MAC0210 LABORATÓRIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Nome: Ygor Sad Machado **Número USP: 8910368**
Exercício 15.4 **Data: 30/06/2020**

---

a. Queremos estimar o erro na regra trapezoidal corrigida e mostrar que ele pode ser estimado por

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5 \tag{1}$$

Seja $p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j f(x_j)$ uma aproximação polinomial para f. Pela definição, podemos escrever tal erro como:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_k(x)dx \\ &= \int_a^b f(x) - p_k(x)dx \end{aligned}$$

No entanto, sabemos que o erro na interpolação polinomial é dado por:

$$f(x) - p_k(x) = f[x_0, \ldots, f_k, x] \prod_{i=0}^{k}(x - x_i) \tag{2}$$

Logo, podemos escrever:

$$E(f) = \int_a^b f[x_0, \ldots, f_k, x] \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)dx \tag{3}$$

Usando o teorema do valor médio para diferenças divididas, descobrimos que:

$$f[x_0, \ldots, f_k, x] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}, \qquad \text{para } \xi \in [a,b] \tag{4}$$

Utilizando (4) em (3) teremos, em particular, para o nosso contexto:

$$
\begin{aligned}
E(f) &= \int_a^b f[a,a,b,b,x](x-a)^2(x-b)^2dx \\
&= f[a,a,b,b,\xi]\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx
\end{aligned}
$$

Finalmente, expandindo a integral e simplificando o resultado chegamos à forma final de $E(f)$:

$$
\begin{aligned}
E(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\Big(-\frac{1}{30}(a-b)^5\Big) \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5
\end{aligned}
$$

$\square$

---

b. Foi incluído, junto a este PDF, o script octave `E15.4m`, que contém a simulação geradora dos dados abaixo mencionados.

Em $\int_0^1 e^x dx$, percebe-se que o método trapezoidal corrigido se aproxima mais do que o *mid-rule* e o trapezoidal básico, mas ainda assim é menos preciso que o método de Simpson.

Método	Estimativa de $I(f)$
Valor exato	1.7183...
Trapezoidal corrigido	1.7159...
Trapezoidal básico	1.8591...
Simpson	1.7189...
Mid-rule	1.6487...

Novamente, em $\int_0 .9^1 e^x dx$, percebe-se que o método trapezoidal corrigido se aproxima do valor real mais do que o *mid-rule* e o trapezoidal básico, ficando, no entanto, aquém do método de Simpson. É importante mencionar que, conforme esperado, o intervalo mais curto tem como consequência precisão mais alta na estimativa.

Método	$\lvert E(f)\rvert$
Trapezoidal corrigido	2.2×10^{-4}
Trapezoidal básico	3.59×10^{-8}
Simpson	9.0×10^{-9}
Mid-rule	1.1×10^{-4}

$\square$