای $\ddot{\theta}$ مثبت است، نشان‌دهنده یک گشتاور مثبت و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است که آونگ در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

در مجموع سه گشتاور و برابر بودن برابر صفر به عنوان اصل دآلامبر، می‌دهد.

$$\boldsymbol{M_q + M_g + M_i = 0} \quad (۱۷)$$

$$\boldsymbol{ml\left(l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta\right) - mgl\ \ \sin\theta + J\ddot{\theta} = 0} \quad (۱۸)$$

۱/۱/۶ ترکیب معادلات نیروی افقی و چرخشی

معادله (۱۲) نیروهای افقی را که در تعادل بر روی گاری وارد می شوند ، توصیف می کند و معادله (۱۸) گشتاورهای (نیروهای چرخشی) را که در تعادل بر قطب وارد می شوند ، توصیف می کند. این دو معادله را می توان با هم ترکیب و مجدّداً مرتب کرد تا به مجموعه کاملی از معادلات مدل پاندول گاری برسیم.

$$m_c\ddot{x} + m\left[l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{x}\right] = f$$

$$m_c\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + m\ddot{x} = f$$

$$m_c\ddot{x} + m\ddot{x} = f - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \xrightarrow{yields} (m_c + m)\ddot{x} = m_c\ddot{x} + m\ddot{x}$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} = \frac{f - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{m_c + m}} \quad (۱۹)$$

بازنویسی معادله (۱۸) برای به دست آوردن $\ddot{x}$

$$ml\left(l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta\right) - mgl\sin\theta + J\ddot{\theta} = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\ \ \sin\theta + J\ddot{\theta} = 0$$

$$ml\ddot{x}\cos\theta = mgl\ \ \sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - J\ddot{\theta}$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} = \frac{mgl\sin\theta - \left(ml^2 + J\right)\ddot{\theta}}{ml\cos\theta}} \quad (۲۰)$$

بازنویسی سمت راست معادله های (۱۹) و (۲۰) برای به دست آوردن $\ddot{\theta}$

$$\frac{f - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{m_c + m}$$

$$= \frac{mgl \sin\theta - (ml^۲ + J)\ddot{\theta}}{ml \cos\theta}$$

$$M = m_c + m$$

$$= (ml\ \cos\theta)(f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta) - (ml \cos\theta)^۲\ddot{\theta} = Mmgl\ \sin\theta - M(ml^۲ + J)\ddot{\theta}$$

$$= M(ml^۲ + J)\ddot{\theta} - (ml \cos\theta)^۲\ddot{\theta} = Mmgl\ \sin\theta - (ml \cos\theta)(f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta)$$

$$= [M(ml^۲ + J) - (ml \cos\theta)^۲]\ddot{\theta} = M(ml^۲ + J)\ddot{\theta} - (ml \cos\theta)^۲\ddot{\theta}$$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} = \frac{Mmgl \sin\theta - (ml \cos\theta)(f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta)}{M(ml^۲ + J) - (ml \cos\theta)^۲}} \quad (۲۱)$$

با توجه به معادله (۲۱)می توان شاب زاویه‌ای پاندول را محاسبه کرد سپس به سراغ معادله های (۱۹) یا (۲۰) رفت و شتاب گاری را محاسبه نمود .

معادلات فوق کفایت می‌کنند اما می توان با بازنویسی معادلات (۱۲) و (۱۸) ابتدا شتاب گاری را محاسبه نمود و سپس شتاب زاویه‌ای را پیدا کرد .

با بازنویسی معادله (۱۲) برای پیدا کردن شتاب زاویه‌ای

$$m_c\ddot{x} + m[l\ddot{\theta} \cos\theta - l\dot{\theta}^۲ \sin\theta + \ddot{x}] = f$$

$$m_c\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta + m\ddot{x} = f$$

$$ml\ddot{\theta} \cos\theta = f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta - m\ddot{x} - m_c\ddot{x}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta - m\ddot{x} - m_c\ddot{x}}{ml \cos\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{f + ml\dot{\theta}^۲ \sin\theta - M\ddot{x}}{ml \cos\theta} \quad (۲۲)$$

با بازنویسی معادله (۱۸) برای پیدا کردن شتاب زاویه‌ای

$$ml\,(l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta) - mgl\ \sin\theta + J\ddot{\theta} = ۰$$

$$ml^۲\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos\theta - mgl \sin\theta + J\ddot{\theta} = ۰$$

$$ml^{۲}\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} = mgl\ \sin\theta - ml\ddot{x}\cos\theta$$

$$\left(ml^{۲} + J\right)\ddot{\theta} = ml^{۲}\ddot{\theta} + J\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml(g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta)}{ml^{۲} + J} \quad (۲۳)$$

با برابر قرار دادن معادلات (۲۲) و (۲۳) فاکتور گیری برای شتاب

$$\frac{f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta - M\ddot{x}}{ml\cos\theta} = \frac{ml(g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta)}{ml^{۲} + J}$$

$$\left(ml^{۲} + J\right)\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta - M\ddot{x}\right) = (ml\cos\theta)(mgl\ \sin\theta - ml\ddot{x}\cos\theta)$$

$$\left(ml^{۲} + J\right)\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right) - \left(ml^{۲} + J\right)M\ddot{x}$$

$$= (ml)^{۲} g\sin\theta\cos\theta - (ml\cos\theta)^{۲}\ddot{x}$$

$$(ml\ \cos\theta)^{۲}\ddot{x} - \left(ml^{۲} + J\right)M\ddot{x}$$
$$= (ml)^{۲} g\sin\theta\cos\theta - \left(ml^{۲} + J\right)\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right)$$

$$\left[(ml\cos\theta)^{۲} - \left(ml^{۲} + J\right)M\right]\ddot{x} =$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} = \frac{(ml)^{۲} g\sin\theta\cos\theta - \left(ml^{۲} + J\right)\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right)}{(ml\cos\theta)^{۲} - \left(ml^{۲} + J\right)M}} \quad (۲۴)$$

۱/۱/۷ جمع بندی

با در نظر گرفتن $J = ml^{۲}$ و انتقال آن به مفصل P مقدار J به صورت $J = \frac{ml^{۲}}{۳}$ محاسبه می‌شود. اما ابتدا مقدار ممان اینرسی را

$$\boldsymbol{J = kml^{۲}} \quad (۲۵)$$

در نظر می‌گیریم. که ضریب k مقداری ثابت است که بعدا جایگذاری می شود .

با جایگذاری معادله (۲۵) در (۲۱) ، (۲۳) ، (۲۴) و (۱۹) معادلات به شکل های زیر در خواهند آمد.

$$\ddot{x} = \frac{f - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta}{m_c + m} \quad (۱۹)$$

(۲۵) در(۲۱)

$$\ddot{\theta} = \frac{Mg\sin\theta - \cos\theta\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right)}{(۱+k)Ml - ml\cos^{۲}\theta} \quad (۲۶)$$

(۲۵) در(۲۳)

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta}{(۱+k)l} \quad (۲۷)$$

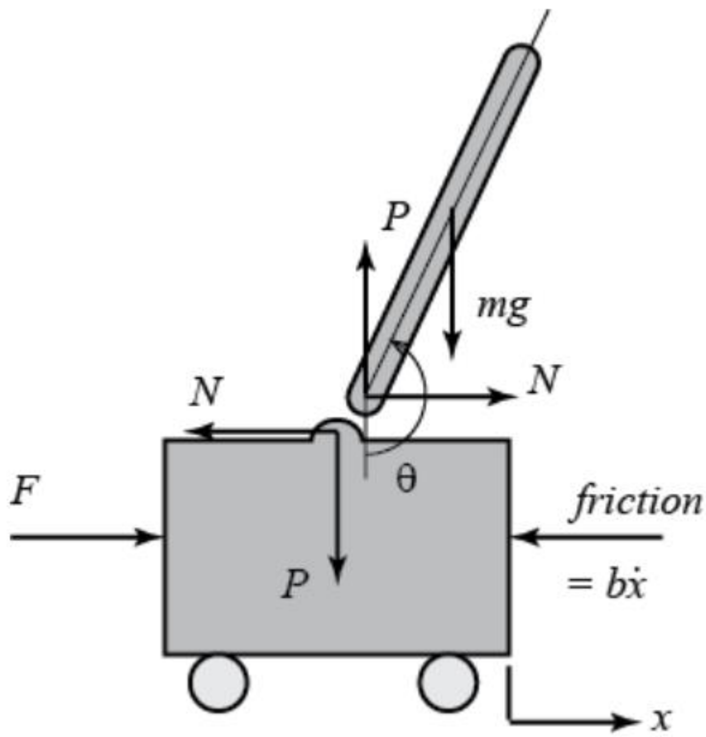
(۲۵) در(۲۴)

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta - (۱+k)\left(f + ml\dot{\theta}^{۲}\sin\theta\right)}{m\cos^{۲}\theta - (۱+k)M} \quad (۲۸)$$

۱. با استفاده از معادله ی (۲۶) میتوان شتاب زاویه‌ای را محاسبه نمود و سپس با جایگذاری آن در معادله ی (۱۹) شتاب گاری محاسبه می شود .
۲. با استفاده از معادله ی (۲۸) میتوان شتاب گاری را محاسبه نمود و سپس با جایگذاری آن در معادله ی (۲۷) شتاب زاویه‌ای محاسبه می شود .
۳. معادلات (۲۶) و (۲۸) مستقیما شتاب های زاویه ای و گاری را محاسبه می‌کنند.

۱/۲ محاسبه تابع تبدیل

در این قسمت معادلات برای حالت با اصطکاک محاسبه می‌شوند.



شکل ۲-۱

برای به دست آوردن تابع تبدیل ابتدا می‌بایست معادلات را خطی سازی کنیم .

$$\begin{cases} (I+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\theta=ml\ddot{x} \\ (M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-ml\ddot{\theta}=u \end{cases} \xrightarrow{Laplace}$$

$$\begin{cases} (I+ml^2)\Theta(s)s^2-mgl\Theta(s)=mlX(x)s^2 \\ (M+m)X(x)s^2+bX(x)s-ml\Theta(s)s^2=U(s) \end{cases}$$

$U(s)$ به عنوان ورودی تابع تبدیل در نظر گرفته شده است و باید $X(s)$ حذف شود .

$$X(s)=\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Theta(s)$$

با جایگذاری معادله بالا در دومین معادله نتیجه زیر حاصل می‌شود .

$$(M+m)\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Theta(s)s^2+b\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Theta(s)s-ml\Theta(s)s^2=U(s)$$

و با بازارایی

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s}{s^3+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^2-\frac{(M+m)mgl}{q}s-\frac{bmgl}{q}}\left[\frac{rad}{N}\right]$$

$$q=[(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2]$$

و در نهایت توابع تبدیل

$$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\frac{(I+ml^2)s^2-gml}{q}}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s}\left[\frac{m}{N}\right]$$

۱/۳ کدهای متلب

```
M = ۰.۵;
m = ۰.۵;
b = ۰;
I = ۰.۰۰۶;
g = -۹.۸۰۶۶۵;
l = ۰.۳;
q = (M+m)*(I+m*l^۲)-(m*l)^۲;
s = tf('s');

P_pend = (((I+m*l^۲)/q)*s^۲ - (m*g*l/q))/(s^۴ + (b*(I + m*l^۲))*s^۳/q - ((M +
m)*m*g*l)*s^۲/q - b*m*g*l*s/q);

P_cart = (m*l*s/q)/(s^۳ + (b*(I + m*l^۲))*s^۲/q - ((M + m)*m*g*l)*s/q -
b*m*g*l/q);

sys_tf = [P_pend ; P_cart];

inputs = {'u'};
outputs = {'x'; 'phi'};

set(sys_tf,'InputName',inputs)
set(sys_tf,'OutputName',outputs)

sys_tf
```

۲ تحلیل نتایج

```
M = ۰.۵;
m = ۰.۵;
b = ۰;
I = ۰.۰۰۶;
g = -۹.۸۰۶۶۵;
l = ۰.۶;
q = (M+m)*(I+m*l^۲)-(m*l)^۲;
s = tf('s');
P_pend = (m*l*s/q)/(s^۳ + (b*(I + m*l^۲))*s^۲/q - ((M + m)*m*g*l)*s/q - b*m*g*l/q)
```

۲,۱ تابع تبدیل

$$P_{pend} = \frac{۰.۰۰۴۲۷۵}{۰.۰۰۰۸۱۲۲\ s^{۲} + ۰.۰۴۱۹۲}$$

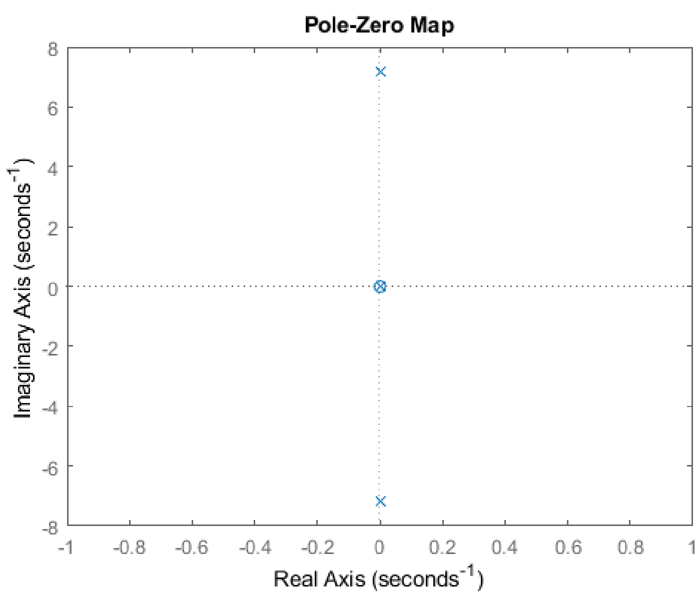
Continuous-time transfer function.

$$P_{cart} = \frac{۰.۰۵۱\ s^{۲} + ۱.۴۷۱}{۰.۰۲۸۵\ s^{۴} + ۱.۴۷۱\ s^{۲}}$$

Continuous-time transfer function.

۲,۲ محل صفر و قطب ها

```
pzplot    (P_pend)
```

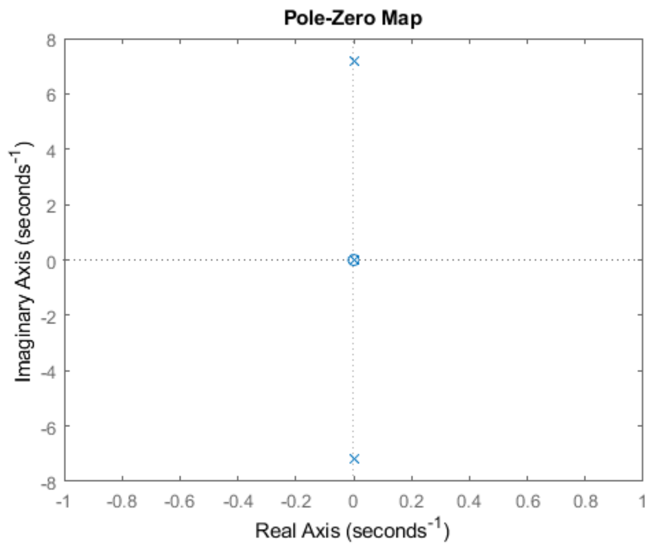


شکل ۱-۲ : صفر و قطب ها

سیستم حلقه باز یک قطب در سمت راست محور حقیقی دارد که بر اساس مطالب درس کنترل باعث ناپایداری می‌شود.

۲/۳ پاسخ به ورودی ضربه

```
impulse   (P_pend)
```



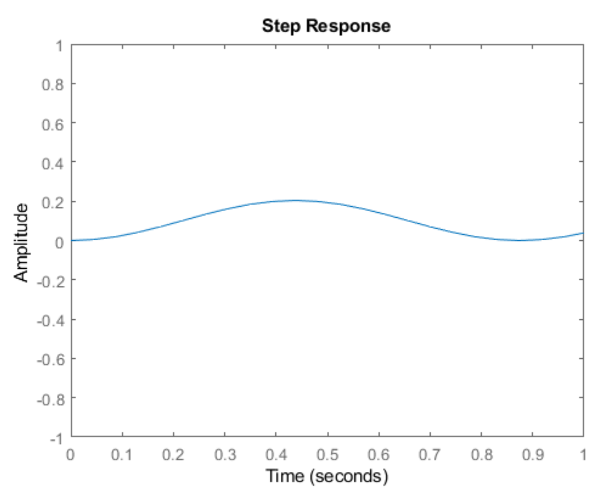
شکل ۲-۲: پاسخ ضربه

همانطور که از قسمت ۲.۳ انتظار داشتیم عامل ناپایداری در پاسخ ضربه خودش را نشان داد.

به علت در نظر نگرفتن عامل میرایی دامنه سیستم به بینهایت میل کرده است .

۲/۴ پاسخ به ورودی پله

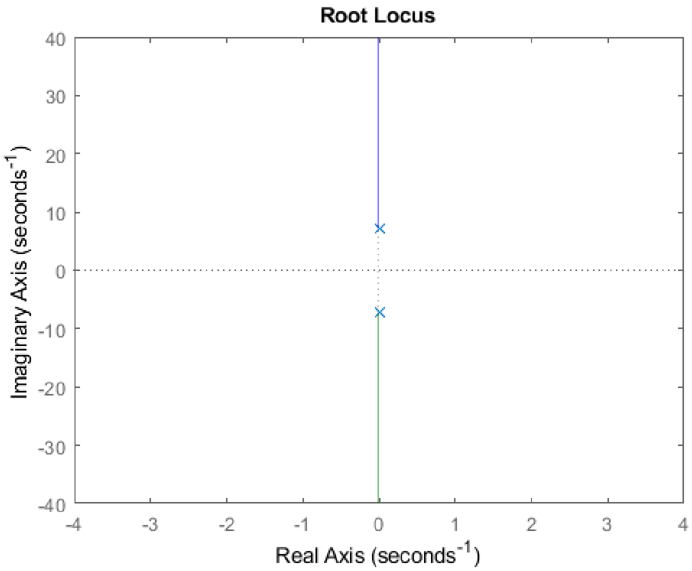
```
step     (P_pend)
```



شکل ۲-3

۲,۵ مکان هندسی ریشه ها

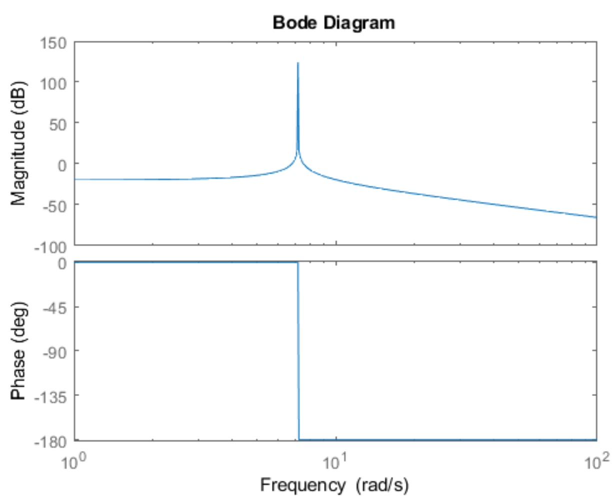
rlocus (P_pend)



شکل ۲-4

۲,٦ نمودار بوده

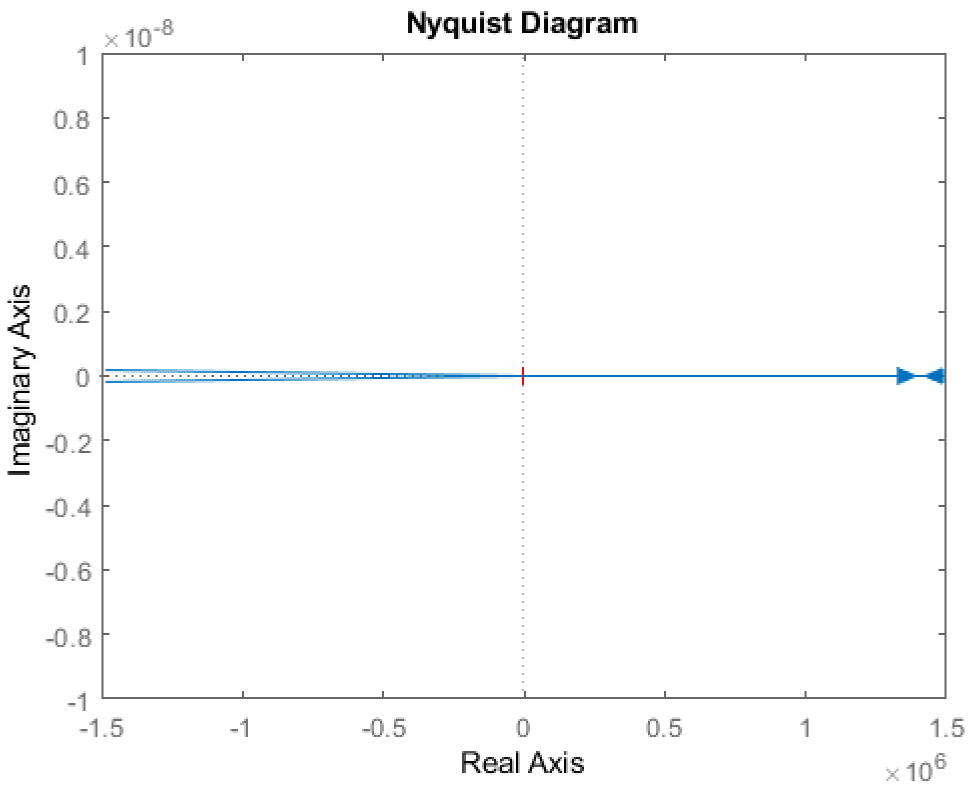
bode (P_pend)



شکل ۲-۵

۲,۷ نمودار نایکوییست

nyquist (P_pend)



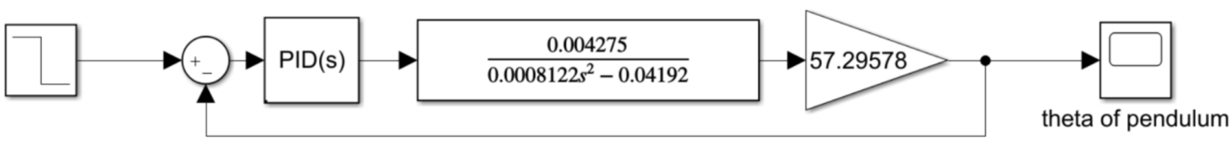
شکل ۶-۲

۳ مدل سازی در سیمولینک

تابع تبدیل برای مکان و زاویه به ترتیب

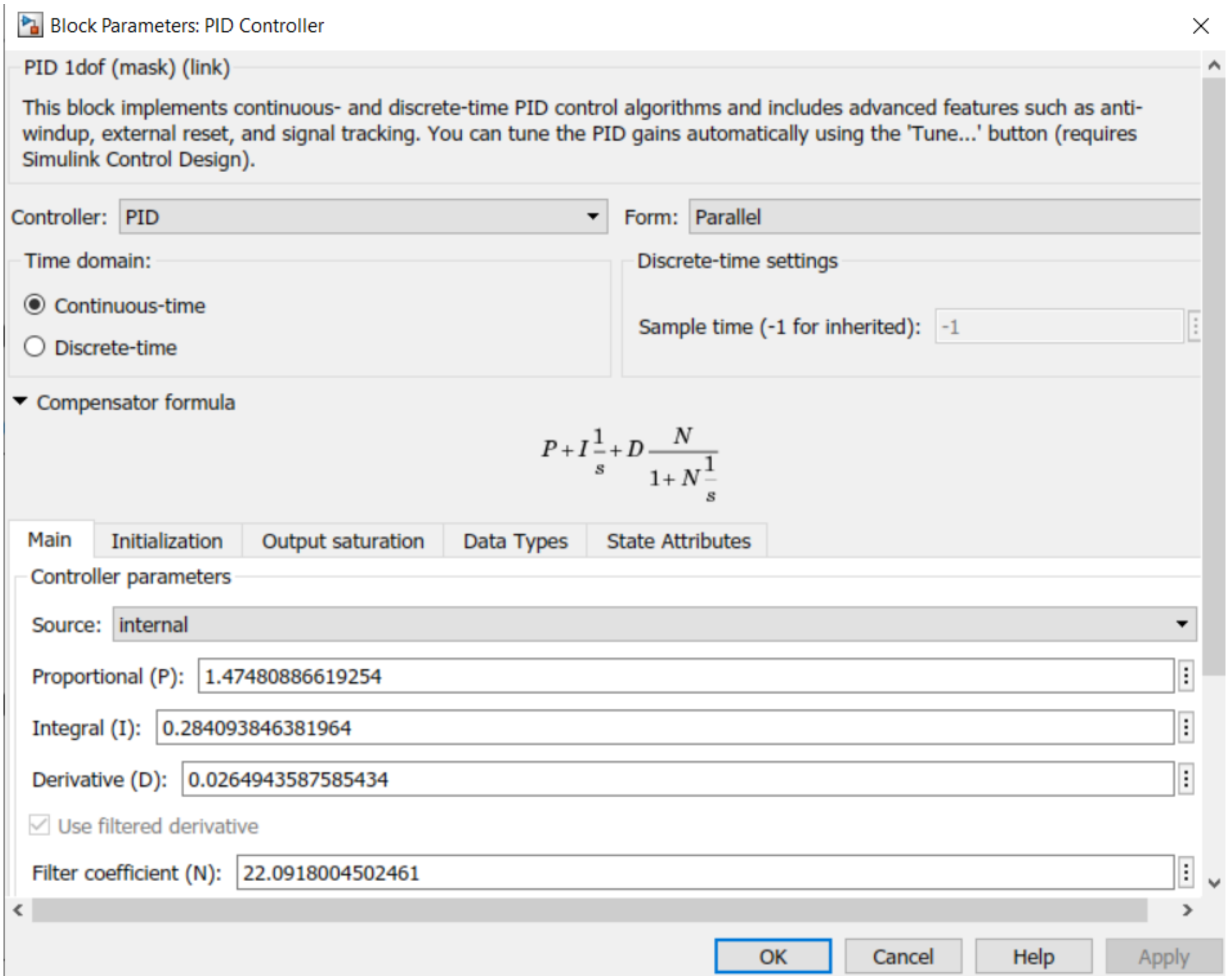
$$\begin{cases} P_{\text{cart}} = \dfrac{۰.۰۰۴۲۷۵}{۰.۰۰۰۸۱۲۲\, s^{۲} + ۰.۰۴۱۹۲} \\ P_{\text{pend}} = \dfrac{۰.۰۵۱\, s^{۲} + ۱.۴۷۱}{۰.۰۲۸۵\, s^{۴} + ۱.۴۷۱\, s^{۲}} \end{cases}$$

و پس از ایجاد مدل در سیمولینک و استفاده از کنترلر PID



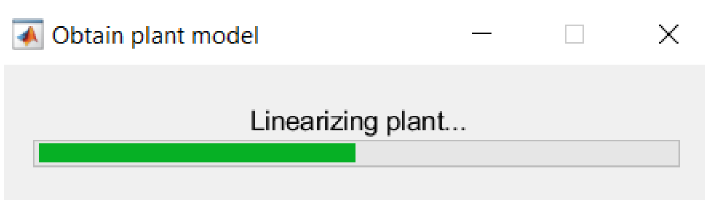
شکل ۱-۳

برای تنظیم کردن کنترلر می‌توان از خود متلب کمک گرفت ، با دو بار کلیک بر روی کنترل کننده

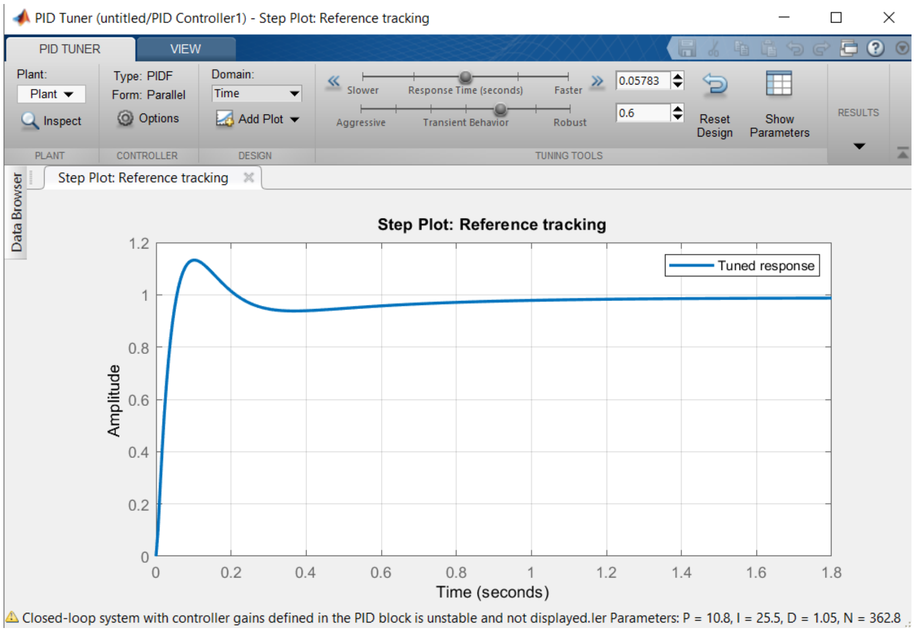


شکل ۲-۳

و کلیک بر دکمه Tune به صفحه زیر هدایت می‌شویم.



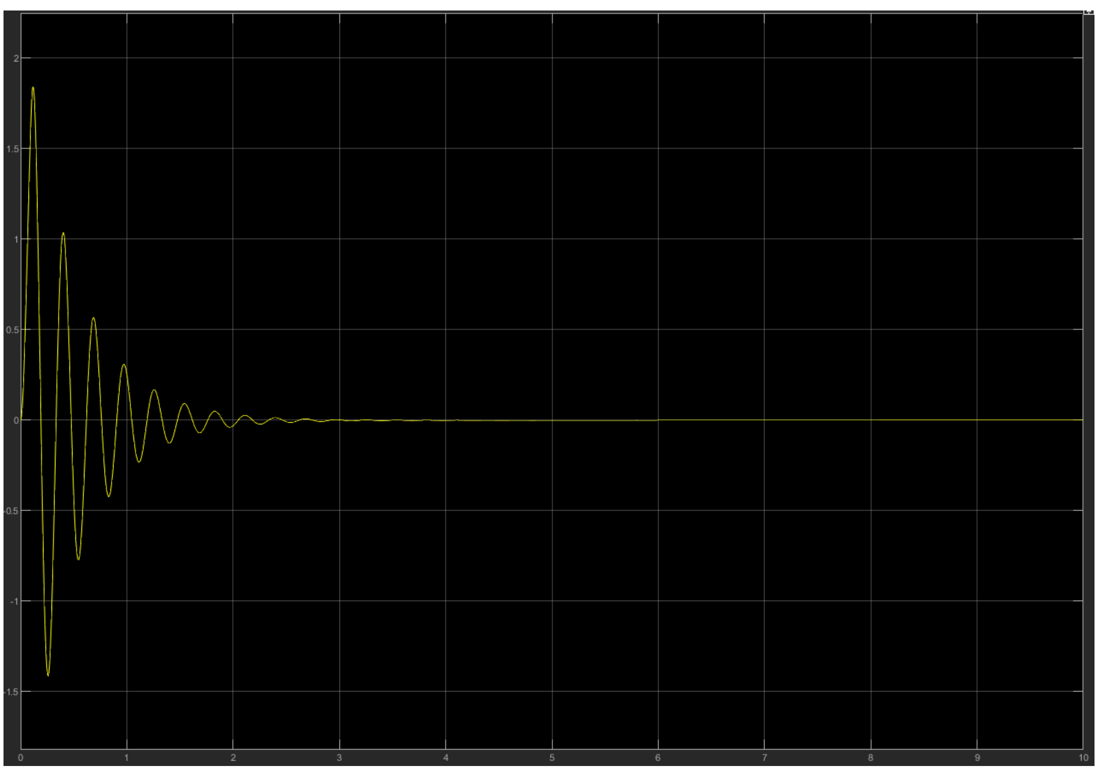
شکل ۳-۳



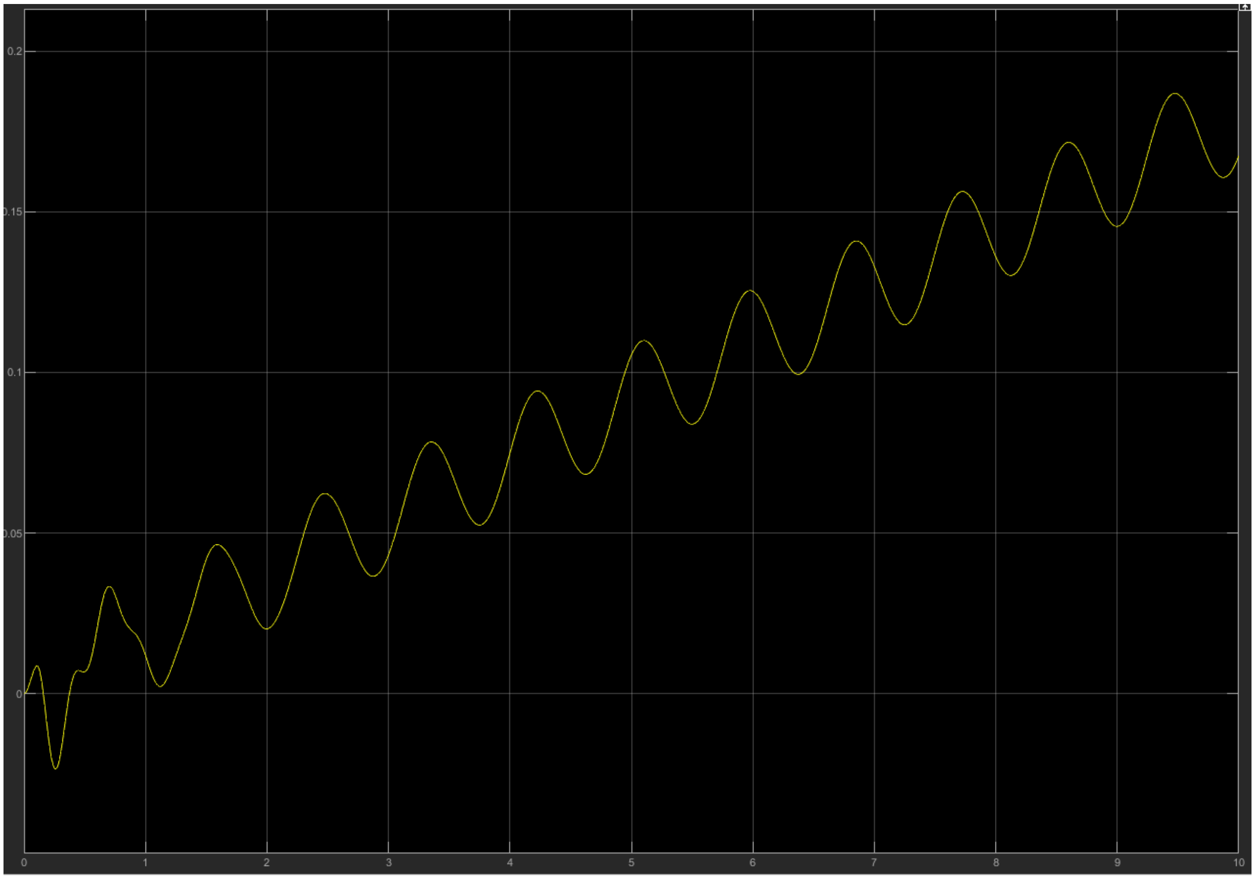
شکل ۳-۴

برای اورشوت کمتر از ۲۰٪ و زمان نشت کمتر ۱ می‌توان کنترل را تنظیم نمود.

و در نهایت خروجی کنترلر



شکل ۳-۵ خروجی برای زاویه

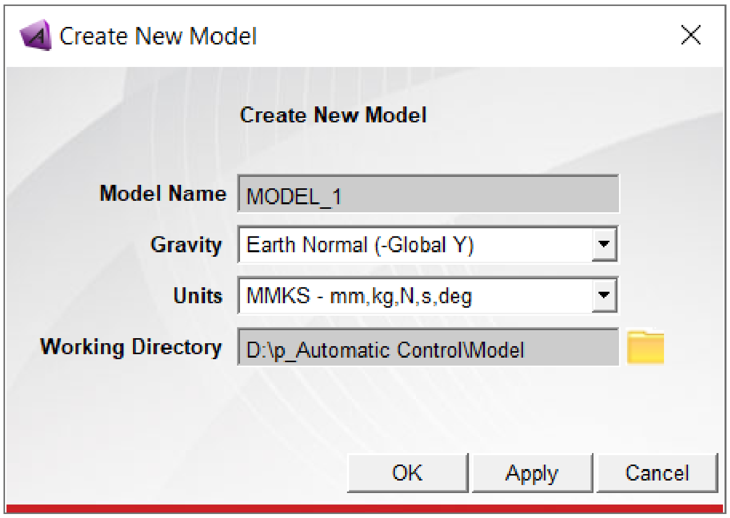


شکل ۶-۳ خروجی مکان

۴ مدل سازی در آدامز

۱. قدم اول

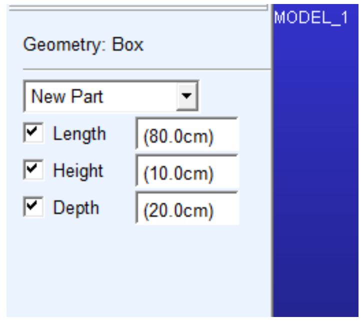
می بایست مدلی را ایجاد کنیم در آدرسی که ویندوز اجازه دسترسی (خوان و نوشتن) به نرم افزار به دهد .



شکل ۴-۱ create new model

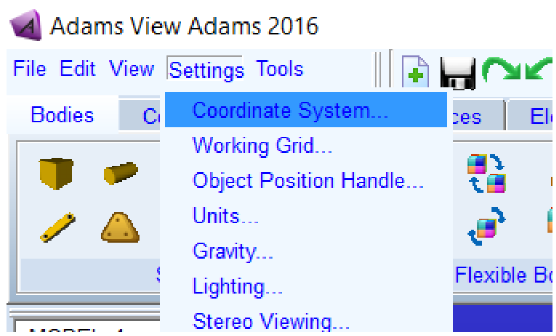
۲. حال می بایست جعبه ای به مختصات زیر در آدامز تعریف کنیم

شکل ۴-۲ Body Tab>Bodies>Box

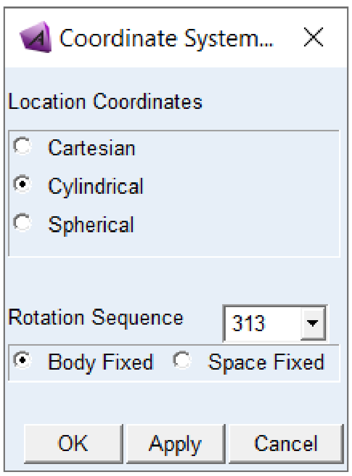


شکل ۴-۳ ابعاد جعبه (گاری)

۳. برای راحتی در تعریف پاندول مختصات آدامز را به قطبی تغییر می دهیم .

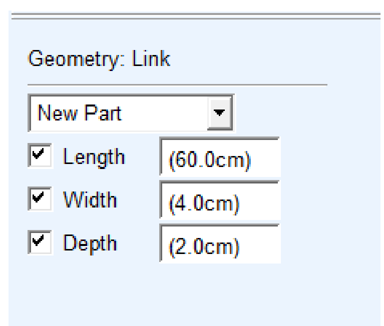


شکل ۴-۴ Coordinate

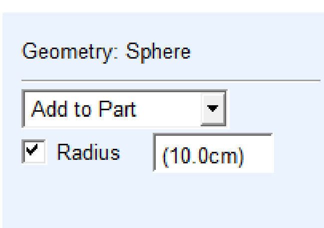


شکل ۴-۵ polar

سپس میله ای در مرکز جرم گاری و به مشخصات زیر تعریف می‌کنیم و گویی به انتهای آن متصل می‌کنیم (به پارت ۳ اضافه می‌کنیم).

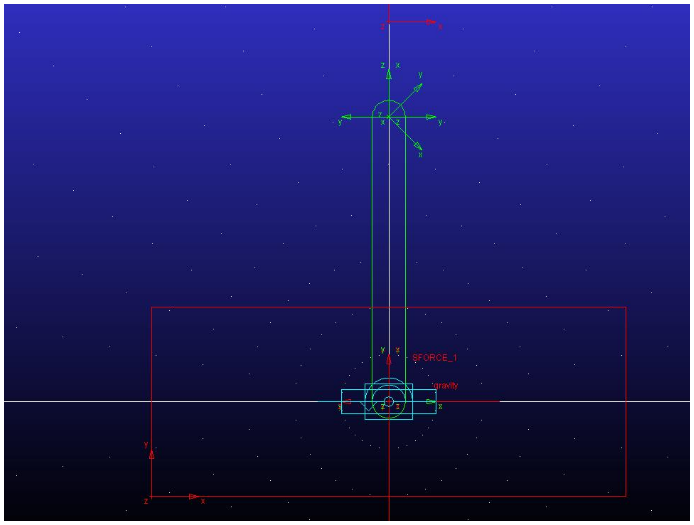


شکل ۴-۶ تعریف میله



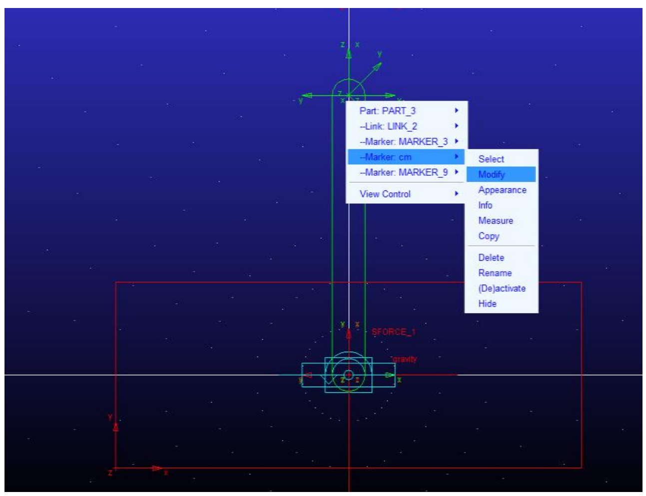
شکل ۴-۷ تعریف گوی

شکل نهایی باید شبیه شکل ۲-۸ باشد .

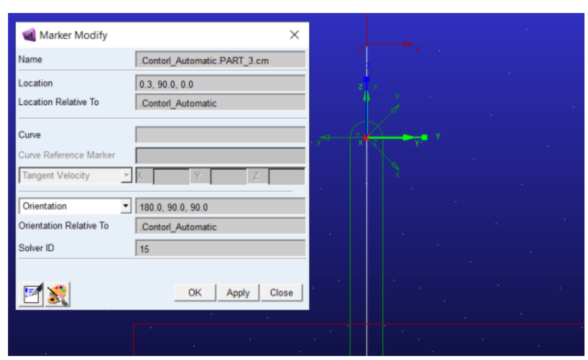


شکل ۴-۸ شکل شماتیک گاری و میله

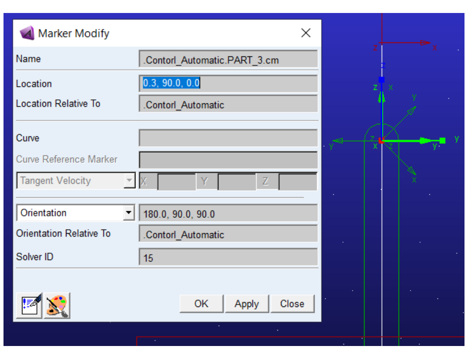
۴. برای راحتی در محاسبات مرکز جرم میله و جرم متمرکز روی آن را به مرکز کره منتقل کرده .



شکل ۴-۹ انتخاب پروپرتیز میله

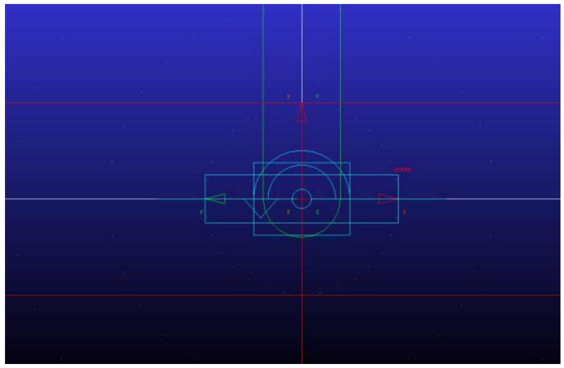


شکل ۴-۱۰ باز کردن قستمت مودیفی



شکل ۴-۱۱ تغییر مختصات مرکز جرم به نقطه ۶۰۰و۹۰

۵. حال باید قید های موجود را در نرم افزار وارد کنیم. قیود شامل یک لولا و یک حرکت ریلی می باشد .



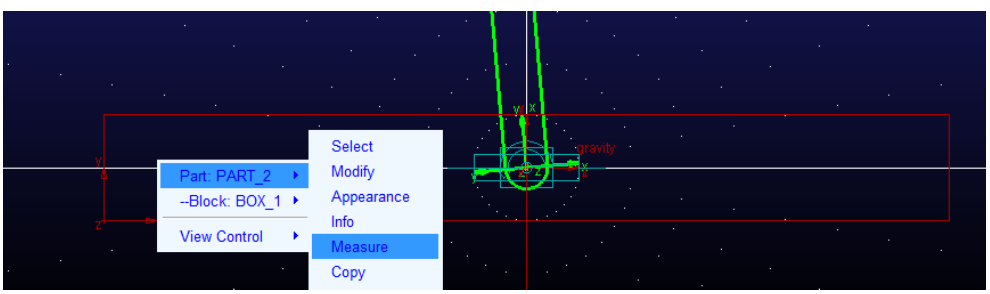
شکل ۱۲-۴ قید لولا برای میله و حرکت مستقیم الخط برای گاری

۶. تا قسمت ۷ فیزیک مسئله در حال تعریف بود اما تا مرحله ۹ اندازه گیرنده ها را تعریف می‌کنیم.

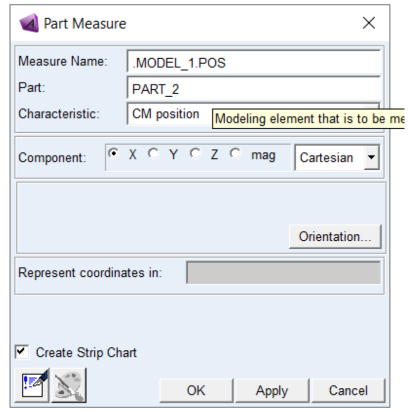
برای ایجاد ارتباط بین نرم افزار آدامز و متلب می‌بایست دستوراتی اعمال شود با توجه به تابع تبدیل نیاز به اندازه‌گیری زاویه ، سرعت زاویه‌ای ، شتاب زاویه‌ای (البته می‌توان تنها زاویه را دریافت کرد و برای سرعت و شتاب از مشتقات زاویه استفاده نمود.) مکان گاری ، سرعت گاری ، شتاب گاری و در نهایت نیروی وارده به گاری به عنوان ورودی در نظر گرفته شود .

در توضیحات بالا موارد مورد نیاز برای اندازه گیری تعریف شدند و در قسمت بعد مقادیر فوق را ابتدا با دستور مژر اندازه گرفته سپس متغیری در خروجی فایل متلب آدامز تعریف نموده و سپس در نرم افزار متلب رفتار سیستم را به ورودی دلخواه بررسی خواهیم نمود.

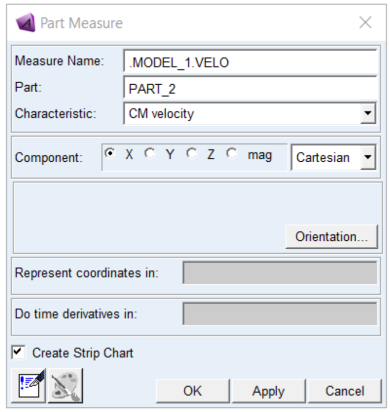
تعریف حسگر های گاری شامل مکان ، سرعت و شتاب می باشد.



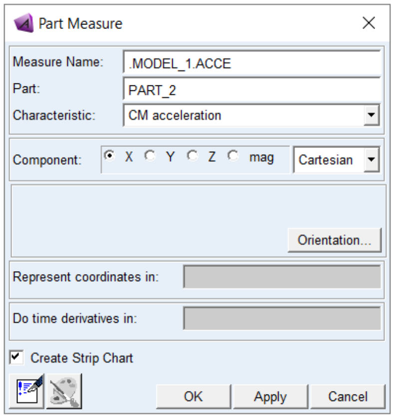
شکل ۱۳-۴



شکل ۴-14 تعریف مؤثر مکان



شکل ۴-15 تعریف مؤثر سرعت

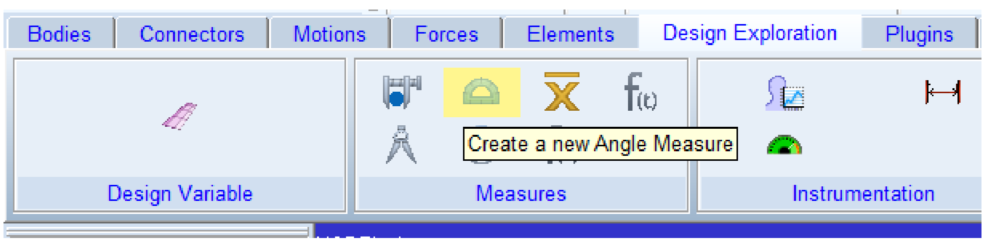


شکل ۴-۱۶ تعریف مؤثر شتاب

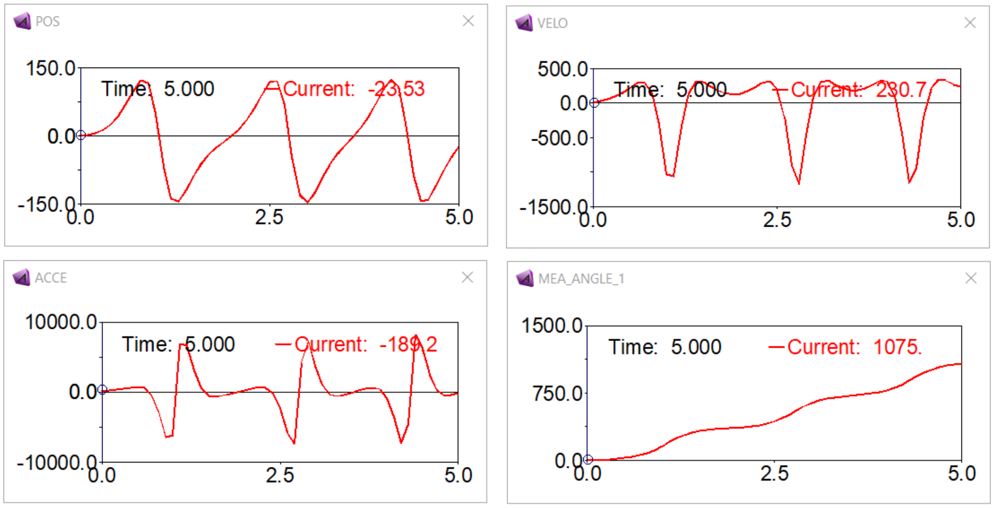
۷. این بخش در واقع ادامه بخش ۷ است برای پاندول

حسگر های موجود در این قسمت زاویه ، سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای است .

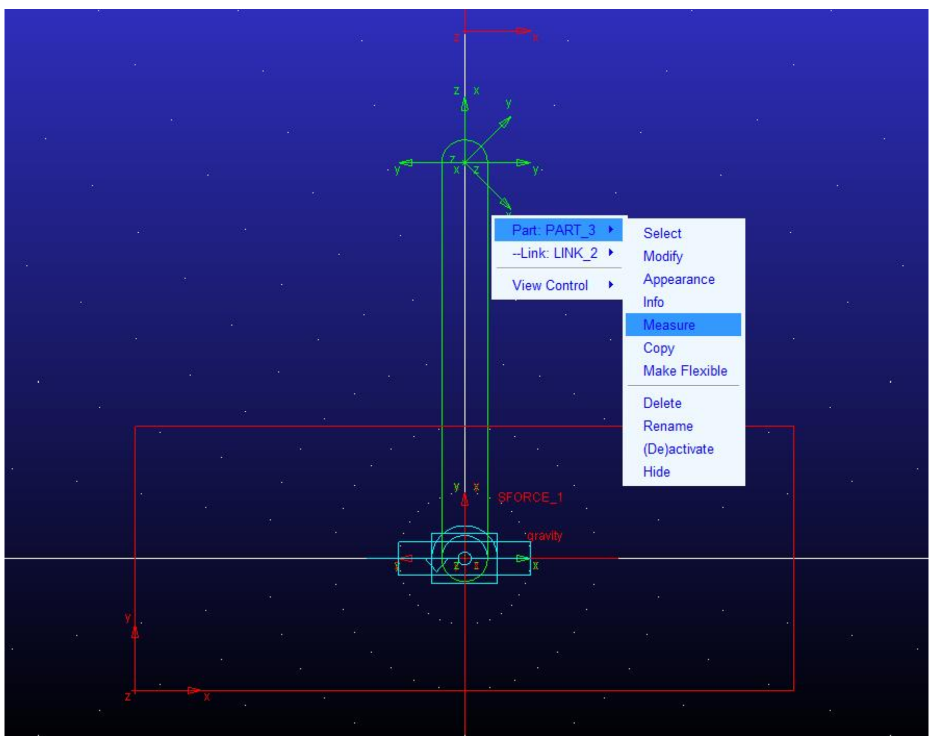
برای ایجاد زاویه یک مارکر همانند شکل ۱-۱۸ کلیک کرده و روی جسم ۲ و در راستای محور y و گذرنده از مبدا جسم ۲ ایجاد می کنیم و سه نقطه مد نظر را به صورت زاویه طی می‌کنیم . (ابتدا مارکر ایجاد شده ، مبدا مختصات و در نهایت مرکز جرم پاندول)



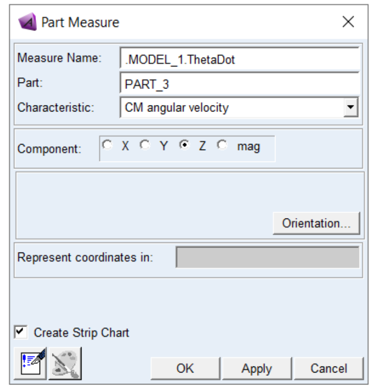
شکل ۴-۱۷



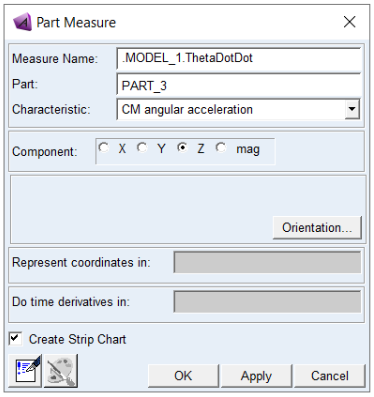
شکل ۴-۱۸ خروجی های آدامز برای مژرهای تعریف شده (صرفا جهت چک کردن مدل سازی درست.)



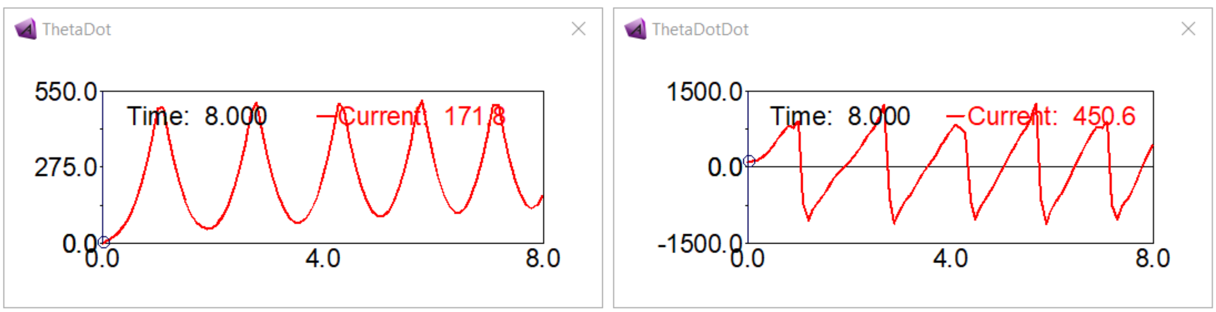
شکل ۴ -19



شکل ۴-۲۰

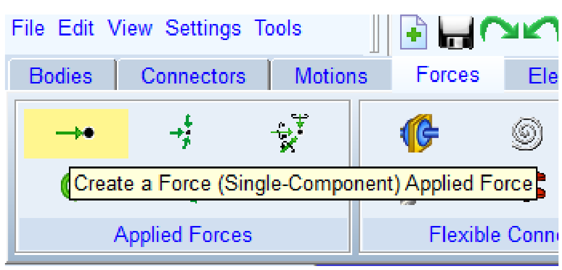


شکل ۴-21

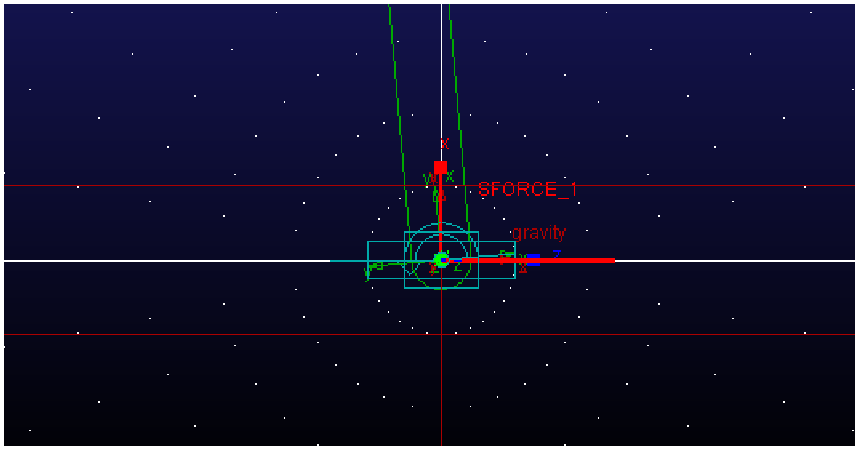


شکل ۴-۲۲

۸. حال وقت تعریف نیروی ورودی یا کنترل کننده گاری است همانند شکل ۲-۲۴ نیرو را انتخاب کرده و جسم ۲ را یک بار انتخاب کرده و سپس روی مبدا آن نیرو را اعمال می‌کنیم .

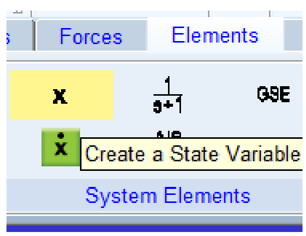


شکل ۴-۲۳ کامپوننت نیرو



شکل ۴-۲۴ موقعیت نیرو بر گاری

۹. حال می‌بایست مقادیر مژرها را به متغیری نسبت دهیم[1] . برای این کار یک متغیر حالت[2] تعریف می‌کنیم



شکل ۴-۲۵ متغیر حالت در تب المنت

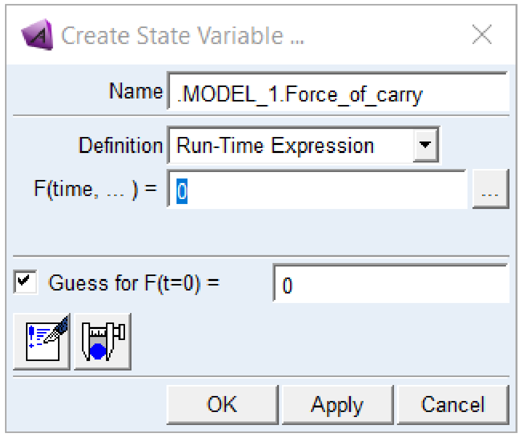
پنجره‌ی موجود در شکل ۲-۲۷ باز می‌شود.

توجه : نام متغیر حالت در آدامز نباید قبلا به متغیر دیگری (مژرها ،قیدها ، توابع خود آدامز و ...) داده شده باشد .

توجه : نام متغیر حالت در متلب نیز به همان نام شناخته خواهد شد .

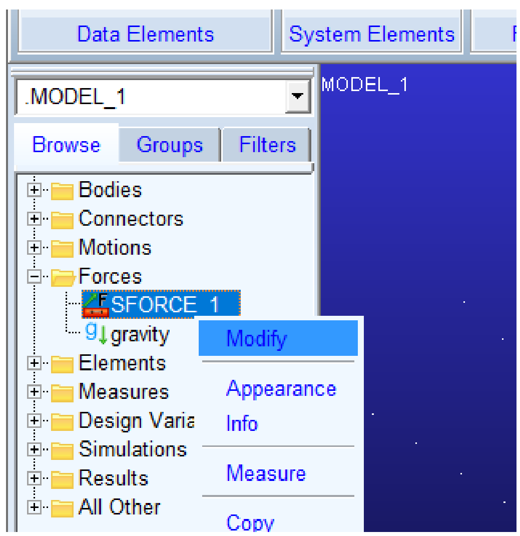
در پنجره‌ی باز شده نام نیروی گاری را وارد می‌کنیم و مقدار اولیه نیرو را صفر پر نظر می‌گیریم .

---
[1] Assign
[2] State variable

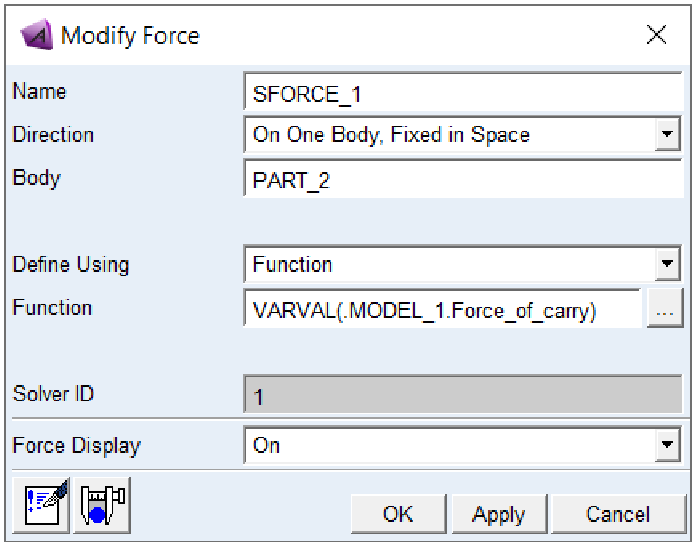


شکل ۴-۲۶ ایجاد متغیر حالت برای نیروی گاری

حال می‌بایست ارتباط بین نیرو و متغیر حالت نیرو را برقرار کنیم . برای این منظور با باز کردن پراپرتیز نیرو همانند شکل ۲-۲۸ و وارد کردن مشخصات شکل ۲-۲۹ ارتباط کامل می‌شود.



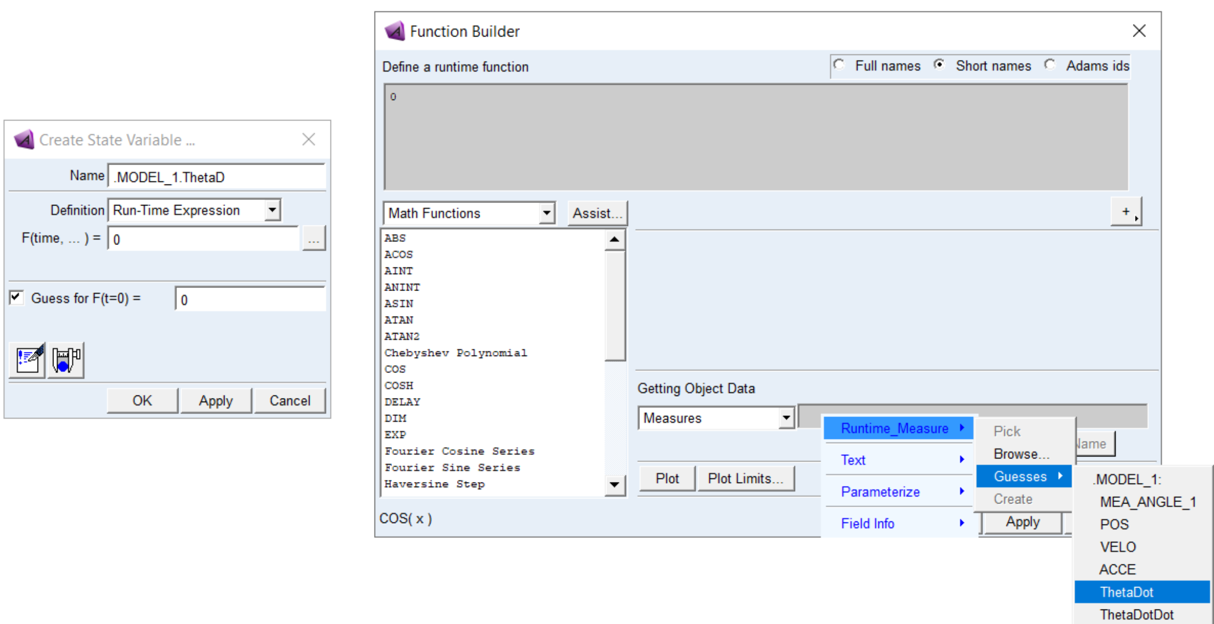
شکل ۴-۲۷



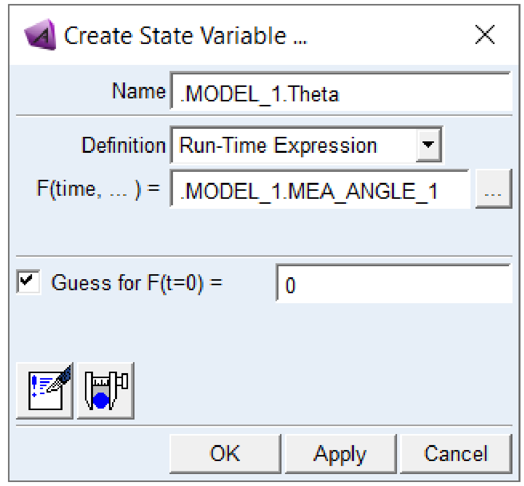
شکل ۲۸-۴

دستور VARVAL مقدار متغیر حالت را خوانده و سپس در نیروی گاری قرار می‌دهد.

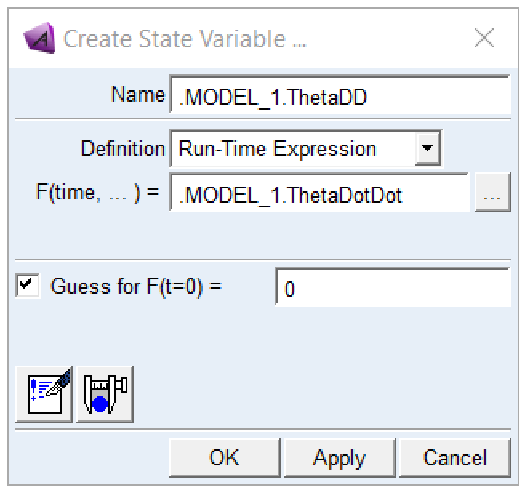
۱۰. حال می‌بایست پل ارتباطی بین زاویه میله و گاری را به متغیر حالت مرتبط کنیم .



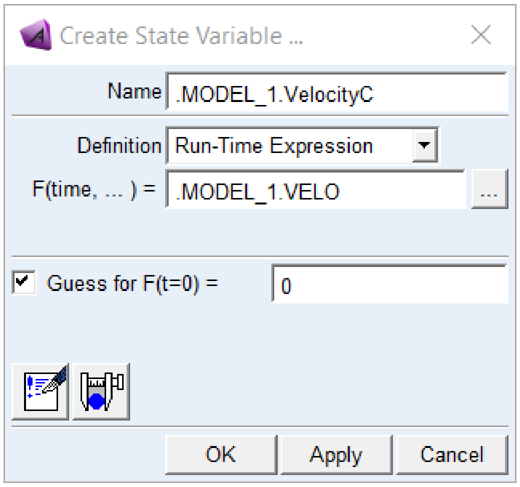
شکل ۲۹-۴ارتباط بین زاویه و متغیر حالتش



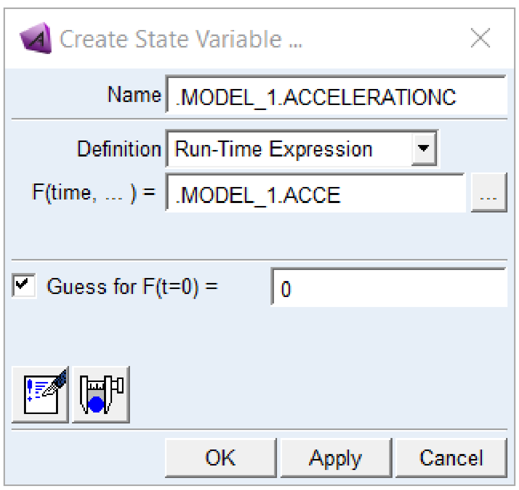
شکل ۴-30



شکل ۴-۳۱



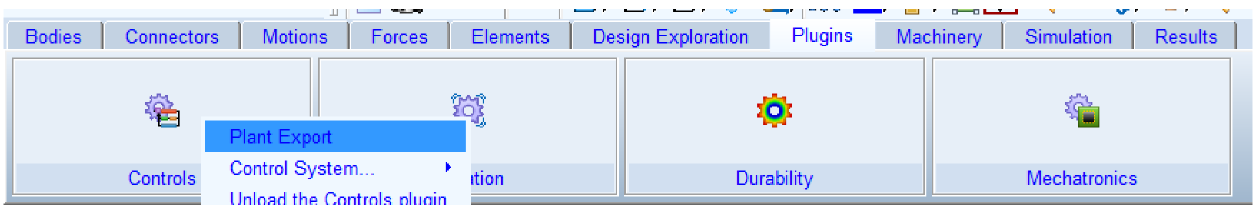
شکل ۴-32



شکل ۴-۳۳

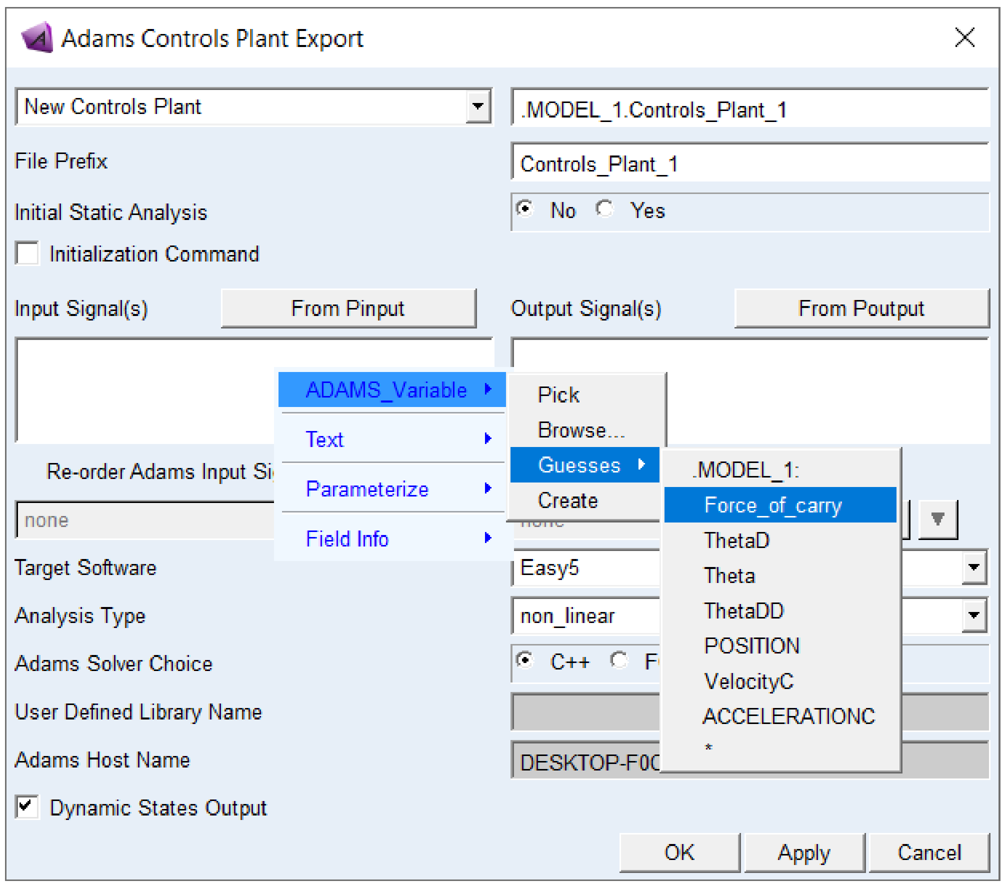
۱۱. حال وقت آن رسیده است سیستم خود را به قالب نرم افزار های شبیه سازی گرافیکی همچون ۵Easy و MATLAB خروجی بگیریم .

همانند شکل ۲-۳۵ به تب پلاگینز رفته و روی پلاگین کنترل کلیک می‌کنیم و پس از اجرای این پلاگین روی پلنت اکسپورت کلیک می‌کنیم .



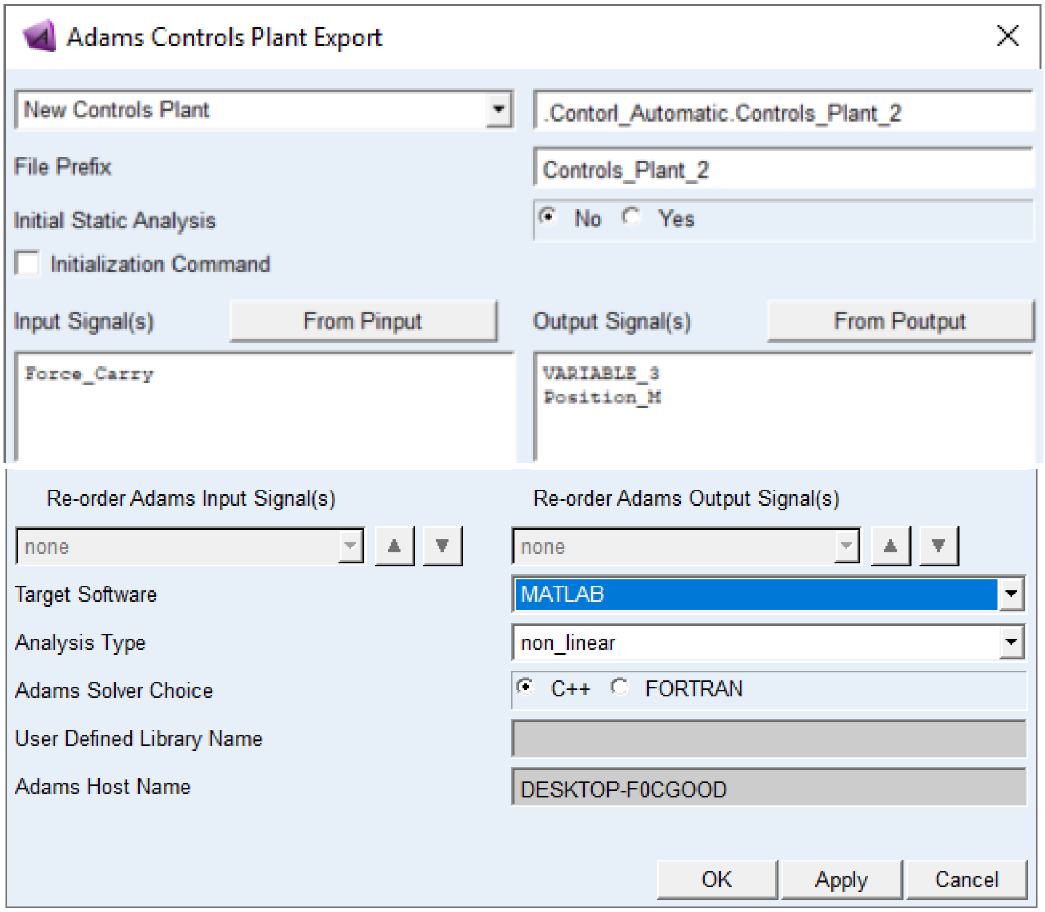
شکل ۴-۳۴

پنجره ADAMS Control Plant Export نمایان می شود.



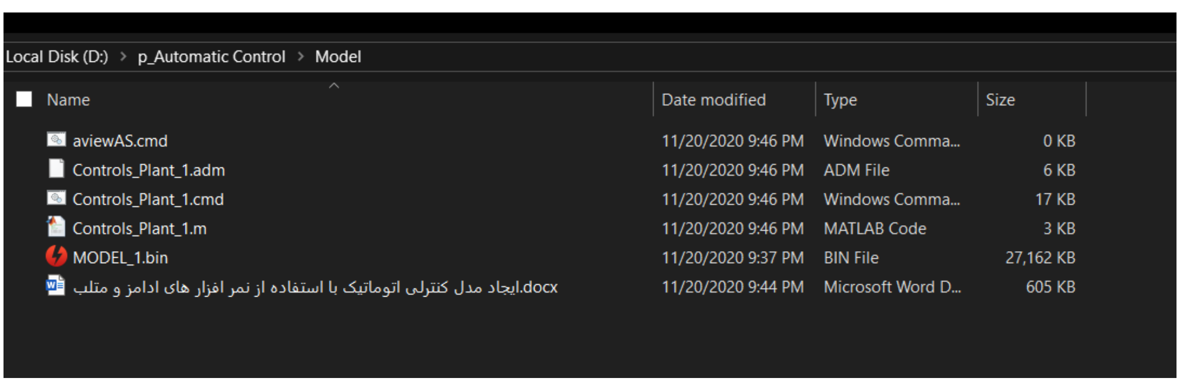
شکل ۴-۳۵ ADAMS Control Plant Export

در این قسمت باید مشخص کنیم که از متغیر های حالت تعریف شده در قسمت های قبل کدام یک به عنوان ورودی و کدام یک به عنوان خروجی می‌باشند . نیروی اعمال شده به گاری را به عنوان ورودی و مابقی متغیر ها را به عنوان خروجی تعریف می‌کنیم .



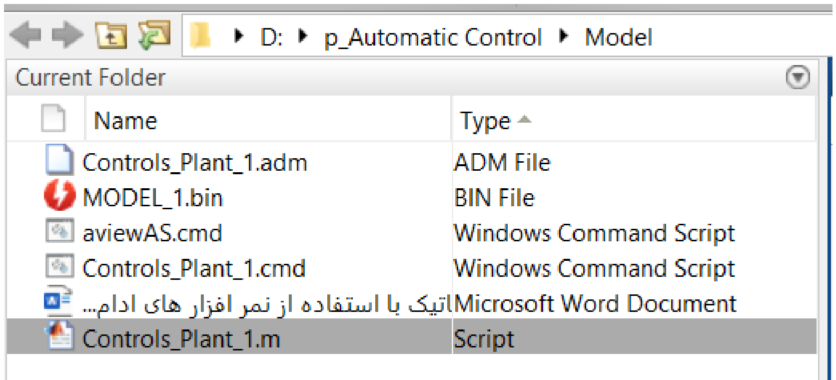
شکل ۴-۳۶تنظیمات *ADAMS Control Plant Export*

۱۲. در این قسمت کار با آدامز تمام شده است و می‌توان آن را بست . حال به محل ادرس پوشه کاری[3] رفته و روی فایل Controls_Plant_1.m کلیک می کنیم.



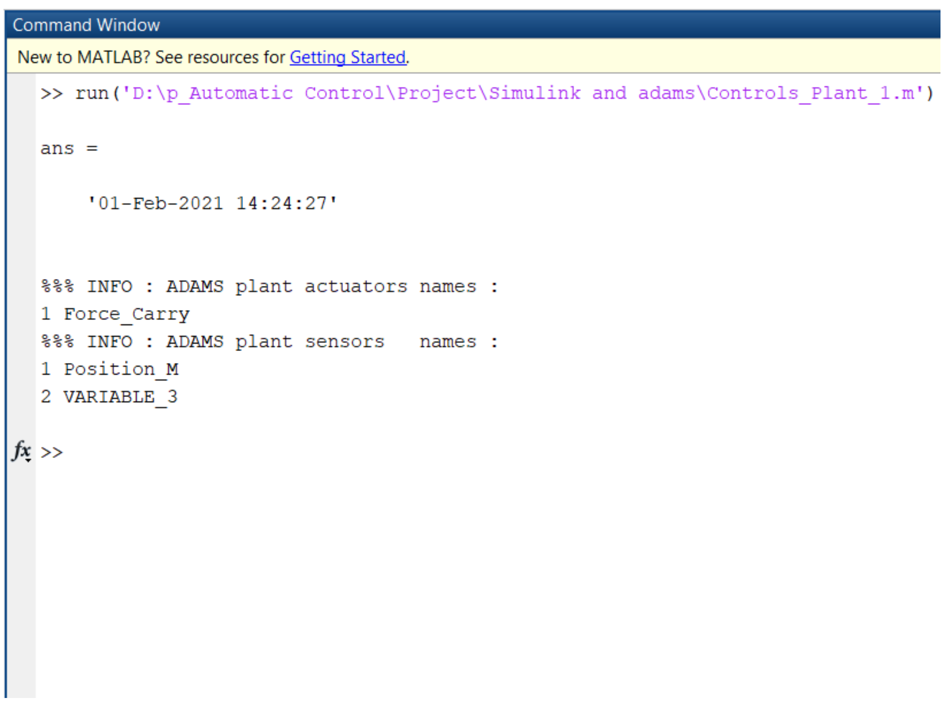
شکل ۴-۳۷ دایرکتوری نرم افزار

[3] Directory work place



شکل ۴-۳۸ نمایی از current folder نرم‌افزار متلب

در پنجره اصلی متلب همانند تصویر ۲-۴۰ ورودی ها و خروجی ها فایل Controls_Plant_۱.m مشاهده می شوند .



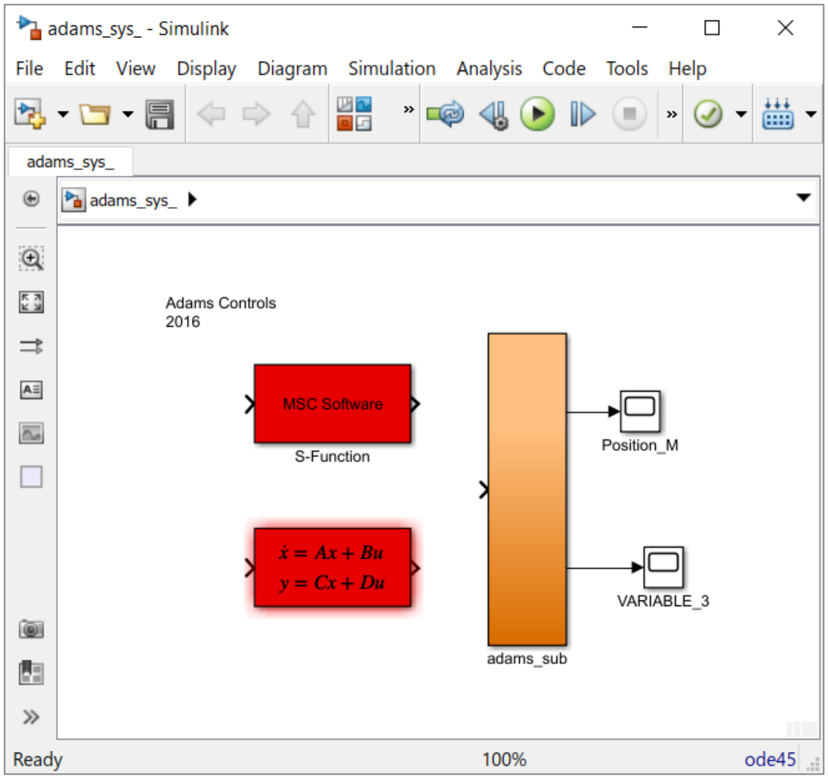
شکل ۴-۳۹ نمایی از صحه اصلی متلب

همانند شکل ۲-۴۰ متن زیر را تایپ می‌کنیم.

>>adams_sys

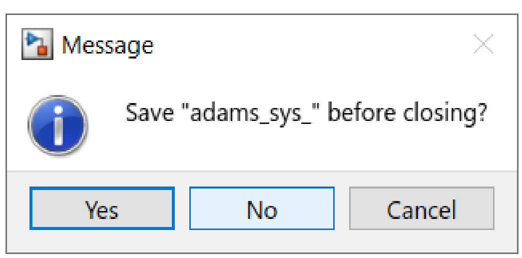
دستور فوق فرمان ایجاد مدل سیمولینک از فایل Controls_Plant_۱.m را صادر می‌کند.

و بلافاصله مدل سیمولینک اجرا می‌شود .



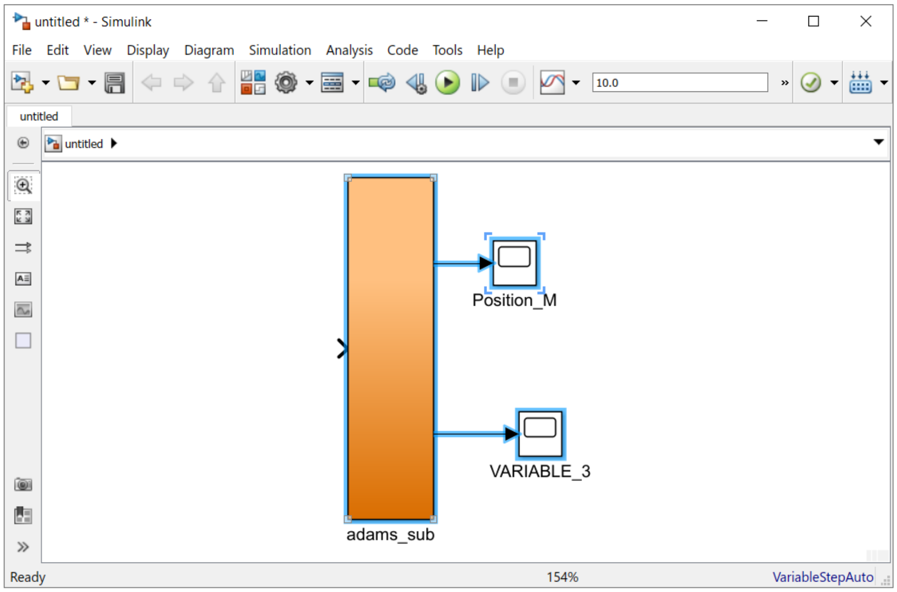
شکل ۴-۴۰ نمایی از فایل adams_sys.mlx

۱۳. توجه : **توجه** : **توجه**: به هیچ وجه هیچ گونه تغییری در فایل adams_sys.mlx ندهید و تمامی کار های خود را در فایل سیمولینک دیگری اعمال کنید در غیر این صورت مجبور به حذف و نصب مجدد آدامز خواهید بود چون هسته محسباتی آن مخدل می‌شود.

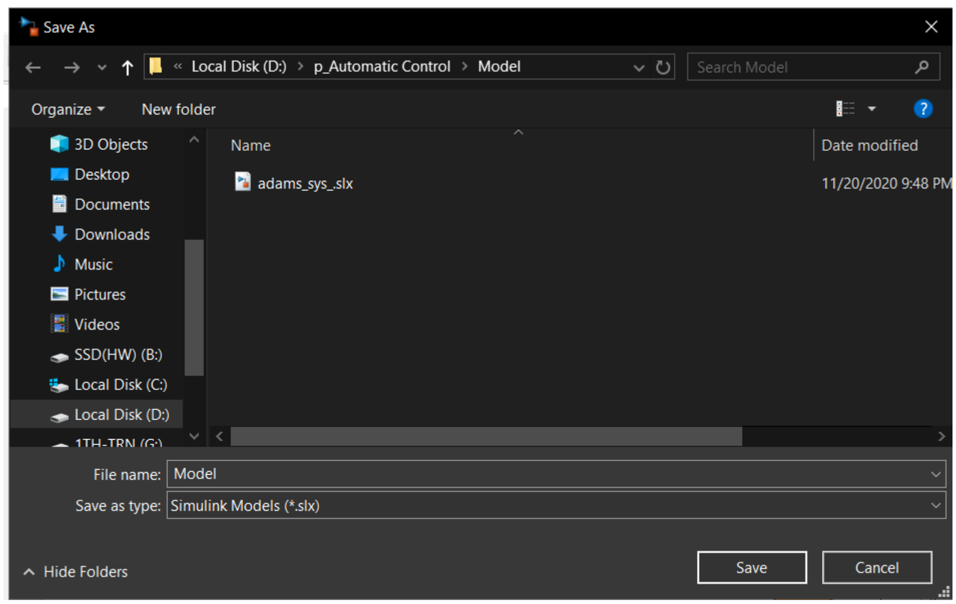


شکل ۴-۴۱ هیچ وقت adams_sys.mlx را تغییر ندهید .

۱۴. فایل سیمولینک جدید ایجاد کرده و قسمت adams_sub و scope های متصل به آن را **کپی کرده و adams_sys.mlx را بدون تغییر ببندید.**



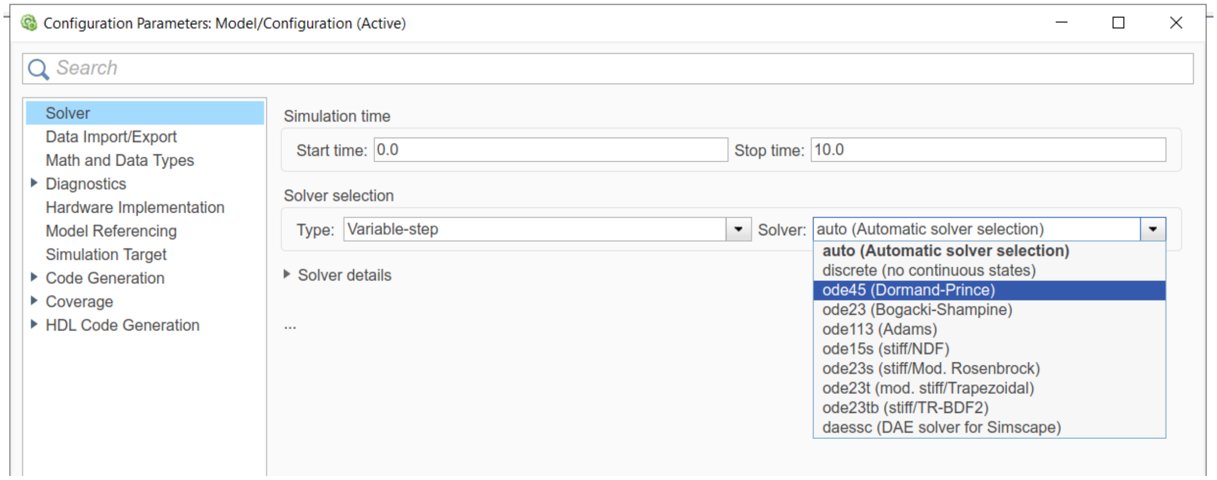
شکل ۴-۴۲ ایجاد مدل جدید



شکل ۴-۴۳ذخیره مدل جدید

۱۵. حال می‌بایست حل گر معادلات دیفرانسیل متلب را تنظیم کنیم.

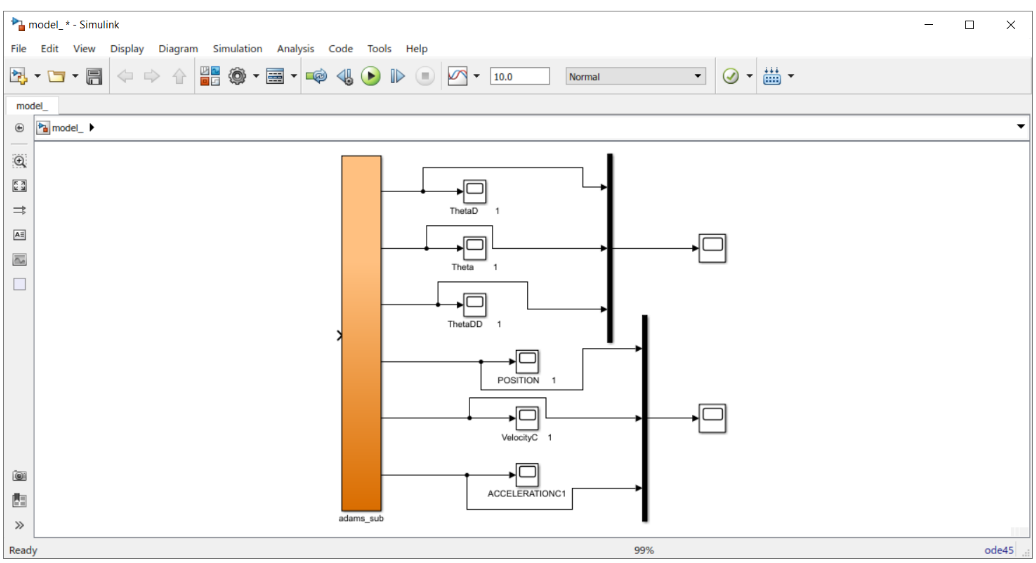
حل گر را همانند شکل ۲-۴۵ بر $ode۴۵$ تنظیم می‌کنیم.



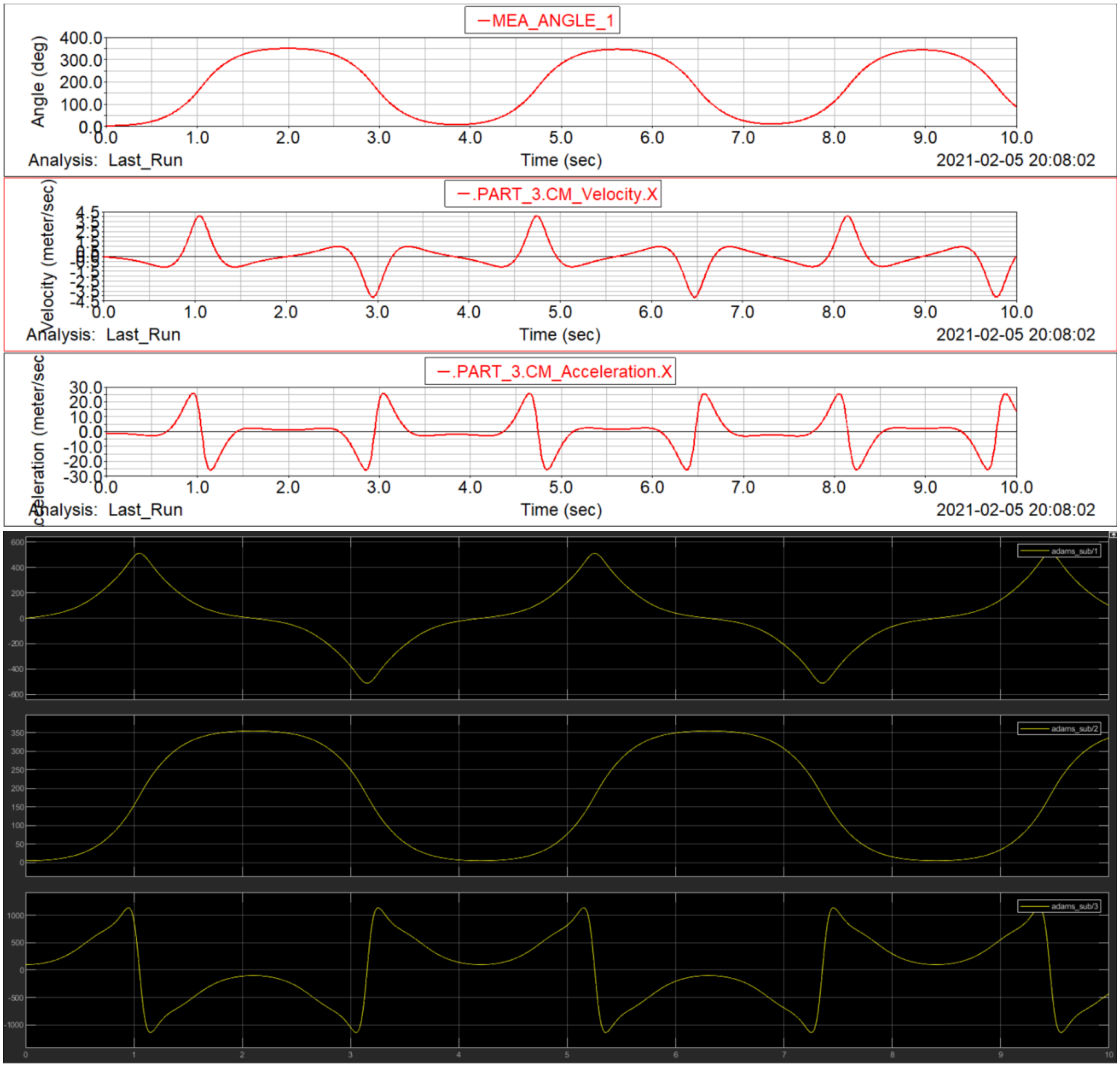
شکل ۴-۴۴ ode۴۵

۱۶. برای بررسی درستی مراحل تا این قسمت سیستم را بدون کنترلر اجرا می‌کنیم. (به فایل های پوشه Validation مراجعه کنید.)

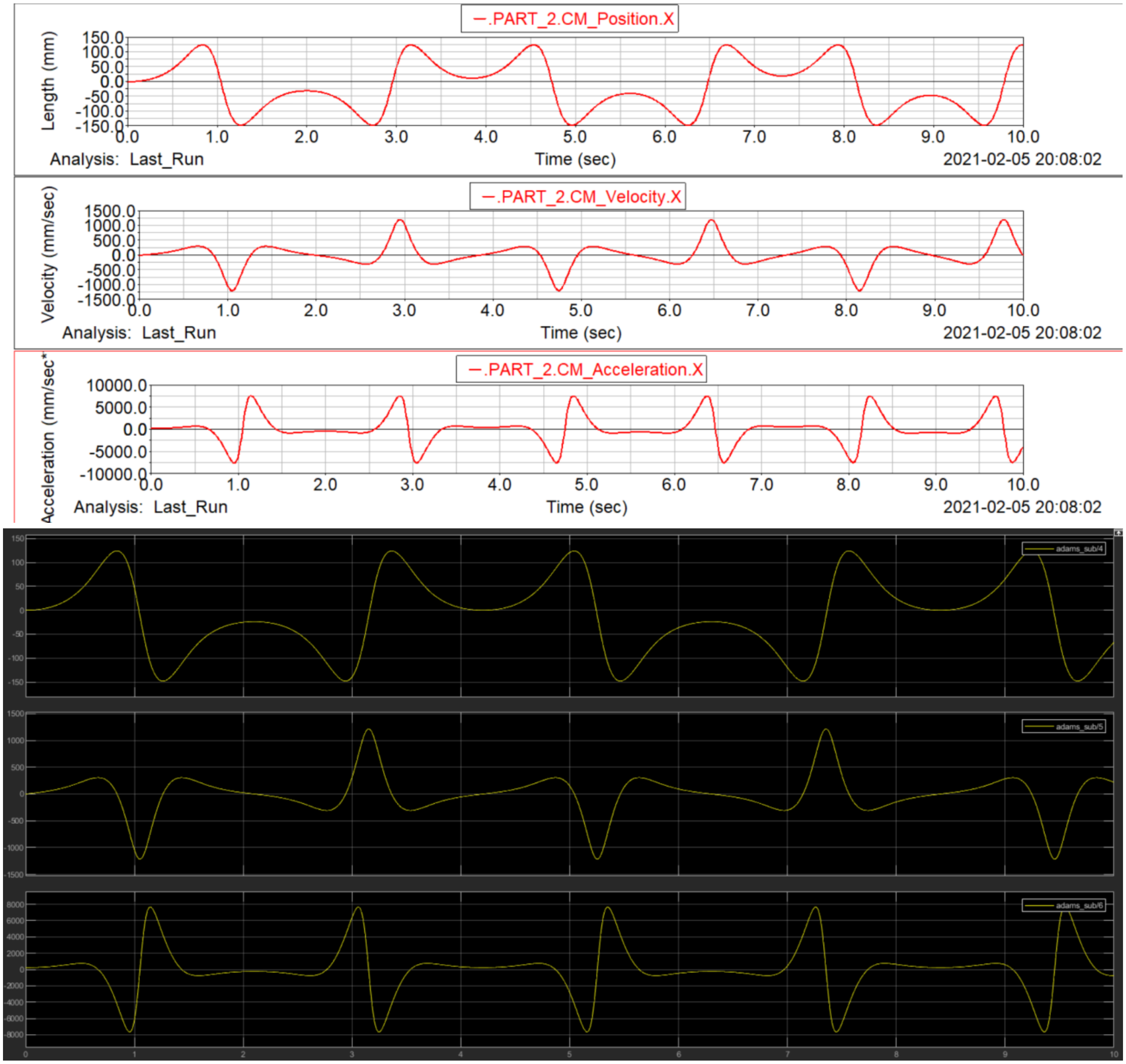
در این فایل ها به عنوان شرط اولیه زاویه پاندول دارای ۵ درجه انحراف می‌باشد و هدف مقایسه خروجی آدامز و متلب است .



شکل ۴-۴۵


MEA_ANGLE_1
Angle (deg)
Time (sec)
Analysis: Last_Run
2021-02-05 20:08:02
.PART_3.CM_Velocity.X
Velocity (meter/sec)
Time (sec)
Analysis: Last_Run
2021-02-05 20:08:02
.PART_3.CM_Acceleration.X
Time (sec)
Analysis: Last_Run
2021-02-05 20:08:02
adams_sub/1
adams_sub/2
adams_sub/3

شکل ۴۶-۴

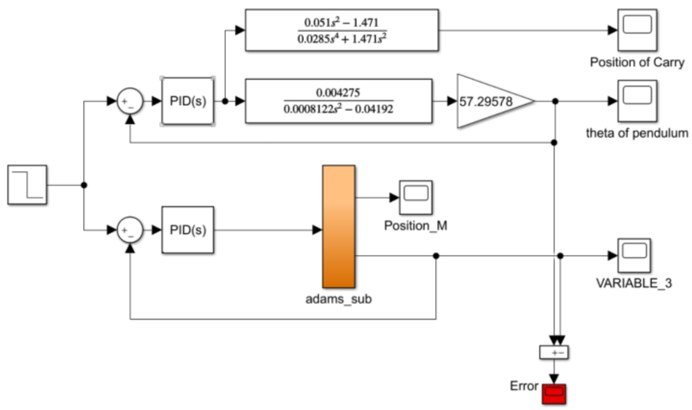


—.PART_2.CM_Position.X
Length (mm)
Analysis: Last_Run
Time (sec)
2021-02-05 20:08:02
—.PART_2.CM_Velocity.X
Velocity (mm/sec)
Analysis: Last_Run
Time (sec)
2021-02-05 20:08:02
—.PART_2.CM_Acceleration.X
Acceleration (mm/sec*
Analysis: Last_Run
Time (sec)
2021-02-05 20:08:02
adams_sub/4
adams_sub/5
adams_sub/6

شکل ۴-۴۷

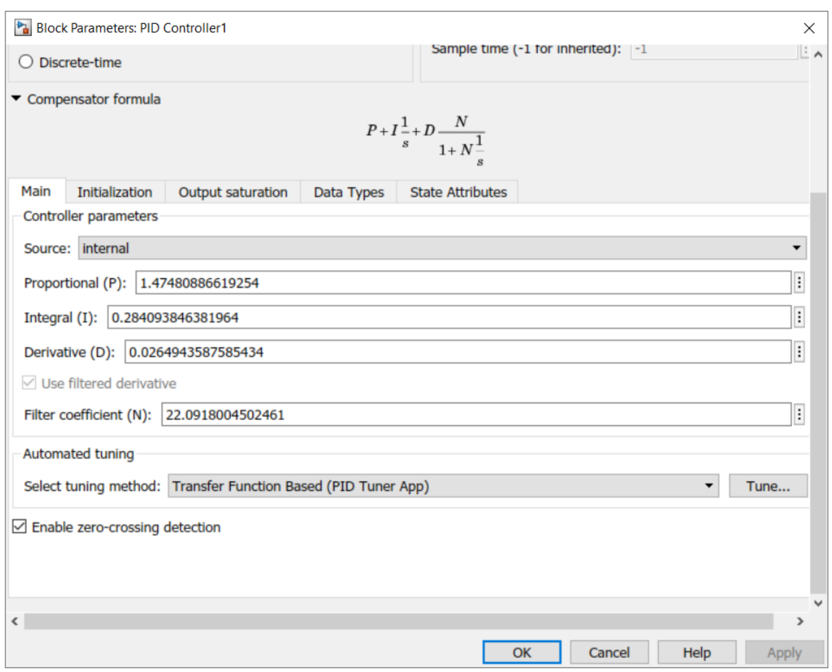
۵ کنترل PID

با استفاده از محاسبات فصل ۱ ، ۲ و۳ تابع تبدیل برای حالت بدون اصتکاک را محاسبه نموده و در سیمولینک آن را تنظیم کرده (برای شرایط اولیه صفر) .



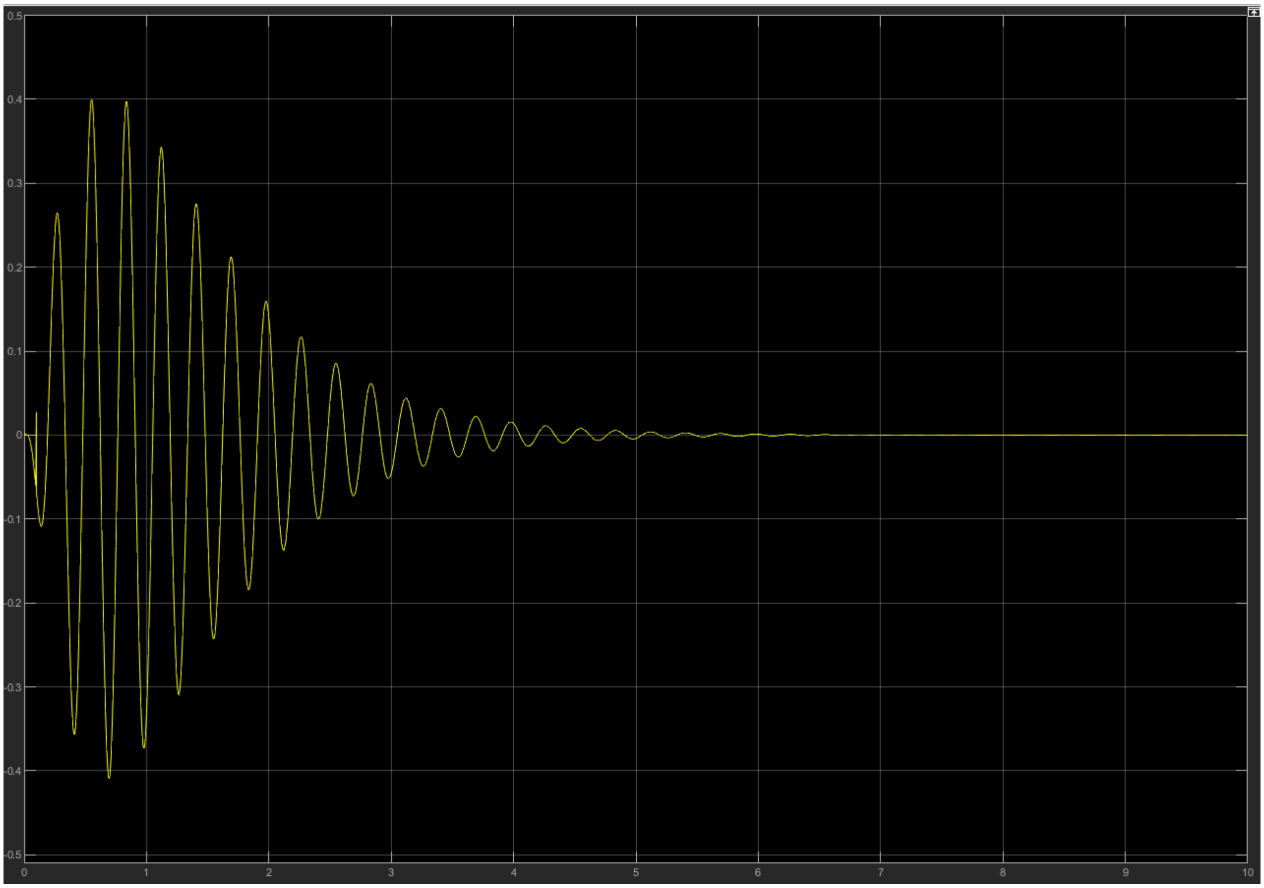
شکل ۱-۵

نمایی از مشخصات کنترل کننده



شکل ۲-۵

پس اجرای سیمولین و مقایسه تابع تبدیل خطی سازی شده و خروجی نرم افزار آدامز دامنه خطا برای ورودی پله حداکثر مقدار ۲ درجه انحراف می‌باشد .



شکل ۳-۵

۶ پیوست

۶/۱ بسط بخش ۲.۱ برای چند پاندول

متعادل کردن آونگ معکوس خود کار مشکلی است و باضافه کردن پاندولی دیگر سخت تر هم می‌شود (مخصوصا موقعی که طول میله آن دو یکسان باشد.)

معادله (۱۰) از بخش دوم را برای پاندول i اُم باز نویسی کرده

$$\overline{F}_i = -m_i\left[l_i\ddot{\theta}_i \cos\theta_i - l_i\dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i + \ddot{x}\right] \quad (۴۲)$$

معادله (۱۲) برای پاندول i اُم به شکل زیر در می‌آید

$$f - m_c\ddot{x} + \sum_i \tilde{F}_i = ۰$$

$$m_c\ddot{x} - \sum_i \tilde{F}_i = f \quad (۴۳)$$

معادله (۱۸) که برای تعادل پاندول نوشته شده بود به صورت

$$m_i l_i(l_i\ddot{\theta}_i + \ddot{x}\cos\theta_i) - m_i g l_i \sin\theta_i + J_i\ddot{\theta}_i = ۰$$

$$m_i l_i\left(l_i\ddot{\theta}_i + \ddot{x}\cos\theta_i\right) - m_i g l_i \sin\theta_i + k m_i l_i^{۲}\ddot{\theta}_i = ۰ \quad (۴۴)$$

بازنویسی معادله (۴۴) و فاکتور گیری برحسب شتاب گاری

$$m_c\ddot{x} - \sum_i \tilde{F}_i = f$$

$$m_c\ddot{x} + \sum_i \left[m_i\left(l_i\ddot{\theta}_i \cos\theta_i - l_i\dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i + \ddot{x}\right)\right] = f$$

$$m_c\ddot{x} + \sum_i \left[m_i l_i\left(\ddot{\theta}_i \cos\theta_i - \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i\right)\right] + \ddot{x}\sum_i m_i = f$$

$$m_c\ddot{x} + \ddot{x}\sum_i m_i = f - \sum_i \left[m_i l_i\left(\ddot{\theta}_i \cos\theta_i - \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i\right)\right]$$

$$\ddot{x} = \frac{f - \sum\left[m_i l_i(\ddot{\theta}_i \cos\theta_i - \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i)\right]}{m_c + \sum m_i} \quad (۴۵)$$

معادله (۴۵) در باطن معادله (۱۹) می باشد که برای چندین پاندول نوشته شده است.

بازنویسی معادله (۴۴) و فاکتور گیری برحسب شتاب زاویه ای پاندول

$$m_i l_i (l_i \ddot{\theta}_i + \ddot{x}\cos\theta_i) - m_i g l_i \sin\theta_i + k m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i = ۰$$

$$m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i + k m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i = m_i g l_i \sin\theta_i - m_i l_i \ddot{x}\cos\theta_i$$

$$(۱ + k) m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i = m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i + k m_i l_i^{۲} \ddot{\theta}_i$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{m_i g l_i \sin\theta_i - m_i l_i \ddot{x}\cos\theta_i}{(۱ + k) m_i l_i^{۲}}$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{g\ sin\ \theta_i - \ddot{x}\ cos\ \theta_i}{(۱+k) l_i} \quad (۴۶)$$

با جایگذاری (۴۶) در (۴۵)

$$\ddot{x} = \frac{f - \sum \left[m_i l_i \left(\left[\frac{g \sin\theta_i - \ddot{x}\cos\theta_i}{(۱+k) l_i} \right] \cos\theta_i - \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i \right) \right]}{m_c + \sum m_i}$$

$$\ddot{x} = \frac{f - \left(\frac{g}{۱+k}\right) \sum (m_i \sin\theta_i \cos\theta_i) + \left(\frac{\ddot{x}}{۱+k}\right) \sum \left(m_i \cos^{۲}\theta_i\right) + \sum \left(m_i l_i \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i\right)}{m_c + \sum m_i}$$

$$\mathbb{M} = m_c + \sum_i m_i$$

$$\mathbb{M}\ddot{x} = f - \left(\frac{g}{۱ + k}\right) \sum_i (m_i \sin\theta_i \cos\theta_i) + \left(\frac{\ddot{x}}{۱ + k}\right) \sum_i \left(m_i \cos^{۲}\theta_i\right) + \sum_i \left(m_i l_i \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i\right)$$

$$\mathbb{M}\ddot{x} - \left(\frac{۱}{۱ + k}\right) \sum_i \left(m_i \cos^{۲}\theta_i\right) \ddot{x} = f - \left(\frac{g}{۱ + k}\right) \sum_i (m_i \sin\theta_i \cos\theta_i) + \sum_i \left(m_i l_i \dot{\theta}_i^{۲} \sin\theta_i\right)$$

$$\left[\mathbb{M} - \left(\frac{۱}{۱ + k}\right) \sum_i \left(m_i \cos^{۲}\theta_i\right) \right] \ddot{x} = \mathbb{M}\ddot{x} - \left(\frac{۱}{۱ + k}\right) \sum_i \left(m_i \cos^{۲}\theta_i\right) \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{f - \left(\frac{g}{۱+k}\right) \sum (m_i\ sin\ \theta_i\ cos\ \theta_i) + \sum \left(m_i l_i \dot{\theta}_i^{۲}\ sin\ \theta_i\right)}{\mathbb{M} - \left(\frac{۱}{۱+k}\right) \sum \left(m_i cos^{۲}\theta_i\right)} \quad (۴۷)$$

و در نهایت با وارد کردن جملات اصطکاک

$$\ddot{x} = \frac{f - \left(\frac{g}{۱+k}\right) \sum (m_i\ sin\ \theta_i\ cos\ \theta_i) + \sum \left(m_i l_i \dot{\theta}_i^{۲}\ sin\ \theta_i\right) + \left(\frac{۱}{۱+k}\right) \sum \left(\frac{M_{f_i} cos\theta_i}{l_i}\right)}{\mathbb{M} - \left(\frac{۱}{۱+k}\right) \sum \left(m_i cos^{۲}\theta_i\right)} \quad (۴۸)$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{g\ sin\ \theta_i - \ddot{x}\ cos\ \theta_i - \frac{M_{f_i}}{m_i l_i}}{(\text{۱}+k) l_i} \quad (\text{۴۹})$$

۶/۲ مدلسازی پاندول معکوس به روش لاگرانژ و استخراج معادله حالت

مطابق شکل یک پاندول معکوس به جرم m و به طول l متر روی یک ارابه به جرم M قرار گرفته است این ارابه در جهت افقی حرکت می‌کند. نیروی کنترل F موجب حرکت M و متعاقبا موجب تعادل پاندول معکوس می‌گردد. در این سیستم فرض می‌کنیم اصطکاک با سرعت رابطه مستقیم دارد.

$$\begin{cases} L = E_C - E_P \\ \frac{d}{d}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{dl}{dq} + \frac{\partial D}{\partial q} = f_y \end{cases}$$

$$\text{ثقل مرکز} = G = \ (n + lsin\theta * \ lcos\theta)$$

$$\begin{cases} v_n = x + l\dot{\theta}cos\theta \\ v_y = -l\dot{\theta}sin\theta \end{cases}$$

$$v^۲ = {v_n}^۲ + {v_y}^۲ = l^۲\dot{\theta}^۲cos^۲\theta + \dot{x}^۲ + ۲\dot{x}l\dot{\theta}cos\theta + l^۲\dot{\theta}^۲sin^۲\theta$$

$$v^۲ = l^۲\dot{\theta}^۲ + \dot{x}^۲ + ۲\dot{x}l\dot{\theta}cos\theta$$

انرژی جنبشی

$$= Ec = \frac{۱}{۲}m\left[\dot{x}^۲ + l^۲\dot{\theta}^۲ + ۲\dot{x}l\dot{\theta}cos\theta\right] + \frac{۱}{۲}M\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}J\dot{\theta}^۲$$

انرژی پتانسیل

$$= E_q = mglcos\theta$$

$$l = E_c - E_q = \ \frac{۱}{۲}m\left[\dot{x}^۲ + l^۲\dot{\theta}^۲ + ۲\dot{x}l\dot{\theta}cos\theta\right] + \frac{۱}{۲}M\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}J\dot{\theta}^۲ - mglcos\theta$$

$$q(t) = \theta(t) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \dot{\theta}} = ml^۲\dot{\theta} + J\dot{\theta} + ml\dot{x}cos\theta \\ \frac{\partial l}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta + mglsin\theta \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^۲\ddot{\theta} + \dot{J}\ddot{\theta} + ml\ddot{x}cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta \end{cases} \qquad (۱)$$

اولین معادله لاگرانژ

$$\rightarrow \left(ml^{۲} + J\right)\ddot{\theta} + ml(\ddot{x}cos\theta - gsin\theta) = ۰$$

$$q(t) = x\,(t) \;\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}cos\theta + M\dot{x} \\ \dfrac{dl}{dx} = ۰ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial l}{\partial \dot{x}}\right) = (m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^{۲}sin\theta \end{cases} \qquad (۲)$$

دومین معادله لاگرانژ

$$\rightarrow f(t) = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\ddot{\theta}^{۲}sin\theta$$
$$= (M + m)\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^{۲}sin\theta\right)$$

فرض

$$\theta < ۶ \;\rightarrow \begin{cases} cos\theta = ۱ \\ sin\theta = ۰ \end{cases} \rightarrow \ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^{۲}sin\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}cos\theta\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = \ddot{\theta}$$

معادلات لاگرانژ

$$\rightarrow \begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = f\,(t) \\ (J + ml^{۲})\,\ddot{\theta} + ml\,(\ddot{x} - g\theta) \end{cases}$$

برای جرم کوچک

$$\rightarrow J = ml^{۲} \begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = f(t) \\ ۲ml^{۲}\ddot{\theta} + ml(\ddot{x} - g\theta) = ۰ \end{cases}$$

$$\overset{\times}{\Rightarrow} \ddot{\theta}(t) = \frac{f(t) - (m + M)\ddot{x}}{ml} \rightarrow ۲l(f(t) - (M + m)x) + ml(\ddot{x} - g\theta) = ۰$$

$$\rightarrow ۲lf(t) - ۲lM\ddot{x} - ۲lm\ddot{x} + ml\ddot{x} - mlg\theta = ۰ \;\rightarrow (۲lM - lm)\ddot{x}$$
$$= ۲lf(t) - mgl\theta$$

$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{٢f\ (t)}{٢M+m} - \frac{mg\theta}{٢M+m}\ (I)\ \overset{\times}{\Rightarrow} \ddot{\theta} = \frac{f(t)}{ml} - \frac{(M+m)}{ml}\ (\frac{٢f(t)}{٢M+m} - \frac{mg\theta}{٢M+m})$$

$$\rightarrow\ \ddot{\theta} = f(t)\left(\frac{١}{ml} - \frac{٢(M+m)}{ml(٢M+m)}\right) + \theta\left(\frac{mg(M+m)}{ml(٢M+m)}\right)$$

$$= \frac{-f\ (t)}{l\ (٢M-m)} + \frac{g\ (M+m)}{l\ (٢M+m)}\theta\ (II)$$

$$x = [\theta \quad \dot{\theta}\ x \quad \dot{x}]\ \begin{cases} \dot{x} = AX + BF \\ Y = CX \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ \frac{g\ (M+m)}{l\ (٢M+m)} & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \\ \frac{-mg}{٢M+m} & ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ \frac{-١}{L\ (٢M+m)} \\ ٠ \\ \frac{٢}{٢M+m} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$