MAT0210 LABORATÓRIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Nome: Ygor Sad Machado **Número USP: 8910368**

Exercício 10.6 **Data: 30/04/2020**

Para as resoluções abaixo, considere os seguintes pontos:

- (-1, 1)
- (0, 1)
- (1, 2)
- (2, 0)

Base Monomial

Interpolar um polinômio usando base monomial é relativamente simples. Começamos escrevendo

$$p(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 \tag{1}$$

Substituindo os valores de x e y em (1):

$$\begin{aligned} p(x_0) &= c_0 - 1c_1 + 1c_2 - 1c_3 = 1 \\ p(x_1) &= c_0 + 0c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 1 \\ p(x_2) &= c_0 + 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 2 \\ p(x_3) &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0 \end{aligned}$$

Ora mas isso pode ser facilmente extraído para uma equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolver essa equação é trivial, e nos dá como resultado:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \frac{7}{6} \\ c_2 &= \frac{1}{2} \\ c_3 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aplicando estes coeficientes à equação (1), temos enfim noss polinômio interpolado:

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x + 1$$

$\square$

Base de Lagrange

Para usar essa base, inicialmente, precisamos calcular os polinômios de Lagrange $L_j(x), j = 0, 1, 2, 3$, lembrando que $L_j(x) = 1$, se $x = j$.

Fixando o primeiro ponto, (-1, 1):

$$\begin{aligned} L_0(x) &= a_0(x-0)(x-1)(x-2) \\ L_0(-1) &= a_0(-1-0)(-1-1)(-1-2) = -6a_0 \\ L_0(-1) &= 1 = -6a_0 \implies a_0 = \frac{-1}{6} \\ &\therefore \\ L_0(x) &= -\frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2) \end{aligned} \tag{2}$$

Fixando o segundo ponto, (0, 1):

$$\begin{aligned} L_1(x) &= a_1(x+1)(x-1)(x-2) \\ L_1(0) &= a_1(0+1)(0-1)(0-2) = 2a_1 \\ L_1(0) &= 1 = 2a_1 \implies a_1 = \frac{1}{2} \\ &\therefore \\ L_1(x) &= \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned} \tag{3}$$

Fixamos agora o terceiro ponto, (1, 2):

$$\begin{aligned} L_2(x) &= a_2(x+1)(x-0)(x-2) \\ L_2(1) &= a_2(1+1)(1-0)(1-2) = -2a_2 \\ L_2(1) &= 1 = -2a_2 \implies a_2 = \frac{-1}{2} \\ &\therefore \\ L_2(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-0)(x-2) \end{aligned} \tag{4}$$

Por fim, fixando (2, 0):

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= a_3(x+1)(x-0)(x-1) \\
L_3(2) &= a_3(2+1)(2-0)(2-1) = 6a_3 \\
L_3(2) &= 1 = 6a_3 \implies a_3 = \frac{1}{6} \\
&\therefore \\
L_3(x) &= \frac{1}{6}(x+1)(x-0)(x-1) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Agora que temos todos os $L_j(x)$, convém lembrar que

$$
p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) \qquad (6)
$$

Substituindo (2), (3), (4) e (5) em (6), obtemos:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_2 L_2(x) \\
&= \left(\frac{-1}{6}\right) x(x-1)(x-2) + \left(\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-1)(x-2) + \\
&+ \left(\frac{-2}{2}\right)(x+1)x(x-2) + \left(\frac{0}{6}\right)(x+1)x(x-1) \\
&= \frac{-1}{6} x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) + (x+1)x(x-2) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

A equação (7) já apresenta o polinômio que queríamos interpolar, porém em uma forma mais compacta. Se o expandirmos, teremos:

$$
p(x) = \frac{-2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x + 1 \qquad (8)
$$

□

Base de Newton

Vamos iniciar recordando que, de maneira genérica, podemos escrever um polinômio $p(x)$ como:

$$
p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) \qquad (9)
$$

Em que $\phi_i(x)$ é uma base polinomial de Newton. Em particular, para $n = 3$, temos:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1 \\
\phi_1(x) &= x - x_0 \\
\phi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
\phi_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}
$$

Para calcular os coeficientes c_i de (9), vamos usar as fórmulas das diferenças divididas de Newton. Usando-as, o coeficiente c_0 é simplesmente o valor da primeira ordenada, isto é

$$c_0 = y_0 = 1 \tag{10}$$

Calcular c_1 também é simples, bastando fazer:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{0 + 1} = 0 \tag{11}$$

Já o cálculo de c_2 é um pouco mais verborrágico. No entanto, por este ser um método recursivo, podemos reaproveitar o valor já calculado de c_1:

$$c_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - c_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{2 - 1}{1 + 1} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2} \tag{12}$$

Novamente, podemos fazer uso da natureza recursiva do método, e reaproveitar c_2 e c_1 no cálculo de c_3:

$$c_3 = \frac{\dfrac{\dfrac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} - c_1}{x_3 - x_1} - c_2}{x_3 - x_2} = \frac{\dfrac{\dfrac{0 - 1}{2 + 1} - 0}{2 - 0} - \dfrac{1}{2}}{2 - 1} = -\frac{2}{3} \tag{13}$$

Agora que temos todos os coeficientes, podemos substituí-los, juntamente com os $\phi_i(x)$ em (9):

$$
\begin{aligned}
p(x) &= c_0\phi_0(x) + c_0\phi_0(x) + c_0\phi_0(x) + c_0\phi_0(x) \\
&= 1 \cdot 1 + 0(x + 1) + \frac{1}{2}(x + 1)(x - 0) - \frac{2}{3}(x + 1)(x - 0)(x - 1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x + 1)x - \frac{2}{3}(x + 1)(x - 1)x \qquad (14)
\end{aligned}
$$

A equação (14) já representa o polinômio que buscávamos interpolar. No entanto, ainda podemos expandi-lo, tal como fizemos com os demais.

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x + 1$$

$\square$

Como consideração final, é relevante ressaltar que, mesmo tendo aplicado três metodologias diferentes de interpolação, o polinômio resultante sempre foi o mesmo. Ainda que os métodos de Newton e de Lagrange inicialmente gerem um polinômio num formato mais compacto, é fácil expandi-los até que estejam em sua forma canônica. Isso demonstra que a representação para este polinômio, no fim das contas, é única para os três métodos aqui apresentados.